

V . – Topologie (distance, ouverts, fermés) sur les graphes

V.1 . – Ouverts et fermés

Dans tout ce paragraphe (V.1.) $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ est un *graphe fini simple non-orienté* (cf. la définition I.4.4.)

Notation V.1.0 Les notations qui suivent n'ont pas la signification des *symboles* correspondants (cf. la définition I.1.13.6.) On notera donc :

$$i) \quad \mathcal{P}(G) := \mathcal{P}(\mathcal{V}(G)) \times \mathcal{P}(\mathcal{E}(G)) ;$$

$$\forall (P := (P_{\mathcal{V}}, P_{\mathcal{E}}), Q := (Q_{\mathcal{V}}, Q_{\mathcal{E}})) \in \mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(G), :$$

ii) **(Intersection)**

$$P \cap Q := (p_{\mathcal{V}} \cap q_{\mathcal{V}}, p_{\mathcal{E}} \cap q_{\mathcal{E}}) ;$$

iii) **(Réunion)**

$$P \cup Q := (p_{\mathcal{V}} \cup q_{\mathcal{V}}, p_{\mathcal{E}} \cup q_{\mathcal{E}}) ;$$

iv) **(Complémentaire)**

$$G \setminus P := (\mathcal{V}(G) \setminus P_{\mathcal{V}}, \mathcal{E}(G) \setminus P_{\mathcal{E}}) ;$$

v) **(Inclusion)**

$$P \subset Q \Leftrightarrow P_{\mathcal{V}} \subset Q_{\mathcal{V}} \text{ et } P_{\mathcal{E}} \subset Q_{\mathcal{E}} .$$

Bien entendu, dans ce qui précède, P et Q peuvent être des *sous-graphe non-orienté* (cf. la définition II.2.2.) et dans ce cas on les considérera comme des *éléments* de $\mathcal{P}(G)$ en oubliant l'*application extrémités*.

Définition V.1.1 (Ouvert) Un couple $O = (O_{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}(G), O_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}(G))$ est un *ouvert* de G si

$$\forall (u, v) \in O_{\mathcal{V}} \times \mathcal{V}(G), \{u, v\} \in \mathcal{E}(G) \Rightarrow \{u, v\} \in O_{\mathcal{E}} .$$

Autrement dit O est un *ouvert* lorsque toute *arête* de G *incidente* à un *élément* de $O_{\mathcal{V}}$ est dans $O_{\mathcal{E}}$.

Notation V.1.2 (Topologie) On note $\mathcal{T}(G)$ l'*ensemble des ouverts* de G .

Lemme V.1.3 (Propriétés des ouverts) i) $(\emptyset, \emptyset)$ et $(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G))$ sont des *ouverts*.

$$ii) \quad \forall (O_1, O_2) \in \mathcal{T}(G) \times \mathcal{T}(G), O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}(G) \quad O_1 \cup O_2 \in \mathcal{T}(G) .$$

iii) L'*ensemble* $\mathcal{T}(G)$ est un *ensemble fini*.

Démonstration : Puisque G est un *graphe fini simple non-orienté*, $\mathcal{V}(G)$ et $\mathcal{E}(G)$ sont des *ensembles finis*. Il en est encore de même de $\mathcal{P}(\mathcal{V}(G))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{E}(G))$; et

$$\mathcal{T}(G) \subset \mathcal{P}(\mathcal{V}(G)) \times \mathcal{P}(\mathcal{E}(G)) .$$

iv) L'ensemble $\mathcal{T}(G)$ est stable par intersections finies et stable par réunions finies en vertu du point ii .

De plus $\mathcal{T}(G)$ étant fini ; il est en fait stable par réunion quelconque. Comme, de plus il contient $(\emptyset, \emptyset)$ et G (cf. le point i ,) on dira que $\mathcal{T}(G)$ est une topologie .

v) Pour tout sous-graphe non-orienté H de G et tout ouvert $O \in \mathcal{T}(G)$, $H \cap O$ est un ouvert de H i.e. $H \cap O \in \mathcal{T}(H)$.

Exemple V.1.4 (Ouverts) Supposons que $\mathcal{V}(G) \neq \emptyset$ et $\mathcal{E}(G) \neq \emptyset$. Alors

$$\exists v \in \mathcal{V}(G), N_G(v) \neq \emptyset .$$

Posons alors $O_{\mathcal{V}} := \{v\}$ et $O_{\mathcal{E}} := \{\{v, w\}, w \in N_G(v)\}$.

Il est presque immédiat, ou à tout le moins c'est un exercice, de vérifier que $O := (O_{\mathcal{V}}, O_{\mathcal{E}})$ est un ouvert de G . En revanche la restriction $\varepsilon(G)|_{O_{\mathcal{E}}}$ de l'application extrémités de G n'est pas à valeur dans $O_{\mathcal{V}}$; si bien qu'on ne peut pas définir de structure de sous-graphe non-orienté (cf. la définition II.2.2,) sur O .

Définition V.1.5 (Fermé) Un couple $F = (F_{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}(G), F_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}(G))$ est un fermé de G si $G \setminus F = (\mathcal{V}(G) \setminus F_{\mathcal{V}}, \mathcal{E}(G) \setminus F_{\mathcal{E}})$ est un ouvert de G .

Lemme V.1.6 (Caractérisation des fermés) Soit $F := (F_{\mathcal{V}}, F_{\mathcal{E}}) \in \mathcal{P}(G)$. les assertions suivantes sont équivalentes :

a) **(Fermé)**

F est un fermé de G au sens de la définition V.1.5 i.e. $G \setminus F$ est un ouvert au sens de la définition V.1.1.

b) $\forall \{v, w\} \in \mathcal{E}(G), \{v, w\} \in F_{\mathcal{E}} \Rightarrow (v \in F_{\mathcal{V}} \text{ et } w \in F_{\mathcal{V}})$.

c) **(Sous-graphe)**

La restriction $\varepsilon(G)|_{F_{\mathcal{E}}}$ de l'application extrémités à $F_{\mathcal{E}}$ est à valeurs dans $F_{\mathcal{V}}$ et $(F_{\mathcal{V}}, F_{\mathcal{E}}, \varepsilon(G)|_{F_{\mathcal{E}}})$ est un sous-graphe non-orienté (cf. la définition II.2.2,) de G .

Démonstration : Notons $O_{\mathcal{V}} := \mathcal{V}(G) \setminus F_{\mathcal{V}}$ et $O_{\mathcal{E}} := \mathcal{E}(G) \setminus F_{\mathcal{E}}$.

$a \Rightarrow b$ On suppose donc que $(O_{\mathcal{V}}, O_{\mathcal{E}})$ est un ouvert . Il s'ensuit que pour tout $u \in O_{\mathcal{V}}$ $\{u, v\} \in \mathcal{E}(G)$ entraîne $\{u, v\} \in O_{\mathcal{E}}$. Par contraposée, $\{u, v\} \in F_{\mathcal{E}}$ entraîne donc $u \in F_{\mathcal{V}}$.

$b \Rightarrow c$ Est immédiat.

$c \Rightarrow a$ Pour tout sommet $v \in \mathcal{V}(G)$, et toute arête $\{v, w\} \in \mathcal{E}(G)$,

$$\{v, w\} \in F_{\mathcal{E}} \Rightarrow \varepsilon(G)(\{v, w\}) \in \mathcal{P}_{1,2}(F_{\mathcal{V}}) \Rightarrow (v \in F_{\mathcal{V}} \text{ et } w \in F_{\mathcal{V}}) .$$

Ainsi par contraposée :

$$\begin{aligned} & \forall v \in \mathcal{V}(G), & v & \in O_{\mathcal{V}} \\ \Rightarrow & & v & \notin F_{\mathcal{V}} \\ \Rightarrow & \forall \{v, w\} \in \mathcal{E}(G), & \{v, w\} & \notin F_{\mathcal{E}} \\ \Rightarrow & & \{v, w\} & \in O_{\mathcal{E}} ; \end{aligned}$$

ce qui prouve que O est un ouvert .

Lemme V.1.7 (Propriétés des fermés) i) $(\emptyset, \emptyset)$ et $(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G))$ sont des fermés .

ii) $\forall (F_1, F_2) \in \mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(G)$, fermés $F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cup F_2$ sont des fermés .

iii) Pour tout sous-graphe non-orienté H de G et tout fermé $F \in \mathcal{P}(G)$, $H \cap F$ est un fermé de H .

Proposition V.1.8 (Ouvert/fermé) Soit $O := (O_V \subset \mathcal{V}(G), O_E \subset \mathcal{E}(G))$. si O est à la fois un ouvert et un fermé $\forall v \in O_V, N_G(v) \subset O_V$; (autrement dit si O_V contient un sommet il contient tous ses voisins .)

Démonstration : Pour tout $(v, w) \in O_V \times \mathcal{V}(G)$, si $w \in N_G(v)$, $\{v, w\} \in \mathcal{E}(G)$. Il s'ensuit, puisque O est ouvert que $\{v, w\} \in O_E$. Il s'ensuit encore, puisque O est fermé que $w \in O_V$.

V.2 . –Connexité

Dans tout ce paragraphe (V.2,) $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ est un *graphe fini simple non-orienté* (cf. la définition I.4.4.) Les notations V.1.0 sont utilisées dans ce paragraphe.

Définition V.2.1 (Composante connexe) Soit $C := (C_V, C_E) \in \mathcal{P}(G)$. On dit que C est une *composante connexe* si C vérifie :

CX₁) C est un *ouvert* de G (cf. la définition V.1.1 ;)

CX₂) C est un *fermé* de G (cf. la définition V.1.5 ;)

CX₃) $C \neq (\emptyset, \emptyset)$;

CX₄) C est *minimal* pour CX₁ à CX₃ à savoir que pour tout $D := (D_V, D_E) \in \mathcal{P}(G)$ satisfaisant CX₁ à CX₃ ,

$$D \subset C \Rightarrow D = C ;$$

où $D \subset C$ s'entend au sens de V.1.0.v.

Proposition V.2.2 (Disjonction) Deux composantes connexes sont disjointes ou égales.

Démonstration : Soient C et D deux composantes connexes . Si $C \cap D \neq \emptyset$ (cf. V.1.0.ii,) C, D et $C \cap D$ vérifient CX₁ à CX₄ de la définition V.2.1. Comme $C \cap D \subset C, C \cap D = C$; et de même, comme $C \cap D \subset D, C \cap D = D$.

Proposition V.2.3 (Partition) Si $G \neq (\emptyset, \emptyset, \text{Id}_\emptyset)$, pour tout sommet $v \in \mathcal{V}(G)$, il existe une unique composante connexe C telle que $v \in C_\mathcal{V}$.

Démonstration :

Unicité : Est une conséquence de la proposition V.2.2.

Existence Soient $v \in \mathcal{V}(G)$ et $\mathcal{C}_v$ l'ensemble des $C \in \mathcal{P}(G)$ satisfaisant CX_1 à CX_3 de la définition V.2.1 ; et tel que

$$\forall D \in \mathcal{C}, v \in D_\mathcal{V}.$$

Alors $\mathcal{C}_v \neq \emptyset$ puisque $G \in \mathcal{C}_v$. Soit

$$C_v \in \mathcal{C}_v \text{ tel que } \#(C_{v\mathcal{V}}) = \min_{D \in \mathcal{C}} (\#(D_\mathcal{V}));$$

qui existe puisque, pour tout $D \in \mathcal{C}_v$, $D_\mathcal{V} \subset \mathcal{V}(G)$ est un ensemble fini.

Soit D satisfaisant CX_1 à CX_2 de la définition V.2.1 et $D \subset C_v$:

Lemme V.2.3.1 Si $v \in D_\mathcal{V}$ $D = C_v$.

Démonstration : Dans ce cas, $D \in \mathcal{C}_v$ et $D \subset C_v$ entraîne (cf. V.1.0.v.)

$$D_\mathcal{V} = C_{v\mathcal{V}} \text{ par définition de } C_v \text{ et } D_\mathcal{E} \subset C_{v\mathcal{E}}.$$

Pour tout $\{v, w\} \in C_{v\mathcal{E}}$; puisque C_v est un fermé ,

$$v \in C_{v\mathcal{V}} \text{ et } w \in C_{v\mathcal{V}};$$

ce qui entraîne $v \in D_\mathcal{V}$ et $w \in D_\mathcal{V}$; et encore, puisque D est un ouvert $\{v, w\} \in D_\mathcal{E}$. Il en résulte donc que $D_\mathcal{E} = C_{v\mathcal{E}}$ et donc

$$C_v = D.$$

$v \notin D_\mathcal{V}$ **Lemme V.2.3.2** Si $v \notin D_\mathcal{V}$, $D = (\emptyset, \emptyset)$.

Démonstration : Notons $\overline{D} := (G \setminus D) \cap C_v$. C_v étant simultanément un ouvert et un fermé, il découle du lemme V.1.3 et du lemme V.1.7 que $\overline{D}$ est également, à la fois un ouvert et un fermé.

En outre, presque tautologiquement

$$v \in \overline{D}_\mathcal{V} \text{ et } \overline{D} \subset C_v.$$

Le lemme V.2.3.1 appliqué à $\overline{D}$ entraîne alors que

$$\overline{D} = C_v \text{ i.e. } D = (\emptyset, \emptyset).$$

Le lemme V.2.3.1 et le lemme V.2.3.2 assurent finalement que C_v satisfait l'axiome CX_4 de la définition V.2.1.

Définition V.2.4 (Composante connexe d'un sommet) Pour tout *sommet* $v \in \mathcal{V}(G)$, l'unique *composante connexe* C telle que $v \in C_V$ sera appelée la composante connexe de v .

Proposition V.2.5 (Composante connexe d'un sommet) Pour toute *composante connexe* $C := (C_V, C_E)$, il existe un *sommet* $v \in \mathcal{V}(G)$ tel que C est la *composante connexe de v* .

Démonstration : C est presque immédiat. Cependant, l'axiome CX_3 de la définition V.2.1, signifie que $C \neq (\emptyset, \emptyset)$; c'est-à-dire que

$$C_V \neq \emptyset \text{ ou } C_E \neq \emptyset.$$

i) $(C_V \neq \emptyset)$

Ce qui entraîne qu'il existe $v \in C_V$; et dans ce cas, C est la *composante connexe de v* en vertu de la proposition V.2.3.

ii) $(C_E \neq \emptyset)$

Alors il existe $\{v, w\} \in C_E$. Comme C est un *fermé*,

$$v \in C_V \text{ et } w \in C_V;$$

Notation V.2.6 Soit $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ un *graphe fini simple non-orienté* (cf. la définition I.4.4.) Pour tout $(u, v, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$, $P_{u,v,\ell}(G)$ est défini comme en II.6.2.2. Pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, on note

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(C_u(G)) &:= \{v \in \mathcal{V}(G); \exists \ell \in \mathbb{N}, P_{u,v,\ell}(G) \neq \emptyset\} \subset \mathcal{V}(G); \text{ et} \\ \mathcal{E}(C_u(G)) &:= \{\{v, w\} \in \mathcal{E}(G); w \in \mathcal{V}(C_u(G)), v \in \mathcal{V}(C_u(G))\} \subset \mathcal{E}(G). \end{aligned}$$

Remarque V.2.7 Il s'ensuit que $C_u(G) := (\mathcal{V}(C_u(G)), \mathcal{E}(C_u(G)))$ est le *sous-graphe induit* (cf. la définition II.6.3.2.) par G sur $\mathcal{V}(C_u(G))$.

Lemme V.2.8 (Ouvert) Pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, $(\mathcal{V}(C_u(G)), \mathcal{E}(C_u(G)))$ est un *ouvert* de G .

Démonstration : Pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, si $v \in \mathcal{V}(C_u(G))$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ et $\pi \in P_{u,v,\ell}(G)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbf{P}_{\ell+1}) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\bar{\pi})} & \mathcal{E}(G) \\ \text{Si de plus, } \{v, w\} \in \mathcal{E}(G), \text{ On peut définir } \varepsilon(\mathbf{P}_{\ell+1}) \downarrow & & \varepsilon(G) \downarrow \text{ par :} \\ \mathcal{P}_{1,2}([\mathbf{P}_{\ell+1}]) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([\bar{\pi}])} & \mathcal{P}_{1,2}([G]) \\ \bar{\pi}|_{\mathbf{P}_{\ell}} & = & \pi \\ \mathcal{V}(\bar{\pi})(\ell+1) & = & w \\ \mathcal{E}(\bar{\pi})(\{\ell, \ell+1\}) & = & \{v, w\}. \end{array}$$

Il s'ensuit que $w \in \mathcal{V}(C_u(G))$ si bien que $\{v, w\} \in \mathcal{E}(C_u(G))$; ce qui prouve le résultat.

Lemme V.2.9 (Fermé) Pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, $(\mathcal{V}(C_u(G)), \mathcal{E}(C_u(G)))$ est un *fermé* de G .

Démonstration : Tautologique par construction de $\mathcal{E}(C_u(G))$.

Proposition V.2.10 (Ouvert fermé) Soient $u \in \mathcal{V}(G)$ et $P := (P_{\mathcal{V}}, P_{\mathcal{E}})$, qui est à la fois un ouvert et un fermé de G . On suppose de plus que :

$$O/F_1) P_{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}(C_u(G)) .$$

$$O/F_2) P_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}(C_u(G)) .$$

$$O/F_3) u \in P_{\mathcal{V}} .$$

Notation V.2.10.1 Pour tout $(u, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$ on note $\mathcal{V}(u, \ell) := \{v \in \mathcal{V}(G) ; P_{u,v,\ell}(G) \neq \emptyset\}$.

i) Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}(u, \ell) \subset P_{\mathcal{V}}$.

Démonstration :

$\ell = 0$ Pour tout $v \in \mathcal{V}(C_u(G))$, $v \in \mathcal{V}(u, 0)$ si et seulement si $P_{u,v,0}(G) \neq \emptyset$; si et seulement si il existe $\pi : \mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_1 \rightarrow G$ tel que $u = \mathcal{V}(\pi)(0) = v$; ce qui entraîne en particulier $v = u \in P_{\mathcal{V}}$ (cf. O/F_3 .) Il en résulte que $\mathcal{V}(u, 0) \subset P_{\mathcal{V}}$.

$\ell \Rightarrow \ell + 1$ Pour $\ell \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{V}(u, \ell) \subset P_{\mathcal{V}}$. Pour tout $v \in \mathcal{V}(u, \ell + 1)$, il existe un morphisme de graphes non-orientés $\pi : \mathbf{P}_{\ell+1} \rightarrow G$ tel que $\mathcal{V}(\pi)(0) = u$ et $\mathcal{V}(\pi)(\ell + 1) = v$. Par définition $w = \mathcal{V}(\pi)(\ell) \in \mathcal{V}(u, \ell)$; et par conséquent, $w \in P_{\mathcal{V}}$.

De plus $\{w, v\} = \mathcal{E}(\pi)(\{\ell, \ell + 1\}) \in \mathcal{E}(G)$; si bien que $v \in N_G(w)$. Il résulte alors que $v \in P_{\mathcal{V}}$; si bien que finalement $\mathcal{V}(u, \ell + 1) \subset P_{\mathcal{V}}$.

ii) $P_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}(C_u(G))$.

Démonstration : Comme $\mathcal{V}(C_u(G)) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(u, \ell)$ et (cf. le point i,) $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}(u, \ell) \subset P_{\mathcal{V}}$; $\mathcal{V}(C_u(G)) \subset P_{\mathcal{V}}$.

L'inclusion $P_{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}(C_u(G))$ résultant de la condition O/F_1 , on a l'égalité $\mathcal{V}(C_u(G)) = P_{\mathcal{V}}$.

iii) $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(C_u(G))$.

Démonstration : Pour tout $\{v, w\} \in \mathcal{E}(C_u(G))$, par définition $(v, w) \in \mathcal{V}(C_u(G)) \times \mathcal{V}(C_u(G))$; ce qui entraîne, (cf. le point ii,) $(u, v) \in P_{\mathcal{V}} \times P_{\mathcal{V}}$. Puisque P est ouvert $\{v, w\} \in P_{\mathcal{E}}$; ce qui grâce à la condition O/F_2 $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(C_u(G))$.

Proposition V.2.11 (Composante connexe d'un sommet) Pour tout sommet $v \in \mathcal{V}(G)$,

$$C_v(G) := (\mathcal{V}(C_v(G)), \mathcal{E}(C_v(G)), \varepsilon(G)|_{\mathcal{E}(C_v(G))})$$

est la composante connexe de v au sens de la définition V.2.4.

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition V.2.10.

Définition V.2.12 (Graphe connexe) On dit que le *graphe fini simple non-orienté* G est *connexe* s'il n'a qu'une *composante connexe* C . Alors nécessairement $C = G$.

Proposition V.2.13 (Connexité des graphes de CAYLEY) Soient Γ un *groupe fini* (cf. la définition II.8.12.1.) $S \subset \Gamma$ satisfaisant Cay₁ et IV.1.1.Cay₂. Le *graphe de CAYLEY* associé $\text{Cay}(\Gamma, S)$ est *connexe* si et seulement si S est une *partie génératrice* (cf. la définition II.8.4.2.) de Γ .

V.3 . — Exercices

Exercice V.3.1 (L'hypercube) Les notations sont celles de l'exemple IV.1.8.

1) (Graphe circulant)

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, et $S \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\mathbf{Q}_3 \cong \text{Cay}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, S)$ est un *graphe circulant*.

a) (Cardinal)

Que vaut nécessairement n ?

b) (Régularité)

Que vaut $\#(S)$?

c) En déduire que $4 \in S$.

d) (Connexité)

Montrer que S est une *partie génératrice* de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

e) (S)

Déterminer les parties S possibles.

f) (Cycle)

Montrer qu'alors $\mathbf{Q}_3$ possède un *sous-graphe isomorphe* $\mathbf{C}_5$.

g) Conclure finalement que $\mathbf{Q}_3$ n'est pas un *graphe circulant*.