LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie ...

Corrigé Des exercices IV.5

IV.5 . – Exercices

Exercice IV.5.1 (Groupe des racines de l’unité) On note $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}_1, x \mapsto e^{2i\pi x}$.

- 1) ($\mathbf{S}_1$)
 - a) Montrer que v est un *morphisme de groupes* de $(\mathbb{R}, +)$ à valeurs dans $(\mathbf{S}_1, \times)$.
 - b) Quel est le *noyau* $\text{Ker } v$ de v ?
 - c) En déduire un *isomorphisme de groupes* $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbf{S}_1$.

- 2) ($\mathbf{U}(n)$)

On note

$$v_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{U}(n), k \mapsto e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

- a) Montrer que v_n est un *morphisme de groupes* de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbf{U}(n), \times)$.
- b) Quel est son *noyau* ?
- c) En déduire un *isomorphisme de groupes* $\bar{v} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbf{U}(n)$.

- 3) ($\mathbf{U}$)
 - a) Montrer que la *restriction* $v|_{\mathbb{Q}}$ de v à $\mathbb{Q}$ est à valeurs dans $\mathbf{U}$.
 - b) Quel est le *noyau* de $v|_{\mathbb{Q}}$?
 - c) En déduire un *isomorphisme de groupes* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mathbf{U}$.
 - d) Montrer que

$$\mathbf{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{U}(n).$$

Solution

On peut montrer ce résultat en utilisant ; les vérifications sont alors très élémentaires.

On peut également utiliser le point ii du lemme IV.3.4, et appliquer le point iv de la proposition II.8.3.7, en remarquant que

$$\forall (r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbf{U}(r) \subset \mathbf{U}(rs).$$

Exercice IV.5.2 ($\mathbf{K}_4$) Soient $\Gamma_1 := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \Gamma_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $S_i := \Gamma_i \setminus \{0\}_{i=1 \text{ ou } 2}$.

- 1) Montrer qu’il existe des *isomorphismes de graphes non-orientés* $\text{Cay}(\Gamma_1, S_1) \cong \mathbf{K}_4 \cong \text{Cay}(\Gamma_2, S_2)$
- 2) Existe-t-il un *isomorphisme de groupes* $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$?

Exercice IV.5.3 (L’hypercube) Les notations sont celles de l’exemple IV.1.8.

Dans tout l’exercice IV.5.3, on note $\mathbb{F}_2 := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, *)$ le *corps* à deux éléments.

Pour $d \in \mathbb{N}$ le $\mathbb{F}_2$ -*espace vectoriel* $\mathbb{F}_2^d$ est en particulier un *groupe* qu’on notera Γ_d . On notera $S_d := (e_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{F}_2^d$ la *base canonique* de $\mathbb{F}_2^d$.

- 1) (**Le graphe de CAYLEY**)
Vérifier que S satisfait bien à la condition Cay₁ de la notation IV.1.1 et à la condition Cay₂ de la notation IV.1.1.

Solution

Cay₁ Pour tout $1 \leq i \leq d, e_i + e_i = 0$, puisque e_i est élément d'un $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel .
 Cay₂ Il est clair que $0 \notin S$.

Dans toute la suite de l'exercice IV.5.3 , on notera donc $Q_d := \text{Cay}(\Gamma_d, S_d)$ le graphe de CAYLEY associé au groupe $(\mathbb{F}_2^d, +)$ et à $S_d \subset \mathbb{F}_2^d$. Il est usuel de l'appeler hypercube de dimension d .

2) (En petite dimension)

a) Décrire, c'est-à-dire donner un isomorphisme avec un graphe connu, Q_0, Q_1 et Q_2 .

Solution

Q_0 est le graphe isolé I_1 (cf. la définition I.4.9.) à 1 sommet .
 Q_1 est le graphe complet K_2 (cf. le point c de l'exemple I.1.5.) à 2 sommets .
 Q_2 est le cycle C_4 (cf. , , l'exercice A et l'exercice III.11.6.1.)

b) Représenter Q_1, Q_2, Q_3 .

3) (Régularité)

Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}, Q_d$ est k -régulier pour un entier $k \in \mathbb{N}$ que l'on déterminera.

Solution

Puisque $Q_d = \text{Cay}(\mathbb{F}_2^d, S)$ avec $\#(S) = d$, il résulte du point iii de la proposition IV.1.7, que Q_d est d -régulier .

4) (Nombre de sommets, d'arêtes)

Combien de sommets et d'arêtes Q_d possède-t-il ?

Solution

L'ensemble des sommets de Q_d est, par définition, Γ_d dont le cardinal est 2^d .
 Par ailleurs le graphe Γ_d est d -régulier ; puisque $\#(S_d) = d$ (cf. le point iii de la proposition IV.1.7.) Or on a calculé le nombre d'arêtes d'un tel graphe à l'exercice I.5.6.3. Il vaut

$$\frac{\#(\Gamma_d)\#(S_d)}{2} = \frac{2^d d}{2} .$$

5) (Bipartition)

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, montrer que

a) Q_d est un graphe biparti ;

Solution

Pour tout $x \in \mathcal{V}(Q_d) = \mathbb{F}_2^D$, notons $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ et $\mathcal{V}(\beta) : \mathcal{V}(Q_d) \rightarrow \mathcal{V}(Q_1) = \mathbb{F}_2, x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^d x_i$.

Pour tout $\{x, y\} \in \mathcal{E}(Q_d)$, il existe $1 \leq i \leq d$ tel que $y = x + e_i$, ce qui entraîne $\mathcal{V}(\beta)(y) = \mathcal{V}(\beta)(x) + 1$.

Or $\forall x \in \mathbb{F}_2, \{x, x + 1\} \in \mathcal{E}(Q_1)$ est l'unique arête de Q_1 .

On peut ainsi définir $\mathcal{E}(\beta) : \mathcal{E}(Q_d) \rightarrow \mathcal{E}(Q_1), \{x, y\} \mapsto \{\mathcal{V}(\beta)(x), \mathcal{V}(\beta)(y)\}$. Il est alors presque immédiat de vérifier que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(Q_d) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\beta)} & \mathcal{E}(Q_1) \\ \varepsilon(Q_d) \downarrow & & \varepsilon(Q_1) \downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([\] Q_d) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([\] \beta)} & \mathcal{P}_{1,2}([\] Q_1) \end{array} \quad 1$$

est un morphisme de graphes non-orientés qui définit une bipartition (cf. la définition II.6.1.2;) puisque $Q_1 \cong K_2$.

b) (Cycle)

si C est un sous-graphe de Q_d isomorphe à un cycle C_n alors n est pair.

Solution

Dans ce cas $\beta|_C$ (où β est le morphisme de graphes non-orientés défini en a.1.) définit une bipartition sur C et par conséquent sur C_n ; ce qui entraîne que n est pair.

Exercice IV.5.4 (Parcours dans l'hypercube) Les notations sont celles de l'exemple IV.1.8.

1) (Caractères de Γ_d)

- a) Déterminer les caractères du groupe Γ_1 et montrer qu'ils sont deux à deux orthogonaux.
- b) Déterminer les caractères du groupe Γ_2 et montrer qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

Solution

$$\begin{aligned}
 \chi_0 : \Gamma_2 &\longrightarrow \mathbf{U}(2) \\
 (1, 0) &\longmapsto 1 \\
 (0, 1) &\mapsto 1 \\
 \chi_1 : \Gamma_2 &\longrightarrow \mathbf{U}(2) \\
 (1, 0) &\longmapsto -1 \\
 (0, 1) &\mapsto 1 \\
 \chi_2 : \Gamma_2 &\longrightarrow \mathbf{U}(2) \\
 (1, 0) &\longmapsto 1 \\
 (0, 1) &\mapsto -1 \\
 \chi_3 : \Gamma_2 &\longrightarrow \mathbf{U}(2) \\
 (1, 0) &\longmapsto -1 \\
 (0, 1) &\mapsto -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \chi_0 | \chi_1 \rangle &= \chi_0(0, 0)\chi_1(0, 0) + \chi_0(1, 0)\chi_1(1, 0) + \chi_0(1, 0)\chi_1(1, 0) + \chi_0(1, 1)\chi_1(1, 1) \\
 &= 1 - 1 + 1 - 1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle &= \chi_1(0, 0)\chi_2(0, 0) + \chi_1(1, 0)\chi_2(1, 0) + \chi_1(1, 0)\chi_2(1, 0) + \chi_1(1, 1)\chi_2(1, 1) \\
 &= 1 - 1 - 1 + 1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

- c) Étant donné un caractère χ du groupe Γ_d , montrer que χ est à valeurs dans $\mathbf{U}(2)$.
- d) L'isomorphisme de groupes $\bar{v}_2$ étant celui défini au point c de la question 2 de l'exercice IV.5.1, montrer que χ est un caractère du groupe Γ_d si et seulement si $\bar{v}_2^{-1} \circ \chi$ est une $\mathbb{F}_2$ -forme linéaire.

e) En déduire que

$$\#(\widehat{\Gamma_d}) = \#(\Gamma_d).$$

f) Montrer que pour tout $(\chi, \psi) \in \widehat{\Gamma_d} \times \widehat{\Gamma_d}$ et tout $h \in \Gamma_d$,

$$(1 - \chi(h)\psi(h)) \langle \chi | \psi \rangle = 0.$$

g) En déduire que $\widehat{\Gamma_d}$ est une partie orthogonale de $\mathbb{C}^{\Gamma_d}$.

h) En déduire finalement une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme d'adjacence de $\mathbf{Q}_d$.

2) Déterminer $\text{Sp}(\mathbf{Q}_d)$ (avec les multiplicités).

3) Montrer que $\mathbf{Q}_d$ est sommet-transitif.

4) Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel, déterminer le nombre de parcours de longueur ℓ d'un sommet à lui-même.

Exercice IV.5.5 (Cycle couvrant) Les notations sont celles de l'exemple IV.1.8.

Soient $d \in \mathbb{N}$, $G_{d,0}$ et $G_{d,1}$ les sous-graphes induits (cf. la définition II.2.4.) de $\mathbf{Q}_{d+1}$ définis $\forall k \in \mathbb{F}_2$, par $\mathcal{V}(G_{d,k}) := \{x = \sum_{i=1}^{d+1} x_i e_i \in \mathcal{V}(\mathbf{Q}_{d+1}); x_{d+1} = k\}$.

1) $(\mathcal{V}(\sigma_d))$

Montrer que $\mathcal{V}(\sigma_d) : \mathcal{V}(\mathbf{Q}_{d+1}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathbf{Q}_{d+1})$, $x \mapsto x + e_{d+1}$ vérifie :

*) **(involution)**

$$\mathcal{V}(\sigma_d) \circ \mathcal{V}(\sigma_d) = \text{Id}_{\mathcal{V}(\mathbf{Q}_{d+1})};$$

Solution

Résulte de ce que $e_{d+1} + e_{d+1} = 0$.

†) **(restriction)**

$\forall k \in \mathbb{F}_2$, la restriction $\mathcal{V}(\sigma_d)|_{\mathcal{V}(G_{d,k})}$ de $\mathcal{V}(\sigma_d)$ à $\mathcal{V}(G_{d,k})$ est à valeurs dans $\mathcal{V}(G_{d,k+1})$;

Solution

Pour ainsi dire tautologique.

‡) **(bijection)**

$\mathcal{V}(\sigma_d)|_{G_{d,k}}$ est une bijection de $\mathcal{V}(G_{d,k})$ sur $\mathcal{V}(G_{d,k+1})$.

Solution

Résulte du point * et du point †.

2) Montrer qu'il existe une unique application $\mathcal{E}(\sigma_d) : \mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1})$, $\{x, y\} \mapsto \{\mathcal{V}(\sigma_d)(x), \mathcal{V}(\sigma_d)(y)\}$.

Solution

L'unicité est assurée par la formule ci-dessus elle-même.

Existence : Pour toute arête $\{x, y\} \in \mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1})$, il existe $1 \leq i \leq d+1$ tel que $y - x = e_i$. Il s'ensuit que $(y + e_{d+1}) - (x + e_{d+1}) = e_i$; si bien que $\{\mathcal{V}(\sigma_d)(x), \mathcal{V}(\sigma_d)(y)\} = \{x + e_{d+1}, y + e_{d+1}\} \in \mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1})$; si bien que $\mathcal{E}(\sigma_d)$ est bien définie.

3) $(\mathcal{E}(\sigma_d))$

Montrer qu'alors $\mathcal{E}(\sigma_d)$ vérifie :

*) **(involution)**

$$\mathcal{E}(\sigma_d) \circ \mathcal{E}(\sigma_d) = \text{Id}_{\mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1})};$$

Solution

Résulte du point * de la question 1.

†) **(restriction)**

$\forall k \in \mathbb{F}_2$, la restriction $\mathcal{E}(\sigma_d)|_{\mathcal{E}(G_{d,k})}$ de $\mathcal{E}(\sigma_d)$ à $\mathcal{E}(G_{d,k})$ est à valeurs dans $\mathcal{E}(G_{d,k+1})$;

Solution

Résulte du point † de la question 1.

‡) **(bijection)**

$\mathcal{E}(\sigma_d)|_{G_{d,k}}$ est une bijection de $\mathcal{E}(G_{d,k})$ sur $\mathcal{E}(G_{d,k+1})$.

Solution

Résulte du point * de la question 1 et du point † de la question 1.

4) (σ_d)

Vérifier qu'alors $\sigma_d := (\mathcal{V}(\sigma_d), \mathcal{E}(\sigma_d))$ est un automorphisme de graphes non-orientés de $\mathbf{Q}_{d+1}$, tel que pour tout $k \in \mathbb{F}_2$, sa restriction $\sigma_d|_{G_{d,k}}$ est un isomorphisme de graphes non-orientés de $G_{d,k}$ sur $G_{d,k+1}$.

Solution

Il résulte de la définition même de $\mathcal{E}(\sigma_d)$ (cf. la question 2.) que $\sigma_d := (\mathcal{V}(\sigma_d), \mathcal{E}(\sigma_d))$ est un endomorphisme de graphes non-orientés de $\mathbf{Q}_{d+1}$.

Le point * de la question 1 et le point * de la question 3 assurent que $\sigma_d \circ \sigma_d = \text{Id}_{\mathbf{Q}_{d+1}}$; ce qui garantit que σ_d est un automorphisme de graphes non-orientés de $\mathbf{Q}_{d+1}$.

Enfin le point ‡ de la question 1 et le point ‡ de la question 3 assurent que σ_d se restreint en un isomorphisme de graphes non-orientés de $G_{d,k}$ sur $G_{d,k+1}$.

5) (θ_d)

Montrer qu'il existe un isomorphisme de graphes non-orientés

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbf{Q}_d) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\theta_d)} & \mathcal{E}(G_{d,0}) \\ \varepsilon(\mathbf{Q}_d) \downarrow & & \varepsilon(G_{d,0}) \downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([\mathbf{Q}_d]) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([\theta_d])} & \mathcal{P}_{1,2}([G_{d,0}]) \end{array}$$

Solution

L'ensemble des sommets $\mathcal{V}(G_{d,0})$ de $G_{d,0}$ est isomorphe en utilisant la base $(e_i)_{1 \leq i \leq d+1} \in \mathbb{F}_2^{d+1}$, en tant que $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel à $\mathbb{F}_2^d = \mathcal{V}(\mathbf{Q}_d)$. On définit ainsi une bijection $\mathcal{V}(\theta_d) : \mathcal{V}(\mathbf{Q}_d) \cong \mathcal{V}(G_{d,0})$.

Puisque $G_{d,0}$ est un sous-graphe induit, pour tout $(x, y) \in \mathcal{V}(G_{d,0}) \times \mathcal{V}(G_{d,0})$, $\{x, y\} \in \mathcal{E}(G_{d,0})$; si et seulement si $\{x, y\} \in \mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1})$; si et seulement s'il existe $1 \leq i \leq d+1$ tel que $y - x = e_i$.

Or $x_{d+1} = y_{d+1} = 0$; si bien que $1 \leq i \leq d$; c'est-à-dire que $\{x, y\} \in \mathcal{E}(\mathbf{Q}_d)$; ce qui définit une bijection $\mathcal{E}(\theta_d) : \mathcal{E}(\mathbf{Q}_d) \cong \mathcal{E}(G_{d,0})$; et permet donc finalement de construire l'isomorphisme de graphes non-orientés $\theta_d : \mathbf{Q}_d \cong G_{d,0}$.

On dit qu'un graphe G possède un cycle couvrant ; s'il existe un sous-graphe C isomorphe à cycle et tel que $\mathcal{V}(C) = \mathcal{V}(G)$ c'est-à-dire qu'il « passe par tous les sommets » de G . On remarque qu'alors nécessairement $C \cong \mathbf{C}_{\#(\mathcal{V}(G))}$.

6) ($\mathbf{Q}_2$)

Montrer que $\mathbf{Q}_2$ possède un cycle couvrant.

Solution

On a constaté (cf. la question 2 de l'exercice IV.5.3.) que $\mathbf{Q}_2 \cong \mathbf{C}_4$.

7) ($\mathbf{Q}_d \Rightarrow \mathbf{Q}_{d+1}$)

Soient $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ et $C_d \cong \mathbf{C}_{2^d}$ un cycle couvrant de $\mathbf{Q}_d$. Construire un cycle couvrant $C_{d+1} \cong \mathbf{C}_{2^{d+1}}$ de $\mathbf{Q}_{d+1}$.

Indication : On pourra utiliser les isomorphismes de graphes non-orientés σ_d de la question 4 et θ_d de la question 5.

Solution

Notons $\theta_d(C_d) := \{x_0, \dots, x_{2^d-1}\}$ qui est un cycle couvrant de $G_{d,0}$ et $\sigma_d(\theta_d(C_d)) := \{y_0, \dots, y_{2^d-1}\}$ qui est un cycle couvrant de $G_{d,1}$. On remarque que $\forall 0 \leq i \leq 2^d - 1, y_i - x_i = e_{d+1}$; c'est-à-dire que $\{x_i, y_i\} \in \mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1})$.

Définissons $\mathcal{V}(\gamma_d) : \mathbb{Z}/2^{d+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{V}(\mathbf{Q}_{d+1})$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \forall 0 \leq i \leq 2^d - 1, & \gamma_d(\bar{i}) = x_i, \\ \forall 2^d \leq i \leq 2^{d+1} - 1, & \gamma_d(\bar{i}) = y_{2^d - i + 1}. \end{array}$$

On vérifie aisément qu'il n'y a qu'une manière de définir $\mathcal{E}(\gamma_d)$ de sorte que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbf{C}_{2^{d+1}}) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\gamma_d)} & \mathcal{E}(\mathbf{Q}_{d+1}) \\ \varepsilon(\mathbf{C}_{2^{d+1}}) \downarrow & & \varepsilon(\mathbf{Q}_{d+1}) \downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([\mathbf{C}_{2^{d+1}}]) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([\gamma_d])} & \mathcal{P}_{1,2}([\mathbf{Q}_{d+1}]) \end{array}$$

soit un morphisme de graphes non-orientés ; et qu'on définit bien ainsi le cycle couvrant demandé.

8) (Cycle couvrant)

Conclure.

Solution

Il résulte de la question 6 et de la question 7 qu'on peut établir par récurrence que, pour tout $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$, le graphe fini simple non-orienté $\mathbf{Q}_d$ possède un cycle couvrant.