

Rapport d'Immersion Recherche

Empilement de disques dans le plan

Hind Taibi

Camille Coustillet

Emilie Mboussa

Année universitaire 2021-2022

Tuteur : Pierre Pansu

Résumé

Dans ce document, nous traitons de la notion de d'empilement dans le plan et plus particulièrement d'empilement de densité maximale de disques unitaires. Nous étudions les démonstrations des théorèmes de Lagrange et de Fejes Tóth après avoir démontré des résultats préliminaires, notamment sur les cellules de Voronoï et la triangulation de Delaunay. Enfin, nous vérifions que la densité maximale d'un empilement de demi-disques est strictement supérieure à celle de disques.

This document is about the notion of packing and in particular circle packing. We discuss the proof of Lagrange's and Fejes Tóth's theorems after proving some preliminary results, especially on Voronoï cells and Delaunay triangulation. Finally, we verify that the maximal density of semi-circles packing is strictly greater than the maximal density of circle packing.

Introduction

Lors de cette immersion recherche, nous nous sommes intéressées à la problématique de l'empilement de disques de rayon unité. En trois dimensions, ce problème peut se concevoir comme la manière de ranger des boulets de canon ou encore les oranges sur l'étal du maraîcher, en minimisant l'espace entre deux sphères. Cependant, nous nous contenterons d'étudier les empilements dans le plan, qui n'en restent pas triviaux ! Dans le plan, on s'intéresse donc à la manière d'arranger des pièces de monnaie, toutes de même rayon, sur une table infinie de sorte que le nombre de pièces soit maximal.

Pour répondre à ce problème, nous avons tout d'abord cherché à majorer la densité d'un empilement, régulier ou non, après avoir énoncé les définitions qui nous serviront tout au long de notre immersion recherche. Pour un empilement régulier de disques, nous avons démontré la proposition de Lagrange qui donne comme densité maximale de tout empilement régulier $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90\%$. Pour les empilements irréguliers de disques, nous avons introduit la triangulation de Delaunay, ainsi que les cellules de Voronoï pour démontrer, au moins en partie, certains résultats, notamment le théorème de Tóth qui donne comme densité maximale de tout empilement dans le plan $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90\%$ à l'aide d'arguments de Chang et Wang. Enfin, nous nous sommes intéressées à l'empilement de demi-disques, en particulier s'il était possible d'empiler des demi-disques d'une meilleure manière que des disques entiers.

Chapitre 1

Densités d'un empilement

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à des premiers résultats sur les densités dans le plan, avant d'en donner une définition. Nous allons étudier les empilements carré et hexagonal et calculer leur densité, puis nous étudierons un exemple d'empilement dont le densité ne converge pas.

1.1 Densité d'un empilement dans un sous-ensemble

Définition 1.1.1

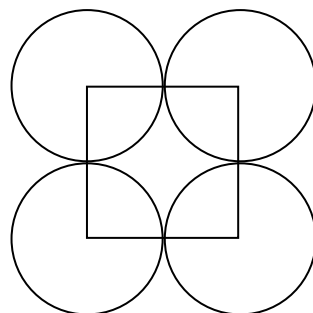
Soient D_1, D_2, \dots, D_n des disques de rayon unité d'un empilement, noté E , dans un plan, c'est-à-dire qu'ils sont disposés dans le plan tels qu'aucun disque n'empiète sur un autre. Soit P une partie de ce plan. La densité de l'empilement dans P est donnée par ;

$$\delta_P(E) = \frac{\text{Aire}(P \cap (\cup_i D_i))}{\text{Aire}(P)}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Exemple 1.1.2

On choisit d'étudier l'empilement carré et de déterminer sa densité. On pourra retrouver un schéma de l'empilement en question à la figure 1.1.3 ci-dessous.

Figure 1.1.3 : schéma de l'empilement carré



On peut montrer que la densité de l'empilement carré est ;

$$\delta_{\text{carré}}(E) = \frac{\pi}{4}$$

En effet, on considère un carré de côté égal à $2r$ où r est de longueur unité, donc de surface ;

$$S_{\text{carré}} = 4r^2 = 4$$

Ce carré est recouvert de quatre quarts de disque de rayon r , donc d'un disque complet d'aire ;

$$S_{disue} = \pi r^2 = \pi$$

La densité de l'empilement carré est donc finalement ;

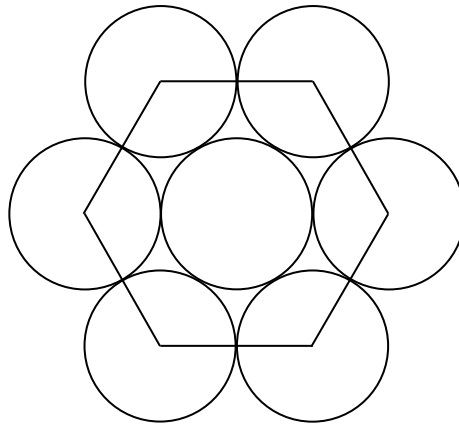
$$\delta_{carré}(E) = \frac{S_{carré}}{S_{disue}} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

Peut-on trouver un empilement de densité meilleure ?

Exemple 1.1.4

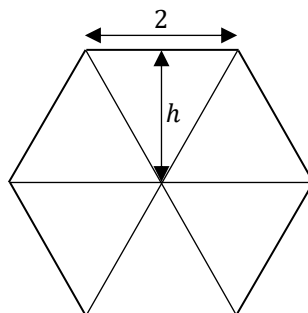
Nous nous intéressons à présent à l'empilement hexagonal que l'on pourra retrouver à la figure 1.1.5. Encore une fois, tous les cercles sont égaux et de rayon unité.

Figure 1.1.5 : schéma de l'empilement hexagonal



Commençons par calculer l'aire de l'hexagone S_{hex} , pour cela, on le décompose en six triangles équilatéraux égaux (voir figure 1.1.6).

Figure 1.1.6 : décomposition de l'hexagone en triangles équilatéraux



On a par le théorème de Pythagore

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Donc

$$S_{hex} = 6 \times \frac{2h}{2} = 6\sqrt{3}$$

On peut facilement voir à travers la figure 1.1.5 qu'un disque et six tiers de disque recouvrent une partie de l'aire de l'hexagone, donc la densité de cet empilement est donnée par ;

$$\delta_{hex}(E) = \frac{6 \times \frac{\pi}{3} + \pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.906$$

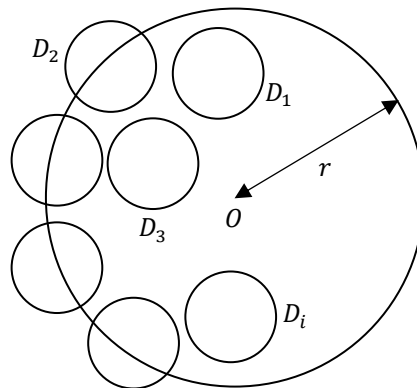
On remarque que la densité de l'empilement hexagonal est meilleure que celle de l'empilement carré mais que peut-on encore faire mieux ? En fait, on peut montrer que la densité de l'empilement hexagonal est la densité maximale que l'on peut obtenir (voir chapitres 2 et 3).

1.2 Densité absolue dans le plan tout entier

Définition 1.2.1

On s'intéresse à un empilement infini E de disques $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ de rayon unité à l'intérieur de $D(0, r)$. On pourra retrouver à la figure 1.2.2 un schéma représentatif. On intersecte l'empilement avec un disque centré à l'origine et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$.

Figure 1.2.2 : exemple d'empilement



Soit f la fonction définie par ;

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$r \mapsto \frac{\text{Aire}(D(0, r) \cap (\cup_i D_i))}{\text{Aire}(D(0, r))}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

On définit la densité de l'empilement $\delta(E)$ dans le plan par ;

$$\delta(E) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} f(r)$$

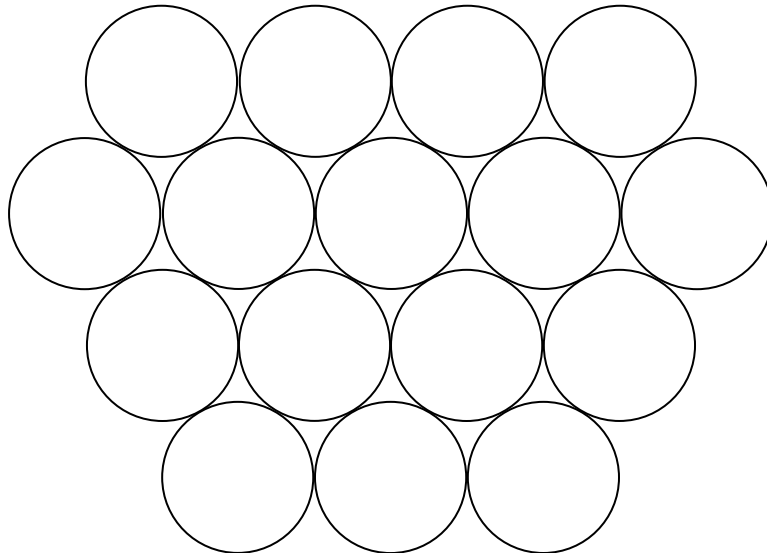
La densité de l'empilement est donc la limite de la borne supérieure de cette fonction f sur $[r, +\infty[$ quand r tend vers $+\infty$. On note Δ la borne supérieure des densités de tous les empilements possibles,

$$\Delta = \sup \delta(E).$$

Exemple 1.2.3

Intéressons-nous à l'empilement hexagonal étendu à tout le plan. Sa densité $\delta(E_{hex})$ est égale à la densité calculée à l'exemple 1.1.4 (voir proposition 1.2.10). La figure 1.2.4 schématise une partie de cet empilement.

Figure 1.2.4 : empilement hexagonal étendu

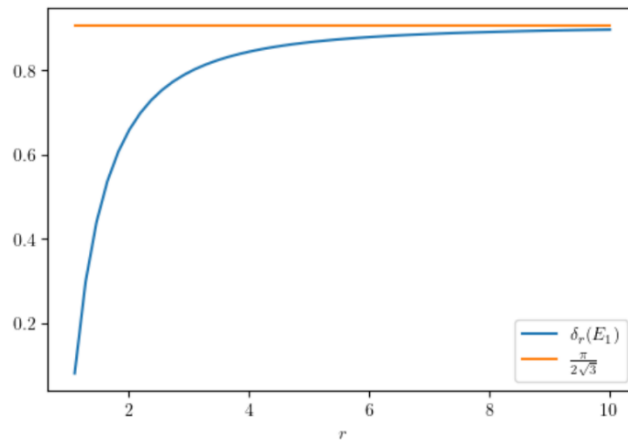


Soit E_1 l'empilement hexagonal privé d'un de ses disques. On a alors ;

$$\delta_r(E_{hex}) - \delta_r(E_1) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{\pi r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

où δ_r est la densité associée au disque $D(0, r)$. La forme de sa courbe en fonction de r est représentée à la figure 1.2.5.

Figure 1.2.5 : représentation de δ_r associée à E_1 en fonction de r



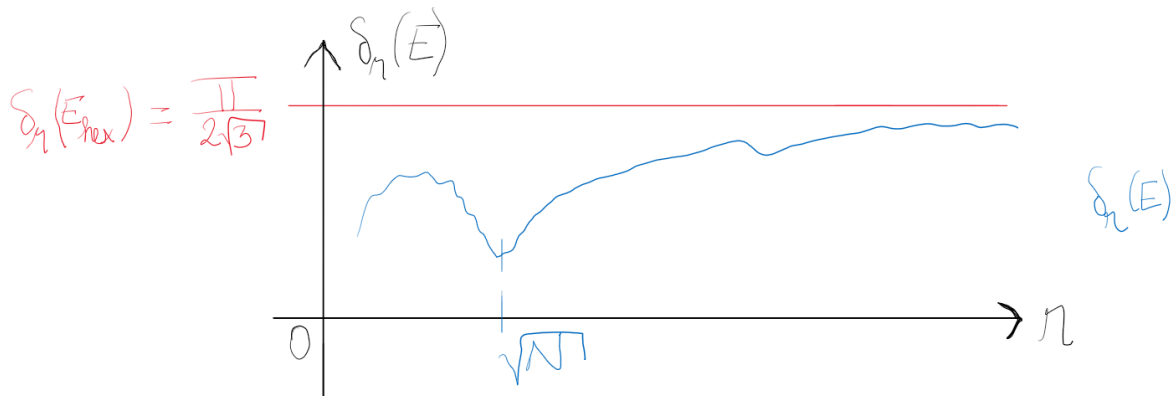
Mais que se passe-t-il si l'on enlève N disques ? On a pour N disques retirés ;

$$\delta_r(E_N) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{N}{r^2}$$

$$\delta_r(E_{hex}) - \delta_r(E_N) = \frac{N\pi}{\pi r^2} \underset{r \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dans un disque de rayon r , on peut approximer r_N , le rayon de la sphère du plan contenant les disques unitaires, par \sqrt{N} . On obtient donc la courbe à la figure 1.2.6.

Figure 1.2.6 : représentation de δ_r associée à E_N en fonction de r



On remarque que de nombreux empilements, différents de l'empilement hexagonal, ont une densité égale à celui-ci. Par exemple, l'empilement hexagonal privé d'un nombre fini de ses disques que l'on vient d'étudier.

Exemple 1.2.7

Maintenant, on cherche à construire un empilement E de disques dans le plan tel que la fonction

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$
$$r \mapsto \frac{\text{Aire}(D(0,r) \cap (\cup_i D_i))}{\text{Aire}(D(0,r))} = \delta_r(E)$$

n'admet pas de limite. Pour cela, imaginons des couronnes concentriques vides et remplies de disques empilés selon l'empilement hexagonal de manière alternée (voir figure 1.2.8). La fonction f va alors osciller entre 0 et $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (voir figure 1.2.9).

Figure 1.2.8 : exemple d'empilement pour lequel f n'admet pas de limite

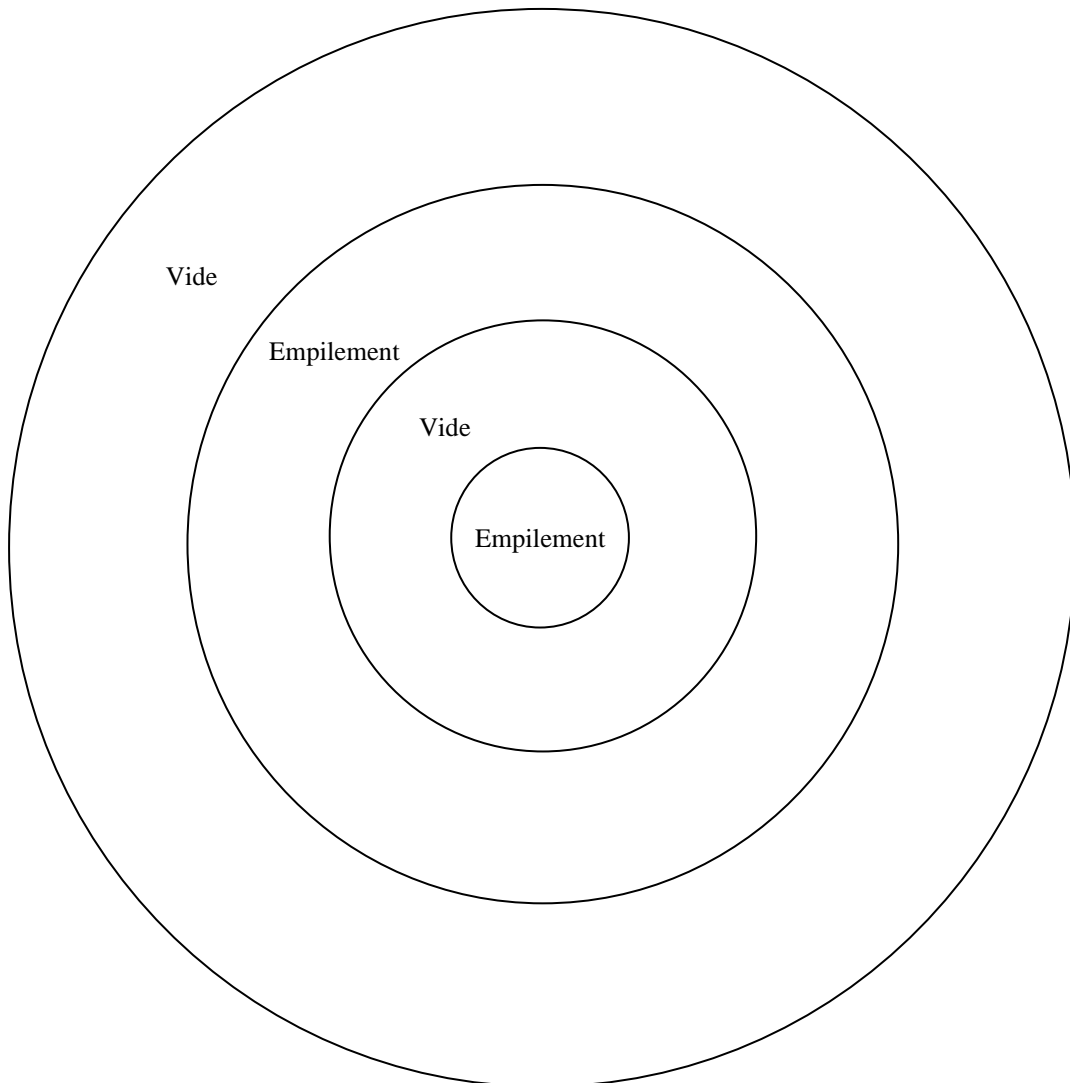
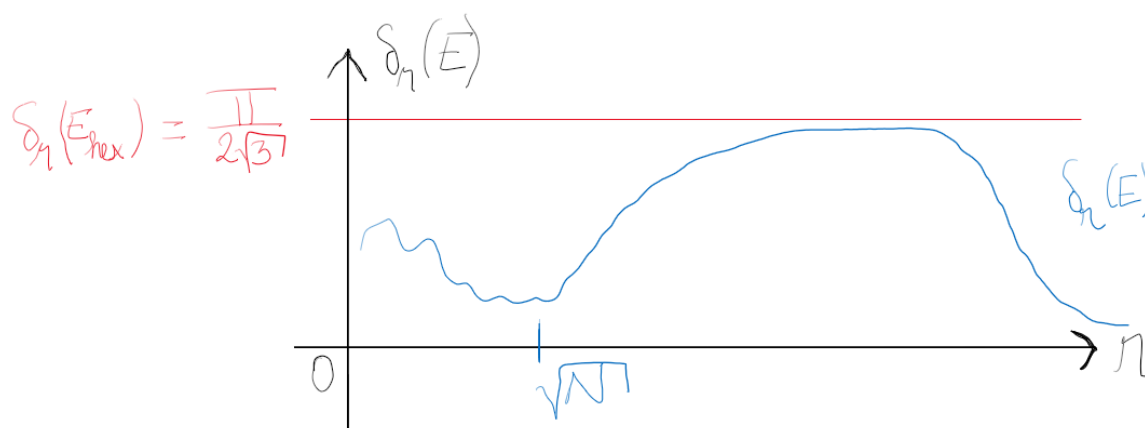


Figure 1.2.9 : courbe schématique de la densité d'un empilement sans limite



Proposition 1.2.10

Soit un pavage du plan avec des pavés de diamètre borné. Si un réel δ majore (resp. minore) la densité de l'empilement dans chaque pavé, alors δ majore (resp. minore) la densité de l'empilement dans tout le plan.

Démonstration 1.2.11

On note λ la plus grande distance séparant deux points d'un pavé et C un cercle centré à l'origine O et de rayon R . On note P la réunion de tous les polygones entièrement contenus dans C et P' la réunion des polygones qui empiètent sur C . Enfin, on considère le cercle C_2 de centre O et de rayon $R - \lambda$ car celui-ci est forcément inclus dans P .

La densité dans le cercle C est donnée par ;

$$\delta(C) = \frac{\text{Aire}(E \cap C)}{\text{Aire}(C)}$$

où E est l'ensemble des disques de rayon unité de l'empilement.

La densité dans P est donnée par ;

$$\delta(P) = \frac{\text{Aire}(E \cap P)}{\text{Aire}(P)}$$

On veut montrer que la densité $\delta(P)$ tend vers $\delta(C)$. Pour cela, on va majorer la valeur absolue de la différence des deux ;

$$|\delta(C) - \delta(P)| = \left| \frac{\text{Aire}(E \cap C)}{\text{Aire}(C)} - \frac{\text{Aire}(E \cap P)}{\text{Aire}(P)} \right|$$

On pose ;

$$\begin{cases} a = \text{Aire}(E \cap C) \\ b = \text{Aire}(C) \\ c = \text{Aire}(E \cap P) \\ d = \text{Aire}(P) \end{cases}$$

Ainsi, on a ;

$$|\delta(C) - \delta(P)| = \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| = \left| \frac{d(a-c) + c(d-b)}{bd} \right|$$

Par l'inégalité triangulaire, on peut majorer $|\delta(C) - \delta(P)|$ par ;

$$\begin{aligned} |\delta(C) - \delta(P)| &\leq \left| \frac{d(a-c)}{bd} \right| + \left| \frac{c(d-b)}{bd} \right| \\ |\delta(C) - \delta(P)| &\leq \frac{|a-c|}{b} + \frac{|c(d-b)|}{bd} \\ |\delta(C) - \delta(P)| &\leq (a-c) \left(\frac{1}{b} + \frac{c(d-b)}{bd(a-c)} \right) \end{aligned}$$

Comme les rapports concernent des densités, qui sont inférieures ou égales à 1, on a ;

$$\begin{aligned} |\delta(C) - \delta(P)| &\leq (a-c) \left(\frac{1}{b} + \frac{c}{bd} \right) \\ |\delta(C) - \delta(P)| &\leq (a-c) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Car $\frac{c}{d} \leq 1$ car c'est une densité.

Or, on sait que ;

$$a - c = \text{Aire}(E \cap C) - \text{Aire}(E \cap P) = \text{Aire}(E \cap (C \setminus P)) \leq \text{Aire}(E \cap (C - C_2)) \leq \text{Aire}(C - C_2)$$

Et

$$\begin{aligned} \text{Aire}(C - C_2) &\leq \pi R^2 - \pi(R - \lambda)^2 \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{b} &= \frac{2}{b} = \frac{2}{\pi R^2} \end{aligned}$$

On en déduit que ;

$$|\delta(C) - \delta(P)| \leq \frac{2(a-c)}{b} \leq 2 \times \frac{\pi R^2 - \pi(R - \lambda)^2}{\pi R^2}$$

Or, on a ;

$$2 \times \frac{\pi R^2 - \pi(R - \lambda)^2}{\pi R^2} = \frac{2\lambda(\lambda - 2R)}{R^2}$$

Et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda(\lambda - 2R)}{R^2} = 0$$

Donc

$$|\delta(C) - \delta(P)| \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Si la densité de l'empilement est la même dans tous les polygones du pavage, on conclut qu'elle est égale à la densité de l'empilement dans le plan. Si elle est majorée (resp. minorée) par un réel, alors la densité de l'empilement dans le plan, est aussi majorée (resp. minorée) par ce même réel, ce qui finit la démonstration.

Chapitre 2

Empilements réguliers

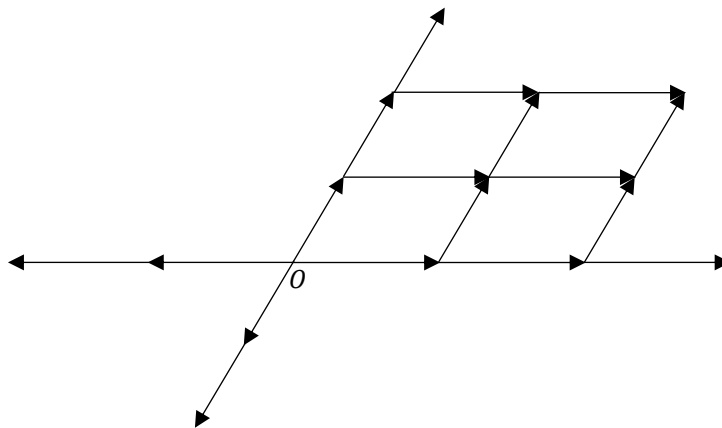
On s'intéresse maintenant aux empilements réguliers quelconques dans le plan et l'on veut démontrer le théorème de Lagrange qui donne la densité maximale d'un empilement dans le plan. Nous allons d'abord donner les définitions qui nous serviront, puis nous énoncerons le théorème de Lagrange avant d'en proposer une démonstration.

2.1 Définitions

Définition 2.1.1

Un réseau est l'ensemble des images d'un point O , l'origine, par les combinaisons à coefficients entiers de deux translations linéairement indépendantes. On pourra retrouver un schéma d'un réseau quelconque à la figure 2.1.2.

Figure 2.1.2 : exemple de réseau



Définition 2.1.3

Un empilement de disques est dit régulier si les centres de ces disques sont tous des points d'un même réseau.

2.2 Théorème de Lagrange

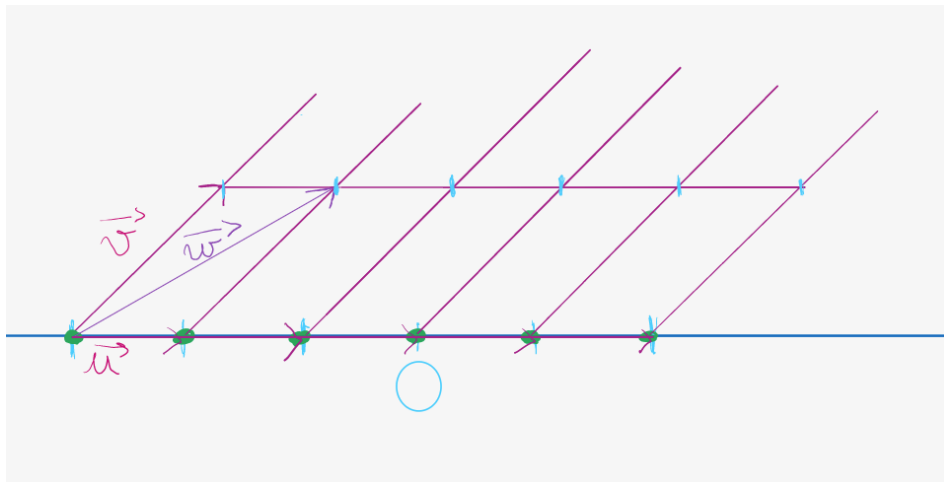
Proposition 2.2.1 (Lagrange)

La densité maximale d'un empilement régulier dans le plan est : $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90\%$.

Démonstration 2.2.2

On veut démontrer la proposition de Lagrange, pour cela, on considère un empilement régulier. Par définition, les disques sont centrés sur les points d'un réseau. On considère un plus court vecteur de ce réseau que l'on note \vec{u} et un autre plus court vecteur qui n'est pas colinéaire à \vec{u} que l'on note \vec{v} . On pourra retrouver un schéma représentatif des vecteurs considérés ci-après (figure 2.2.3).

Figure 2.2.3 : Schéma du réseau considéré

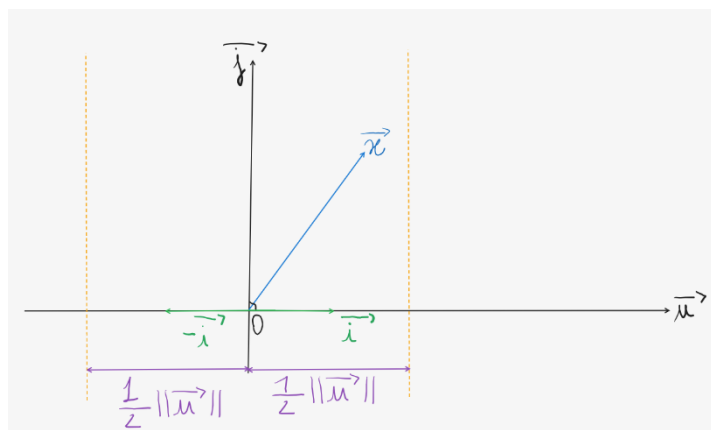


Le vecteur \vec{w} sur le schéma n'est clairement pas un plus court vecteur du réseau parmi ceux qui ne sont pas liés à \vec{u} et on peut montrer que \vec{v} est dans la bande ;

$$\left\{ \vec{x} : |\vec{x} \cdot \vec{u}| \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right\}$$

En effet, considérons le vecteur $\vec{x} = (x, y)$, un vecteur \vec{u} quelconque du plan et un axe (u) dirigé par celui-ci. On considère également un vecteur \vec{j} orthogonal à cet axe. On pourra retrouver un schéma de à la figure 2.2.4.

Figure 2.2.4



On pose $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ un vecteur unitaire dirigé suivant l'axe (u). Sachant que $\vec{i} = (1,0)$, on a ;

$$\vec{x} \cdot \vec{i} = x$$

Et comme $\vec{u} = (\|\vec{u}\|, 0)$, on aussi ;

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = x\|\vec{u}\|$$

On cherche une condition sur x pour que l'inégalité suivante soit vérifiée ;

$$|\vec{x} \cdot \vec{u}| \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2$$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot \|\vec{u}\| \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}\|$$

On en conclut que l'inégalité définit bien une bande du plan.

Si en revanche x n'appartient pas à la bande définie précédemment, autrement dit si x est tel que ;

$$|\vec{x} \cdot \vec{u}| > \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - 2|\vec{x} \cdot \vec{u}| < 0$$

Alors, on s'intéresse aux vecteur $\vec{x} \pm \vec{u}$ suivant le signe du produit scalaire ; si ce dernier est négatif, on considère le vecteur $\vec{x} + \vec{u}$, sinon on considère le vecteur $\vec{x} - \vec{u}$.

$$\|\vec{x} \pm \vec{u}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \pm 2\vec{x} \cdot \vec{u} + \|\vec{u}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2$$

Mais alors, on a trouvé un plus court vecteur que \vec{x} , ce qui est absurde.

Ainsi, si x n'appartient pas à la bande définie par $|\vec{x} \cdot \vec{u}| \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2$, alors ou bien $\vec{x} - \vec{u}$ ou bien $\vec{x} + \vec{u}$ est plus court que \vec{x} , ce qui justifie le fait que \vec{v} appartienne à la bande.

On reprend la démonstration de la proposition de Lagrange.

On sait que ;

$$|\vec{v} \cdot \vec{u}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\cos(\vec{v}, \vec{u})|$$

$$\Rightarrow |\cos(\vec{v}, \vec{u})| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2$$

$$\Leftrightarrow |\cos(\vec{v}, \vec{u})| \cdot \|\vec{v}\| \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}\|$$

$$\Rightarrow |\cos(\vec{v}, \vec{u})| \leq \frac{1}{2}$$

Car $\|\vec{u}\| \leq \|\vec{v}\|$.

On déduit de la dernière inégalité ;

$$\frac{\pi}{3} \leq \widehat{(\vec{v}, \vec{u})} \leq \frac{2\pi}{3}$$

Enfin, on sait que le parallélogramme d'arêtes \vec{u} et \vec{v} admet comme surface ;

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{v}, \vec{u})$$

Et vérifie l'inégalité suivante ;

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{v}, \vec{u}) \geq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin \frac{\pi}{3} \geq 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 2\sqrt{3}$$

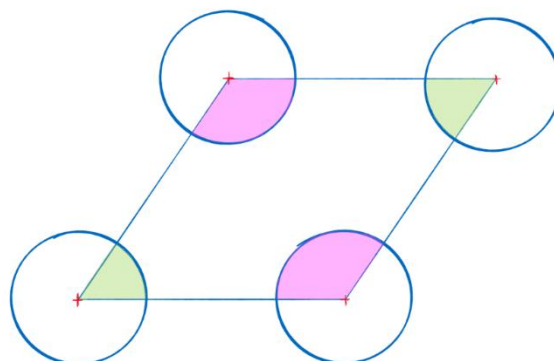
En effet, on peut minorer la norme de \vec{u} par 2 car on considère un empilement régulier : les points du réseau sont tous le centre d'un cercle de rayon unité. Mais alors, un vecteur reliant deux points correspond au moins à un diamètre d'un cercle, donc de norme supérieure ou égale à 2 (voir figure 2.2.5).

Figure 2.2.5



Or, le parallélogramme en question contient quatre secteurs de disques dont la somme des aires est π car à chaque sommet du parallélogramme correspond le centre d'un disque de rayon unité. On pourra retrouver un schéma ci-après (voir figure 2.2.6).

Figure 2.2.6



On en déduit finalement la densité de cet empilement ;

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

□

Chapitre 3

Généralités sur la triangulation de Delaunay et les cellules de Voronoï

A présent, on introduit la notion de la triangulation de Delaunay pour démontrer le théorème de Fejes Tóth à l'aide des arguments fournis par Chang et Wang.

3.1 Généralités sur la triangulation de Delaunay

Définition 3.1.1 (triangulation de Delaunay)

Soit F un ensemble fini de points dans le plan. Une triangulation dont les sommets sont dans F est de Delaunay si pour tout triangle de la triangulation, l'intérieur du cercle circonscrit ne contient aucun point de F .

Proposition 3.1.2 (caractéristique d'Euler)

Si on a $n \in \mathbb{N}$ points dans le plan reliés entre eux de façon à avoir t triangles et a arêtes au total, alors on a toujours

$$n - a + t = 1$$

Proposition 3.1.3

Si on a $n \in \mathbb{N}$ points d'une triangulation de Delaunay dans le plan alors le nombre t de triangles de cette triangulation est donné par

$$t = 2n - 2 - d$$

où d est le nombre de sommets du polygone recouvert par la triangulation.

Démonstration 3.1.4

Gardons les mêmes notations n , d , a et t pour le nombre de points, de sommets, d'arêtes et de triangles respectivement et notons i le nombre d'arêtes intérieures. On a alors ;

$$\begin{cases} n - a + t = 1 \\ a = d + i \end{cases}$$

Or, on sait que chaque triangle a trois arêtes et que chaque arête intérieure est commune à deux triangles, nous pouvons donc établir une relation entre a et t . Pour cela, passons par l'ensemble

$$c = \{(a, t) : a \text{ est une arête de } t\}$$

Son cardinal est donné par ;

$$\text{card}(c) = 3t = 2i + d$$

On a donc le système linéaire ;

$$\begin{cases} n - a + t = 1 \Leftrightarrow a = t + n - 1 & (1) \\ a = d + i \Leftrightarrow i = a - d & (2) \\ 3t = 2i + d \Leftrightarrow d = 3t - 2i & (3) \end{cases}$$

On injecte (1) dans (2) et on a ;

$$i = t + n - 1 - d \quad (4)$$

Puis (4) dans (3) ;

$$\begin{aligned} d &= 3t - 2(t + n - 1 - d) = t - 2n + 2 + 2d \\ \Leftrightarrow t &= 2n - 2 - d \end{aligned}$$

On retrouve bien la caractéristique d'Euler.

Proposition 3.1.5

Le nombre moyen de triangles entourant chaque sommet d'une triangulation de Delaunay est 6.

Démonstration 3.1.6

Considérons l'ensemble ;

$$P = \{(s, t) \text{ avec } t \text{ un triangle de la triangulation et } s \text{ un sommet de } t\}$$

Le cardinal de cet ensemble satisfait ;

$$\text{card}(P) = 3 \times \text{nombre de triangles}$$

En passant par la relation d'Euler (voir proposition 3.1.2) on a ;

$$\text{card}(P) = 3 \times (2n - 2 - d) = n \times \text{nombre moyen de triangles}$$

Donc ;

$$\text{nombre moyen de triangles} = \frac{3 \times (2n - 2 - d)}{n} = \frac{6n - 6 - 3d}{n} = 6 - \frac{6}{n} - \frac{3d}{n}$$

Lorsqu'on se place dans une grande région de la triangulation, c'est-à-dire avec un n assez grand, et si la région n'est pas trop allongée, $\frac{d}{n}$ tend vers 0, donc le nombre moyen de triangles par sommet converge vers 6. De ce fait, chaque sommet est entouré d'environ 6 triangles.

Proposition 3.1.7

Soient deux triangles ABC et BCD ; l'arête BC est commune aux deux triangles. Ces deux triangles s'inscrivent dans une triangulation de Delaunay si et seulement si

$$\hat{A} + \hat{D} \leq \pi$$

Proposition 3.1.8

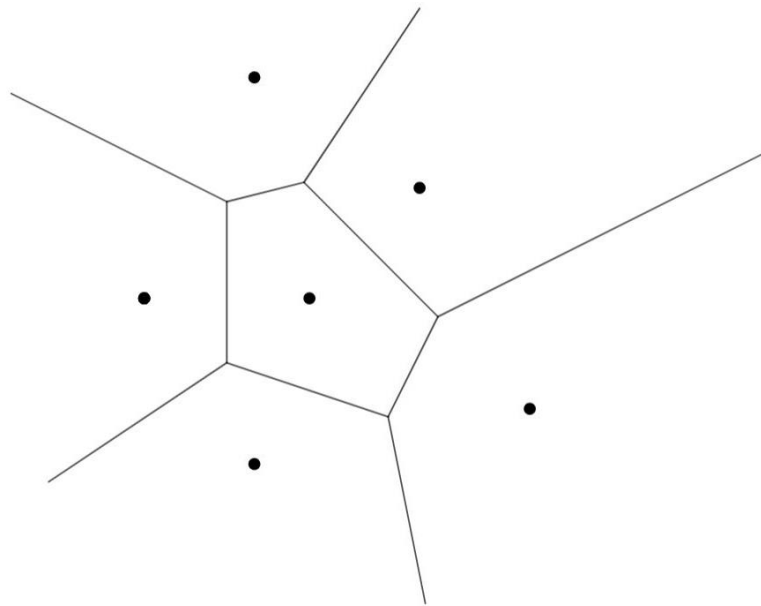
Nous admettons la proposition suivante : il existe une triangulation de Delaunay qui recouvre le plan tout entier pour F un nuage de points uniformément discret (la distance entre deux points quelconques du nuage est toujours minoré par $\varepsilon > 0$) et uniformément dense ($\exists C > 0$ tel que pour tout point x du plan on a $f \in F$ avec $\|x - f\| \leq C$).

3.2. Diagramme de Voronoï

Définition 3.2.1 (diagramme de Voronoï)

Le diagramme de Voronoï d'un ensemble F de points du plan est le pavage du plan par les cellules de Voronoï. La cellule d'un point f de F est l'ensemble des points du plan qui sont plus proches de f que de tout autre point de F . On pourra trouver un exemple de construction à la figure 3.2.2.

Figure 3.2.2 : diagramme de Voronoï d'un ensemble de 6 points



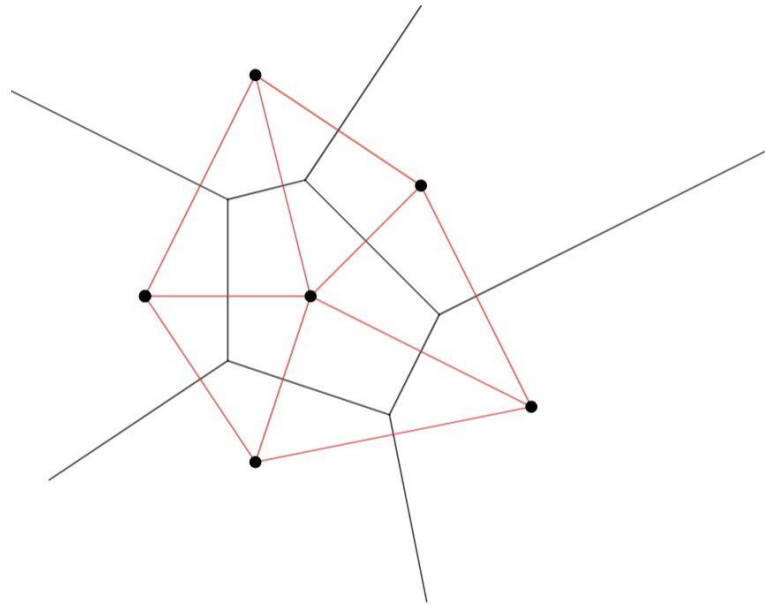
3.3 Lien entre le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay

Proposition 3.3.1 (passage du diagramme de Voronoï à la triangulation de Delaunay)

Pour passer du diagramme de Voronoï à une triangulation de Delaunay, on relie deux points de F par une arête si et seulement si leurs cellules de Voronoï se coupent selon un segment. On obtient alors une partition du plan en polygones. Ceux qui ne sont pas des triangles sont inscrits

dans des cercles. Il reste à les subdiviser en triangles arbitrairement. On pourra trouver un exemple de construction à la figure 3.3.2.

Figure 3.3.2



Proposition 3.3.3 (passage de la triangulation de Delaunay au diagramme de Voronoï)

Pour passer de la triangulation de Delaunay au diagramme de Voronoï, on prend les sommets des triangles comme germes des cellules ; les arêtes du diagramme sont portées par les médiatrices des arêtes de la triangulation.

Chapitre 4

Argument de Chang et Wang

On veut à présent démontrer le théorème de Fejes Tóth qui donne la densité maximale de tout empilement. Pour cela, nous allons utiliser un argument apporté par les mathématiciens Chang et Wang qui passe par la triangulation de Delaunay.

4.1. Quelques résultats préliminaires

Théorème 4.1.1

Pour tout ensemble fini de points dans le plan, il existe une triangulation de Delaunay.

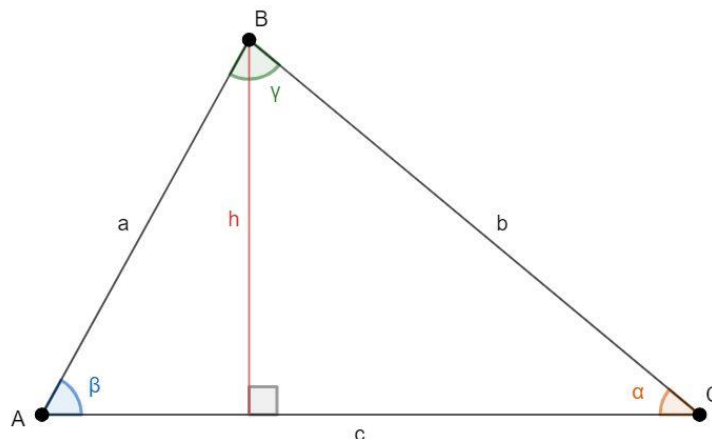
Théorème 4.1.2 (loi des sinus)

Soit un triangle ABC quelconque d'angles α , β et γ et de côtés de longueur a , b et c (voir figure 4.1.3). Alors on a ;

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

Figure 4.1.3



Démonstration 4.1.4

Démontrons la loi des sinus, pour cela, considérons h , l'une des hauteurs du triangle ABC (voir figure 4.1.3). L'aire de ce triangle est donnée par ;

$$A_{ABC} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c \cdot b \sin \alpha}{2} = \frac{c \cdot a \sin \beta}{2}$$

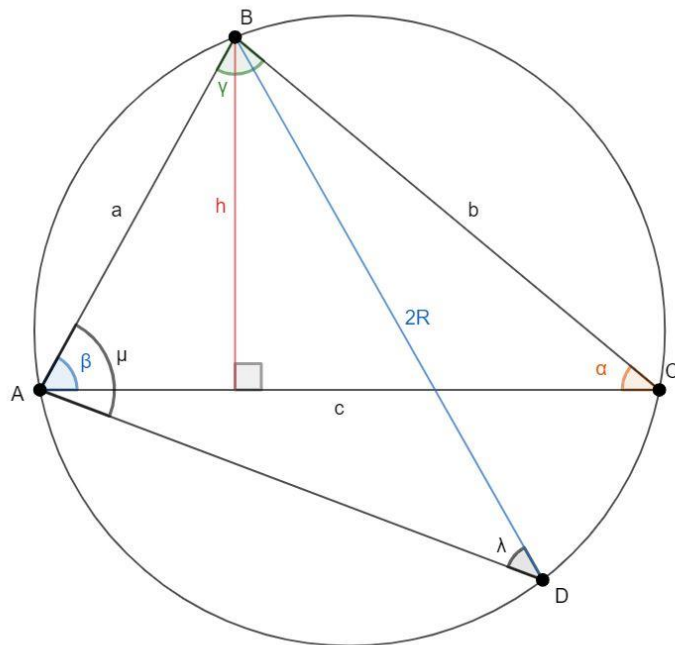
$$\Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Et en prenant une autre hauteur du triangle on montre facilement que ;

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Montrons à présent l'égalité avec $2R$. Pour cela, regardons la figure 4.1.5.

Figure 4.1.5



On considère le cercle (C) de rayon R circonscrit au triangle ABC . Nous traçons un autre triangle ABD tel que l'un de ses côtés, AD , soit égal au diamètre du cercle (C) , qui lui est également circonscrit, et que l'un de ses angles, λ , délimite le même arc de cercle que α . On a donc ;

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \\ \mu = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Or,

$$\sin \lambda = \frac{a}{2R} = \sin \alpha$$

Donc

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

□

Lemme 4.1.6

Dans une triangulation de Delaunay des centres d'un empilement saturé, le plus grand angle de chaque triangle est compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

Démonstration 4.1.7 :

On veut démontrer le lemme 4.1.6, pour cela, on considère un triangle ABC de la triangulation de Delaunay. Soit \hat{A} son plus grand angle. \hat{A} est forcément plus grand que la moyenne des angles d'un triangle, autrement dit ;

$$\hat{A} \geq \frac{\pi}{3}$$

Supposons par l'absurde que $\hat{A} \geq \frac{2\pi}{3}$, donc le plus petit angle du triangle ABC , que nous notons \hat{B} , est forcément tel que ;

$$\hat{B} \leq \frac{\pi - \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin \hat{B} \leq \frac{1}{2}$$

Comme les sommets du triangle sont les centres des disques de l'empilement, on a

$$AC \geq 2$$

En passant par la loi des sinus (cf. théorème 4.1.2), on peut minorer R , le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC ;

$$2R = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \geq 4 \Rightarrow R \geq 2$$

Mais il est alors possible d'ajouter un disque de rayon unité au centre de ce cercle circonscrit sans qu'il n'empiète sur un autre disque de l'empilement. Ceci contredit l'hypothèse de saturation donc

$$\hat{A} \leq \frac{2\pi}{3}$$

4.2. Théorème de Fejes Tóth

Théorème 4.2.1 (Fejes Tóth)

La densité maximale d'un empilement dans le plan est ;

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90\%$$

Démonstration 4.2.2

Par le lemme 4.1.6, nous pouvons majorer la densité de l'empilement dans un triangle de la triangulation. En effet, soit ABC un triangle de la triangulation de Delaunay en question. L'aire de ce triangle \mathcal{A}_{ABC} est donnée par ;

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{2}$$

Supposons que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit le plus grand angle de ce triangle, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (cf. démonstration 4.1.7) et donc

$$\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et comme chaque sommet du triangle est un centre d'un disque de l'empilement, ses côtés sont minorés par 2, ainsi ;

$$\mathcal{A}_{ABC} \geq \frac{2 \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3}$$

La somme des angles d'un triangle étant égale à π , chaque triangle contient au moins l'équivalent en aire d'un demi-disque. Nous pouvons finalement majorer $\delta(E_{\text{triangle}})$, la densité de l'empilement associée à un triangle, par ;

$$\delta(E_{\text{triangle}}) = \frac{\text{Aire(demi - disque)}}{\text{Aire(triangle)}} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Pour pouvoir étendre cette majoration à l'empilement dans tout le plan il faut montrer que :

- i) La triangulation de Delaunay recouvre tout le plan.
- ii) Les diamètres des triangles de Delaunay sont bornés.

En ce qui concerne le point (i), nous admettons la proposition 3.1.8 qui s'applique à notre cas, en effet, les centres des disques d'un empilement saturé forment bien un nuage de points uniformément discret et dense.

Démonstration 4.2.3

Montrons que les diamètres des triangles de Delaunay sont bornés. Soit ABC l'un de ces triangles, on a par la loi des sinus (cf. théorème 4.1.2) ;

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle.

L'empilement étant supposé saturé, on a forcément $R \leq 2$ (voir démonstration 4.1.7), donc,

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \leq 4$$

Donc tous les côtés du triangle, le diamètre en particulier, sont majorés par 4.

Chapitre 5

Empilement de demi-disques

Dans cette dernière partie, nous allons nous intéresser à un empilement de demi-disques et surtout de sa densité. Nous étudions un empilement qui pourrait s'apparenter à l'empilement hexagonal, mais utilisé avec des demi-disques.

5.1 Exemple d'un empilement de demi-disques

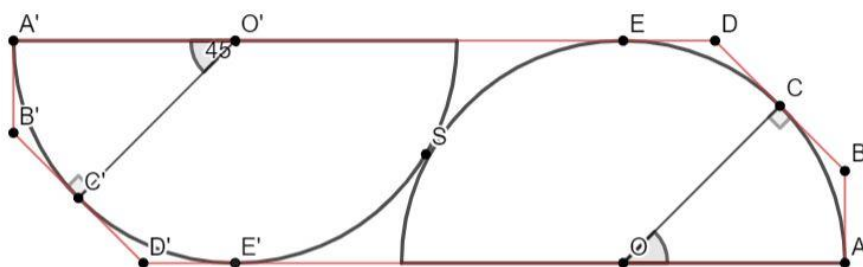
Proposition 5.1.1

La densité maximale d'un empilement de demi-disques est strictement supérieure à $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ qui est la densité maximale d'un empilement de disques.

Exemple 5.1.2

Soient deux demi-disques (D) et (D') de rayon unité et de centres O et O' respectivement, prenons E et E' deux points de ces demi-disques tels que (OE) et $(O'E')$ soient orthogonales à leur diamètre. On met (D) et (D') côte à côte de façon à ce qu'ils soient tangents l'un à l'autre au point S et que le quadrilatère $OEO'E'$ soit un rectangle. Prenons un point C de (D) tel que $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{4}$ et traçons la tangente de (D) en ce point qui traversera le rectangle circonscrit au demi-disque (D) en D et B . En procédant de même pour le demi-disque (D') , on obtient l'hexagone $ABDEA'B'D'E'$. La construction est représentée à la figure 5.2.3.

Figure 5.1.3



5.2 Calcul de la densité

On veut calculer la densité à l'intérieur de l'hexagone représenté à la figure 5.2.3.

Cet empilement présente une symétrie centrale par rapport au point S , donc $BD = B'D'$ et les droites (BD) et $(B'D')$ sont parallèles, ainsi, l'hexagone $ABDEA'B'D'E'$ pave le plan.

On note (H) l'hexagone $ABDEA'B'D'E'$ et \mathcal{A}_H son aire. La densité à l'intérieur de (H) est donnée par ;

$$\delta_H(E) = \frac{\text{Aire (deux demi - disques)}}{\mathcal{A}_H} = \frac{\pi}{\mathcal{A}_H}$$

Calcul de \mathcal{A}_H

Il est facile de voir, par symétrie, que tous les triangles OAB , OBC , OCD , ODE , $O'A'B'$, $O'B'C'$, $O'C'D'$ et $O'D'E'$ sont égaux. On a alors ;

$$\mathcal{A}_H = 8 \times \mathcal{A}_{ODE} + \mathcal{A}_{O'E'OE}$$

\mathcal{A}_{ODE} étant l'aire du triangle rectangle ODE et $\mathcal{A}_{O'E'OE}$ l'aire du rectangle $O'E'OE$.

On a ;

$$\begin{aligned} \tan \widehat{EOD} &= \frac{ED}{EO} \\ \Rightarrow ED &= EO \tan \widehat{EOD} = \tan \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

On en déduit ;

$$\mathcal{A}_{ODE} = \frac{ED \cdot EO}{2} = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{8}$$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle $OE'O'$ on a ;

$$OE' = \sqrt{OO'^2 - E'O'^2} = \sqrt{3}$$

Donc ;

$$\mathcal{A}_{O'E'OE} = E'O' \times OE' = \sqrt{3}$$

Finalement ;

$$\mathcal{A}_H = 8 \times \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{8} + \sqrt{3} = 4 \tan \frac{\pi}{8} + \sqrt{3}$$

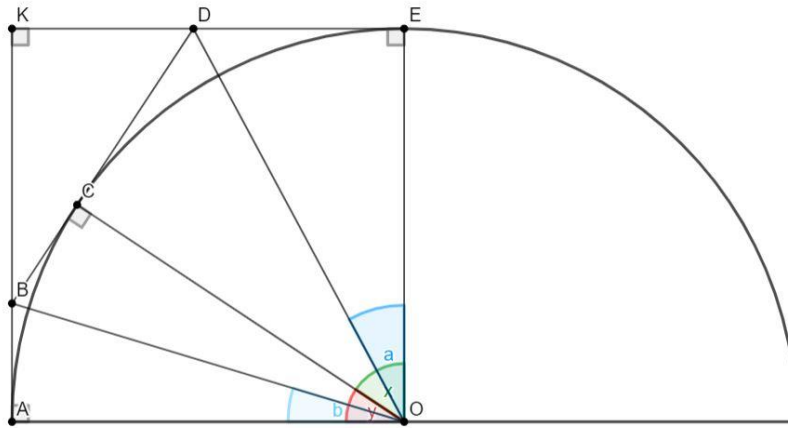
Calcul de $\delta_H(E)$

$$\delta(E) = \frac{\pi}{\mathcal{A}_H} = \frac{\pi}{4 \tan \frac{\pi}{8} + \sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3} - 4(1 - \sqrt{2})} \approx 0.9270$$

Vérification

Vérifions qu'en prenant le point C tel que $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{4}$ soit le meilleur choix pour que l'aire de l'hexagone soit la plus petite possible. Pour cela, considérons la figure 5.2.1.

Figure 5.2.1



Prenons cette fois-ci C un point quelconque du côté gauche du demi-disque et notons \mathcal{A}_T l'aire du triangle BKD . On veut C tel que \mathcal{A}_T soit la plus grande possible.

C peut être désigné par l'angle $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC}) = x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ou $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Essayons d'écrire $a = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD})$ et $b = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ en fonction de x . On a par Pythagore :

$$\begin{cases} CD^2 = OD^2 - OC^2 = OD^2 - 1 \\ ED^2 = OD^2 - OE^2 = OD^2 - 1 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} CD = ED \\ a = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) = \frac{x}{2} \end{cases}$$

De même, par des arguments similaires, on trouve

$$\begin{cases} AB = CB \\ b = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{y}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} a = \frac{x}{2} \\ b = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \end{cases}$$

On a ;

$$\mathcal{A}_T = \frac{1}{2}KB \times KD = \frac{1}{2}(1 - \tan a)(1 - \tan b) = \frac{1}{2}(1 - \tan \frac{x}{2})(1 - \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}))$$

Reste à étudier la variation de la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_T &: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \frac{1}{2}(1 - \tan \frac{x}{2})(1 - \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})) \end{aligned}$$

On pose $u = \frac{x}{2}$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Etudier la variation de la fonction \mathcal{A}_T revient à étudier la variation de la fonction

$$\begin{aligned} f &: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\mapsto (1 - \tan u)(1 - \tan(\frac{\pi}{4} - u)) \end{aligned}$$

Par la formule de trigonométrie $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ on a ;

$$\tan(\frac{\pi}{4} - u) = \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \frac{\cos u - \sin u}{\cos u + \sin u}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(u) &= \left(1 - \frac{\sin u}{\cos u}\right)\left(1 - \frac{\cos u - \sin u}{\cos u + \sin u}\right) \\ f(u) &= \left(\frac{\cos u - \sin u}{\cos u}\right)\left(\frac{2 \sin u}{\cos u + \sin u}\right) \\ f(u) &= \frac{2 \sin u (\cos u - \sin u)}{\cos u (\cos u + \sin u)} = \frac{a(u)}{b(u)} \end{aligned}$$

On remarque que

$$a(u) = 2b(u) - 2$$

En effet,

$$\begin{aligned} a(u) &= 2 \sin u (\cos u - \sin u) = 2(\sin u \cos u - \sin^2 u) \\ a(u) &= 2(\sin u \cos u + \cos^2 u - 1) \\ a(u) &= 2 \cos u (\cos u + \sin u) - 2 = 2b(u) - 2 \end{aligned}$$

Donc $f(u) = 2 - \frac{2}{b(u)}$ et sa dérivée est donnée par ;

$$f'(u) = \frac{2b'(u)}{(b(u))^2}$$

$(b(u))^2$ étant toujours positif, il suffit d'étudier le signe de $b'(u)$ pour déterminer la variation de f .

On a ;

$$b'(u) = -\sin u (\cos u + \sin u) + \cos u (\cos u - \sin u)$$

$$b'(u) = -2 \sin u \cos u + (\cos^2 u - \sin^2 u)$$

$$b'(u) = \cos 2u - \sin 2u$$

$$b'(u) = \cos x - \sin x$$

Regardons le signe de $\cos x - \sin x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

$$\cos x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \sin x \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{4}$$

On a donc ;

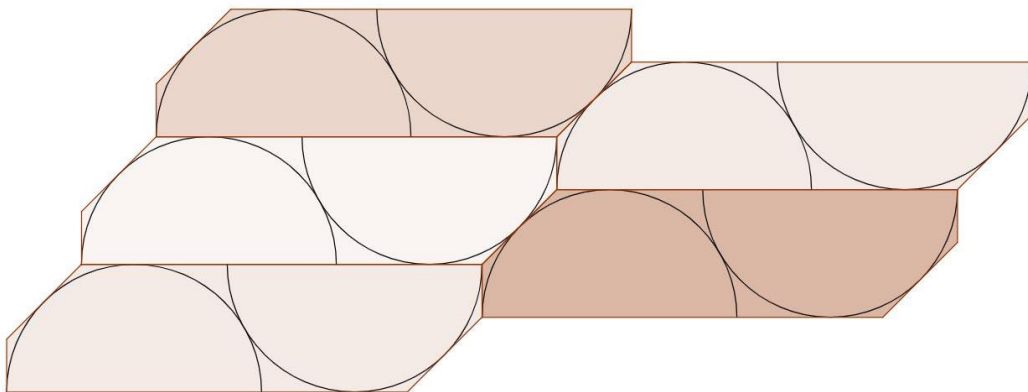
$$\begin{cases} f'(u) \geq 0 \text{ pour } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow u \in [0, \frac{\pi}{8}] \\ f'(u) \leq 0 \text{ pour } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow u \in [\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$$

On en déduit que la fonction \mathcal{A}_T admet un maximum en $x = \frac{\pi}{4}$.

5.3 empilement étendu à tout le plan

L'hexagone $ABDEA'B'D'E'$ (voir figure 5.1.3) pave le plan. On peut donc étendre cet empilement de demi-disques sur tout le plan comme le montre la figure 5.3.1.

Figure 5.3.1



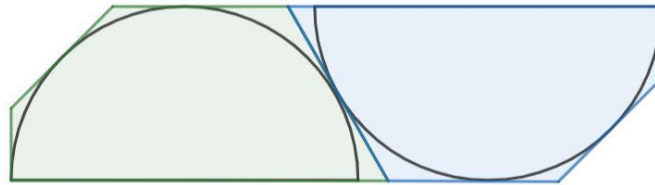
Par la proposition 1.2.10, on a que la densité de cet empilement dans tout le plan est égale à la densité de l'empilement dans chacun des hexagones du pavage, et cette densité est égale à (cf. partie 5.2) ;

$$\frac{\pi}{\sqrt{3} - 4(1 - \sqrt{2})} > \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

5.4 Autre cas d'empilement de demi-disques de densité meilleure

Nous pouvons remarquer que l'empilement présenté dans la partie 5.1 correspond à un pavage pentagonal où chacun de ses pavés est circonscrit à un demi-disque de l'empilement (voir figure 5.4.1). La densité dans chacun des pavés, qui sont des pentagones, est $\frac{\pi}{\sqrt{3}-4(1-\sqrt{2})}$.

Figure 5.4.1



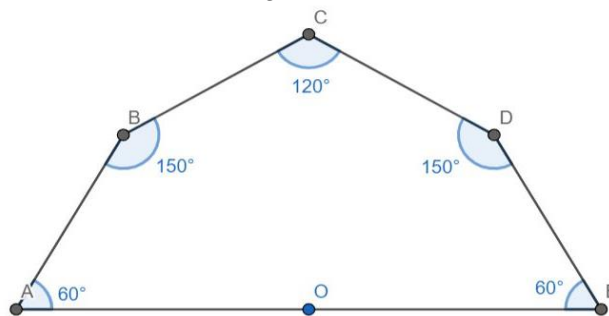
On veut trouver un autre pentagone circonscrit à un demi-disque, qui pave le plan et qui est d'aire inférieure à l'aire des pentagones de la figure 5.4.1. Dans ce cas, on pourrait construire un empilement de densité supérieure à celle trouvée dans la partie 5.2.

Proposition 5.4.2

Si un pentagone possède deux côtés opposés égaux et que ces côtés forment avec deux autres côtés non adjacents des angles supplémentaires, alors ce pentagone pave le plan.

Regardons le pentagone présenté à la figure 5.4.3.

Figure 5.4.3

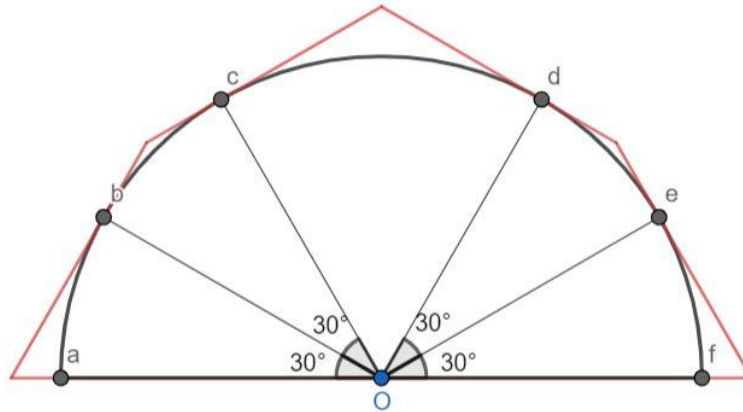


Ce pentagone est tel que ;

$$AB = BC = CD = DE = \tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{12} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}$$

Par la proposition 5.4.2, il pave le plan. Ce pentagone a été obtenu en traçant des droites tangentes à un demi-disque comme montré à la figure 5.4.4.

Figure 5.4.4



Les droites tangentes ont été tracées aux points b , c , d , et e du demi-disque de rayon unité avec

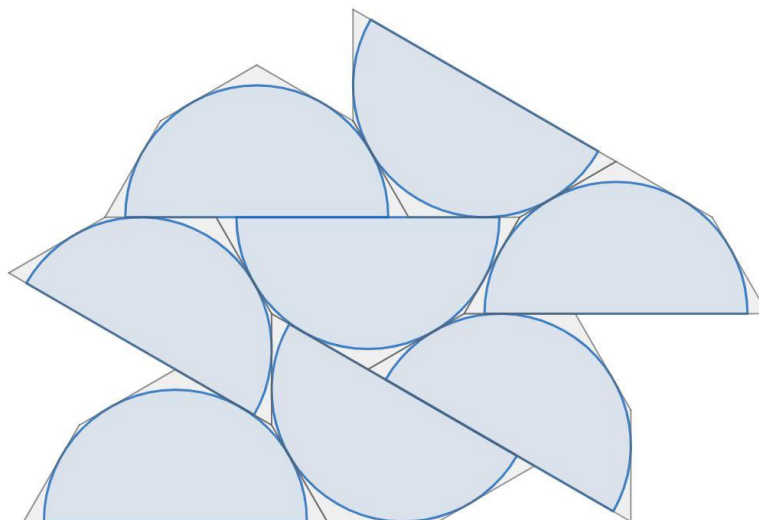
$$\widehat{boa} = \widehat{cob} = \widehat{eod} = \widehat{foe} = \frac{\pi}{6}$$

La densité dans ce pentagone est égale à ;

$$\frac{\pi}{2 \times 4 \left(\frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{12}}{2} \right)} = \frac{3\pi}{8(3 - \sqrt{3})} \approx 0.929$$

En étendant l'empilement à tout le plan, comme le montre la figure 5.4.5, on a une densité d'empilement égale à la densité dans un pentagone.

Figure 5.4.5



Bibliographie

1. T. Fernique, *Empilements de disques de densité maximale*, pages 1 à 4, 2019, <https://lipn.univ-paris13.fr/~fernique/geomateriaux2/fernique.pdf>

Ce texte nous a aidé à démontrer la densité maximale d'un empilement régulier dans le plan conjecturée par Lagrange et qui est $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

This paper helped us prove that the densest regular packing of circles is $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, a result first posed by Lagrange.

2. H.-C. Chang et L.-C. Wang, *A simple proof of Thue's theorem on circle packing*, 2010 <https://arxiv.org/pdf/1009.4322.pdf>

Nous avons démontré à l'aide de ce texte que la densité maximale d'un empilement dans le plan est $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ et nous a permis d'introduire la notion de triangulation de Delaunay.

We proved, using the text, that the densest circle packing is $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ and it allowed us to introduce Delaunay triangulation.

3. Axel Thue, *Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene*, Skrifter udg. af Videnskabs-Selskabet i Christiania., 1. Math.-naturv. kl. ; 1910,1.

Ce texte est en lien avec le précédent mais ne fournit pas de réelle preuve du théorème de Thue.

This paper is related to the previous but it doesn't provide a rigorous proof of Thue's theorem.

4. https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Vorono%C3%AF

Ce site Internet nous a aidé à mieux comprendre le diagramme de Voronoï et le lien avec la triangulation de Delaunay. Cela nous a permis par la suite de montrer quelques résultats sur les cellules de Voronoï.

This website gave us a better understanding of Voronoï diagram and the link with Delaunay triangulation. This allowed us later to show some results on Voronoï cells.

5. https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangulation_de_Delaunay

Sur ce site Internet, nous avons mieux compris la triangulation de Delaunay et avons retrouvé le lien avec les cellules de Voronoï. Nous avons aussi retrouvé sur ce site la relation qui relie le nombre de points n d'une triangulation de Delaunay dans le plan, t le nombre de triangles de cette triangulation et d le nombre de sommets du polygone recouvert par la triangulation :

$$t = 2n - 2 - d.$$

This website gave us a better understanding of Delaunay triangulation and we recovered the link with Voronoï cells. We also recovered the formula linking the number of points n in a Delaunay Triangulation in the plane, t the number of triangles in the triangulation and d the number of vertices of the polygon covered by triangulation :

$$t = 2n - 2 - d.$$