Pour aller moins loin : l'explosion continue en classe

Demandez la brochure Mathématiques, l'explosion continue ! Cette publication commune de la Société Française de Statistique, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles et la Société Mathématique de France, soutenue par Cap'Maths et la Fondation Sciences Mathématiques de Paris, paraît en octobre 2013. 25 textes accessibles à un large public parlent des mathématiques et de ce à quoi elles servent.

Pourrait on faire usage de ces textes en classe ? Pas sûr, ce n'est pas la vocation première de ce livre de 176 pages. Néanmoins, nous avons tenté de construire des activités utilisables en classe, à divers niveaux, pour 8 des chapitres. Les auteurs nous ont bien aidé, c'est un plaisir de remercier *Serge Abiteboul, Grégoire Allaire, Etienne Ghys, Christophe Delaunay, Julie Delon, Agnès Desolneux, François Jouve, Jean-Louis Nicolas, Nicolas Schabanel, Yannick Viossat et Michel Waldschmidt*.

Les activités ont souvent pour but de familiariser les élèves avec les idées les plus simples des chapitres. Elles ne suffisent pas à mettre à leur portée l'intégralité des textes, ce n'est qu'un coup de pouce qui rendra service, nous l'espérons. Une typographie différente signale les parties rédigées directement à l'intention des élèves.

N'hésitez pas à nous écrire pour obtenir des éclaicissements, des documents supplémentaires ou si vous rencontrez des difficultés techniques.

Claudie Asselain-Missenard, Pierre Pansu (pierre.pansu@math.u-psud.fr)

activité	En lien avec l'article	Niveau
1	Le théorème de Green-Tao et autres secrets des nombres premiers	Collège, lycée
2	Cryptage et décryptage : communiquer en toute sécurité	Primaire, collège
3	Couper, attendrir, trancher, réduire : un conte culinaire sur la résolution informatique des problèmes difficiles	Primaire, collège, lycée
4	La restauration de vieux films	Primaire, collège, lycée
5	Comment faire coopérer des individus égoïstes ?	Primaire, collège, lycée
6	Chercher sur le Web : juste un point fixe et quelques algorithmes	Primaire, collège, lycée
7	Le théorème du soufflet	Collège, lycée
8	A la recherche de la forme idéale	Collège, lycée

1- Le théorème de Green-Tao et autres secrets des nombres premiers
Une activité pour le collège et le lycée

Les nombres premiers intéressent les mathématiciens depuis l'Antiquité et l'article de Michel Waldschmidt met bien en lumière la multitude de conjectures à leur sujet, qui s'énoncent facilement mais se démontrent difficilement. Ils constituent un exemple probant de ce glissement qui se produit parfois en mathématiques : un jeu de l'esprit gratuit et intrigant peut trouver son utilité de façon inattendue.

Pour aborder le sujet dès la 6ème, voici une activité pour fabriquer un bel outil, le crible d'Eratosthène. Cette activité est ici présentée comme un travail individuel mais peut aussi faire l'objet d'une recherche collective dans le cadre de la classe.

1- Un nombre premier est un nombre (entier) qui admet exactement deux diviseurs, lui-même et 1. Donne un exemple de nombre premier. Donne un exemple de nombre qui ne soit pas premier. A ton avis, avec cette définition, 1 lui-même est-il un nombre premier ?

2- Ceci est un tableau des nombres entiers de 1 à 100, bien rangés.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Voici une méthode pour trouver tous les nombres premiers de ce tableau.
Il te faut pour cela suffisamment de crayons de couleurs.

a) Barre le 1, puisqu'on s'est mis d'accord : il n'est pas premier.
b) Choisis une couleur. 2 est un nombre premier : tu l'entoures. Par contre, les multiples de 2 autres que 2 ne sont pas premiers : ils ont au moins trois diviseurs 1, 2 et eux-mêmes. Barre les, avec la couleur qui t'a servi à entourer le 2.
c) Change de couleur. 3 est premier : il n'a pas d'autre diviseur que lui même et 1. Il serait déjà barré s'il était multiple d'un nombre situé avant lui dans le tableau. Entoure le 3. Puis barre tous les multiples de 3 autres que 3, qui eux ne sont pas premiers, avec la couleur qui t'a servi à entourer le 3. Quels sont les nombres qui ont été barrés deux fois ?

d) Change de couleur. Le premier nombre non encore barré est 5. Il est certainement premier car s'il avait un diviseur, ce diviseur serait avant lui, et 5 serait déjà barré. Entoure-le puis barre ses multiples.
e) Continue avec ce principe. A chaque changement de couleur, le premier nombre non encore barré est premier, tu l'entoures, puis tu barres ses multiples.
f) quand tu arrives à 11, ton travail est fini !

En effet, les multiples de 11 du tableau ont déjà été barrés, parce qu'ils sont multiples d'un autre nombre plus petit que 11 (5×11, 7×11…). Le premier multiple de 11 qu'il te faudrait barrer est 11×11, mais 11×11 vaut 121, et 121 est trop grand, il n'est pas dans ton tableau. Comme le raisonnement fait pour 11 vaut aussi pour les suivants (13, 17…), tu peux être tranquille. Tous les nombres qui restent sont premiers et tu peux les entourer.

3- Utilise ton tableau pour faire la liste de tous les nombres premiers plus petits que 100 (les nombres entourés). Observe ta liste et fais des remarques.
Observe aussi la disposition des nombres barrés en fonction de la couleur de la barre et fais le plus possible de remarques.

Ce tableau porte le nom de crible d'Eratosthène.
Un crible, c'est un tamis : ici un tamis qui sert à trier les nombres premiers. Il ne reste plus qu'eux à la fin.
Eratosthène est un mathématicien grec qui vivait à Alexandrie (actuelle Egypte) il y a très longtemps (au troisième siècle avant Jésus-Christ). Son nom est associé aux nombres premiers mais il a aussi été le premier à mesurer précisément le rayon de la Terre.

2- Cryptage et décryptage : communiquer en toute sécurité
Une activité pour le primaire ou le collège

Les mathématiques sont utilisées pour sécuriser les outils modernes de communication ou d'échange. Mais, dans le simple numéro de chaque carte bancaire se cache déjà un code de contrôle, élaboré à partir d'une idée mathématique ancienne et simple qui ne demande que de savoir calculer des doubles et faire des additions.

Un numéro de carte bancaire, c'est un très grand nombre. Combien de chiffres comporte-t-il ? Comment sont-ils groupés ? D'habitude, on groupe plutôt les chiffres par tranches de trois… En fait, dans les modèles les plus courants, les six premiers chiffres sont des identifiants liés à la banque émettrice. Les neuf suivants sont des identifiants spécifiques de la carte elle-même et le seizième chiffre est un code de contrôle, qui se déduit des précédents par un calcul. Et, du coup, permet de vérifier si un numéro de carte bancaire a, ou non, l'air valide.

1- Vérifier la validité d'un numéro complet de carte bancaire
Il te suffit de savoir doubler et additionner pour effectuer cette vérification.

Ecris tes seize chiffres bien espacés.
3 1 6 5 4 1 2 3 8 7 7 2 3 9 7 8
En dessous, écris un nouveau nombre obtenu en laissant tel quel un chiffre sur deux à partir de la droite, et en remplaçant chacun des autres chiffres par son double :
3 1 6 5 4 1 2 3 8 7 7 2 3 9 7 8
6 1 12 5 8 1 4 3 16 7 14 2 6 9 14 8
Ensuite ajoute tous les chiffres que tu viens d'écrire :
6 + 1 + 1 + 2 +5 + 8 + 1 + 4 +3 + 1 + 6 + 7 +1 + 4 + 2 + 6 + 9 + 1 + 4 + 8 = 80
Si le résultat est un multiple de dix (c'est-à-dire se termine par 0) le numéro de carte a des chances d'être valide.

Applique cette technique pour dire si les numéros suivants semblent ou non valides :
5131 7512 3456 7890
4275 3156 0372 5492
4417 1234 5678 9113

2- Calculer le quinzième chiffre

Tu vas maintenant te transformer en fabricant de carte, et fabriquer des numéros de carte qui seront valides.

Supposons que tu disposes des quinze premiers chiffres. Il te faut maîtriser 2 outils :

- savoir doubler un chiffre
- quand un de ces doubles dépasse 10, le remplacer par la somme de ses chiffres.

On appelle « double trafiqué » le nombre de 1 chiffre ainsi obtenu (soit le vrai double, soit la somme des chiffres du double.)

Exemple : le double trafiqué de 3 est 6, celui de 8 est 7 (1+6).

Ecris tes quinze chiffres bien espacés. En dessous, écris un nouveau nombre de quinze chiffres ainsi fabriqué. Un chiffre sur deux, à partir de la droite, est remplacé par son « double trafiqué ». Un chiffre sur deux est laissé tel quel.

Exemple : on a le début du numéro. On cherche le seizième chiffre :

3165 4123 8772 397 ?

On écrit les quinze premiers

3 1 6 5 4 1 2 3 8 7 7 2 3 9 7

On les transforme comme indiqué

6 1 3 5 8 1 4 3 7 7 5 2 6 9 5

Ensuite ajoute tous les chiffres que l'on vient d'écrire :

6 + 1 + 3 +5 + 8 + 1 + 4 +3 + 7 +7 +5 + 2 + 6 + 9 + 5 = 72

Le chiffre des unités du nombre ainsi trouvé est 2. Le chiffre manquant est le complément à dix de ce chiffre des unités, soit 8.

Le numéro complet est : 3165 4123 8772 3978

Calcule le dernier chiffre des numéros de carte bancaire dont voici le début :

5131 7512 3456 789

4275 3156 0372 549

4417 1234 5678 911

Ce code de contrôle permet de vérifier rapidement que le numéro d'une carte bancaire a l'air valide et de détecter des erreurs de saisie. Mais attention, il ne les détecte pas toutes (exemple : si deux chiffres éloignés de 2 places sont intervertis, cela ne se verra pas) Il a été inventé dans les années 1960 par un scientifique du nom de Luhn, qui a donné son nom à la formule de calcul décrite ci-dessus.

Compléments possibles :

- la preuve par 9 pour les multiplications
- algorithmique au lycée: programmation de l'algorithme de contrôle de validité

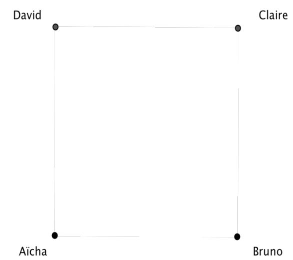
http://maths-au-quotidien.fr/lycee/DM/Luhn.pdf

3- Couper, attendrir, trancher, réduire : un conte culinaire sur la résolution informatique des problèmes difficiles
Une activité pour primaire, collège, lycée

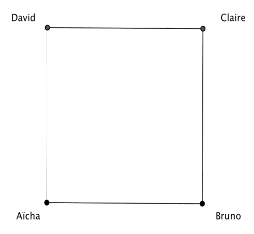
De nombreux problèmes concrets d'ordonnancement, de logistique, se ramènent à travailler sur un dessin simple, fait de points reliés par des traits, qu'on appelle un graphe. Savoir si ces problèmes peuvent être résolu par le calcul sur ordinateur constitue à la fois enjeu industriel et une des grandes énigmes de la science. Nicolas Schabanel nous y amène de façon plaisante, suivons le pas à pas.

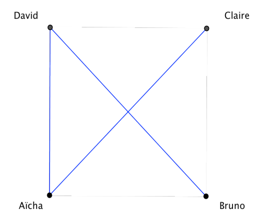
L'activité rédigée ici est proposée comme un travail individuel. Elle peut aussi faire l'objet, avec profit, d'un travail de groupe.

Aïcha, Bruno, Claire et David organisent entre eux un petit tournoi de ping-pong. Il y a deux tables. Attention, Aïcha ne veut pas jouer contre Bruno, qui ne veut pas jouer contre Claire, qui ne veut pas jouer contre David. Comment répartir les joueurs entre les deux tables sans faire de mécontent ? Je fais un dessin : je dispose les joueurs en carré.

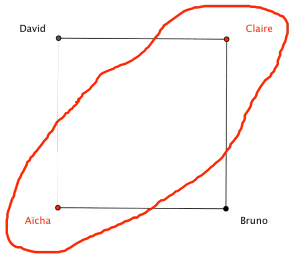


Je relie par un trait de crayon les joueurs qui ne veulent pas jouer l'un contre l'autre





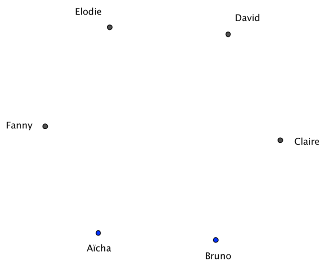
(à gauche) et par un trait de couleur ceux qui veulent bien jouer l'un contre l'autre (à droite). Aïcha veut bien jouer contre Claire, je les mets à la première table et je les entoure :



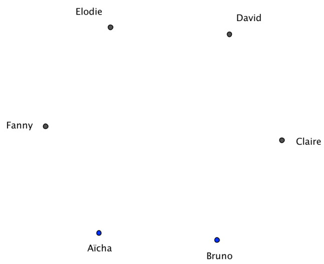
Je constate que personne n'est mécontent, j'ai trouvé la solution.

Maintenant, à toi de jouer avec 6 joueurs, Aïcha, Bruno, Claire, David, Elodie et Fanny. Il faut former deux poules pour le premier tour. A chaque table, chaque joueur va jouer tour à tour contre chacun des autres membres de sa poule. David ne veut pas affronter sa soeur Fanny. Elodie préfère ne pas jouer contre les garçons. Aïcha redoute Claire et Elodie, qui sont plus grandes qu'elle. Fanny, qui a un an de plus qu'Aïcha, veut bien jouer contre Claire, mais pas contre Bruno. Claire, qui est gauchère, ne veut pas jouer contre David, qui est gaucher lui aussi.

1- Les joueurs se sont assis en rond.



Incompatibilités



Compatibilités

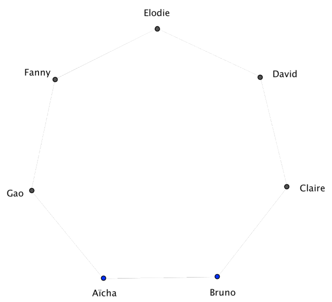
Sur le dessin de gauche, trace un trait au crayon entre deux joueurs quand l'un des deux ne veut pas jouer contre l'autre.
Sur le dessin de droite, trace un trait en couleur entre deux joueurs quand ils acceptent de jouer ensemble.

2. Est ce qu'on peut répartir les 6 joueurs entre les deux tables de sorte que chacun joue seulement avec des joueurs contre qui il veut bien jouer ?

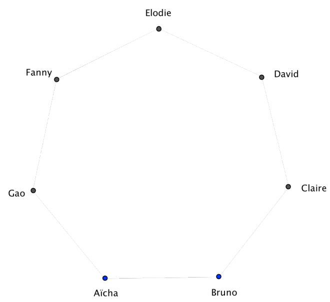
3. Sur la figure de gauche, souligne de rouge les joueurs de la première table, de noir

les joueurs de la seconde table. Entoure ensuite d'un contour rouge les joueurs de la table rouge, et eux seulement.
Tu constates que ton contour rouge coupe chacun des traits au crayon que tu avais tracés. C'est le signe que toutes les interdictions ont bien été respectées. On ne trouve aucun des traits (un trait indique une incompatibilité) à l'intérieur d'un même groupe.

4- Gao demande à rejoindre le tournoi. Aïcha, Elodie et Fanny ne sont pas d'accord, elles ne veulent pas jouer contre lui. Tout de même, le groupe finit par accepter Gao. Nous voilà avec 7 joueurs.



Incompatibilités



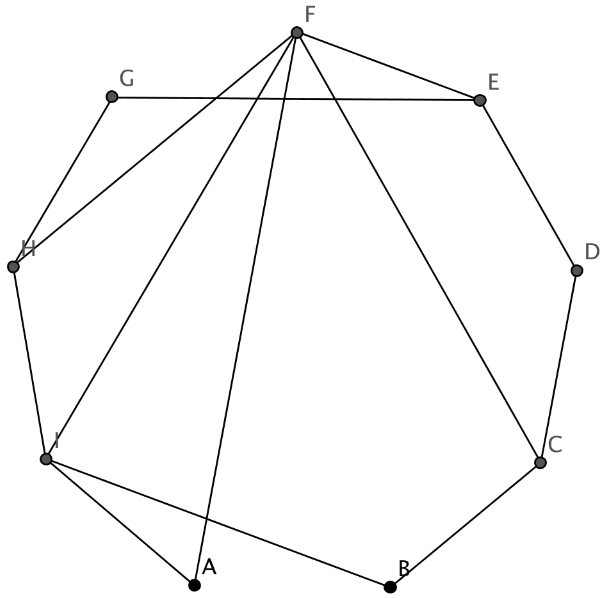
Compatibilités

Comme tout à l'heure, relie par un trait les joueurs qui ne veulent pas jouer l'un contre l'autre dans le premier dessin et les joueurs qui acceptent de jouer ensemble dans le deuxième.

5- Est-ce qu'on peut répartir les 7 joueurs entre les deux tables, 4 sur l'une et 3 sur l'autre, de sorte que tout le monde soit satisfait des joueurs contre qui il joue ? Décris tes tentatives. Qu'est ce qui t'empêche de le faire ?

6- Si on ne peut pas, on peut tout de même essayer de répartir les joueurs au mieux, pour qu'il y ait le moins possible de mécontents. Une fois choisie ta « moins mauvaise » répartition, entoure les joueurs d'une même table. Combien d'incompatibilités ont-elles été respectées (autrement dit, combien de traits sont-ils coupés par ton contour) ? Combien reste-t-il de mécontents ?

7- Voici un nouveau schéma, à 9 joueurs cette fois, où sont indiquées les incompatibilités. Il s'agit à nouveau de grouper les joueurs en deux tables, en faisant le moins possible de paires de mécontents.

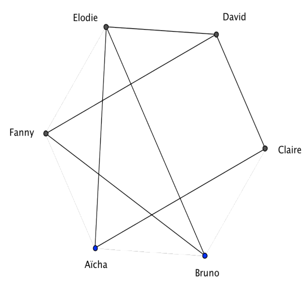


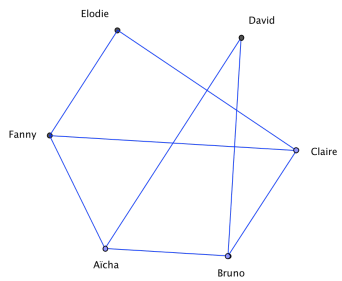
En travaillant directement sur le schéma, fais des essais de contour englobant 5 des points et coupant un maximum de traits. Combien te restera-t-il, dans le meilleur des cas, de paires de mécontents ?

On a ainsi remplacé notre problème de départ par un problème géométrique plus facile à attaquer. Ce type de glissement est fréquemment utilisé en mathématiques.

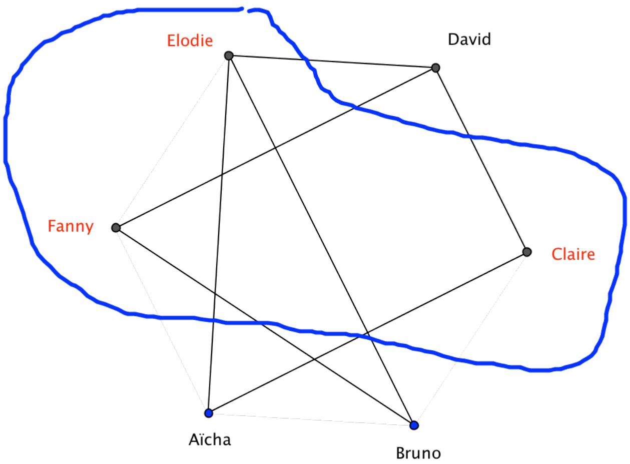
Réponses possibles

1.

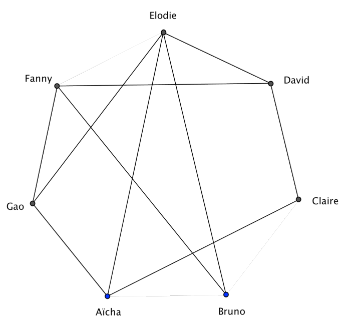


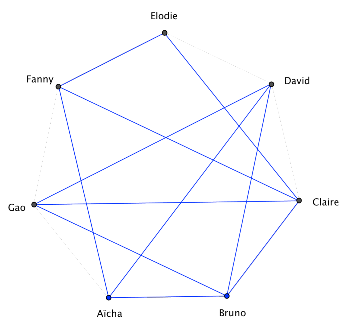


3.



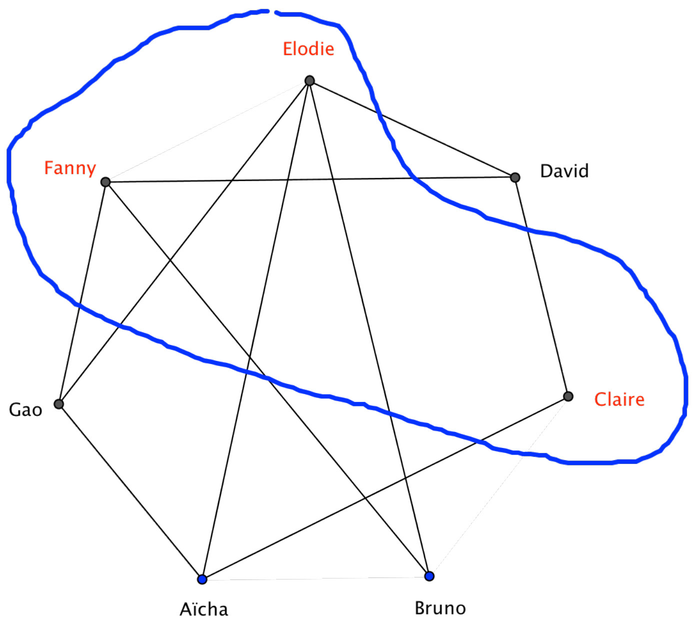
4.



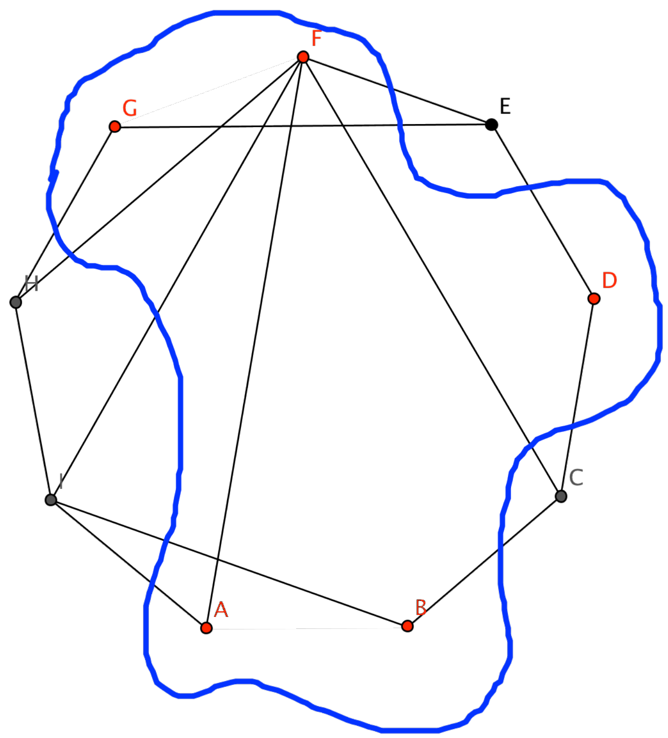


6. Ce qui coince, c'est la présence de cycles avec un nombre impair de sommets, comme Aïcha->Claire->David->Fanny->Gao->Aïcha. Voilà une solution qui fait une seule paire de mécontents, Aïcha et Gao. Pourtant, il y a un second cycle à 5 sommets, Aïcha->Claire->David->Elodie->Gao->Aïcha. L'arête mécontente appartient aux deux cycles, elle résout

deux problèmes à la fois.



7. Là aussi, il y a des triangles, qui empêchent de répartir parfaitement, en coupant toutes les arêtes. Il y a deux triangles, FHI et FIA, qui partagent une arête, FI. Pourtant, on ne peut pas améliorer la répartition ci-dessus, qui laisse deux arêtes mécontentes. Pourquoi ?



4- La restauration de vieux films
Une activité pour primaire, collège, lycée

Les appareils photos, les images numériques font partie de notre quotidien. Mais au fait, « numérique » vient de « nombre » : comment associer des nombres aux images? Et quelle est l'utilité de numériser ainsi les images ?

Intéressons nous aux images noir et blanc pour une première approche.
Une image numérique noir et blanc est une grille rectangulaire divisée en carrés (les pixels). A chaque carré, on associe un nombre entier qui indique le caractère plus ou moins sombre du carré, du blanc au noir, en passant par tous les gris. Ce nombre est appelé niveau de gris et varie entre 0 et 255 en général.

1- Niveaux de gris
Pour comprendre le principe de la numérisation, voici un petit coloriage à proposer.

Sur du papier quadrillé à petits carreaux, trace un rectangle de 12 carreaux sur 8 carreaux (le côté de 12 carreaux étant horizontal). Repère les lignes par des nombres de 1 à 8 et les colonnes par des lettres de A à L.
Le nombre 0 désigne une case blanche. Le nombre 1 une case grisée (au crayon à papier). Le nombre 2 correspond à une case noire (au feutre)
Les cases B1, C2, D4, E2, F1, K3 sont de niveau 2, les cases C1, E1, C3, D3, E3, F4, F5, F6, F7, F8, G4, G5, H4, H5, I4, I5, J4, J5, J6, K7, L6 sont de niveau 1 et le reste des cases de niveau 0. Fais apparaître l'image ainsi « numérisée » dans ton rectangle.

Avec 256 niveaux de gris au lieu de 3 dans cet exemple, et beaucoup plus de pixels, c'est ainsi qu'on décrit une image noir et blanc. Une image noir et blanc est ainsi donnée par le tableau des nombres (les niveaux de gris) associés à chacun des carreaux (les pixels).

2- Des images au film
Un film est un ensemble d'images qui, quand elles se succèdent rapidement reconstituent l'impression du mouvement. En général, il faut 24 images pour une seconde de film. Calcule combien d'images contient un film d'une heure et demie.

Si chacune de ces images est traduite par un tableau de nombres, on voit bien qu'il y a là un grand nombre de données que seul un ordinateur peut traiter. L'intérêt de cette numérisation est de permettre la conservation des images et leur transformation, ce que permettaient mal les procédés chimiques d'impression de la pellicule des débuts du cinéma.

3- Des nombres aux moyennes
Les vieux films en noir et blanc sont souvent abîmés. Par exemple, une image peut être devenue globalement plus sombre que celles qui la précèdent et la suivent. D'où un effet de clignotement, qui peut se corriger grâce aux mathématiques. L'idée est simple : pour chaque pixel de chaque image, on modifie son niveau de gris en le comparant à celui qu'il avait dans les dix images précédentes et les dix suivantes. Mais, en corrigeant un niveau de gris, il faut éviter de changer la nature de l'image. Ce qui se fait en conservant le rang de niveau de gris

de chaque pixel de l'image : le pixel le plus sombre doit rester le plus sombre une fois l'image corrigée.
Pour faire cette correction, les mathématiciens ont dû utiliser une notion de moyenne originale, qui s'apparente à la moyenne harmonique des géomètres.
C'est l'occasion de revenir avec nos élèves sur la moyenne arithmétique et de les initier aux moyennes géométriques et harmoniques, notions à la portée des collégiens de troisième et des lycéens.
Cette activité travaille sur des nombres a et b positifs

a) moyenne arithmétique de 2 nombres

a et b étant deux nombres positifs, leur moyenne arithmétique m est définie par $m = \frac{a+b}{2}$

Elle intervient dans le domaine familier des notes.

Sylvain a eu 9 à l'écrit et 14 à l'oral. Calcule la moyenne de ses deux notes. S'il avait eu la même moyenne mais avec la même note à l'oral et à l'écrit, quelle aurait été cette note ?
Et s'il avait eu 18 à l'oral, quelle note d'écrit lui aurait suffi pour avoir la même moyenne ? Les 2 copains de Sylvain ont eu la même moyenne que lui, avec des notes toutes différentes. Imagine les notes qu'ont pu avoir ses deux amis.

b) moyenne géométrique de 2 nombres

Nicolas a hérité d'un terrain rectangulaire qui mesure 36m sur 9m. Pour lui, cette aubaine est l'occasion de construire une maison. Toutefois, la forme allongée du terrain ne s'y prête pas. Sa sœur Pimprenelle, qui elle a hérité d'un champ carré situé dans le même village accepte de l'échanger avec le sien. En effet, les deux champs ont exactement la même surface. Combien mesure le côté du champ carré de Pimprenelle?

Plus généralement, si un rectangle de côtés a et b doit avoir la même aire qu'un carré de côté c, alors c est la moyenne géométrique de a et b.

c) moyenne harmonique de 2 nombres

- un piège classique

Une voiture effectue un trajet aller et retour Paris-Marseille (800 km). Sa vitesse moyenne à l'aller a été de 80km/h et sa vitesse moyenne au retour a été de 100 km/h. Quelle a été sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?

- la moyenne harmonique de 2 nombres a et b strictement positifs est le nombre m défini par $\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Exprime m en fonction de a et b.
Calcule la moyenne harmonique de 80 et 100.

- Une voiture effectue un trajet aller et retour. Sa vitesse moyenne à l'aller a été de v_1 km/h et sa vitesse moyenne au retour a été de v_2 km/h. Démontre que sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est la moyenne harmonique de v_1 et v_2.

La notion de moyenne qui est utilisée dans les algorithmes de correction de contrastes d'images détériorées quand on restaure de vieux films s'inspire de la moyenne harmonique.

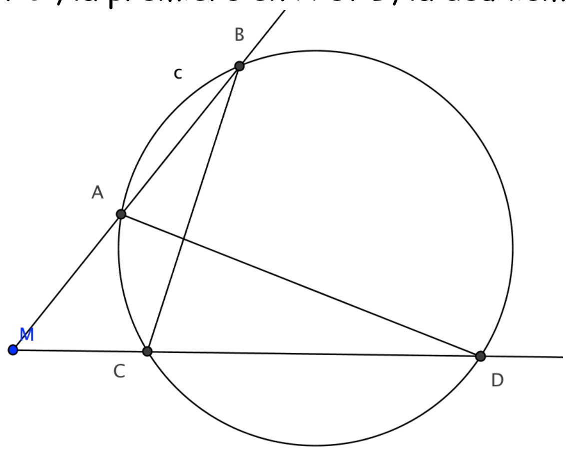
4- Interprétation géométrique de ces différentes moyennes

a) moyenne arithmétique

Marque sur une droite graduée le point A d'abscisse 9 et le point B d'abscisse 14. Marque le milieu M de [AB]. Quelle est l'abscisse de M ?

b) moyenne géométrique

Soit *C* un cercle et M un point situé à l'extérieur de *C*. Trace deux droites passant par M et coupant *C* , la première en A et B, la deuxième en C et D.

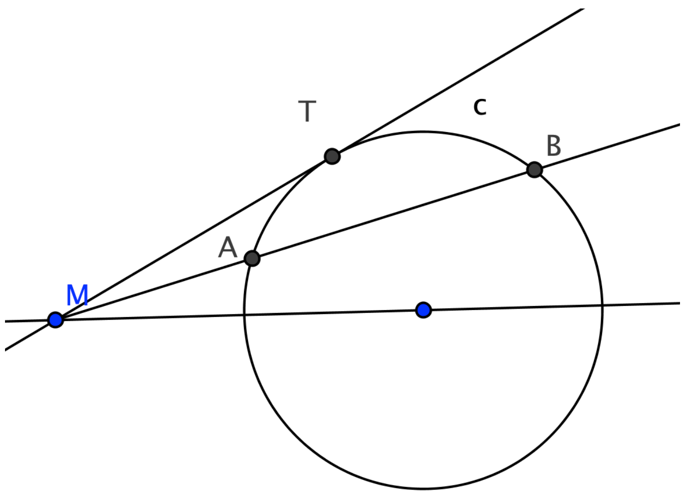


a) Démontre que les triangles MBC et MAD ont les mêmes angles.
b) De ce fait, ces deux triangles sont un agrandissement l'un de l'autre (ils sont « semblables ») et les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.
Place dans la deuxième ligne du tableau les noms des côtés qui se correspondent.

Triangle MBC	MB	MC	BC
Triangle MAD			

c) Utilise la proportionnalité ci-dessus pour montrer que MA×MB=MC×MD
Ainsi le produit des longueurs MA×MB est le même pour toutes les demi-droites issues de M et coupant le cercle *C* .(la valeur obtenue s'appelle la *puissance* du point M par rapport à *C*).

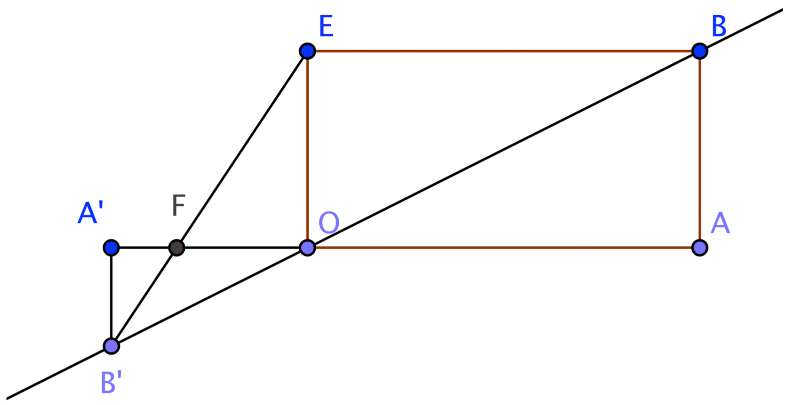
d) Lorsque la demi-droite issue de M est tangente en T au cercle *C,* on peut la voir comme un cas particulier dans lequel les points A et B sont confondus et les longueurs MA et MB égales (et valant toutes les deux MT).



Complète l'égalité $MT^2=$ $\quad\times\quad$.
Utilise cette propriété pour construire géométriquement un segment dont la mesure soit la moyenne géométrique de 4 et 9.

c) moyenne harmonique

Soient a et a' deux longueurs dont on cherche à représenter géométriquement la moyenne harmonique.
Soit [OA] un segment de longueur a et A' le point de la demi-droite [AO) tel que OA'= a' .Tracer la droite d perpendiculaire à [AA'] en A et la droite d' perpendiculaire à [AA'] en A'. Choisir un point B sur d. (OB) coupe d' en B'.
Construire E, quatrième sommet du rectangle OABE, et F, point d'intersection de (EB') avec (AA').
En utilisant la propriété de Thalès dans deux paires de triangles bien choisis de la figure, trouve deux quotients différents égaux à $\frac{A'B'}{AB}$ (cela aide de ne pas oublier que AB=EO).
Combine les égalités écrites pour démontrer que : $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OA'}=\frac{1}{OF}$
Explique pourquoi la moyenne harmonique de a et a' est la moitié de OF.



Cette figure est utilisée en optique géométrique. Elle permet de construire l'image A'B' de l'objet AB par un dispositif optique (lentille,...) placé en O et de distance focale OF.

Des enseignants qui souhaiteraient approfondir l'étude des différentes moyennes trouveront en se rendant sur la page :
http://www.math.u-psud.fr/~pansu/explosion_continue_en_classe.html
des propositions concernant l'ordre dans lequel sont rangées les trois moyennes.

5- Comment faire coopérer des individus égoïstes ?
Une activité pour primaire, collège, lycée

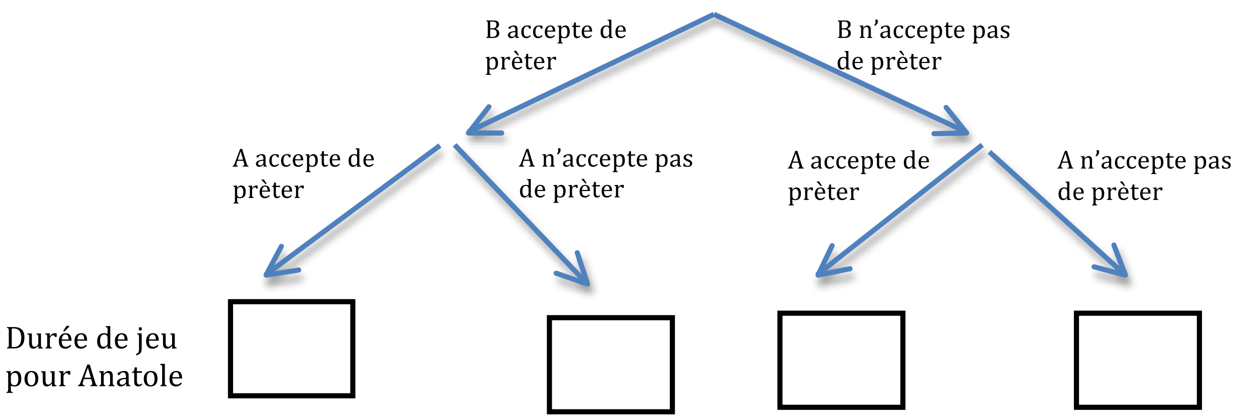
De nombreux comportements sociaux mettent les individus en concurrence. Et dans ces situations de concurrence, ont-ils intérêt à coopérer ? Yannick Viossat nous raconte comment les mathématiques permettent d'éclairer ce genre de questions en analysant des modèles de conflits entre intérêt collectif et intérêt particulier.
Le plus simple de ces modèles peut facilement être muni, comme ici, d'un habillage à la portée des plus jeunes.

Dispute autour de la Play Station

Anatole et Barnabé sont frères et ont une console de jeu. Et, évidemment, ils se disputent tout le temps pour jouer avec.
Maman, qui en a assez, annonce : chacun va venir me dire, dans le creux de l'oreille , sans que l'autre entende, s'il est d'accord pour laisser la console à son frère. Mais attention, voilà les règles :
Si chacun des deux a accepté de laisser la console, je vous laisse jouer 1 heure chacun.
Si un seul de vous deux accepte de prêter la console, je laisse l'autre jouer 1 heure et demie.
Et si ni l'un ni l'autre ne veut prêter la console, vous l'aurez un quart d'heure chacun et rien de plus !

a) Que penses-tu, a priori, que les deux enfants ont intérêt à faire ? Pourquoi ?

b) Mets-toi maintenant à la place d'Anatole.
Si Barnabé a accepté de laisser la console, que peut-il se passer ?
Si Barnabé a refusé de laisser la console, que peut-il se passer ?
On peut représenter la réflexion d'Anatole par un arbre.
Dans chacun des 4 rectangles de la ligne du bas, inscrit la durée de jeu sur la console à laquelle aura droit Anatole.



Que décide Anatole une fois qu'il a construit cet arbre ?

c) Mets toi maintenant à la place de Barnabé et dessine l'arbre des durées de jeu possibles pour Barnabé. Quel est le meilleur choix pour lui?

d) Complète le 1er tableau, en inscrivant dans les cases les durées de jeu (dans l'ordre) d'Anatole et Barnabé :

	B accepte de prêter	B n'accepte pas de prêter
A accepte de prêter		(0h ; 1h30)
A n'accepte pas de prêter		

Complète le 2ème tableau, en inscrivant dans les cases la somme des durées de jeu d'Anatole et Barnabé, autrement dit la durée totale autorisée d'utilisation de la console:

	A accepte de prêter	A n'accepte pas de prêter
B accepte de prêter		1h30
B n'accepte pas de prêter		

D'un point de vue collectif, quel est l'intérêt des deux frères ?

Cet exemple illustre un phénomène fréquent : l'intérêt particulier de chaque individu ne coïncide pas avec l'intérêt général. Ce phénomène a été explicité et étudié par les mathématiciens sous le nom de « dilemme du prisonnier ».

Stratégie sur plusieurs jours

Maman trouve intéressant de continuer toute la semaine avec la même règle appliquée chaque jour.

Anatole décide d'être gentil mais pas trop : le premier jour, il accepte de prêter, et les jours suivants, il fait ce qu'a fait Barnabé le jour précédent.

a) Avec cette stratégie durant une semaine, combien d'heures aura joué Barnabé dans le cas où il refuse systématiquement de prêter la console?

b) Avec cette stratégie, que se passe-t-il pour Barnabé s'il accepte systématiquement de prêter ?

c) Etant donné la stratégie d'Anatole, Barnabé a-t-il plutôt intérêt à ne jamais prêter la console, ou, au contraire, à toujours la prêter ?

d) Que se passe-t-il si Anatole accepte de prêter la console le premier jour, mais pas Barnabé et que chacun change ensuite chaque jour de stratégie ? Quels seront les temps de jeu de chacun au bout d'une semaine ?

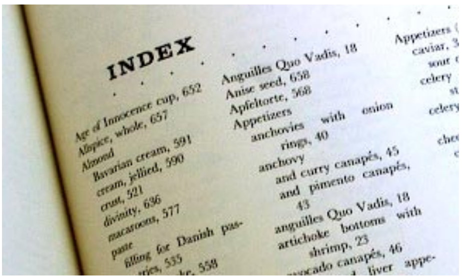
La branche des mathématiques qui étudie ce type de mécanismes de coopération est connue sous le nom de théorie des jeux et trouve des applications dans de nombreux domaines (sociologie, biologie, économie…)

Les moteurs de recherche du Web
Une activité pour primaire, collège, lycée

Comment les moteurs de recherche gèrent-ils les volumes d'information phénoménaux du Web ? Comment aident-ils les utilisateurs à trouver ce qu'ils cherchent dans cette masse ? Serge Abiteboul, auteur de l'article « chercher sur le Web, juste un point fixe et quelques algorithmes » vous propose une activité pour faire sentir à vos élèves la façon dont fonctionne un moteur de recherche du Web.

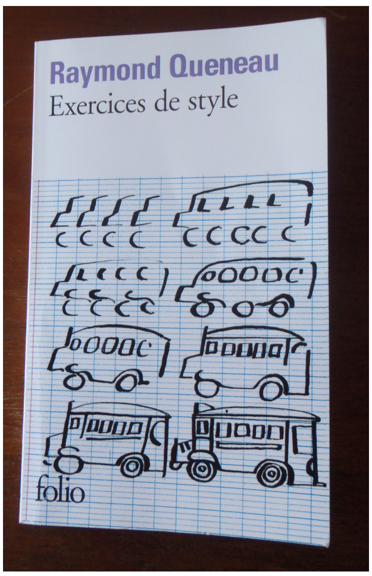
A. Indexation

Le Web c'est d'abord un nombre impressionnant de pages de texte. Nous pouvons voir un moteur de recherche comme un <u>index</u> de ces pages, un peu comme l'index d'un très grand livre. Regardons l'index d'un livre pour nous rappeler comment cela fonctionne.



Pour le Web, le travail est énorme parce qu'il y a des milliards de pages et des millions de questions posées chaque jour à l'index. Pour imprimer un tel index, il faudrait plus de pages de papier que n'en stocke la Bibliothèque Nationale de France. Alors nous allons partager le travail en un très grand nombre de machines. Comment ?

1) Nous vous proposons (en Annexe) 10 courts textes, extraits d'un ouvrage du plus célèbre représentant de l'Oulipo, qui joueront le rôle des pages web.



Partageons la classe en cinq groupes que nous appellerons Ordinateur1 à Ordinateur 5. Chaque groupe est responsable de réaliser un index pour deux textes. Pour nous faciliter la tâche, nous n'indexerons que les noms communs. Nous pourrons ignorer les lettres majuscules, le pluriel.
Ainsi l'index d'un groupe qui aura rencontré le nom *autobus* dans les textes 5 et 6 et le nom *chapeau* dans le texte 5 seulement aura un index qui ressemblera à :
autobus   5, 6
chapeau   5
…

2) Confions tous les index à un élève et nous lui demandons de trouver tous les textes contenant (par exemple) le mot *autobus,* puis ceux contenant le mot *chapeau,* puis ceux contenant [*autobus* et *chapeau*]. Il les écrira au tableau.

3) Cherchons les mots *cou*, *bouton* et [*cou* et *bouton*] mais en laissant à chaque groupe la responsabilité de ses pages. Un élève sera responsable d'écrire tous les résultats au tableau. Observer que nous obtenons les réponses beaucoup plus vite.

Pour réaliser un tel index un moteur de recherche utilise de nombreux centres de calculs. Et chaque centre utilise des milliers de machines. Le travail à réaliser est donc partagé entre des dizaines de milliers de machines.

B. Classement des pages

Un moteur de recherche donne les réponses à des questions comme *autobus* et [*autobus* et *chapeau*] en proposant d'abord les textes « les plus populaires ». Pour simplifier, nous allons considérer que les textes les plus populaires sont ceux qui sont le plus souvent choisis par les élèves.

1) Les élèves votent à main levée pour leurs trois textes préférés afin de classer les 10 textes suivant leurs préférences. Chaque groupe introduira cette information dans son index. Par exemple, si 3 élèves ont voté pour le texte 5, un seul pour le texte 6, nous pourrons avoir la ligne d'index :
   autobus   (5,3),(6,1)

2) Pour les questions déjà posées (comme *autobus* ou [*autobus* et *chapeau*]*...)*, l'élève chargé d'inscrire les réponses (les numéros des textes qui contiennent ce mot) au tableau devra les reclasser par ordre de popularité.

Note : Les algorithmes de classement des moteurs de recherches utilisent de nombreux critères pour classer les résultats, notamment un critère de popularité. Ces critères sont secrets.

C. Le sens des mots

Supposons que nous cherchons les documents parlant de *chapeau*. Nous aimerions aussi avoir comme résultats les documents parlant de *couvre-chef*, ou *feutre mou* car nous savons que les feutres mous sont une variété de chapeau. Ainsi on tient compte, dans l'indexation, des synonymes (*chapeau* et *couvre-chef*) et des généralisations (*chapeau* et *feutre mou*). Chaque groupe peut ainsi chercher dans son index les noms qu'il pourrait faire figurer avec *citoyen* qui figure dans le texte n°10. En considérant l'index du texte n°8, qui contient des mots peu fréquents, donner d'autres exemples de regroupements que l'on peut effectuer pour diminuer ainsi la taille de l'index.

Le Web est aussi multi-langues. Si nous posons la question « Paris » et si nous parlons italien, peut-être sommes nous aussi intéressés par les pages contenant le mot « Parigi ».

D. Questionnements

Maintenant que nous comprenons les bases de ces systèmes, nous pouvons nous interroger sur d'autres aspects passionnants comme :

- Comment fait un moteur de recherche pour trouver des milliards de pages du Web ?
- Quand vous avez cinq à six mille ordinateurs qui travaillent pour vous, il est certain que plusieurs tomberont en panne chaque jour. Comment un moteur de recherche fait-il pour ne jamais s'arrêter ?
- Toutes ces machines dégagent de la chaleur, comment fonctionnent les systèmes de climatisation super sophistiqués et peu coûteux des moteurs de recherche.
- Pour fabriquer un index, il faut lire toutes les pages qu'il index sur le Web. Le moteur de recherche n'a pas fini de les lire que certaines pages ont déjà changé et qu'il lui faudrait les relire. Et découvrir de nouvelles pages… Comment se tenir au courant des « nouveautés » du Web ?
- On fait des fautes d'orthographe. Comment un moteur de recherche peut-il répondre aux questions quand les textes et les questions contiennent des fautes ?

ANNEXE : les citations extraites qui tiendront le rôle de page Web

ordinateur 1

Texte 1 : Notations

Dans l'S, à une heure d'affluence. Un type dans les vingt-six ans, chapeau mou avec cordon remplaçant le ruban, cou trop long comme si on lui avait tiré dessus. Les gens descendent. Le type en question s'irrite contre un voisin. Il lui reproche de le bousculer chaque fois qu'il passe quelqu'un. Ton pleurnichard qui se veut méchant. Comme il voit une place libre, se précipite dessus.
Deux heures plus tard, je le rencontre Cour de Rome, devant la gare Saint-Lazare. Il est avec un camarade qui lui dit : « Tu devrais faire mettre un bouton supplémentaire à ton pardessus.» II lui montre où (à l'échancrure) et pourquoi.

Texte 2 : Rétrograde

Tu devrais ajouter un bouton à ton pardessus, lui dit son ami. Je le rencontrai au milieu de la Cour de Rome, après l'avoir quitté se précipitant avec avidité vers une place assise. Il venait de protester contre la poussée d'un autre voyageur, qui, disait-il, le bousculait chaque fois qu'il descendait quelqu'un. Ce jeune homme décharné était porteur d'un chapeau ridicule. Cela se passa sur la plate-forme d'un S complet ce midi-là.

ordinateur 2

Texte 3 : Récit

Un jour vers midi du côté du parc Monceau, sur la plate-forme arrière d'un autobus à peu près complet de la ligne S (aujourd'hui 84), j'aperçus un personnage au cou fort long qui portait un feutre mou entouré d'un galon tressé au lieu de ruban. Cet individu interpella tout à coup son voisin en prétendant que celui-ci faisait exprès de lui marcher sur les pieds chaque fois qu'il montait ou descendait des voyageurs. Il abandonna d'ailleurs rapidement la discussion pour se jeter sur une place devenue libre.
Deux heures plus tard, je le revis devant la gare Saint-Lazare en grande conversation avec un ami qui lui conseillait de diminuer l'échancrure de son pardessus en en faisant remonter le bouton supérieur par quelque tailleur compétent.

Texte 4 : Tanka

L'autobus arrive
Un zazou à chapeau monte
Un heurt il y a
Plus tard devant Saint-Lazare
II est question d'un bouton

ordinateur 3

Texte 5 : Surprises

Ce que nous étions serrés sur cette plate-forme d'autobus ! Et ce que ce garçon pouvait avoir l'air bête et ridicule ! Et que fait-il ? Ne le voilà-t-il pas qui se met à vouloir se quereller avec un bonhomme qui — prétendait-il ! ce damoiseau ! — le bousculait ! Et ensuite il ne trouve rien de mieux à faire que d'aller vite occuper une place laissée libre ! Au lieu de la laisser à une dame !
Deux heures après, devinez qui je rencontre devant la gare Saint-Lazare? Le même godelureau ! En train de se faire donner des conseils vestimentaires ! Par un camarade !
A ne pas croire !

Texte 6 : Présent

A midi, la chaleur s'étale autour des pieds des voyageurs d'autobus. Que, placée sur un long cou, une tête stupide, ornée d'un chapeau grotesque vienne à s'enflammer, aussitôt pète la querelle. Pour foirer bien vite d'ailleurs, en une atmosphère lourde pour porter encore trop vivantes de bouche à oreille, des injures définitives. Alors, on va s'asseoir à l'intérieur, au frais.
Plus tard peuvent se poser, devant des gares aux cours doubles, des questions vestimentaires, à propos de quelque bouton que des doigts gras de sueur tripotent avec assurance.

ordinateur 4

Texte 7 : Passé simple

Ce fut midi. Les voyageurs montèrent dans l'autobus. On fut serré. Un jeune monsieur porta sur sa tête un chapeau entouré d'une tresse, non d'un ruban. Il eut un long cou. Il se plaignit

auprès de son voisin des heurts que celui-ci lui infligea. Dès qu'il aperçut une place libre, il se précipita vers elle et s'y assit.
Je l'aperçus plus tard devant la gare Saint-Lazare. Il se vêtit d'un pardessus et un camarade qui se trouva là lui fit cette remarque : il fallut mettre un bouton supplémentaire.

Texte 8 : Lipogramme

Voici.
Au stop, l'autobus stoppa. Y monta un zazou au cou trop long, qui avait sur son caillou un galurin au ruban mou. Il s'attaqua aux panards d'un quidam dont arpions, cors, durillons sont avachis du coup; puis il bondit sur un banc et s'assoit sur un strapontin où nul n'y figurait.
Plus tard, vis-à-vis la station Saint-Machin ou Saint-Truc, un copain lui disait : « Tu as à ton raglan un bouton qu'on a mis trop haut. »
Voilà.

ordinateur 5

Texte 9 : Imparfait

C'était midi. Les voyageurs montaient dans l'autobus. On était serré. Un jeune monsieur portait sur sa tête un chapeau qui était entouré d'une tresse et non d'un ruban. Il avait un long cou. Il se plaignait auprès de son voisin des heurts que ce dernier lui infligeait. Dès qu'il apercevait une place libre, il se précipitait vers elle et s'y asseyait.
Je l'apercevais plus tard, devant la gare Saint-Lazare. Il se vêtait d'un pardessus et un camarade qui se trouvait là lui faisait cette remarque : il fallait mettre un bouton supplémentaire.

Texte 10 : Alors

Alors l'autobus est arrivé. Alors j'ai monté dedans. Alors j'ai vu un citoyen qui m'a saisi l'œil. Alors j'ai vu son long cou et j'ai vu la tresse qu'il y avait autour de son chapeau. Alors il s'est mis à pester contre son voisin qui lui marchait alors sur les pieds. Alors, il est allé s'asseoir.
Alors, plus tard, je l'ai revu Cour de Rome. Alors il était avec un copain. Alors, il lui disait, le copain : tu devrais faire mettre un autre bouton à ton pardessus. Alors.

7- Le théorème du soufflet
Une activité pour le collège

Bien des branches des mathématiques sont nées de problèmes concrets et très anciens, puis ont suivi un chemin qui leur est propre, conduisant à des ponts inattendus entre disciplines. Pour illustrer ce propos, Etienne Ghys s'est fait conteur et prestidigitateur, et nous invite à fabriquer des polyèdres déformables.

Les polyèdres connus des collégiens, dont toutes les faces sont rigides (les faces des polyèdres, pas les faces des collégiens), sont eux-mêmes rigides. C'est normal, les polyèdres étudiés dans les programmes sont convexes et Cauchy a démontré que tout polyèdre convexe est rigide. Il a fallu attendre la fin du 20ème siècle pour que les mathématiciens découvrent un polyèdre aux faces rigides qui soit flexible. Construire le patron d'un tel polyèdre exige soin et précision.

1. Dessiner le patron et réaliser un polyèdre flexible (collège)

Le patron du flexidron de Steffen (tel est son nom) se compose de quatorze triangles et présente un axe de symétrie. Le modèle de patron est donné en ANNEXE.
Le mathématicien Etienne Ghys nous indique que les longueurs des côtés, dans une unité de notre choix, doivent être 5, 10, 11, 12 et 17.
Pour que ton patron tienne dans une feuille de papier standard, il te faut choisir des mesures en centimètres proportionnelles à ces données. Complète le tableau de proportionnalité ci-dessous.

Côté	a	b	c	d	e
Unité « Ghys »	5	10	11	12	17
En centimètres	3,5				

Prends une feuille de papier un peu rigide (Canson ou mieux, bristol) et construis soigneusement, à l'aide du compas, le patron avec les mesures que tu viens de calculer pour a, b, c, d et e. Ensuite, il te faut marquer soigneusement les plis « vallée » qui sont en pointillés sur le modèle et dans l'autre sens les plis « montagne » qui sont en traits pleins. Fais jouer les plis avant de coller. Colle ensuite très soigneusement les languettes, dans l'ordre indiqué par les numéros que nous avons fait figurer.

Le polyèdre non convexe ainsi fabriqué se déforme (un peu) sous la pression des doigts.

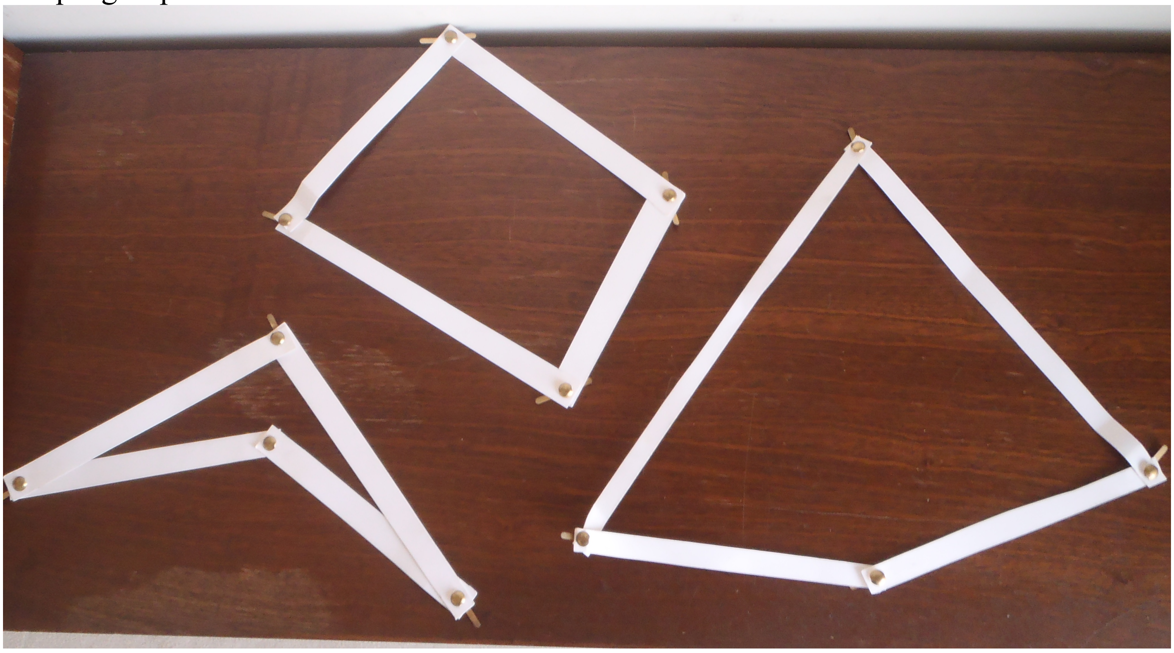
2. Aire des polygones dans le plan (collège)

Quel serait l'analogue du problème des polyèdres flexibles dans le plan ? Ce serait d'étudier des polygones dont on pourrait changer la forme (les angles, par exemple) sans changer les longueurs des côtés.
Pour le triangle, c'est raté. Un triangle de côtés donnés n'est pas déformable.
Il est facile de vérifier qu'un quadrilatère dont les côtés sont donnés est toujours flexible.
Cela se vérifie expérimentalement à l'aide de bandes de papier et d'attaches parisiennes.
Cela se voit aussi en dessinant plusieurs quadrilatères non superposables ayant pourtant les mêmes

mesures de côtés.
Le théorème du soufflet affirme que le volume d'un polyèdre flexible reste constant. Dans le plan, son analogue devient un problème concernant les polygones : l'aire d'un polygone varie t-elle lorsqu'on déforme le polygone ?

Voici une proposition d'activité de classe à réaliser en groupes.

Préparer un quadrilatère articulé différent, avec bandes de papier et attaches parisiennes pour chaque groupe.



On relève les longueurs des côtés du quadrilatère du groupe. Chaque élève du groupe pose ensuite le quadrilatère sur une feuille de papier blanc en essayant d'enserrer la plus grande aire. Il retrace le quadrilatère sur sa feuille blanche et en calcule l'aire (en mesurant les longueurs nécessaires).

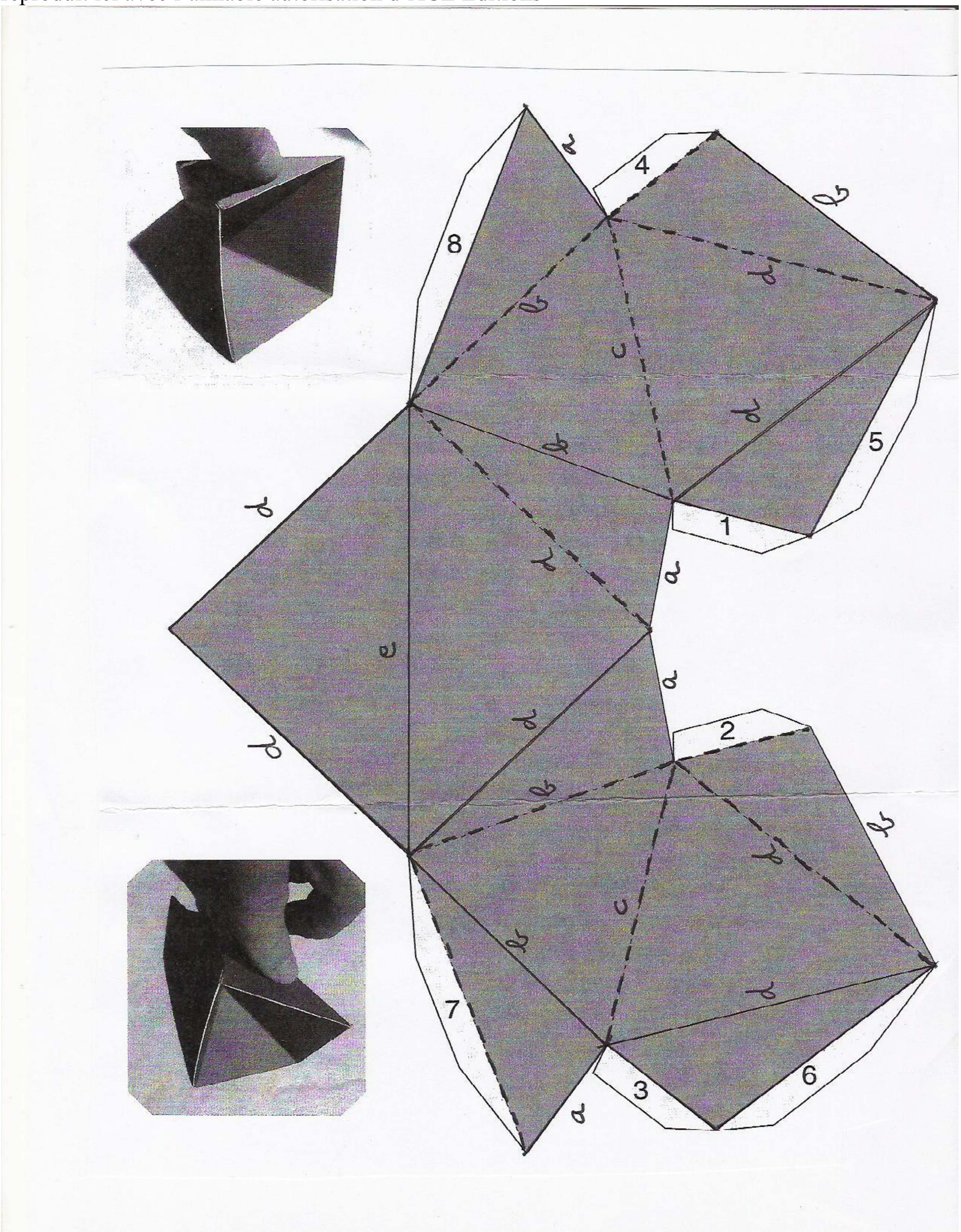
Le gagnant de chaque groupe est celui qui obtient la plus grande aire.
On s'intéresse à ce quadrilatère qui semble avoir la plus grande aire possible.
En mesurant ses angles, il y a quelque chose à remarquer !

Un théorème affirme que, lorsqu'on déforme un quadrilatère, l'aire est maximale lorsque le quadrilatère est inscrit dans un cercle. Dans la manipulation proposée, on peut remarquer que les angles opposés sont supplémentaires, ce qui est une caractérisation de l'inscriptibilité du quadrilatère dans un cercle. Cette propriété peut d'ailleurs se démontrer facilement dans un sens (si inscriptible, alors angles opposés supplémentaires), avec des outils de la classe de cinquième. La réciproque est plus délicate.

3. Exercice en prolongement : aire d'un quadrilatère d'une famille particulière

On s'intéresse à une famille de quadrilatères. Dans cette famille, ils ont toujours deux côtés qui mesurent 10 cm et deux côtés qui mesurent 5cm.
Dessine divers quadrilatères de la famille. Détermine l'aire maximale d'un quadrilatère de la famille et dessine deux quadrilatères différents dont l'aire atteint cette aire maximale.

ANNEXE : patron du polyèdre de Steffen
reproduit ici avec l'aimable autorisation d'ACL Editions



source : Hypercube n°57, Juin-Juillet 2004 Le flexidron de Steffen par Dominique Souder et Francis Dupuis

8- A la recherche de la forme idéale
Une activité pour primaire, collège, lycée

Grégoire Allaire et François Jouve nous donnent un bref aperçu des méthodes surprenantes utilisées de nos jours pour dessiner des pièces mécaniques : les programmes d'ordinateur ajustent spontanément le nombre de trous et fabriquent le nombre de barres idéal sans qu'on le leur demande. Nous allons développer une analogie avec une situation plus simple, qui illustre l'expression mystérieuse « deviner la bonne topologie ».
Nous vous proposons d'étudier un problème où on cherche à rendre la plus petite possible la longueur d'une configuration de fils. Cette situation est utilisable en classe, dès l'école primaire pour la partie manipulations physiques. Dans toute cette activité, les triangles considérés ne seront « pas trop obtus », c'est-à-dire avec des angles strictement inférieurs à 120°. Une partie des résultats énoncés ici n'est plus vraie dans le cas contraire.

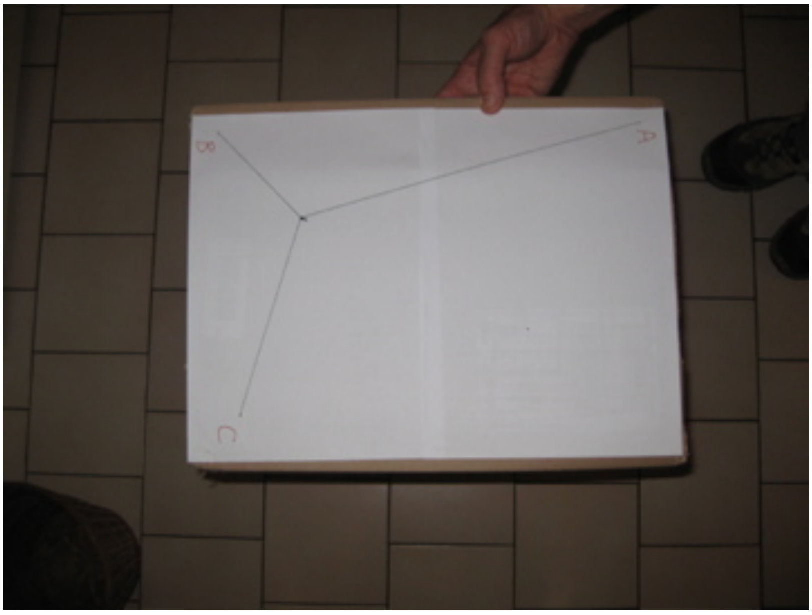
Avec trois poids, avec trois points

1. Equilibre entre 3 poids

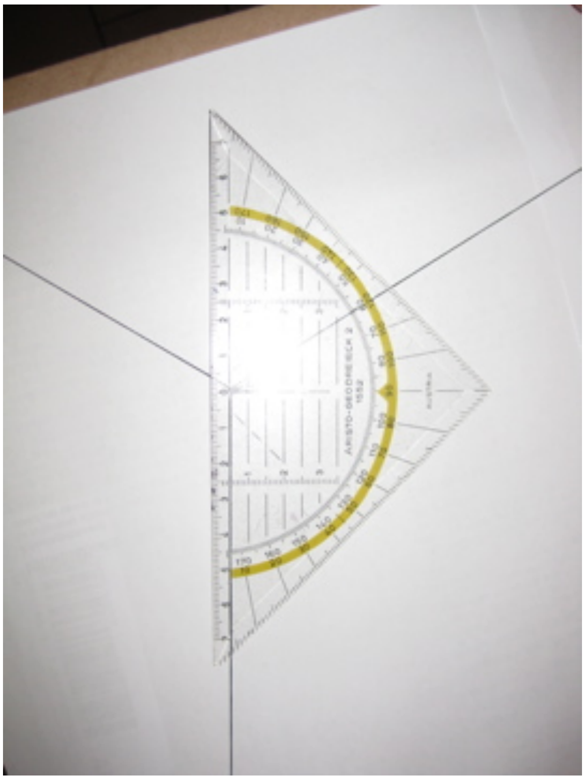
Prendre une plaque de carton assez solide, le couvercle d'une boîte à chaussures par exemple. Trois élèves, Aïcha, Bruno et Claire, percent chacun un trou, de façon à former un triangle qui ne possède aucune propriété particulière, le plus grand possible, mais pas trop obtus quand même. Prendre trois poids identiques, trois gros écrous, par exemple. Chaque élève suspend son poids à une morceau de fil résistant, et passe son fil dans un trou, de bas en haut. On noue les trois fils ensemble. Un élève soulève le carton, le secoue bien et laisse les poids et les fils trouver leur position d'équilibre. Voit on quelque chose de remarquable dans la configuration des fils au-dessus du carton ?

la manip proposée

On voit que les trois fils font des angles de 120° entre eux à leur point de jonction. Un cache (feuille avec une découpe circulaire) posé sur le carton et cachant les trous rend la symétrie de la figure au voisinage du nœud plus visible.



le carton, vu du dessus…


et la vérification au rapporteur

2. Equilibre et longueur de ficelles

La physique nous dit que la position d'équilibre des poids minimise l'énergie potentielle du système, Cet équilibre est atteint quand la somme des altitudes des trois poids est minimale. Ce qui veut dire que la longueur totale des ficelles situées sous le carton est maximale. La longueur totale de ficelle visible au-dessus du carton est alors minimale. Le problème devient donc un problème géométrique. Joindre trois points A, B et C en minimisant la longueur totale des segments qui les relient.

Voici une proposition d'activité d'exploration utilisant le logiciel Geogebra.

Trace un triangle ABC.
Construis un point M libre que tu places à l'intérieur du triangle. Trace les segments MA, MB, MC et calcule la longueur l = MA+MB+MC. Définis aussi les angles α=AMB, β=BMC et γ=AMC
Observe le nombre l lorsque M se promène dans le triangle ABC.
Essaie de placer M pour que l soit le plus petit possible. Observe alors les mesures des 3 angles α, β et γ. Remarques-tu quelque chose ?

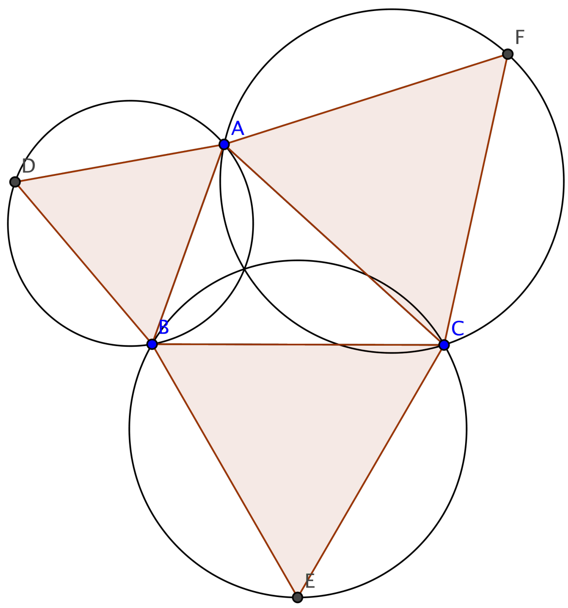
Les mathématiciens ont prouvé que l est minimal quand les trois angles mesurent 120°.

Etant donné un triangle ABC, le point M tel que MA+MB+MC soit minimal porte le nom de point de Fermat ou de point de Torricelli du triangle. C'est le point qui voit chaque côté sous un angle de 120°.

3. Une construction du point de Torricelli

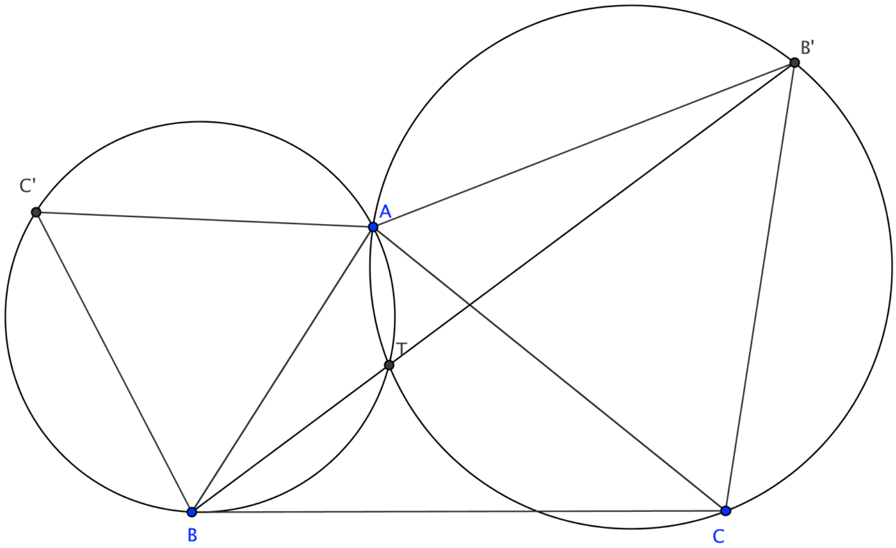
Cette construction peut être réalisée sur papier ou avec un logiciel de construction géométrique

Trace un triangle ABC. dont tous les angles soient plus petits que 120
Construis C' tel que le triangle AC'B soit équilatéral et à l'extérieur de ABC. Trace le cercle circonscrit à AC'B.
Construis B' tel que le triangle AB'C soit équilatéral et à l'extérieur de ABC. Trace le cercle circonscrit à AB'C.
Construis A' tel que le triangle BA'C soit équilatéral et à l'extérieur de ABC. Trace le cercle circonscrit à BA'C.
Que vois tu ?



4. Une autre construction du point de Torricelli

Reprenons la figure ci-dessus, avec deux des cercles circonscrits et T leur point d'intersection.
On peut démontrer l'alignement des points B, T et B' avec des outils de la classe de troisième.



En effet, l'angle B'TA mesure 60° (angle inscrit interceptant le même arc que ACB') et l'angle ATB mesure 120° (angle inscrit interceptant un angle au centre de 360 – 120 = 240°).
Cela fournit une construction simple du point de Torricelli comme point d'intersection de (BB') et (CC') ou de (BB') et (AA') ou de (CC') et (AA').

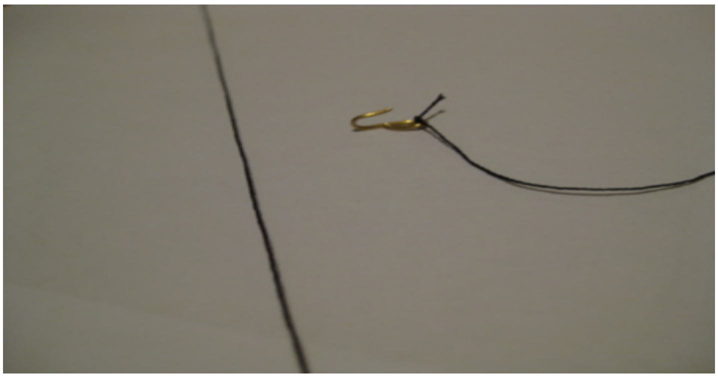
5. Des démonstrations

Il est sans doute frustrant pour un enseignant de mathématiques de ne pas disposer de démonstration du théorème énoncé ci-dessus à la fin du paragraphe 2. Nous vous indiquons deux pistes, utilisables avec des élèves qui seraient vraiment très motivés…
*Pour une démonstration **purement géométrique**, on consultera avec profit l'article de Wikipedia :*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Fermat
qui donne une jolie démonstration utilisant le théorème de Viviani ainsi qu'une démonstration utilisant les rotations.
*Pour une démonstration accessible en TS, et utilisant les **nombres complexes**, on peut se rendre sur la page :* http://www.math.u-psud.fr/~pansu/explosion_continue_en_classe.html

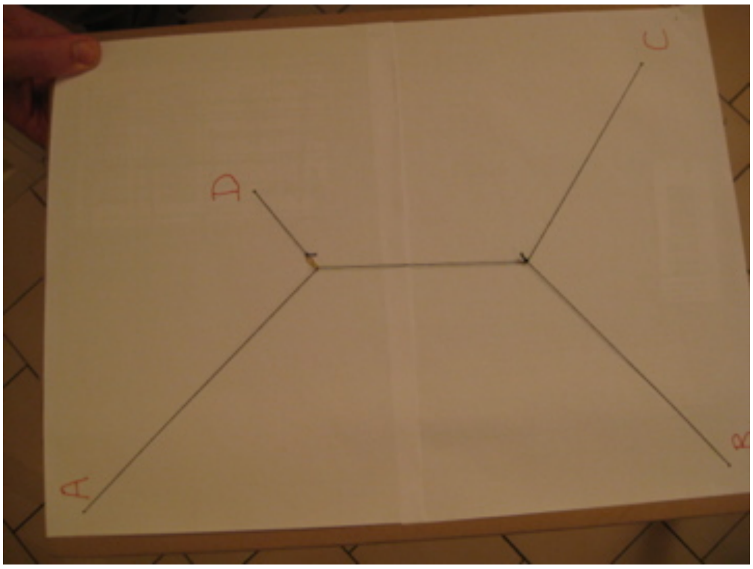
Avec quatre poids, avec quatre points

1. Equilibre entre 4 poids

Cette manipulation prolonge celle proposée au début du paragraphe précédent.
Reprenons le carton et ses trois trous, avec les ficelles et les poids d'Aïcha, Bruno et Claire.
David fait un quatrième trou, il prend un quatrième poids, attaché à une quatrième ficelle, qu'il fait passer dans son trou. Il attache un petit crochet en fil de fer mince à sa ficelle, et s'en sert pour accrocher sa ficelle à l'une des ficelles déjà en place. Que voit on à l'équilibre ? On mesure soigneusement les longueurs des ficelles visibles sur le carton, et on additionne leurs longueurs. On recommence en attachant la ficelle de David successivement aux deux autres fils. Dans quel cas obtient on la plus petite somme des longueurs? David doit-il s'accrocher au fil d'Aïcha, de Bruno ou de Claire ?



A l'équilibre, on voit deux points (le nœud, le crochet) où trois ficelles se rejoignent en faisant des angles de 120°. Pour savoir à qui s'accrocher, il faut faire les trois expériences et comparer. Il n'y a pas de moyen général de savoir à l'avance quel score sera le plus bas.



avec quatre points, en raccrochant David au fil d'Aïcha…

2. Le problème de Steiner

Etant donnés 4 points du plan, il s'agit de les relier par des ficelles, de sorte que la longueur totale de ficelle utilisée soit la plus courte possible. La physique nous dit que ce problème est relié à celui des 4 poids: l'énergie potentielle du système de 4 poids est une fonction affine de la longueur totale de ficelle visible sur le carton.

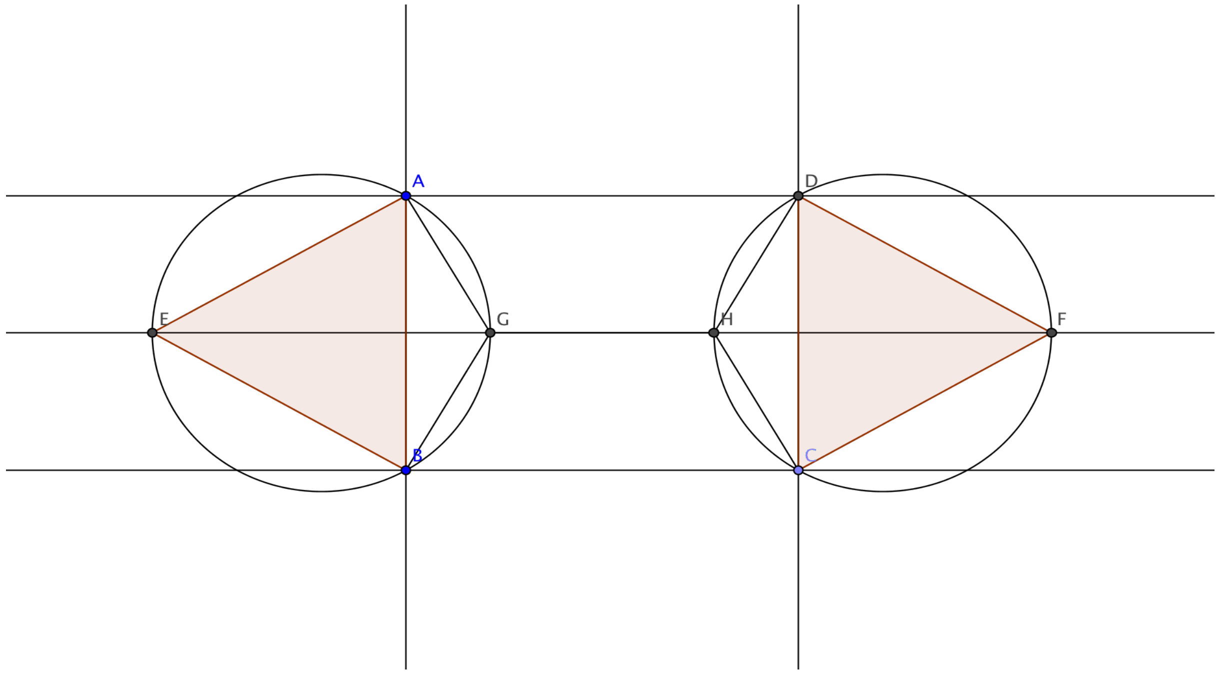
On peut réfléchir au problème de Steiner sans faire la manipulation des poids. Etant donné un quadrilatère ABCD, comment joindre les quatre points A, B, C et D par des fils en minimisant la longueur totale de ces fils.

Ce problème, en se limitant au cas où ABCD est un rectangle, peut être l'objet d'une exploration de groupe en classe. Choisir les dimensions du rectangle, par exemple 20 cm sur 15 cm.
Diviser la classe en groupe. On peut orienter les élèves vers des solutions symétriques. Chaque groupe mesure et calcule la longueur totale des segments tracés pour le point M de la solution qu'il a imaginée.

L'activité être réalisée sur papier ou bien avec un logiciel de construction géométrique.

3. Une construction dans le cas du rectangle

Comment construire une solution qui respecte l'observation faite avec les poids : les ficelles font des angles de 120° entre elles ? Une astuce analogue à celle utilisée pour construire le point de Torricelli peut nous en donner l'idée.



La configuration optimale est toujours en forme de personnage (un tronc, 4 membres), mais le sens du corps (quels points d'accrochage joueront le rôle de mains ou de pieds) bascule lorsqu'on déplace les points d'accrochage. Par exemple, lorsqu'on part d'un carré et qu'on le déforme en rectangle de deux façons différentes. La topologie, dans cette situation, c'est l'information sur qui est main et qui est pied. D'autre part, la configuration optimale adopte des angles bien particuliers, c'est l'aspect plus proprement géométrique du problème. La physique (les poids) résout le problème géométrique pour chaque topologie fixée. C'est un peu l'esprit de la méthode proposée par Hadamard pour les problèmes étudiés par G. Allaire et F. Jouve, avec la même limitation de topologie fixée. Reste à trouver la topologie idéale. Les méthodes récentes résolvent les deux problèmes simultanément, de façon assez miraculeuse.

Et avec un grand nombre de points d'accrochage ?

On sait que la solution a toujours l'aspect d'un arbre trivalent : une racine qui se divise en deux branches, qui se subdivisent à leur tour en deux branches, etc.. Mais il y a de multiples façons d'accrocher un arbre à un ensemble de N points du plan (lorsque N=4, il y en avait 2 seulement). Autrement dit, un très grand nombre de topologies possibles (un nombre exponentiel en N). Pour N un peu grand, aucun programme d'ordinateur ne peut les explorer toutes en temps à échelle humaine.