

TD n° I

Groupes abéliens

Exercice A : (Torsion dans un groupe abélien)

Soit A un groupe abélien noté additivement. Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$A[n] := \{x \in A ; nx = 0\} \text{ et } \text{Tor}(A) := \bigcup_{n \geq 1} A[n].$$

1) Montrer que les

$$A[n], n \in \mathbb{N} \text{ et } \text{Tor}(A)$$

sont des sous-groupes de A .

2) Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme de groupes. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$f(A[n]) \subset B[n] \text{ puis que } f(\text{Tor}(A)) \subset f(\text{Tor}(B))$$

avec égalité si f est un isomorphisme.

3) Si p et q sont des entiers premiers entre eux, montrer que tout élément de $A[pq]$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $A[p]$ et d'un élément de $A[q]$; autrement dit que

$$A[pq] = A[p] \oplus A[q].$$

4) Montrer que $A/\text{Tor}(A)$ est sans torsion *i.e.*

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times A/\text{Tor}(A), n \cdot x = 0 \Leftrightarrow n = 0 \text{ ou } x = 0.$$

On suppose désormais que A est fini, on note n le cardinal de A et $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ la décomposition de n en facteurs irréductibles (donc $e_i \geq 1$ pour tout $i = 1, \dots, r$).

5) Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, si $v_p(m)$ dénote la valuation p -adique de m , alors

$$A[m] = \bigoplus_{p|m} A[p^{v_p(m)}].$$

Si p est un nombre premier, on note $A[p^\infty]$ le sous-ensemble de A des éléments dont l'ordre est une puissance de p .

$$A[p^\infty] = \{a \in A ; \exists s \in \mathbb{N}, | \langle a \rangle_A | = p^s\}.$$

6) Montrer que $A[p^\infty]$ est un sous-groupe de A .

7) Montrer que $A[p^\infty] \neq \{0\}$ si et seulement si p est l'un des p_i .

8) Plus généralement, montrer que $A[p^\infty]$ est l'unique p -Sylow de A . En déduire le cardinal de $A[p^\infty]$.

Soit

$$\begin{aligned} \pi : \bigoplus_p A[p^\infty] &\longrightarrow A \\ (x_p)_p &\longmapsto \sum_p x_p. \end{aligned}$$

9) a) Soit $(x_p)_p \in \text{Ker } \pi$ et soit q un nombre premier. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_q \in A[q^k]$ et k' premier à q tel que $x_q \in A[k']$.

b) En déduire que π est injective.

10) Montrer que π est surjective et en déduire que

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^r A[p_i^\infty]$$

Exercice B : Soient A et B deux groupes abéliens et $\text{Hom}(A, B)$ l'ensemble des morphismes de A dans B .

1) Vérifier rapidement que $\text{Hom}(A, B)$ a une structure de groupe abélien.

2) Montrer que

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) \cong A[m] := \{a \in A ; ma = 0\}$$

(on donnera explicitement un isomorphisme.)

3) Montrer que

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \text{ où } d = (p \wedge q).$$

4) Montrer que $\text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$.

5) Montrer que $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

6) Si

$$A = \prod_{i=1}^k A_i \text{ et } B = \prod_{j=1}^{\ell} B_j$$

sont des groupes abéliens, montrer que $\text{Hom}(A, \prod_{j=1}^{\ell} B_j)$ est isomorphe à $\prod_{j=1}^{\ell} \text{Hom}(A, B_j)$ et que $\text{Hom}(\prod_{i=1}^k A_i, B)$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^k \text{Hom}(A_i, B)$.

Indication : On pourra se borner à le montrer pour deux facteurs.

Exercice C : 1) Comment l'exercice B permet-il de retrouver le résultat de l'exercice A, question 3) ?

2) De quel énoncé connu peut-on rapprocher ce dernier résultat ?

Exercice D : Soient

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} Q \rightarrow 0$$

une suite exacte courte de groupes abéliens, R un groupe abélien et $f : R \rightarrow Q$ un morphisme de groupes.

On note

$$r : R \times M \rightarrow R, (x, y) \mapsto x \text{ et } q : R \times M \rightarrow M, (x, y) \mapsto y.$$

Enfin on note

$$P := \{(x, y) \in R \times M ; f[r(x, y)] = p[q(x, y)]\}.$$

1) $R \times M$ étant muni de sa structure produit, montrer que P en est un sous-groupe.

2) Montrer que, si f est injectif,

$$q|_P : P \rightarrow M$$

induit un isomorphisme

$$P \cong p^{-1}[f(R)].$$

3) Montrer que $r|_P$ est un morphisme surjectif de noyau isomorphe à N et qu'on a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow P \xrightarrow{r|_P} R \rightarrow 0.$$