Topologie et géométrie différentielle

P. Pansu

March 27, 2003

Chapter 1

Intersections de surfaces

1.1 Motivation

A quelle condition l'intersection de deux surfaces est-elle une courbe ?

Dans ces notes, *surface lisse*, ou même simplement *surface*, est une abbréviation pour *sous-variété de dimension 2* de l'espace $\mathbf{R}^3$. Une surface lisse est décrite ou bien par une équation non dégénérée, ou bien par des paramétrisations locales non dégénérées. Une surface lisse possède en chaque point un plan tangent. Deux surfaces lisses sont dites *transverses* si en chaque point de leur intersection, les plans tangents sont distincts. Le résultat principal de ce court chapitre est le

Théorème 1 *L'intersection de deux surfaces lisses transverses est une collection de courbes lisses.*

Passons à la pratique. Soit c une courbe obtenue comme composante de l'intersection de deux surfaces lisses. Supposons connu un point de c. Alors on peut calculer une paramétrisation de la courbe c de proche en proche, par *cheminement*. Le problème d'évaluer le nombre de composantes connexes d'une intersection de surfaces et de placer un point sur chacune d'entre elles n'est pas du ressort de la géométrie différentielle. Dans le cas des surfaces algébriques, les méthodes du calcul formel s'appliquent, voir le cours d'A. Lichnewsky.

1.2 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$

Définition 1 *Une partie X de $\mathbf{R}^n$ est une* sous-variété `(submanifold)` *de dimension d et de classe C^k si pour tout $P \in X$ il existe un voisinage U de P dans $\mathbf{R}^n$, un sous-espace affine A de dimension d et un difféomorphisme ϕ de U sur un ouvert V de $\mathbf{R}^n$ tels que*

$$\phi(U \cap X) = V \cap A.$$

On appellera *surface lisse* `(smooth surface)` une sous-variété de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$, de classe C^1 au moins. On appellera *courbe lisse* `(smooth curve)` une sous-variété *connexe* de dimension 1 de $\mathbf{R}^3$, de classe C^1 au moins.

Exemple. Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. Le *graphe* de f est l'ensemble X des points $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tels que $(x, y) \in U$ et $z = f(x, y)$ est une surface lisse de classe C^1. En effet, l'application

$$\phi : U \times \mathbf{R} \to U \times \mathbf{R}, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, z - f(x, y))$$

est un difféomorphisme (sa réciproque est $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + f(x, y))$) qui redresse X sur le plan $\{z = 0\}$. De même, l'intersection du graphe X avec un plan vertical est une courbe lisse de classe C^1.

1.3 Equation locale d'une surface

Soit X une surface lisse, i.e. une partie de $\mathbf{R}^3$ localement redressable sur un plan. Etant donné un point P de X, en transportant au moyen du redressement une équation de plan, on obtient une *équation locale non dégénérée* de X, i.e. une fonction définie sur un voisinage de P dans $\mathbf{R}^3$ telle que X soit localement le lieu des zéros de f, et telle que la différentielle de f en P ne soit pas nulle (i.e. les dérivées partielles ne sont pas toutes nulles en P). Réciproquement, une équation non dégénérée définit une surface lisse.

Théorème 2 *Soit f une fonction de classe C^k sur un ouvert de $\mathbf{R}^3$. On suppose que f que pour tout point P tel que $f(P) = 0$, au moins une des dérivées partielles de f ne s'annule pas en P. Alors l'ensemble $f^{-1}(0)$ est une surface lisse de classe C^k.*

Preuve. Par hypothèse, le gradient $\nabla_P f$ est non nul. Notons $\lambda = \| \nabla_P f \|$. Choisissons des coordonnées cartésiennes d'origine P et telles que les composantes du vecteur $\lambda^{-1}\nabla_P f$ soient $(0, 0, 1)$. Considérons l'application ϕ définie au voisinage de l'origine P par

$$\phi(x, y, z) = (x, y, \lambda^{-1} f(x, y, z)).$$

Alors la différentielle de ϕ à l'origine est l'identité. D'après le théorème d'inversion locale, ϕ est un difféomorphisme entre des voisinages U et V de l'origine. Par construction, $\phi(U \cap f^{-1}(0)) = V \cap \pi$ où π est le plan d'équation $\{z = 0\}$, i.e. le plan orthogonal au gradient $\nabla_P f$. ∎

Exemple. La sphère unité est définie par l'équation $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Celle-ci est non dégénérée le long de la sphère unité. En effet, le gradient ∇f ne s'annule qu'à l'origine, qui n'est pas sur la sohère unité. Par conséquent, la sphère unité est une surface lisse.

Exemple. Le cône quadratique défini par l'équation $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est pas une surface lisse en dehors de l'origine. En effet, le gradient ∇f ne s'annule qu'à l'origine. Le cône n'est pas une surface lisse au voisinage de l'origine. En effet, les vecteurs tangents aux droites contenues dans le cône et passant par l'origine engendrent $\mathbf{R}^3$, c'est incompatible avec le redressement sur un plan.

Exercice 1 Niveaux d'une forme quadratique *Pour quelles valeurs de ϵ l'ensemble X_ϵ des solutions de l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = \epsilon$ est-il une surface lisse ?*

1.4 Paramétrisation locale d'une courbe

Proposition 2 *Soit $t \mapsto c(t)$ une application définie au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}^3$. Si le vecteur vitesse $c'(0)$ est non nul, alors il existe un voisinage I de 0 dans $\mathbf{R}$ dont l'image est une courbe lisse.*

Preuve. Quitte à effectuer un changement affine de coordonnées, on peut supposer que $X(0) = 0$ et que $c'(0) = (0, 0, 1)$. Posons $\phi(x, y, z) = (x, y, 0) + c(z)$. La différentielle de ϕ en 0 est l'identité, donc ϕ est un difféomorphisme local, qui envoie l'axe des z sur la courbe donnée. ∎

Exercice 2 Projection d'une courbe *Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe dans l'espace, et π un plan. Montrer que la projection orthogonale de c sur π est localement une courbe lisse si le vecteur vitesse n'est jamais orthogonal à π. Est-ce une condition nécessaire ?*

1.5 Paramétrisation locale d'une surface

Soit X une surface lisse, i.e. une partie de $\mathbf{R}^3$ localement redressable sur un plan. Etant donné un point P de X, en transportant au moyen du redressement une paramétrisation affine de plan, on obtient une *paramétrisation locale* de X, i.e. une application $(u, v) \mapsto X(u, v)$ à valeurs dans

X, et dont la différentielle est injective (i.e. telle que les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$ soient linéairement indépendantes en chaque point). Réciproquement, l'image d'un ouvert du plan assez petit par une paramétrisation locale est une surface.

Théorème 3 *Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une application définie au voisinage de l'origine dans le plan, à valeurs dans $\mathbf{R}^3$. On suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial u}(0)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(0)$ sont linéairement indépendantes. Alors il existe un voisinage U de 0 dans le plan dont l'image est une surface lisse.*

Preuve.

Choisissons des coordonnées cartésiennes dans $\mathbf{R}^3$ d'origine $X(0)$ et telles que le plan engendré par les vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u}(0)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(0)$ aie pour équation $\{z=0\}$. Considérons l'application ϕ définie au voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ par

$$\phi(u,v,z) = (X(u,v), z).$$

Alors la différentielle de ϕ à l'origine est de la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u} & \frac{\partial X_1}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} & \frac{\partial X_2}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} & \frac{\partial X_3}{\partial v} & 1 \end{pmatrix}$$

où les deux premières colonnes sont indépendantes, donc elle est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, ϕ est un difféomorphisme entre des voisinages U' et V de l'origine. On peut supposer que U' est de la forme $U' = U \times]-\epsilon, \epsilon[$. Par construction, l'image $X(U)$ satisfait

$$X(U) \cap V = \phi(U' \cap \{z=0\})$$

donc $X(U)$ est une surface. ∎

Exemple. Les coordonnées (latitude,longitude) constituent une paramétrisation locale de la sphère privée des pôles, mais pas aux pôles. En effet, elle s'écrit

$$X(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi} = -\cos(\theta) X(\theta,\phi)$$

qui s'annule lorsque $\cos\theta = 0$, i.e. aux pôles. Néanmoins, la sphère est une surface lisse aux pôles.

Exercice 3 Démoulage *Soit v un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^3$. Une surface X est dite* démoulable *dans la direction v si les surfaces translatées $X + tv$ pour $t > 0$ sont deux à deux disjointes. Montrer que si le plan tangent $T_P X$ ne contient pas v, alors il existe un voisinage de P dans X qui est démoulable dans la direction v. Soit X une surface de classe C^k dont le plan tangent ne contient jamais v. Montrer que X est démoulable dans la direction v si et seulement si dans des coordonnées telles que v soit le troisième vecteur de base, X peut s'écrire sous la forme*

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,;\, (x,y) \in D,\, z = f(x,y)\}$$

où la fonction f est de classe C^k.

1.6 Plan tangent

Soit X une surface. Son *plan tangent* est l'ensemble des vecteurs vitesses en P des courbes contenues dans X et passant par P. C'est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

Lemme 3 *Le plan tangent en P à une surface X peut être défini par l'une des 3 constructions équivalentes suivantes.*

- *Si le difféomorphisme ϕ redresse X sur le plan vectoriel π au voisinage de P, alors $T_P X = (d_P\phi)^{-1}(\pi)$.*
- *Si f est une équation non dégénérée de X au voisinage de P, alors $T_P X$ est le noyau de la différentielle $d_P f$, i.e. le plan orthogonal au gradient $\nabla_P f$.*
- *Si $(u,v) \mapsto X(u,v)$ est une paramétrisation locale de X en P, alors $T_P X$ est l'image de la différentielle $d_P X$, i.e. le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u}(0)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(0)$.*

Preuve. Supposons que le difféomorphisme ϕ redresse X sur le plan vectoriel π, avec $\phi(P) = 0$. Si c est une courbe tracée sur X, avec $c(0) = P$, alors la courbe $\phi \circ c$ est contenue dans le plan π, et sa vitesse $(\phi \circ c)'(0) = d_P\phi(c'(0)) \in \pi$ donc $c'(0) \in (d_P\phi)^{-1}(P)$. Inversement, si $w \in (d_P\phi)^{-1}(P)$, alors w est la vitesse en P de la courbe $t \mapsto \phi^{-1}(tw)$ contenue dans X. Par conséquent, le plan tangent est égal à $(d_P\phi)^{-1}(P)$. En particulier, c'est un plan vectoriel.

Si f est une équation de X, alors pour toute courbe c tracée sur X, $f \circ c \equiv 0$ donc $d_P f(c'(0)) = 0$. On conclut que le plan tangent est contenu dans (donc égal à) le noyau de $d_P f$.

Si $(u,v) \mapsto X(u,v)$ est une paramétrisation locale de X, toute courbe c contenue dans X s'écrit au voisinage de P $c(t) = X(u(t), v(t))$ donc

$$c'(0) = u'(0)\frac{\partial X}{\partial u}(0) + v'(0)\frac{\partial X}{\partial v}(0)$$

est contenu dans le plan engendré par $\frac{\partial X}{\partial u}(0)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(0)$. Ce plan coïncide donc avec le plan tangent. ∎

Concrètement, pour calculer le plan tangent, il suffit de calculer le vecteur $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$ qui lui est orthogonal.

Exemple. En un point P, le plan tangent à la sphère unité est le plan orthogonal à P.

Exercice 4 Plan tangent à un hyperboloïde *Quel est le plan tangent au paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$ au point (u, v, uv) ?*

1.6.1 Intersection de deux surfaces

Définition générale. Deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbf{R}^n$ sont dits *transverses* si $E+F = \mathbf{R}^n$. Deux droites vectorielles de $\mathbf{R}^2$ (resp. deux plans vectoriels de $\mathbf{R}^3$) sont donc transverses si et seulement si ils sont distincts. Deux droites vectorielles de $\mathbf{R}^3$ ne sont jamais transverses. Une droite vectorielle et un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ sont transverses si et seulement si la droite n'est pas contenue dans le plan.

Définition 4 *Deux surfaces X_1 et X_2 de $\mathbf{R}^3$ sont dites* transverses *si en chaque point $P \in X_1 \cap X_2$, les plans tangents $T_P X_1$ et $T_P X_2$ sont distincts. Deux courbes c_1 et c_2 tracées sur une surfaces X sont dites transverses si en chaque point $P \in c_1 \cap c_2$, les tangentes $T_P c_1$ et $T_P c_2$ sont distinctes. Une courbe c est transverse à une surface X si en chaque point $P \in c \cap X$, la droite $T_P c$ n'est pas contenue dans le plan $T_P X$.*

Exercice 5 Transversalité d'un tore avec une famille de plans parallèles *On considère le tore de révolution paramétré par*

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(v)(2+\cos(u)) \\ \sin(v)(2+\cos(u)) \\ \sin(u) \end{pmatrix}.$$

Parmi les plans parallèles au plan $\{y=0\}$, lesquels sont transverses au tore ?

Exercice 6 La transversalité est une condition ouverte *Soient X_1 et X_2 deux surfaces transverses. Soit K un compact contenu dans $X_1 \cap X_2$. Montrer qu'il existe un voisinage U de K tel que si X_1' et X_2' sont des surfaces suffisamment proches de X_1 et X_2, alors $U \cap X_1'$ et $U \cap X\_2$ sont transverses et leur intersection est non vide.*

Théorème 4 *Si les surfaces X_1 et X_2 sont transverses, leur intersection γ est une réunion de courbes disjointes. Sa tangente $T_P\gamma$ est l'intersection des plans tangents T_PX_1 et T_PX_2.*

C'est une conséquence de l'énoncé suivant.

Théorème 5 *Soient X_1, X_2 et X_2 trois surfaces, P un point commun aux trois surfaces tel que les plans T_PX_1 et T_PX_2 sont distincts et leur intersection n'est pas contenue dans T_PX_3. Alors il existe un difféomorphisme tangent à l'identité en P qui envoie chacune des surfaces sur son plan tangent. En particulier, l'intersection de deux des surfaces est envoyée sur une droite affine.*

Preuve.

Par un changement affine de coordonnées, on peut supposer que $P=0$ est l'origine et que les 3 plans tangents sont les plans de coordonnées. En effet, il suffit de choisir une vecteur non nul dans chacune des intersections de 2 plans. Ces vecteurs sont non coplanaires par hypothèse.

Soit f_i une équation non dégénérée de X_i au voisinage de P. Alors la différentielle d_Pf_i a pour noyau le plan de coordonée $\{x_i=0\}$, donc elle est proportionnelle à la forme dx_i. Quitte à multiplier f_i par une constante, on peut supposer que $d_Pf_i = dx_i$. Alors la différentielle de l'apllication ϕ de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ de composantes les f_i est l'identité. Par conséquent, ϕ est un difféomorphisme local tangent à l'identité. Par construction, il envoie les surfaces X_i sur les plans de coordonnées. ∎

Remarque. Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe tracée sur une surface X, dont la vitesse en P ne s'annule pas. Au voisinage de P, on peut prolonger l'application c en une paramétrisation locale $(t,u) \mapsto X(t,u)$ de X. En effet, quitte à redresser X, on peut supposer que X est un plan. Dans ce cas, on choisit un vecteur w dans ce plan qui n'est pas colinéaire à $c'(0)$, et on pose $X(t,u) = c(t) + uw$. Comme $\dfrac{\partial X}{\partial u}(0,0) = w$ et $\frac{\partial X}{\partial t}(0,0) = c'(0)$ sont indépendants, il s'agit bien d'une paramétrisation locale du plan X.

Exercice 7 Ensembles de niveau d'une fonction sur une surface *Soit X une surface, P un point de X et f une fonction définie sur un voisinage de P dans $\mathbf{R}^3$, telle que $f(P)=0$. Montrer que si la restriction au plan tangent T_PX de la différentielle d_Pf ne s'annule pas, alors l'ensemble des points de X où f s'annule est une courbe au voisinage de P, dont la tangente en P est le noyau de la restriction de d_Pf à T_PX.*

1.7 Cheminement

Soit c une courbe obtenue comme composante connexe de l'intersection de deux surfaces transverses X_1 et X_2. On suppose connu un point P de c. Le *cheminement* désigne les méthodes numériques utilisées pour calculer une paramétrisation approchée de c.

Soit $t \mapsto c(t)$ une paramétrisation de c, d'origine P. Etant donné un pas $h > 0$, une paramétrisation approchée de c est une suite P_j telle que $P_0 = P$ et P_j est proche de $c(jh)$ pour tout j. Comment trouver P_{j+1} en fonction de P_j ? On va voir que le vecteur vitesse v en P_j peut être calculé. Cela donne une première approximation

$$Q = P_j + hv.$$

Toutefois, Q est trop loin de la courbe c. On s'en rapporche par une méthode itérative $Q_0 = Q$, $Q_{k+1} = H(Q_k)$. Pour k bien choisi, on pose $P_{j+1} = Q_k$.

Le détail de l'algorithme dépend de la façon dont sont données les surfaces X_1 et X_2.

1.7.1 Cas où X_1 est paramétrée et X_2 donnée par une équation $\{f_2 = 0\}$

On est ramené à paramétrer le lieu z des zéros de la fonction composée

$$(u,v) \mapsto f(u,v) = f_2(X_1(u,v))$$

au voisinage d'un point $(u_0 = 0, v_0)$ du plan. Supposant que $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) \neq 0$, il existe une fonction ϕ telle que $z = \{(u,v)\,;\, v = \phi(u)\}$ au voisinage de (u_0,v_0). La courbe c à approcher est $t \mapsto X_1(t,\phi(t))$. Il suffit de construire une suite de réels p_j proches de $\phi(jh)$ et de poser ensuite $P_j = X_1(jh,p_j)$.

En dérivant l'identité $f(u,\phi(u)) = 0$ on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,\phi(u)) + \phi'(u)\frac{\partial f}{\partial v}(u,\phi(u)) = O.$$

Un première approximation de p_j est donc

$$q = p_j - h\frac{\frac{\partial f}{\partial u}(jh,p_j)}{\frac{\partial f}{\partial v}(jh,p_j)}.$$

Le point $((j+1)h, q)$ n'est pas assez proche de l'ensemble z, à notre goût (la distance est de l'ordre de h^2 et cela ne suffit pas). Cherchons un point de la forme $((j+1)h, q+t)$ qui soit exactement sur z. Il faut résoudre l'équation $g(t) = 0$ où

$$\tilde{f}(t) = f((j+1)h, q+t).$$

La *méthode de Newton* consiste à itérer la transformation

$$t \mapsto g(t) = t - \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{f}'(t)}.$$

L'idée est que les zéros de $\tilde{f}$ sont des points fixes *superattractifs* de g, i.e. la dérivée de g s'y annule. La convergence des itérés est alors plus qu'exponentielle.

Toutefois, comme la dérivée $\tilde{f}'$ n'est pas facile à calculer, on préfère remplacer le facteur $\tilde{f}'(t)$ par une constante ℓ qui en constitue une bonne approximation. On parle alors de *méthode quasi-Newton*. On gagne en robustesse et en économie de calcul ce qu'on perd en vitesse de convergence.

En l'occurrence, on choisit

$$\ell = \frac{\partial f}{\partial v}(jh,p_j).$$

Le lemme suivant donne une borne a priori sur le nombre k d'itérations nécessaire pour se rapprocher de la courbe z. La méthode permet donc de construire une approximation de la courbe d'intersection de pas fixé (suffisamment petit) et dont la précision peut être augmentée sans changer le pas.

Lemme 5 *Notons*

$$H : t \mapsto H(t) = t - \ell^{-1} \circ \tilde{f}(t)$$

l'application obtenue, posons $t_0 = 0$, $t_k = H(t_{k-1})$. Soient N un majorant pour les dérivées partielles premières et M un majorant pour les dérivées partielles secondes de l'équation f. Supposons que $h \leq (4MN\ell^{-2})^{-1}$. Alors la suite t_k converge exponentiellement vers sa limite t,

$$|t - t_k| \leq N(3MN\ell^{-2}h)^{k+2}.$$

Preuve. Notons $N = |\frac{\partial f}{\partial u}(jh, p_j)|$. Alors $|q - p_j| = h\ell^{-1}|\frac{\partial f}{\partial u}(jh, p_j)| \leq h\ell^{-1}N$. Comme

$$\| ((j+1)h, q+t) - (jh, p_j) \| \leq h + |t| + h\ell^{-1}N,$$

$$|\frac{\partial f}{\partial v}((j+1)h, q+t) - \ell| \leq M(h + |t| + h\ell^{-1}N).$$

et donc

$$|H'(t)| = 1 - \ell^{-1}\frac{\partial f}{\partial v}((j+1)h, q+t) \leq \ell^{-1}M(h + |t| + h\ell^{-1}N) \leq 3\ell^{-2}MNh$$

si $|t| \leq h$.

D'autre part, la fonction

$$g : s \mapsto f(jh + s, p_j - s\ell^{-1}\frac{\partial f}{\partial u}(jh, p_j))$$

est nulle en $s = 0$, a une dérivée nulle en $s = 0$ et une dérivée seconde majorée par $MN^2\ell^{-2}$, donc

$$|H(0)| = |\ell^{-1}g(h)| \leq \frac{1}{2}h^2MN^2\ell^{-2}.$$

Par conséquent, si $|t| \leq h$,

$$|H(t)| \leq |H(0)| + |H(t) - H(0)| \leq h^2MN^2\ell^{-2} + 3\ell^{-2}MNh|t| \leq 4MN^2\ell^{-2}h^2.$$

Supposons que $4MN^2\ell^{-2}h \leq 1$. Alors l'intervalle $[-h, h]$ est invariant par H, et sur cet intervalle, H contracte d'un facteur $3\ell^{-2}MNh$. Posons $t_0 = 0$ et $t_{k+1} = H(t_k)$. Alors

$$|t_{k+1} - t_k| \leq (3\ell^{-2}MNh)^k|t_1 - t_0| \leq h^2MN^2\ell^{-2}(3\ell^{-2}MNh)^k$$

En sommant de k à $+\infty$, on trouve que

$$|t - t_k| \leq N(3MN\ell^{-2}h)^{k+2}. \blacksquare$$

1.7.2 Cas où X_1 et X_2 sont données par des équations $\{f_i = 0\}$

Cette fois, la courbe approchée est la paramétrisation de $X_1 \cap X_2$ par son abscisse curviligne. On construit directement des points P_j dans $\mathbf{R}^3$ Si $\nu_i = \nabla f_i / |\nabla f_i|(P_j)$ est la normale orientée à X_i en P_j, alors $c'(jh) = \nu_1 \wedge \nu_2$, donc une première approximation de $c((j+1)h)$ est

$$Q = P_j + h\nu_1 \wedge \nu_2.$$

Le point Q n'est pas dans $X_1 \cap X_2$. Cherchons un point R de l'intersection, proche de Q, et situé approximativement à distance h de P_j. On le cherche dans le plan parallèle et à distance h du plan normal à c au point P_j, i.e. sous la forme

$$R = Q + t_1\nu_1 + t_2\nu_2.$$

Il doit satisfaire aux équations $f_1(R) = f_2(R) = 0$. Autrement dit, on cherche un zéro de l'application

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad F(t_1, t_2) = (f_1(P_j + h\nu_1 \wedge \nu_2 + t_1\nu_1 + t_2\nu_2), f_2(P_j + h\nu_1 \wedge \nu_2 + t_1\nu_1 + t_2\nu_2)).$$

La méthode de Newton consiste à itérer la transformation

$$G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad G(t_1, t_2) = (t_1, t_2) - (d_{(t_1,t_2)}F)^{-1} \circ F(t_1, t_2).$$

Comme la différentielle

$$d_{(t_1,t_2)}F = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1, \nu_1 \rangle & \langle \nabla f_1, \nu_2 \rangle \\ \langle \nabla f_2, \nu_1 \rangle & \langle \nabla f_2, \nu_2 \rangle \end{pmatrix}$$

est délicate à calculer à chaque étape de l'itération, on préfère la remplacer par le terme constant

$$L = \begin{pmatrix} \langle \nu_1, \nu_1 \rangle & \langle \nu_1, \nu_2 \rangle \\ \langle \nu_2, \nu_1 \rangle & \langle \nu_2, \nu_2 \rangle \end{pmatrix}$$

qui constitue une bonne approximation. Le lemme suivant donne une borne a priori sur le nombre d'itérations nécessaire pour se rapprocher de la courbe c.

Lemme 6 *Notons*

$$H : \mathbf{t} \mapsto H(\mathbf{t}) = \mathbf{t} - L^{-1} \circ F(\mathbf{t})$$

l'application obtenue, posons $\mathbf{t}_0 = 0$, $\mathbf{t}_k = H(\mathbf{t}_{k-1})$. Soit M un majorant pour les dérivées partielles secondes des équations f_1 et f_2 des surfaces X_1 et X_2. Supposons que $h \leq (4M \parallel L^{-1} \parallel)^{-1}$. Alors la suite $\mathbf{t}_k$ converge exponentiellement vers sa limite $\mathbf{t}$,

$$\parallel \mathbf{t} - \mathbf{t}_k \parallel \leq h(3M \parallel L^{-1} \parallel h)^{k+1}.$$

Preuve. Notons $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ et $\mathbf{e}$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} \parallel H(\mathbf{t}+\mathbf{e}) - H(\mathbf{t}) \parallel &= \parallel \mathbf{e} + L^{-1}(F(\mathbf{t}+\mathbf{e}) - F(\mathbf{t}) \parallel \\ &\leq \parallel 1 - L^{-1} \circ d_{\mathbf{t}}F \parallel \parallel \mathbf{e} \parallel + \frac{1}{2} M \parallel L^{-1} \parallel \parallel e \parallel^2 \end{aligned}$$

où M est un majorant des dérivées secondes des f_i (et par conséquent, de la dérivée seconde de F). De plus

$$\parallel L - d_0F \parallel \leq Mh$$

$$\parallel d_0F - d_{\mathbf{t}}F \parallel \leq M \parallel \mathbf{t} \parallel$$

donc

$$\parallel 1 - L^{-1} \circ d_{\mathbf{t}}F \parallel \leq M \parallel L^{-1} \parallel (h + \parallel \mathbf{t} \parallel).$$

Il vient, si $\parallel \mathbf{t} \parallel < h$ et $\parallel \mathbf{e} \parallel < h$,

$$\parallel H(\mathbf{t}+\mathbf{e}) - H(\mathbf{t}) \parallel \leq 3M \parallel L^{-1} \parallel h \parallel \mathbf{e} \parallel .$$

D'autre part la fonction $s \mapsto f_i(P_j + s\nu_1 \wedge \nu_2)$ a une dérivée nulle à l'origine, donc sa valeur en $s = h$ est majorée par $\frac{1}{2}M h^2$. Il vient

$$\parallel H(0) \parallel \leq M \parallel L^{-1} \parallel h^2.$$

Par conséquent, si $\parallel \mathbf{t} \parallel \leq h$ et $h \leq (4M \parallel L^{-1} \parallel)^{-1}$,

$$\begin{aligned} \parallel H(\mathbf{t}) \parallel &\leq \parallel H(\mathbf{t}) - H(0) \parallel + \parallel H(0) \parallel \\ &\leq 3M \parallel L^{-1} \parallel h \parallel \mathbf{t} \parallel + M \parallel L^{-1} \parallel h^2 \\ &\leq 4M \parallel L^{-1} \parallel h^2 \\ &\leq h. \end{aligned}$$

Autrement dit, la boule de rayon h est invariante par H. Sur cette boule, H est contractante d'un facteur $3M \parallel L^{-1} \parallel h$, d'où l'estimation annoncée. ▪

Remarque. Les constantes M et $\parallel L^{-1} \parallel$ ont une interprétation géométrique. Lorsque la fonction f_1 coïncide au signe près avec la distance à la surface X_1, ses dérivées secondes s'expriment en fonction de la seconde forme fondamentale de X_1. En particulier, on peut prendre pour M le sup des courbures principales. Si α désigne l'angle entre les normales aux surfaces X_1 et X_2 au point P_j, alors

$$\parallel L^{-1} \parallel = \frac{1+|\cos\alpha|}{\sin^2\alpha}.$$

1.7.3 Cas où X_1 et X_2 sont paramétrées

Les images réciproques de la courbe c par les paramétrisations sont deux courbes z^1 et z^2 dans les plans des paramètres. Supposons z^1 transverse aux axes de coordonnées $u^1 = constante$. Alors la courbe z^1 peut être localement paramétrée par $(t \mapsto (t, \phi(t))$. On va construire une suite de réels p_j telle que la suite (jh, p_j) approche la courbe z^1 et une suite de points r_j du plan des paramètres (u^2, v^2), de sorte que

$$X_1(jh, p_j) = X_2(r_j)$$

avec une faible erreur. Alors $P_j = X_1(jh, p_j)$ est une bonne discrétisation de la courbe d'intersection.

Supposons connus p_j et r_j. Comment construire p_{j+1} et r_{j+1} ? Le vecteur $(1, \lambda)$ du plan des paramètres (u^1, v^1) est tangent à la courbe z^1 si et seulement si son image par la différentielle de X_1 est dans le plan tangent à X_2 au point P_j. Autrement dit, si et seulement si

$$\det(\frac{\partial X_1}{\partial u^1}(jh, p_j) + \lambda \frac{\partial X_1}{\partial v^1}(jh, p_j), \frac{\partial X_2}{\partial u^2}(r_j), \frac{\partial X_2}{\partial v^2}(r_j)) = 0.$$

Si λ est la solution de cette équation, alors il existe des réels μ et ν uniques tels que

$$\frac{\partial X_1}{\partial u^1}(jh, p_j) + \lambda \frac{\partial X_1}{\partial v^1}(jh, p_j) = \mu \frac{\partial X_2}{\partial u^2}(r_j) + \nu \frac{\partial X_2}{\partial v^2}(r_j)$$

et le vecteur (μ, ν) du plan des paramètres (u^2, v^2) est tangent en r_j à la courbe z^2. Une première approximation de p_{j+1} est donc

$$q = p_j + h\lambda.$$

De même, une première approximation de r_{j+1} est

$$s = r_j + h(\mu, \nu).$$

Le point $((j+1)h, q)$ (resp. s) n'est pas sur la courbe z^1 (resp. z^2). Pour s'en rapprocher, on cherche un réel t et un vecteur $w = (u^2, v^2)$ tels que

$$X_1((j+1)h, q+t) = X_2(s+w).$$

Autrement dit, notant $\mathbf{t} = (t, w)$, il s'agit de résoudre l'équation $F(\mathbf{t}) = 0$ où

$$F(\mathbf{t}) = F(t, w) = X_1((j+1)h, q+t) - X_2(s+w) \in \mathbf{R}^3.$$

La méthode de Newton suggère d'itérer l'application

$$H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{t} \mapsto \mathbf{t} - (d_{\mathbf{t}}F)^{-1} \circ F(\mathbf{t}).$$

Pour la commodité et la robustesse des calculs, on préfère remplacer la matrice $d_{\mathbf{t}}F$ dont les colonnes sont

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial X_1}{\partial v^1}((j+1)h, q+t), \quad \frac{\partial F}{\partial u^2} = -\frac{\partial X_2}{\partial u^2}(s+w), \quad \frac{\partial F}{\partial v^2} = -\frac{\partial X_2}{\partial v^2}(s+w),$$

par la matrice L dont les colonnes sont

$$\frac{\partial X_1}{\partial v^1}(jh, p_j), \quad -\frac{\partial X_2}{\partial u^2}(r_j), \quad -\frac{\partial X_2}{\partial u^2}(r_j).$$

Pour cette méthode quasi-Newton, une estimation similaire à celles des lemmes 5 et 6 permet de choisir le nombre d'itérations en fonction de la précision souhaitée.

Chapter 2

Orientations

2.1 Motivation

Orienter une surface, c'est se donner un bit d'information supplémentaire : choisir en un point de la surface l'un des deux vecteurs unitaires normaux. Si la surface doit faire partie du bord d'un objet, elle héritera automatiquement d'une telle orientation (convention de la *normale sortante*). C'est pourquoi l'orientation joue un rôle dans la représentation BRep des objets.

Le bord d'une surface à bord orientée, et plus généralement, d'un polygone plan orienté, hérite lui-même d'une orientation. C'est ainsi que les arêtes d'une même face d'un polyèdre viennent avec un ordre circulaire, qui constitue un mode de représentation commode.

On commence par traiter le cas des surfaces lisses, puis celui des polyèdres, i.e. des objets dont le bord est contenu dans une collection finie de plans affines, et enfin on traite les polyèdres curvilignes, i.e. les objets bordés par des surfaces deux à deux transverses.

2.2 Orientations normale et tangente

2.2.1 Orientation normale

Il s'agit de formaliser l'idée qu'un objet est d'un seul côté de son bord. Le problème de savoir si une collection de surfaces borde un objet est mieux posé si on prescrit pour chaque surface de quel côté on veut trouver l'objet.

Définition 7 *Orienter normalement une surface X en un point P, c'est choisir l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux au plan tangent $T_P X$. Un choix d'orientation normale en P détermine un choix d'orientation normale au voisinage de P. Une* orientation normale *de X consiste à choisir une orientation normale en chaque point de X, qui soit constante au voisinage de chaque point.*

Exemple. Une équation locale f d'une surface X détermine une orientation normale localement : on choisit pour normale le champ de vecteurs $\nabla f / |\nabla f|$. Noter que $-f$ est aussi une équation locale de X, qui définit l'orientation opposée.

Exemple. Une paramétrisation locale $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une orientation normale localement : on choisit pour normale le champ de vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$. Noter qu'échanger u et v change l'orientation.

Remarque. De proche en proche, on peut essayer d'orienter X toute entière. Ce n'est pas toujours possible : il existe des surfaces *non orientables.*

Exemple. La sphère unité est orientable, elle possède deux orientations, celle donnée en chaque point P par $\Gamma(P) = P$, et l'orientation opposée donnée en chaque point P par $\Gamma(P) = -P$. La première est celle déterminée par l'équation $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, la seconde est celle déterminée par la paramétrisation locale par la latitude et la longitude.

Exemple. Considérons la surface paramétrée par

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} (1 + v\cos\frac{u}{2})\cos u \\ (1 + v\cos\frac{u}{2})\sin u \\ v\sin\frac{u}{2} \end{pmatrix}$$

où $u \in \mathbf{R}$, $v \in]-1, 1[$. C'est une surface *réglée*, i.e. obtenue en déplaçant un segment de droite (paramétré par v). Elle est entièrement décrite lorsque u décrit l'intervalle $[0, 2\pi[$. En effet,

$$X(u + 2\pi, v) = X(u, -v).$$

Cependant

$$\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u + 2\pi, v) = -\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

donc il y a une ambiguïté pour choisir une normale orientée en un point $P = X(u, v) = X(u, -v)$: doit-on choisir $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u + 2\pi, v)$ ou $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$? On peut montrer qu'il n'existe pas de choix localement constant de normale orientée. Cette surface (appelée bande de Möbius), n'est pas orientable.

2.2.2 Orientation tangente

Définition 8 *Orienter une courbe en un point P, c'est choisir entre les deux vecteurs tangents unitaires en P.*

Orienter une surface X en un point P, c'est décider quelles sont les bases orthonormées du plan tangent T_PX qu'on veut appeler directes. Un choix d'orientation en P détermine un choix d'orientation au voisinage de P. Une orientation tangente *de X consiste à choisir une orientation en chaque point de X, qui soit constante au voisinage de chaque point.*

Si on fixe une orientation de l'espace ambiant, une orientation normale détermine une orientation tangente. En effet, si $\Gamma(P)$ est la normale choisie en P,

- dans le plan : la tangente orientée $\tau(P)$ est telle que la base $(\Gamma(P), \tau(P))$ soit directe ;
- dans l'espace, une base (e_1, e_2) de T_PX est directe si $\Gamma(P) = e_1 \wedge e_2$.

Exemple. Si le cercle unité dans le plan est orienté normalement par $\Gamma(p) = p$, alors $\tau(p)$ s'obtient en tournant p de $\pi/2$, ce qui correspond au sens trigonométrique.

Exemple. Si la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ est orientée normalement en $p = (1, 0, 0)$ par $\Gamma(p) = p$, alors la base $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ du plan tangent en p est directe.

2.3 Orientations induites

2.3.1 Dans le plan et l'espace

Soit D un fermé de $\mathbf{R}^n$ dont le bord est une surface X. On suppose que D est l'adhérence de son intérieur. Alors D est localement d'un seul côté de X et X hérite d'une orientation normale par la *normale sortante.*

Exemple. Le disque unité $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$ a pour bord le cercle unité orienté normalement par $\Gamma((x, y)) = (x, y)$. L'orientation tangente induite sur le cercle est le sens trigonométrique.

Exemple. Le bord du carré unité $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1,\, O \leq y \leq 1\}$ est constitué de 4 segments joignant les 4 sommets $O = (0,0)$, $P = (1,0)$, $Q = (1,1)$ et $R = (0,1)$. La normale sortante le long du segment OP est $(0,-1)$. Le vecteur unitaire orientant ce segment est donc $P - O$.

Exemple. La boule unité $B = \{P \in \mathbf{R}^3 ;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ a pour bord la sphère unité orientée normalement par $\Gamma(P) = P$.

2.3.2 Surfaces à bord

Définition 9 *Une* surface à bord `(surface with boundary)` *est une partie de* $\mathbf{R}^3$ *qui peut localement être redressée sur un plan ou un demi-plan. Le bord* `(boundary)` *est formé des points qui lors du redressement sont envoyés sur le bord d'un demi-plan. Le plan tangent $T_P X$ est défini en tout point (même aux points du bord).*

Par définition, une surface à bord X peut-être localement prolongée au-delà de son bord, i.e. au voisinage d'un point P du bord, il existe une surface Y et une fonction f définie au voisinage de P telles que la différentielle $d_P f$ ne soit pas identiquement nulle sur l'espace tangent $T_P Y$, et $X = \{Q \in Y ;\, f(Q) \leq 0\}$ au voisinage de P.

Exemple. L'hémisphère nord $H = \{P \in \mathbf{R}^3 ;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq 0\}$ est une surface à bord. Vérifions le au voisinage du point $(1,0,0)$. Le difféomorphisme

$$(x,y,z) \mapsto (x - \sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$$

redresse l'hémisphère nord sur le demi-plan $\{x = 0,\, z \geq 0\}$.

Exercice 8 Aspect d'un domaine bordé par les axes *Soit F un fermé propre de $\mathbf{R}^2$. On suppose qu'au voisinage de l'origine, le bord de F est contenu dans la réunion des deux axes de coordonnées. Montrer que trois cas se présentent. Au voisinage de l'origine,*

- *ou bien F coïncide avec un demi-plan ;*
- *ou bien F coïncide avec la réunion de deux quadrans opposés ;*
- *ou bien F coïncide avec la réunion de trois quadrans contigus.*

Exercice 9 Aspect d'un domaine bordé par deux surfaces transverses *Soit F un fermé propre de $\mathbf{R}^3$. On suppose qu'au voisinage du point P de F, le bord de F est contenu dans la réunion de deux surfaces transverses X_1 et X_2. Montrer que trois cas se présentent. Au voisinage de P,*

- *ou bien ∂F est l'une des surfaces X_1 ou X_2 ;*
- *ou bien $\partial F = X_1 \cup X_2$;*
- *ou bien $F \cap X_1$ et $F \cap X_2$ sont des surfaces à bord.*

2.3.3 Orientation induite sur le bord d'une surface

Soit X une surface à bord dans $\mathbf{R}^3$, munie d'une orientation tangente.

Le bord hérite d'une orientation normale par la normale sortante : en chaque point P du bord ∂X, c'est le vecteur unitaire $\delta(P)$ tangent à X en P, orthogonal à $T_P \partial X$, qui pointe vers l'extérieur de X.

On en déduit une orientation de la tangente à ∂X : c'est le vecteur unitaire $\tau(P)$ tangent à ∂X tel que la base $(\Delta(P), \tau(P))$ de $T_P X$ soit directe.

Si l'orientation tangente de X provient d'une orientation normale $p \mapsto \Gamma(P)$, alors en tout point P de ∂X,

$$\Delta(P) \wedge \tau(P) = \Gamma(P).$$

Exemple. Soit X le demi-plan $X = \{P \in \mathbf{R}^3 \,;\, z = 0,\, x \leq 0\}$ orienté normalement par $\Gamma(P) = (0,0,1)$. Le long du bord, la normale sortante est $H(P) = (1,0,0)$. Le vecteur unitaire tangent orienté au bord est $\tau(P) = (0,1,0)$.

Exercice 10 Orientation induite sur le bord d'un hémisphère *On munit l'hémisphère nord* $H = \{P \in \mathbf{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq 0\}$ *de l'orientation normale sortante de la boule unité. Quelle est l'orientation tangente induite sur le bord ? Ecrire une paramétrisation du bord compatible avec cette orientation.*

Exercice 11 Orientations induites sur une intersection *Soit* F *un fermé propre de* $\mathbf{R}^3$*. On suppose qu'au voisinage du point* P *de* F*, le bord de* F *est contenu dans la réunion de deux surfaces transverses* X_1 *et* X_2*. On suppose que* $F \cap X_1$ *et* $F \cap X_2$ *sont des surfaces à bord au voisinage de* P *(voir exercice 9). On oriente* X_1 *et* X_2 *par la normale sortante. Montrer que les orientations induites par les surfaces à bord* $F \cap X_1$ *et* $F \cap X_2$ *sur leur bord* $X_1 \cap X_2$ *sont opposées.*

2.4 Cycles

Les notions d'orientation normale et tangente, d'orientation induite sur le bord, se généralisent aux surfaces et courbes lisses par morceaux, i.e. aux *polyèdres curvilignes.* Une orientation d'un polyèdre curviligne de dimension 2 consiste à se donner une orientation de chaque facette.

Les notions de facettes, d'arêtes et de sommets ne seront définies rigoureusement qu'en section 2.8. Néanmoins, elles sont suffisamment intuitives pour qu'on puisse définir sans précaution exagérée les *coarêtes* et les *cycles.*

On considère des polygones curvilignes tracés sur une surface X. Si σ est une arête, une orientation de σ revient à choisir un ordre entre les extrémités de σ. Pour une arête orientée $\sigma = [p,q]$, on appelle x *l'extrémité initiale* de σ et y *l'extrémité finale* de σ.

Soit P un polygone curviligne tracée sur une surface orientée X. On munit le bord de P de l'orientation tangente donnée par la convention 8. Alors chaque arête orientée $\sigma = [p,q]$ de P possède un unique *successeur* $[q,r]$, défini comme suit. L'intersection de Q avec une courbe fermée simple entourant q assez petite est une réunion d'intervalles orientés M du cercle. L'un de ces intervalles a σ pour extrémité initiale. Son extrémité finale correspond à une arête $[q,r]$ de P.

On a donc construit une permutation de l'ensemble des arêtes qui constituent P.

Définition 10 *Chaque orbite de cette permutation s'appelle un* cycle d'arêtes `(loop)`.

Attention, les cycles ne sont pas les composantes connexes de P.

En dimension 3, le bord d'un polyèdre curviligne est normalement orienté. Chaque facette hérite donc d'une orientation tangente. La décomposition en cycles du bord de chaque facette est donc bien définie. C'est par un ou plusieurs cycles d'arêtes que les facettes d'un objet 3D sont décrites dans ACIS ou CATIA.

Une arête appartient toujours à plusieurs facettes, et possède un successeur (différent) dans chaque facette. C'est pourquoi ACIS possède la structure de donnée dite

Définition 11 *Dans un polyèdre curviligne, une* coarête `(coedge)` *est la donnée d'une arête orientée (symbolisée par ses deux étrémités dans l'ordre) et d'une facette orientée qui la contient dans son bord.*

Le successeur d'une coarête est uniquement défini. Les coarêtes forment donc des cycles. Chacun de ces cycles décrit une partie du bord d'une facette.

Exercice 12 Coarêtes de la réunion de 2 cubes *Soit* K *le cube unité de* $\mathbf{R}^3$*,* K' *son translaté de vecteur* $(1,1,1/2)$ *et* P *le polyèdre* $K \cup K'$*. On oriente les facettes de* P *par la normale sortante. Déterminer les coarêtes* $((A,B),F)$ *telles que* $A = (1,1,1/2)$ *et* $B = (1,1,1)$.

2.5 Polyèdres, points de vue CSG et BRep

L'objet de cette section et des suivantes est de donner les définitions et énoncés précis qui manquent dans la section précédente.

2.5.1 Point de vue CSG

Définition 12 *Un* polyèdre convexe `(convex polyhedron)` *de* $\mathbf{R}^n$ *est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Autrement dit, un polyèdre convexe est défini par une nombre fini d'inégalités linéaires larges.*

Exemple. L'orthant `(orthant)` $\{X_i \geq 0\}$ s'appelle quadrant en dimension 2.

Exemple. Le cube `(cube)` $\{0 \leq X_i \leq 1\}$ s'appelle carré en dimension 2.

Exemple. Le simplexe standard `(standard simplex)` $\{X_i \geq 0,\ \sum X_i = 1\}$.

Exemple. Etant donné $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ non contenus dans un hyperplan, leur enveloppe convexe est un *simplexe* `(simplex)`, i.e. l'image du simplexe standard par une bijection affine.

Remarque. Un polyèdre convexe a une dimension, celle du sous-espace affine qu'il engendre. P est de dimension n si et seulement si sont intérieur int(P) est non vide.

Définition 13 *Un* polyèdre `(polyhedron)` *de* $\mathbf{R}^n$ *est la réunion d'un nombre fini de polyèdres convexes. Autrement dit, un polyèdre est défini par une nombre fini de quatificateurs et d'inégalités linéaires larges. Un polyèdre est dit* propre *s'il est égal à l'adhérence de son intérieur :* $P = \mathrm{clos}(\mathrm{int(P)})$.

Proposition 14 *La classe des polyèdres est stable par réunion, intersection, produit, projection, cylindre, cône. Elle est invariante par tranformation affine.*

Preuve. Immédiat. ■

Remarque. La réunion de deux polyèdres propres est propre. Ce n'est pas le cas de l'intersection en général.

2.5.2 Point de vue BRep

Définition 15 *Si* X *est une partie de* $\mathbf{R}^n$*, on note* $\partial X = \mathrm{clos}(X) \setminus \mathrm{int(X)}$ *son bord et* X^* *l'adhérence du complémentaire de* X.

Lemme 16 *Soit* X *une partie fermée de* $\mathbf{R}^n$ *dont le bord est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'hyperplans. Alors* X^* *et* $(X^*)^* = \mathrm{clos}(\mathrm{int(X)})$ *sont des polyèdres propres.*

Preuve. Soit X un fermé dont le bord est contenu dans un nombre fini d'hyperplans H_j. Soit U une composante connexe du complémentaire de la réunion des H_j. Alors $X \cap U$ est fermé dans U. Mais comme ∂X est disjoint de U, $X \cap U$ est ouvert dans U. Par connexité, ou bien U est disjoint de X, ou bien U est contenu dans X. Remarquer que l'adhérence de U est un polyèdre convexe. Notons P la réunion des adhérences des composantes U qui sont contenues dans X. Alors $P \subset X$ et P est un polyèdre. Montrons que P contient l'intérieur de X. Si x est un point intérieur de X, il existe un segment $[x, y]$ contenu dans X et dont l'intersection avec la réunion des hyperplans H_j est réduite à x. La composante U de y est contenue dans X, donc $x \in [x, y] \subset \mathrm{clos}(U) \subset P$, et on conclut que $\mathrm{int(X)} \subset P$. On a donc montré que $P = \mathrm{clos}(\mathrm{int(X)})$ est un polyèdre.

Comme $\partial X^* \subset \partial X$, ∂X^* est lui aussi contenu dans une réunion finie d'hyperplans, donc $X^* = \mathrm{clos}(\mathrm{int(X^*)})$ est un polyèdre. ■

Théorème 6 *Soit X un fermé de $\mathbf{R}^n$. Alors X est un polyèdre si et seulement si son bord $\partial X = X \setminus \mathrm{int(X)}$ est un polyèdre.*

Preuve. Soit P un polyèdre. Alors $P = \bigcup P_j$ où P_j est un polyèdre convexe, $P_j = \bigcap E_{j,k}$ où $E_{j,k}$ est un demi-espace fermé. Alors $\partial P_j \subset \bigcup_k \partial E_{j,k}$ donc $\partial P \subset \bigcup_{j,k} \partial E_{j,k}$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'hyperplans. D'après le lemme 16, P^* est un polyèdre donc $\partial P = P \cap P^*$ est un polyèdre.

Inversement, soit X un fermé tel que ∂X est un polyèdre. Etant d'intérieur vide, ∂X est une réunion de polyèdres convexes contenus dans des sous-espaces affines de dimension $\leq n-1$, donc a fortiori dans des hyperplans, et le lemme 16 donne que $\mathrm{clos(int(X))}$ est un polyèdre. On conclut que $X = \mathrm{clos(int(X))} \cup \partial X$ est un polyèdre. ▪

Remarque. Si on se donne le bord, la méthode de construction de P suggérée dans cette preuve passe par la détermination de toutes les composantes connexes du complémentaire d'une famille d'hyperplans. Or il s'agit là d'un calcul lourd.

2.6 Faces

2.6.1 Cas des polyèdres convexes

Soit P est un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^3$, défini par des inéquations $\{y \cdot v_j \leq t_j\}$. L'intérieur de P est constitué des points satisfaisant aux inégalités strictes. Puis viennent les points où une seule des égalités est réalisée (ou bien plusieurs égalités proportionnelles). Pour ces points, il reste deux degrés de liberté, ils forment l'intérieur (relatif) des facettes de dimension 2 de P. Les points où deux égalités indépendantes sont réalisées forment les arêtes, etc...

Formellement, si P est défini par des inéquations $\{y \cdot v_j \leq t_j\}$, un point x de P se trouve dans une face dont la dimension est $n - \ell$ où ℓ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par celles des inéquations qui sont actives en x, i.e. par les v_j tels que $x \cdot v_j = t_j$.

2.6.2 Espace tangent

La définition suivante formalise l'idée de degrés de liberté pour un polyèdre quelconque.

Définition 17 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Soit x un point de P. L'*espace tangent *à P en x, noté $T_x P$ est le plus grand sous-espace vectoriel T ayant la propriété suivante : il existe $r > 0$ tel que pour tout vecteur $v \in T$ de norme $< r$, la translation de vecteur v envoie $B(x,r) \cap P$ dans $B(x, 2r) \cap P$.*

Remarque. Cette notion est invariante par transformations affines. L'espace tangent à un produit est le produit des espaces tangents.

Exercice 13 Espaces tangents à une bipyramide *Soit Q le polyèdre de $\mathbf{R}^3$ défini par les inéquations $\{x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1\}$. Soit Q' le polyèdre obtenu en translatant S du vecteur $(1/3, 1/3, 1/3)$. On pose $P = Q \cup Q'$. Déterminer pour chaque point de P son espace tangent.*

Exercice 14 Facteur euclidien *Soit C un cône polyédral de sommet 0. Vérifier qu'il existe un cône polyédral $C' \subset (T_0 C)^\perp$ tel que C soit le produit de C' et de l'espace affine $T_0 C$.*

2.6.3 Faces

Définition 18 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Une* face de dimension *k de P est l'adhérence d'une composante connexe de l'ensemble des points où l'espace tangent est de dimension k.*

Une face de dimension 0 s'appelle un sommet `(vertex)`*, une face de dimension 1 une* arête `(edge)`*, une face de dimension $n-1$ une* facette `(facet)`*.*

Cette définition n'est pas constructive. En revanche, elle a le mérite de ne dépendre que de l'ensemble P et non du procédé qui a permis de construire P.

Proposition 19 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Toute face de dimension k de P est un polyèdre propre et connexe d'un sous-espace affine de dimension k. Le nombre total de faces est fini.*

Preuve.
Soit $P = \bigcup_j P_j$ où les P_j sont des polyèdres convexes. Soit $P_j = \bigcap_k E_{j,k}$ où les $E_{j,k}$ sont des demi-espaces fermés. A chaque $E_{j,k}$ est associée une partition en trois sous-ensembles : l'intérieur de $E_{j,k}$, le complémentaire de $E_{j,k}$ et le bord de $E_{j,k}$. Considérons la partition de $\mathbf{R}^n$ engendrée par toutes ces partitions, i.e. chaque pièce, baptisée *face virtuelle ouverte* est une intersection d'hyperplans et de demi-espaces ouverts. Chaque face virtuelle ouverte (il y en a un nombre fini) est l'intérieur d'un polyèdre convexe d'un sous-espace affine, donc possède une dimension.

Montrons que si $x \in P$ appartient à une face virtuelle ouverte V de dimension k, alors $T_xV \subset T_xP$. Comme la partition est finie, la réunion des faces virtuelles ouvertes dont l'adhérence contient x est un voisinage de x. Soit V' l'une de ces faces virtuelles ouvertes. Montrons par l'absurde que $V \subset \mathrm{clos}(V')$. Sinon, il existe un hyperplan $\partial E_{j,k}$ séparant un point y de V' d'un point z de V. Par exemple, $\mathrm{int(E_{j,k})}$ contient y et $E^c_{j,k}$ contient z. Alors $E_{j,k}$ contient V' donc contient x donc contient V, contradiction. On conclut que $V \subset \mathrm{clos}(V')$. En particulier, la translation par un vecteur tangent à V assez petit envoie un voisinage de x dans $\mathrm{clos}(V)$ dans $\mathrm{clos}(V)$. Comme P est une réunion de faces comme V', ceci montre que $T_xV \subset T_xP$.

Soit P^k le lieu des points de P où la dimension de l'espace tangent vaut k. L'application $x \mapsto T_xP$ est localement constante sur P^k. Fixons une composante U de P^k et notons A l'espace affine $x + T_xP$, indépendant du choix de x dans U. Alors A contient U et U est un ouvert de A.

Si y est dans l'adhérence de U mais n'est pas dans U, alors $dimT_yP < k$. Par conséquent y est contenu dans une face virtuelle ouverte de dimension $< k$. Ceci montre que $\mathrm{clos}(U) \setminus U$ est contenu dans une réunion finie d'hyperplans de A, donc d'après le lemme 16, U est un polyèdre. ∎

Proposition 20 *Chaque face de dimension k est une réunion d'adhérences de faces virtuelles ouvertes de dimension k.*

Preuve.
Cas où $k = n$. Les faces virtuelles ouvertes de dimension n sont simplement les composantes du complémentaire des hyperplans $\partial E_{j,k}$. On a vu dans la preuve de la proposition 6 que la réunion des adhérences de celles de ces faces virtuelles qui rencontrent P est clos(int(P)). Or int(P) est le lieu des points où $dim(T_xP) = n$.

Cas général. Soit F une face de dimension k de P. Par définition, $F = \mathrm{clos}(U)$ où en chaque point x de U, $dim(T_xP) = k$. De plus, U est contenu dans un k-plan affine A. De plus, U est ouvert dans A. En remplaant P par $A \cap P$, on est ramené au cas précédent. ∎

Remarque. Les faces n'ont aucune raison d'être convexes.

Exemple. Dans le plan, soit Q le carré unité et P la réunion de Q et de ses translatés par $(1,0)$ et $(0,1)$. Il y a trois facettes virtuelles ouvertes de dimension 2 (trois carrés) mais une seule face de dimension 2, c'est P tout entier.

2.7 Orientation d'un polyèdre

Définition 21 *Une orientation normale d'une hyperplan H de $\mathbf{R}^n$ (resp. d'une hypersphère S de S^n) consiste à choisir l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à H (resp. à l'hyperplan* cône$(0,S)$ *de $\mathbf{R}^{n+1}$).*

Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Une orientation normale de P consiste à se donner une orientation normale de chaque face de dimension $n-1$ de P.

2.7.1 Orientation induite sur le bord

Lemme 22 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Si $x \in P$ et $dim T_x P = n-1$, alors au voisinage de x, P coïncide avec un hyperplan ou un demi-espace.*

Preuve. En effet, au voisinage de x, P coïncide avec un cône produit de $T_x P$ et d'un cône C' contenu dans une droite. Mais les seuls cônes contenus dans une droite sont les points, les demi-droites et la droite entière. ■

Proposition 23 *Soit P un polyèdre propre de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n. Le bord ∂P possède une orientation naturelle, donnée par le choix de la normale sortante.*

Preuve. Soit x un point de ∂P où l'espace tangent à ∂P est de dimension $n-1$. Comme P est propre, il existe des points intérieurs à P au voisinage de x. Par conséquent, au voisinage de x, P coïncide avec un demi-espace, donc la normale sortante est bien définie. Elle est localement constante le long du lieu des points où l'espace tangent à ∂P est de dimension $n-1$, donc on attache sans ambiguïté un vecteur normal à chaque face. ■

Terminologie. On dira qu'un polyèdre normalement orienté P *borde* s'il existe un polyèdre Q tel que $\partial Q = P$ et l'orientation naturelle de ∂Q coïncide avec celle donnée sur P.

2.8 Polyèdres curvilignes

Intuitivement, un polyèdre curviligne propre est un fermé propre dont le bord est formé de morceaux de surfaces. On veut que ces surfaces partagent une propriété des plans : deux plans sont transverses ou confondus. Cela conduit à la notion de famille admissible. On appellera *domaine lisse* un fermé dont le bord est une surface lisse.

Définition 24 *Soit $\mathcal{F}$ une famille* finie *de courbes et de surfaces dans $\mathbf{R}^3$. On dit que $\mathcal{F}$ est* admissible *si les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- *Stabilité par intersection : si $Y \in \mathcal{F}$ et $Y' \in \mathcal{F}$, alors $Y \cap Y' \in \mathcal{F}$.*
- *Transversalité : si $Y \in \mathcal{F}$ et $Y' \in \mathcal{F}$, alors ou bien $Y \subset Y'$, ou bien $Y' \subset Y$, ou bien Y et Y' sont transverses.*

Soit $\mathcal{G}$ une famille finie *de domaines lisses de $\mathbf{R}^3$. On dit que $\mathcal{G}$ est* admissible *si la famille formée des bords et de leurs intersections est admissible.*

2.8.1 Point de vue CSG

Définition 25 *Un* polyèdre curviligne *est un fermé de $\mathbf{R}^3$ obtenu par réunion et intersection d'une famille admissible de domaines lisses.*

Exemple. Soit f une fonction lisse sur $\mathbf{R}^2$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\, x^2+y^2 \leq 1,\, z \leq f(x,y,z)\}$. Alors F est un polyèdre curviligne. En effet, c'est l'intersection d'un cylindre plein K d'axe vertical et du domaine lisse D situé au-dessous du graphe de f. En chaque point du bord du cylindre, le plan tangent contient le vecteur $(1,0,0)$. En chaque point du graphe de f, le plan tangent, graphe de la différentielle de f, ne contient pas ce vecteur. Les plans tangents étant partout distincts, l'intersection est transverse, la famille $\mathcal{G} = \{K,\, D\}$ est admissible, donc $F = K \cap D$ est un polyèdre curviligne.

Exemple. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\, x^2+y^2 \leq 1,\, z \geq 0,\, x^2+y^2+(1-z)^2 \geq 1\}$. Alors F n'est pas un polyèdre curviligne au sens de la définition ci-dessus. En effet, son bord contient un disque plan et une hémisphère qui sont tangents.

2.8.2 Point de vue BRep

Théorème 7 *Un* polyèdre curviligne*, c'est la donnée d'une famille admissible $\mathcal{F}$ de courbes et de surfaces de $\mathbf{R}^3$ et d'un fermé propre F de $\mathbf{R}^3$ dont le bord est contenu dans la réunion des éléments de $\mathcal{F}$.*

Preuve. Identique à celle du théorème 6. ∎

2.8.3 Cône tangent

Théorème 8 *Soit F un polyèdre curviligne de $\mathbf{R}^3$ et P un point de F. Il existe un cône polyédral C de sommet P et un homéomorphisme local ϕ tangent à l'identité en P tel que, au voisinage de P, $F = \phi(C)$.*

Preuve. Elle dépasse le cadre de ces notes. ∎

Terminologie. On appelle $C = C_P F$ le *cône tangent* à F en P.

Exemple. Le cône tangent à une sous-variété à bord de $\mathbf{R}^3$ en un point P de son bord est le demi-espace délimité par l'espace tangent en P au bord, et opposé à la normale sortante.

Remarque. Le cône tangent peut être obtenu comme limite des dilatés de F en P. Par conséquent, l'opération de prise du cône tangent commute avec les opérations booléennes. Cela couvre un grand nombre d'exemples.

Exemple. Soit $F = A \cup B$ où B est le demi-espace $\{z \leq 0\}$ et A l'intersection de la boule unité avec le demi-espace $\{y \geq 0\}$. Au point $P = (1, 0, 0)$, son cône tangent est la réunion $C \cup B$ où B est le quadrant $\{x \leq 1;\, y \geq 0\}$.

La signification du théorème 8 est que localement, rien ne distingue un polyèdre curviligne d'un polyèdre rectiligne. Par conséquent, de nombreuses définitions et résultats relatifs aux polyèdres rectilignes s'étendent presque sans changement aux polyèdres curvilignes.

Définition 26 *Soit F un polyèdre curviligne et P un point de F. L'*espace tangent *à F en P est par définition l'espace tangent au cône tangent $C_P F$ en P. Les faces, l'orientation sont alors définies comme pour les polyèdres rectilignes.*

Exemple. Même polyèdre (réunion d'un demi-espace et d'une demie boule). L'espace tangent au point $(1, 0, 0)$ est réduit à $\{0\}$. Voici la liste des faces.

2 sommets : $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$.

3 arêtes : le segment, un demi-cercle horizontal et un demi-cercle vertcial reliant les 2 sommets.

3 facettes : le plan $\{z = 0\}$ privé d'un demi-disque, un demi-disque vertical, un quart de la sphère unité, chacun bordé par 2 arêtes.

Le quart de sphère est orienté par la normale sortant de la boule. L'orientation induite sur son bord (2 demi-cercles) consiste à suivre le demi-cercle horizontal de $(1, 0, 0)$ à $(-1, 0, 0)$ et le demi-cercle vertical de $(-1, 0, 0)$ à $(1, 0, 0)$.

Exercice 15 Faces de l'intersection d'une boule et d'un cylindre *Soit F l'intersection de la boule unité et du cylindre droit d'axe $\{x = 0,\, y = 1\}$et de rayon 1. Quel est son cône tangent au point $P = (0, 0, 1)$? Quel est son espace tangent en ce point ? Faire la liste des faces de F.*

Chapter 3

Validité d'une BRep

3.1 Motivation

Dans CATIA ou ACIS, un objet 3D est représenté par son bord, i.e. une collection de morceaux de surfaces normalement orientées.

Question. A quelle condition une collection de morceaux de surfaces borde-t-elle un objet ?

Dans ce chapitre, on donne une réponse à cette question dans le cas simple où les surfaces sont planes (cf [H]).

3.1.1 Approche informelle en dimension 2

On se donne une collection finie $s_1, \ldots, s_k$ de segments normalement orientés dans le plan. A quelle condition leur réunion P est elle le bord d'un ouvert X du plan ?

On aperçoit immédiatement des conditions nécessaires.

- l'extrémité d'un segment doit obligatoirement être l'extrémité d'au moins un autre segment ;
- plus généralement, en chaque point de P (extrémité ou non) doivent arriver un nombre pair de branches ;
- en un point p d'où partent plusieurs branches, les orientations normales doivent être compatibles au sens suivant : lorsqu'on tourne autour de p, on croise les normales alternativement dans le bon sens et à contresens.

Ces conditions nécessaires sont *locales*, i.e. elles ne concernent qu'un voisinage de chaque point. Elles ne sont pas suffisantes, comme le montre l'exemple suivant. Néanmoins, elles méritent d'être examinées de près, en vue de la généralisation à la dimension 3.

3.1.2 Lien (informel)

Si l'étude locale est simple, c'est parce qu'on peut décrire simplement un ensemble X bordé par une réunion de segments P au voisinage d'un point p. Pour $r > 0$ assez petit, $X \cap B(x, r)$ est une réunion de secteurs, i.e. de cônes sur des intervalles tracés sur le cercle $S(x, r)$. Ces intervalles forment ce qu'on appelle le *lien* (`link`) de p dans X. Le point p a aussi un lien dans le bord P de X, c'est le bord du lien dans X,

$$\mathrm{lien}(p, \partial X) = \partial \mathrm{lien}(p, X).$$

Le lien d'une réunion de segments P en un point p est un ensemble fini L contenu dans un cercle. Une orientation normale de P détermine une orientation normale de L. Si P borde dans le plan, L borde dans le cercle. On obtient donc une condition nécessaire où la dimension a diminué d'une unité.

Principe. Pour décortiquer une question locale, on passe aux liens, ce qui permet une récurrence sur la dimension.

3.1.3 Indice (informel)

On dit que P *borde localement* s'il satisfait la condition locale dégagée au paragraphe 3.1.1. Cette condition est utile mais n'est pas suffisante. Or il existe un truc vieux comme le monde pour décider si on est à l'intérieur ou à l'extérieur : on compte le nombre de portes qu'on a traversé.

Mathématiquement, cela se traduit comme suit. Si P borde un ouvert X, alors pour toute droite D du plan qui ne contient aucun des segments de P, $D \cap P$ borde $D \cap X$. De nouveau, on a ramené le problème en dimension 1, où il est facile à résoudre. $D \cap P$ est un ensemble fini muni d'une orientation normale, il borde si et seulement si lorsqu'on parcourt D on croise les normales alternativement dans le bon sens et à contresens. Un point de D est dans $D \cap X$ si et seulement si quand on parcourt une demi-droite portée par D, on croise une normale sortante de plus que de normale rentrante.

En général, étant donnés une réunion de segments P et une droite D ne contenant aucun des segments de P (on dit que D est *transverse* à P), la différence

$$\text{nombre de normales croisées dans le bon sens} - \text{nombre de normales croisées à contresens}$$

s'appelle *l'indice* de p par rapport à P, dans la direction D.

On montre que si P satisfait la condition locale du paragraphe 3.1.1, alors l'indice de P ne dépend pas du choix de la droite D. De plus, il est constant dans chaque composante connexe du complémentaire de P, donc il ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il prend au moins deux valeurs. Une condition nécessaire et suffisante pour que P borde un ouvert est que l'indice prenne exactement deux valeurs. C'est automatiquement le cas si P est connexe.

Théorème 9 *Soit P une réunion finie de segments dans le plan. On suppose que P borde localement et que P est connexe. Alors P borde un ouvert du plan.*

Plus que le résultat lui-même, ce sont les notions de lien, de transversalité et d'indice (voir [M]) qui sont intéressantes.

3.1.4 Plan de la suite du chapitre

Il s'agit de donner des définitions et des démonstrations rigoureuses des faits mentionnés jusqu'ici, et de les généraliser à la dimension 3 (et aux dimensions supérieures, ça ne coûte pas plus cher). Les preuves sont données pour servir de référence, mais ne sont pas à connaître, car elles sont souvent peu effectives. Les questions algorithmiques sont traitées dans le cours d'A. Lichnewsky.

1. Lien
2. Collier
3. Transversalité
4. Indice

3.2 Lien

Rappel. On utilisera plusieurs fois le résultat suivant (théorème 6 du chapitre *Orientation*).

Théorème 10 *Un fermé propre de $\mathbf{R}^n$ est un polyèdre si et seulement si son bord est un polyèdre.*

3.2.1 Cônes

Définition 27 *On note S^{n-1} la sphère de centre* 0 *et de rayon* 1 *dans* $\mathbf{R}^n$. *Soit* $x \in \mathbf{R}^n$. *Si* $L \subset S^{n-1}$, *le* cône `cone)` *de base X et de sommet x, noté* cône (x, L), *est la réunion des demi-droites d'origine x et dirigées par des vecteurs $\theta \in L$.*

Exemple. Le cône cône (x, L) est un espace affine de dimension k si et seulement si L est une *hypersphère* de dimension $k-1$ (on parle de *grand cercle* si $k=2$).

Exemple. Si C est un cône de sommet x, alors $C = \text{cône}\,(x, L)$ où L est l'intersection de C avec la sphère unité centrée en x.

Exercice 16 Bord d'un cône *Vérifier que* $\partial\text{cône}\,(x, L) = \text{cône}\,(x, \partial L)$.

3.2.2 Géométrie sphérique

On transporte sur la sphère les notions euclidiennes via les cônes.

Définition 28 *Une partie $X \subset S^{n-1}$ est un* polyèdre *(resp.* convexe*) si* cône (x, L) *est un polyèdre (resp. convexe). En particulier, un polyèdre sphérique est compact.*

Remarques. Un polyèdre de la sphère S^2 est un cas particulier de polyèdre curviligne. En effet, un cône polyédral est une union d'intersections d'hyperplans passant par l'origine, et les plans passant par l'origine sont transverses à la sphère unité. D'autre part, du théorème 6, il résulte qu'un compact L de la sphère est un polyèdre sphérique si et seulement si son bord l'est.

Exercice 17 Lien d'un orthant *Dessiner le sous-ensemble L de la sphère tel que le cône sur L soit un orthant.*

Exercice 18 Triangle sphérique *Sur la sphère unité de* $\mathbf{R}^3$, *soit* $\theta_1 = (0,0,1)$ *le pôle nord, soit* $\theta_2 = (1,0,0)$ *le point de l'équateur de longitude nulle et soit* $\theta_3 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ *le point de longitude* 90^0 *et de latitude* 45^0. *Dessiner l'enveloppe convexe de ces trois points sur la sphère.*

On parle aussi de cônes en géométrie sphérique, i.e. contruits à l'intérieur de la sphère avec des arcs de grands cercles. En effet, comme les segments de droite dans l'espace euclidien, les arcs de grands cercles de longueur inférieure à π sont des *géodésiques*, i.e. sont les courbes de longueur minimum entre leurs extrémités.

Un grand cercle dans la sphère S^{n-1} est l'intersection de la sphère avec un 2-plan. Si θ et θ' sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, la courbe $t \mapsto \cos(t)\theta + \sin(t)\theta'$ est la paramétrisation d'un grand cercle d'origine θ et de vitesse initiale θ'. Si $0 \leq t \leq \pi$, la distance sphérique de θ à $\cos(t)\theta + \sin(t)\theta'$ est exactement t.

Si on fait varier t de 0 à π, on décrit un demi-grand-cercle, ou *méridien*. Les vitesses initiales méridiens issus du point θ de la sphère sont donc contenues dans *l'équateur* $S_\theta^{n-2} = \{\theta' \; ; \; \theta \cdot \theta' = 0, \; |\theta'| = 1\}$.

Définition 29 *Etant donné* $\theta \in S^{n-1}$ *et* $L \subset S_\theta^{n-2}$, *le* cône *de sommet θ et de base L est la réunion des méridiens issus de θ et dont la vitesse initiale est prise dans L.*

Exercice 19 Cônes dans la sphère *Dans* $\mathbf{R}^3$, *soit* $\theta = (0,0,1)$ *le pôle nord de la sphère unité. Soit L l'ensemble des points de l'équateur de longitude multiple de* 15^0. *Soit L' l'ensemble des points de l'équateur de longitude comprise entre* 0 *et* 15^0. *Dessiner le cône de sommet θ et de base L (resp. L').*

Exercice 20 Faces d'un polyèdre sphérique *Soit L un polyèdre sphérique. Vérifier que si F est une face de F de dimension k, alors* cône $(0, F)$ *est une face de* cône $(0, L)$ *de dimension $k+1$.*

3.2.3 Lien

Définition 30 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$ (resp. de S^n). Soit $x \in P$. Il existe $r > 0$ et un polyèdre L de S_x^{n-1} tel que*

$$B(x,r) \cap P = B(x,r) \cap \text{cône}\,(x,L).$$

Ce polyèdre s'appelle le lien *de P en x et est noté* $\text{lien}(x,P)$.

Preuve.
Cas de $\mathbf{R}^n$, P convexe, $x = 0$. Le polyèdre P est défini par des inégalités de la forme $\{y \cdot v_j \leq t_j\}$ où $j \in J$. Soit J_0 l'ensemble de celles qui sont actives en 0, i.e. telles que $t_j = 0$. On définit L par $\text{cône}\,(0,L) = \{y \cdot v_j \leq 0,\ j \in J_0\}$ et r par $r = \min\{|t_j|/|v_j|\ ;\ j \notin J_0\}$. Alors $B(0,r) \cap P = B(0,r) \cap \text{cône}\,(0,L)$.
Cas de S^n, P convexe, $x = \theta$. Le cône convexe $\text{cône}\,(0,P)$ est défini par des inégalités de la forme $\{y \cdot v_j \leq 0\}$ où $j \in J$. Soit J_0 l'ensemble de celles qui sont actives en θ, i.e. telles que $\theta \cdot v_j = 0$. On définit $L \subset S_\theta^{n-2}$ par $\text{cône}\,(0,L) = \{y \in \theta^\perp\ ;\ y \cdot v_j \leq 0,\ j \in J_0\}$ et r par $r = \min\{\text{Arcsin}(\theta \cdot v_j)\ ;\ j \notin J_0\}$.
Cas général ($\mathbf{R}^n$ ou S^n). P est une réunion de polyèdres convexes P_j. On néglige ceux qui ne contiennent pas x. Pour les autres, il existe un rayon $r_j > 0$ tel que $B(x,r_j) \cap P_j = B(x,r) \cap \text{cône}\,(x,L_j)$. Si $r = \min\{r_j\}$,

$$B(x,r) \cap P = \bigcup_j B(x,r) \cap P_j = \bigcup_j B(x,r) \cap \text{cône}\,(x,L_j) = B(x,r) \cap \text{cône}\,(x,L)$$

où

$$L = \bigcup_j L_j$$

est un polyèdre. ∎

Exercice 21 Bord d'un lien *Vérifier que* $\text{lien}(x,\partial P) = \partial\text{lien}(x,P)$.

Exercice 22 Critère local de convexité *Montrer qu'un polyèdre P est convexe si et seulement si P est connexe et pour tout $x \in P$,* $\text{lien}(x,P)$ *est contenu dans une hémisphère.*

Indication. Montrer d'abord que si $[x,y]$ est un segment entièrement contenu dans P, alors $[x,y] \cap \partial P \subset \{x,y\}$.

Proposition 31 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$ et $x \in P$. Le lien* $\text{lien}(x,P)$ *hérite d'une orientation normale.*

Preuve. On peut supposer que P est le cône $\text{cône}\,(x,L)$ où $L = \text{lien}(x,P)$. Soit F une face de dimension $n-2$ de L. Alors F contient un ouvert de l'intersection de la sphère avec un hyperplan H de $\mathbf{R}^n$, donc engendre H. Le cône $\text{cône}\,(x,F)$ est une face de dimension $n-1$ de P, contenue dans H. Soit ν sa normale orientée. C'est un vecteur orthogonal à Hdonc une orientation normale à F. ∎

3.2.4 Caractérisation locale des polyèdres compacts

C'est une sorte de réciproque de la proposition qui définit le lien.

Proposition 32 *Soit X un compact de $\mathbf{R}^n$ ou S^n. Alors X est un polyèdre si et seulement si pour tout $x \in P$, il existe $r > 0$ et un polyèdre L de S_x^{n-1} tel que*

$$B(x,r) \cap P = B(x,r) \cap \text{cône}\,(x,L).$$

Preuve.

Par hypothèse, X est localement un polyèdre. Il suffit de mettre ensemble ces modèles locaux.

Du recouvrement de X par les boules $B(x,r/2)$ on extrait un recouvrement fini $B(x_j,r_j/2)$ tel que dans la boule de rayon double, P coïncide avec le cône sur un polyèdre L_j. Soit Π un polyèdre tel que

$$B(0,1/2) \subset \Pi \subset B(0,1).$$

On pose $\Pi_j = x_j + r_j\Pi$ et $P_j = \Pi_j \cap \text{cône}\,(x_j, L_j)$. Alors P_j est un polyèdre contenu dans X. Aussi P_j contient $X \cap B(x_j,r_j/2)$. Par conséquent $X = \bigcup_j P_j$ est un polyèdre. ■

3.2.5 Orientation induite sur le lien

Définition 33 *Une orientation normale d'une hypersphère S de S^n consiste à choisir l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à l'hyperplan* cône $(0,S)$ *de $\mathbf{R}^{n+1}$).*

Soit P un polyèdre de S^n. Une orientation normale de P consiste à se donner une orientation normale de chaque face de dimension $n-1$ de P.

Proposition 34 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n et $x \in P$. Le lien* $\text{lien}(x,P)$ *hérite d'une orientation normale.*

Preuve. On peut supposer que P est le cône $\text{cône}\,(x,L)$ où $L = \text{lien}(x,P)$. Soit F une face de dimension $n-2$ de L. Alors F contient un ouvert de l'intersection de la sphère avec un hyperplan H de $\mathbf{R}^n$, donc engendre H. Le cône $\text{cône}\,(x,F)$ est une face de dimension $n-1$ de P, contenue dans H. Soit ν sa normale orientée. C'est un vecteur orthogonal à Hdonc une orientation normale à F. ■

Terminologie. On dira qu'un polyèdre normalement orienté P *borde* s'il existe un polyèdre Q tel que $\partial Q = P$ et l'orientation naturel de ∂Q coïncide avec celle donnée sur P.

Exemple. Si P est un polyèdre normalement orienté qui borde, alors tous ses liens bordent.

3.3 Collier

Définition 35 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n. Un* collier (`collar`) *est un polyèdre Q tel que $\partial Q = P \cup P'$ où P est un polyèdre disjoint de P.*

Il faut voir Q comme une tentative prometteuse de construire un polyèdre de bord P.

Terminologie. On dit qu'un polyèdre normalement orienté P *borde localement* si tous ses liens bordent.

Proposition 36 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n. Alors P admet un collier si et seulement si P borde localement.*

Preuve. Dans le cas où P est compact. Par hypothèse, pour tout $x \in P$, le lien en x borde, i.e. il existe un polyèdre M dans la sphère tel que $\partial M = \text{lien}(x,P)$, orientation normale comprise.

Comme en 6, on recouvre P par un nombre fini de boules $B(x_j,r_j/2)$ telles que P soit un cône dans la boule deux fois plus grande. Par hypothèse, $L_j = \partial M_j$. On pose $Q_j = \Pi_j \cap \text{cône}\,(x_j,M_j)$ et $Q = \bigcup_j Q_j$.

Si $x \in P$, alors au voisinage de x Q coïncide avec $\bigcup_j \text{cône}\,(x_j,M_j)$ donc $\partial Q \subset \bigcup_j \text{cône}\,(x_j,L_j) \subset P$. Ceci prouve que $P' = \partial Q \setminus P$ est fermé. D'après la caractérisation locale des polyèdres (proposition 32), P' est un polyèdre.

Soit $y \in P$ un point très proche de x, tel que $dimT_yP = n-1$. Posons $y(t) = y + t\nu$ où ν est la normale orientée à P en y. Alors $y(t) = x_j + \rho_j(t)\theta_j(t)$ où la courbe $t \mapsto \theta_j(t)$ tracée sur la sphère est normale à L_j en $\theta_j(0)$ donc pour t petit, $\theta_j(t) \notin M_j$. Par conséquent $y(t) \notin Q$, ce qui prouve que $y \in \partial Q$. Par densité, on conclut que $P \subset \partial Q$. ■

3.4 Tranversalité

3.4.1 Définition générale

Définition 37 *Soient P et Q deux polyèdres de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n. On dit que P et Q sont* transverses `(transversal)`*, et on* note $P \pitchfork Q$*, si en tout point x de $P \cap Q$, les espaces tangents satisfont*

$$T_xP + T_xQ = \mathbf{R}^n \ (resp. = T_xS^n).$$

Exemple. Dans $\mathbf{R}^2$, soit P le carré unité et Q la demi-droite $\{y = 1/2,\ x \geq 0\}$. Alors $P \cap Q$ est le segment $[x, y]$ où $x = (0, 1/2)$ et $y = (1, 1/2)$. P et Q sont transverses exactement aux points de $]x, y]$.

Exercice 23 Transversalité de deux cubes *Soit P le cube unité de $\mathbf{R}^3$ et $Q_v = P + v$ le cube obtenu en translatant P du vecteur v. Montrer que P et Q_v sont transverses si et seulement si $v \notin \partial P$.*

3.4.2 Transversalité à un sous-espace affine

Proposition 38 *Soient P un polyèdre et A un sous-espace affine de de dimension k de $\mathbf{R}^n$. Alors P est transverse à A si et seulement si A ne rencontre aucune face de dimension inférieure ou égale à $n - k - 1$ de P.*

Preuve. Soit F une face de P de dimension $\leq n - k - 1$. Pour tout $x \in A \cap F$,

$$dim(T_xP + T_xA) \leq dim(T_xP) + dim(T_xA) \leq n - 1$$

donc P n'est pas transverse à A en x.

Inversement, soit A un espace affine non transverse à P et soit F une face de P de dimension minimale qui coupe A non transversalement. Supposons que $dim(F) \geq n - k$. Comme $dim(T_xA + T_xF) \leq n - 1$, $dim(T_xA \cap T_xF) \geq 1$, donc $A \cap F$ contient un segment de droite. L'intersection $A \cap F$ rencontre donc une facette de F, nécessairement non transversalement, contradiction. On conclut que $dim(F) \leq n - k - 1$. ∎

Proposition 39 *Soient P un polyèdre et A un sous-espace affine de dimension k de $\mathbf{R}^n$. Si P est transverse à A, alors chaque face de dimension ℓ de $A \cap P$ est l'adhérence d'une composante connexe de l'intersection de A avec l'intérieur d'une face de dimension $\ell + n - k$ de P.*

Preuve. Soit x un point de $A \cap P$ tel que $dim(T_xP) = \ell + n - k$. L'hypothèse de transversalité permet de choisir un repère (non orthonormé) d'origine x et tel que $A = \mathbf{R}^k$ et $\mathbf{R}^{n-k}$ soit contenu dans T_xP. Dans ces coordonnées, au voisinage de l'origine, P concide avec le produit de $A \cap P$ avec le facteur $\mathbf{R}^{n-k}$. En effet, par défintion de l'espace tangent, si $v \in A$ et $v' \in \mathbf{R}^{n-k}$ sont des vecteurs assez petits, $v + v'$ est dans P si et seulement si $v = v + v' - v'$ est dans P, i.e. si et seulement si $v \in A \cap P$. Par conséquent, $T_xP = T_x(A \cap P) \oplus \mathbf{R}^{n-k}$ donc $dim(T_x(A \cap P) = \ell$. On a donc montré que $(A \cap P)^\ell = A \cap (P^{n-k+\ell})$.

Par définition, $P^{n-k+\ell}$ est une réunion disjointe d'intérieurs de faces de dimension $n - k + \ell$ de P. Si F est une ℓ-face de $A \cap P$, alors F est l'adhérence de U où U est une composante connexe de $(A \cap P)^\ell = A \cap (P^{n-k+\ell})$, alors U est une composante connexe de l'intersection de A avec l'intérieur d'une face de dimension $n - k + \ell$ de P. ∎

3.4.3 Transversalité et bord

Proposition 40 *Soient P un polyèdre et A un sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$. Si ∂P est transverse à A, alors le bord (relatif) de $A \cap P$ dans A est $A \cap \partial P$.*

Preuve. Si $x \in \partial_A(A \cap P)$, alors il existe une suite x_n de points de $A \setminus P$ qui converge vers x. En particulier, $x \in \partial P$.

Inversement, soit x un point de $A \cap P$ qui n'est pas dans le bord relatif. Alors il existe un voisinage de x dans A qui est entièrement contenu dans P. En particulier, $T_x A \subset T_x P$. Supposons que $x \in \partial P$. Comme A et ∂P sont transverses, cela entrane que $T_x P = \mathbf{R}^n$, i.e. que x est un point intérieur à P, contradiction. On conclut que $x \notin \partial P$. ∎

Proposition 41 *Soient P un polyèdre normalement orienté et A un sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$. Si P est transverse à A, alors $A \cap P$ hérite d'une orientation normale. Si $P = \partial Q$ et l'orientation normale de P est celle du bord de Q, alors l'orientation normale de $A \cap P$ est celle du bord de $A \cap Q$.*

Preuve. Soit k la dimension de A. Soit x un point de $A \cap P$ tel que $dim(T_x(A \cap P)) = k-1$. Alors x est intérieur à une facette de P, donc la normale $\nu(x)$ est bien définie. Comme l'espace tangent $T_x A$ n'est pas contenu dans $T_x P$, $\nu(x)$ n'est pas orthogonal à $T_x A$, et sa projection orthogonale $\pi(x)$ sur A est un vecteur non nul orthogonal à $T_x(A \cap P)$, cela détermine l'orientation normale $\nu_A(x) = \pi(x)/|\pi(x)|$ de $A \cap P$.

Si $P = \partial Q$, alors au voisinage de x, Q est défini par l'inéquation $\{z \cdot \nu(x) \leq 0\}$. Pour $z \in A$, $z \cdot \nu(x) = z \cdot \pi(x)$ donc au voisinage de x dans A, l'inéquation $\{z \cdot \nu_A(x) \leq 0\}$ définit bien $A \cap Q$. ∎

3.4.4 Généricité de la transversalité

Définition 42 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Soit $p \notin P$. Etant donné un vecteur unitaire θ, on note D_θ la droite passant par p et dirigée par θ. Alors l'ensemble des vecteurs $\theta \in S^{n-1}$ tels que D_θ ne soit pas transverse à P est un polyèdre d'intérieur vide de S^{n-1}, qu'on* note *$Sing(p, P)$.*

Preuve. Le cône de sommet 0 sur $Sing(p, P)$ est la réunion de deux cônes, le cône sur la réunion des faces de dimension $n-2$ de $P - p$, et son opposé. ∎

Proposition 43 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Soit $p \notin P$ et D une droite passant par p et transverse à P. Etant donné un vecteur unitaire θ orthogonal à D, on note A_θ le plan passant par p et dirigé par D et θ. Alors l'ensemble des vecteurs $\theta \in S^{n-2}$ tels que A_θ ne soit pas transverse à P est contenu dans un polyèdre d'intérieur vide de S^{n-2}.*

Preuve. Soit π la projection orthogonale sur l'hyperplan affine H orthogonal à D passant par P. Notons Q la réunion des projections des faces de dimension $n-3$ de P. Soit $\theta \in S^{n-2}$ un vecteur unitaire orthogonal à D. Si la droite D_θ est transverse à Q (ce qui est le cas pour θ hors du polyèdre d'intérieur vide $Sing(p, Q)$), alors $D_\theta \cap Q = \emptyset$, donc $A_\theta = \pi^{-1} D_\theta$ ne rencontre pas les $n-3$-faces de P, donc A_θ est transverse à P, d'après la proposition 38. ∎

3.5 Indice

Définition 44 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$. Soit $p \notin P$ et θ un vecteur unitaire tel que la demi-droite D_θ^+ passant par p et dirigée par θ soit transverse à P. La demi-droite D_θ^+ coupe P en un nombre fini de points x tels que $dim(T_x P) = n-1$, donc la normale $\nu(x)$ est bien définie. On* note $\mathrm{ind}\,(p, P, \theta)$ *le nombre de points d'intersection de D_θ^+ avec P, où chaque point d'intersection x est compté avec le signe (+) si le produit scalaire $\theta \cdot \nu(x) > 0$ et avec le signe (-) si $\theta \cdot \nu(x) < 0$.*

3.5.1 Invariance de l'indice

Lemme 45 *Soit P un polyèdre normalement orienté qui borde localement. Soit $p \notin P$. Soient θ et θ' deux vecteurs unitaires distincts, et A le plan passant par p qu'ils engendrent. On suppose que les droites D_θ, D'_θ et le plan A sont transverses à P. Alors $ind(p, P, \theta) = \mathrm{ind}\,(p, P, \theta')$.*

Preuve. D'après la proposition 36, P possède un collier Q. On peut supposer qu'il ne contient pas p (retirer un petit polyèdre contenant p dans son intérieur). Quitte à remplacer P par $P \cap A$, on peut supposer que $n = 2$. En effet, $A \cap P$ satisfait presque toutes les hypothèses du lemme. L'hypothèse incomplète est que A soit transverse à ∂Q. Cela n'a pas d'importance car seule la partie P du bord de Q joue un rôle dans l'argument.

Soit θ une direction telle que D_θ ne soit pas transverse à P (cela ne se produit que pour un nombre fini de valeurs de θ). Montrons que pour $\theta' < \theta < \theta''$ assez proches de θ et de part et d'autre de θ, $ind(p, P, \theta') = \mathrm{ind}\,(p, P, \theta'')$. Soit $[x, y]$ une composante connexe de $D_\theta \cap P$ et U un voisinage tubulaire de $[x, y]$ qui ne rencontre pas $\partial Q \setminus P$. On fixe deux segments centrés sur Q et orthogonaux à D_θ, l'un avant x et l'autre après y. Pour θ' assez proches de θ, ces deux segments coupent $D_{\theta'}$ en $x_{\theta'}$ et $y_{\theta'}$ (idem pour $D_{\theta''}$ de l'autre côté). On obtient un trapèze $T = x_{\theta''} y_{\theta''} y_{\theta'} x_{\theta'}$ tel que $T \cap P \subset D_{\theta'} \cup D_{\theta''}$.

Notons i' (resp. i'') la contribution de l'ouvert U à l'indice $ind(p, P, \theta')$ (resp. $\mathrm{ind}\,(p, P, \theta'')$, i.e. le nombre de points avec signes de l'intersection $P \cap D_{\theta'} \cap U$ (resp. $P \cap D_{\theta''} \cap U$). Alors $i'' - i'$ est le nombre de points avec signes de $T \cap P$, où le signe $s(z)$ associé à un point d'intersection z est égal au signe de $\theta'' \cdot \nu(z)$ si $z \in D_{\theta''}$ et son opposé si $z \in D_{\theta'}$. Parcourons T dans le sens

$$x_{\theta''} \to y_{\theta''} \to y_{\theta'} \to x_{\theta'} \to x_{\theta''}.$$

Alors le signe $s(z)$ vaut $+1$ si en passant z on sort de Q, et -1 si on rentre dans Q. D'après la proposition 40, l'intersection $T \cap Q$ est une réunion disjointe de segments dont les extrémités sont les points de $T \cap P$. Par conséquent, chaque signe rencontré compense précédent, et la somme $i'' - i'$ est nulle. En sommant sur toutes les composantes de $D_\theta \cap P$, on trouve que $\mathrm{ind}\,(p, P, \theta'') - \mathrm{ind}\,(p, P, \theta') = 0$.

Lorsque θ varie entre deux valeurs singulières (i.e. de $Sing(p, P)$, chaque point d'intersection de $P \cap D_\theta$ varie continment et l'indice est constant. On conclut que l'indice ne dépend pas de la direction θ. ∎

Définition 46 *Soit P un polyèdre normalement orienté. On suppose que P borde localement. Alors l'indice $ind(p, P, \theta)$ ne dépend pas du choix du vecteur $\theta \in S^{n-1} \setminus Sing(p, P)$, on l'appelle* l'indice de p par rapport à P.

Preuve. Soient θ, $\theta' \in S^{n-1} \setminus Sing(p, P)$. Soit U (resp. U') l'ouvert de S^{n-1} formé des vecteurs θ'' tels que le plan $A_{\theta,\theta''}$ engendré par θ et θ'' (resp. $A_{\theta',\theta''}$ engendré par θ' et θ'') soit transverse à P. Comme le complémentaire de U (resp. U') est contenu dans un polyèdre d'intérieur vide (proposition 43), $U \cap U' \setminus Sing(p, P)$ est non vide. Choisissons $\theta'' \in U \cap U' \setminus Sing(p, P)$. Alors d'après le lemme 45, $ind(p, P, \theta) = \mathrm{ind}\,(p, P, \theta'')$ et $ind(p, P, \theta'') = \mathrm{ind}\,(p, P, \theta')$. donc $ind(p, P, \theta) = \mathrm{ind}\,(p, P, \theta')$. ∎

Lemme 47 *Soit P un polyèdre normalement orienté. On suppose que P borde localement. Alors l'indice $p \mapsto ind(p, P, \theta)$ est localement constant sur le complémentaire de P.*

Preuve. Soit p un point du complémentaire de P. Soit θ un vecteur unitaire tel que $\theta \notin Sing(p, P)$. Alors pour q suffisamment proche de p, $\theta \notin Sing(q, P)$. En effet, la condition $D \pitchfork P$ est ouverte par rapport à D.

Par transversalité, chacun des points d'intersection de $D_{p,\theta}$ avec P varie continment avec P, donc le nombre de points avec signe est constant au voisinage de P. ∎

3.5.2 Conditions pour border

Théorème 11 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$. On suppose que P borde localement et que P est connexe. Alors P borde un unique polyèdre de $\mathbf{R}^n$.*

Preuve. Soient Q un collier pour P et Q' un collier pour le polyèdre P' (même polyèdre mais avec toutes les orientations normales renversées). Soit D une droite transverse à P coupant P en un point x. On oriente D au moyen de l'orientation normale $\nu(x)$. Pour $z \in D$, soit D_z la demi-droite positive portée par D d'origine z. Alors le nombre de points (avec signe) diminue d'une unité lorsqu'en parcourant D on traverse x. Par conséquent, l'indice prend au moins 2 valeurs.

Etant donné $p \notin P$, parcourons une demi-droite d'origine p et transverse à P. Soit x le premier point de P rencontré. Alors l'indice est constant sur $[p, x[$, et pour $z \in [p, x[$ assez proche de x, z est dans Q ou dans Q'. Par conséquent, les valeurs prises par l'indice sont celles prises sur Q, plus celles prises sur Q' (c'est-à-dire, les mêmes additionnées de 1).

Si P est connexe, l'intérieur de Q est connexe, donc l'indice est constant sur Q et prend exactement deux valeurs. Soient R et R' les deux ensembles de niveau de l'indice, de sorte que $Q \subset R$ et $Q' \subset R'$. Alors $P \subset \partial R \cap \partial R'$. Comme $\mathbf{R}^n$ est la réunion disjointe de R, R' et P, $P = \partial R = \partial R'$. D'après la proposition 6, $\mathrm{clos}(R)$ est un polyèdre, son bord est P. ∎

3.5.3 Cas où le polyèdre donné n'est pas connexe

Terminologie. On appelle *coquille* (`shell`) un polyèdre connexe qui borde localement.

D'après le théorème 11, une coquille borde un unique polyèdre. Pour un polyèdre formé de plusieurs coquilles, il y a une conditions supplémentaire à vérifier : que les choses se passent comme on l'attend le long de quelques demi-droites.

Proposition 48 *Soit P un polyèdre normalement orienté qui borde localement. Soit $D_1, \ldots, D_\ell$ une collection de demi-droites issues d'un point p, transverses à P, telle que chaque composante connexe de P rencontre l'une des droites D_i. Alors P borde un polyèdre contenant p si et seulement si chaque $P \cap D_i$ borde dans D_i un polyèdre qui contient p.*

Preuve. Si $P = \partial Q$, alors $P \cap D_i = \partial(Q \cap D_i)$ borde dans D_i.

Inversement, notons i l'indice du point p (il vaut 0 ou 1). Le long de chaque demi-droite D_i, l'indice ne prend que les valeurs i et $i-1$. Soit Q un collier pour P (proposition 36) et Q' un collier pour P avec orientation opposée. Par hypothèse, chaque composante connexe de Q (resp. Q') coupe une des demi-droite D_i, donc l'indice ne prend que les valeurs i et $i-1$ sur $Q \cup Q'$. Comme dans la preuve du théorème 11, l'ensemble de niveau de l'indice qui contient p est un polyèdre dont le bord est P. ∎

Chapter 4

Courbure des courbes

4.1 Motivation

Considérons les courbes planes $t \mapsto X(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$ et $t \mapsto Y(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$, $t \leq 0$. Elles ont même valeur en 0 mais n'ont pas même dérivée. Par conséquent, le raccord en $t = 0$ est C^0 mais pas C^1. Si on remplace t par $t/2$ dans la seconde courbe, on obtient $t \mapsto Z(t) = (\frac{4-t^2}{4+t^2}, \frac{4t}{4+t^2})$, $t \leq 0$. C ette fois, le raccord de Z avec X est de classe C^1 mais pas de classe C^2. Autrement dit, pour réaliser un bon raccord, il est judicieux de changer de paramétrisation. Jusqu'où peut on aller ?

Question. Etant donnée une courbe γ (vue comme sous-ensemble du plan ou de l'espace), quelle est la meilleure régularité possible pour une paramétrisation de γ ?

C'est ce qu'on appelle la *différentiabilité géométrique* de γ. Dans l'exemple, γ est le cercle unité qui admet une paramétrisation de classe C^∞. On dit que le cercle est de classe G^∞.

Pour réaliser un raccord satisfaisant, il n'est pas naturel d'exiger la différentiabilité des paramétrisations (qui sont le résultat de choix particuliers), il suffit souvent d'atteindre la différentiabilité géométrique.

Pour les courbes planes, la différentiabilité géométrique se mesure au moyen de la *courbure*.

Théorème 12 *Une courbe plane est de classe G^k si et seulement si*

1. *sa tangente est continue ;*
2. *la courbure et ses dérivées par rapport à l'abscisse curviligne jusqu'à l'ordre $k-2$ sont continues.*

Le théorème 12 donne un critère simple pour la différentiabilité géométrique d'une courbe obtenue en raccordant deux courbes de classe C^2.

1. Pour un raccord de classe G^1, il suffit que les tangentes au point de contact soient les mêmes ;
2. Pour un raccord de classe G^2, il suffit qu'en plus les courbures au point de contact soient les mêmes.

Dans la suite du chapitre, on définit abscisse curviligne et courbure, on démontre le théorème 12 et sa généralisation en dimension supérieure. Puis on indique comment calculer efficacement la courbure et la torsion des B-splines et des NURBS.

4.2 Abscisse curviligne

4.2.1 Longueur

La longueur d'un polygone $\mathbf{P} = (P_0, P_1, \dots, P_m)$ est la somme des longueurs des côtés,

$$\mathrm{long}\,(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{m} \| P_i - P_{i-1} \| \,.$$

Définition 49 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in I$, une courbe dans $\mathbf{R}^n$. Sa* longueur `(length)` *est la borne supérieure des longueurs des polygones* inscrits *dans X, i.e. de la forme $\mathbf{P} = (X(t_0), \dots, X(t_m))$ où $t_0 \leq \dots t_m \in I$.*

Si X est de classe C^1, alors

$$\mathrm{long}\,(X) = \int_I \| X'(t) \| \; dt.$$

Proposition 50 *La longueur est invariante par changement de paramétrisation.*

Preuve. Cela résulte de la définition au moyen des polygones. ∎

Invariance. La longueur est préservée par les *isométries* de $\mathbf{R}^n$, i.e. les transformations affines dont la partie linéaire est orthogonale. La longueur est diminuée par les projections orthogonales.

Exercice 24 Courbes de longueur finie *Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in [a, b[$, une courbe dans $\mathbf{R}^n$. On suppose que la longueur de X est finie. Montrer que la limite $\lim_{t \to b} X(t)$ existe et vaut $X(a) + \int_a^b X'(t)\, dt$.*

Exercice 25 Accroissements finis *Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in [a, b]$, une courbe dans $\mathbf{R}^n$. Soit f une fonction dont le gradient est de norme inférieure ou égale à 1 en tout point. Montrer que*

$$|f(X(b)) - f(X(a))| \leq \mathrm{long}\,(X).$$

Exercice 26 La longueur en coordonnées polaires *Soit c la courbe plane d'équation polaire $r = f(\theta)$. Paramétrer c et exprimer sa longueur en fonction de f.*

4.2.2 Abscisse curviligne

Définition 51 *Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in I$ une courbe de classe C^1 dans $\mathbf{R}^n$. Soit $t_0 \in I$. L'*abscisse curviligne `(arc length)` *d'origine $X(t_0)$ sur X est la fonction de classe C^1 sur I définie par*

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} \| X'(t) \| \; dt.$$

Si X est injective, on peut voir l'abscisse curviligne comme une fonction sur l'image $X(I) \subset \mathbf{R}^n$. Si le vecteur vitesse X' ne s'annulle pas sur I, la fonction réciproque est une paramétrisation $s \mapsto X_1(s)$ de $X(I)$ au moins aussi régulière que la paramétrisation initiale, et qui satisfait

$$\| X_1'(s) \| = 1 \quad \textit{pour tout} \quad s.$$

Exercice 27 *Calculer l'abscisse curviligne d'origine $(0, 0)$ sur la parabole $t \mapsto (t, t^2)$.*

Remarque. En général, l'abscisse curviligne d'une courbe algébrique est une fonction transcendante. Elle n'est donc qu'exceptionnellement donnée par une formule fermée.

Remarque. Sur une courbe plongée γ vue comme sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, étant donné une origine P, il y a exactement deux paramétrisations de γ par l'abscisse curviligne d'origine P. Elles diffèrent l'une de l'autre d'un signe. Choisir l'une des deux, c'est choisir une *orientation* de γ, voir le cours de topologie.

Autrement dit, on a construit sur une courbe plongée orientée et pointée (i.e. sur laquelle on a choisi une origine) une paramétrisation canonique. Les grandeurs géométriques (e.g. la tangente) et leurs dérivées successives par rapport à l'abscisse curviligne vont automatiquement être des *invariants* de la courbe, qui ne dépendent pas d'un choix de paramétrisation. Ils pourront être calculés au moyen d'une paramétrisation quelconque.

4.3 Courbure des courbes planes

4.3.1 Définition

Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe plane paramétrée par son abscisse curviligne. Alors le vecteur vitesse trace une courbe $s \mapsto X(s)$ sur le cercle unité. Si X est de classe C^2, celle-ci possède un vecteur vitesse $X''(s)$, appelé *accélération*. Au signe près, la courbure est la norme de l'accélération. Le signe est bien défini, car l'accélération est orthogonale au vecteur vitesse, et on donne le signe $(+)$ (resp. $(-)$) si l'accélération pointe vers la gauche (resp. la droite) de la vitesse.

Définition 52 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe plane paramétrée par son abscisse curviligne. On suppose le plan orienté. On* note *$\tau(s) = X'(s)$ le vecteur tangent et $\nu(s)$ le vecteur unitaire obtenu en tournant $\tau(s)$ de $+\pi/2$. Alors la* courbure `(curvature)` *de X au point $X(s)$ est par définition*

$$\kappa(X(s)) = \det(X'(x), X''(s)) = X''(s) \cdot \nu(s).$$

En particulier, $\| X'' \| = |\kappa|$.

La courbure est vue comme une fonction définie le long de la courbe. Bien que définie au moyen de l'abscisse curviligne, la courbure ne dépend pas d'un choix de paramétrisation, seulement de l'orientation de la courbe.

Bien que l'abscisse curviligne ne soit pas calculable, il y a une formule qui donne la courbure en fonction d'une paramétrisation quelconque. Il en va de même des dérivées de la courbure.

Proposition 53 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe plane paramétrée. Sa courbure au point $X(t)$ vaut*

$$\kappa = \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2})(\| \frac{dX}{dt} \|)^{-3}.$$

et la dérivée de la courbure par rapport à l'abscisse curviligne est donnée par

$$\frac{\partial \kappa}{\partial s} = \| \frac{dX}{dt} \|^{-4} (\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^3X}{dt^3}) - 3\kappa \| \frac{dX}{dt} \| \frac{dX}{dt} \cdot \frac{d^2X}{dt^2}).$$

Preuve.

On utilisera plusieurs fois l'identité $\frac{ds}{dt} = \| \frac{dX}{dt} \|$. On dérive

$$\frac{dX}{dt} = \| \frac{dX}{dt} \| \frac{dX}{ds}$$

en

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|)\frac{dX}{ds} + \| \frac{dX}{dt} \| \frac{d}{dt}(\frac{dX}{ds}) = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|)\frac{dX}{ds} + \| \frac{dX}{dt} \|^2 \frac{d^2X}{ds^2}$$

d'où

$$\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}) = \| \frac{dX}{dt} \|^2 \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{ds^2}) = \| \frac{dX}{dt} \|^3 \det(\frac{dX}{ds}, \frac{d^2X}{ds^2}) = \| \frac{dX}{dt} \|^3 \kappa.$$

On dérive encore une fois.

$$\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^3X}{dt^3}) = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|^3 \kappa) = \frac{3}{2}\kappa\frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|^2) \| \frac{dX}{dt} \| + \| \frac{dX}{dt} \|^3 \frac{d\kappa}{dt}.$$

Or

$$\frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|^2) = 2\frac{dX}{dt} \cdot \frac{d^2X}{dt^2}$$

donc

$$\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^3X}{dt^3}) \quad = \quad \| \frac{dX}{dt} \|^4 \frac{d\kappa}{ds} + 3\kappa \| \frac{dX}{dt} \| \frac{dX}{dt} \cdot \frac{d^2X}{dt^2}.$$

Signe de la courbure. Si on change le sens de parcours, la courbure change de signe. Le signe de la courbure dépend aussi de l'orientation du plan. Par conséquent, une isométrie du plan préservant l'orientation (e.g. une translation ou une rotation) préserve la courbure des courbes, une isométrie du plan renversant l'orientation (e.g. une symétrie par rapport à une droite) change la courbure des courbes de signe.

Exemple. La courbure d'un cercle de rayon R est constante. Elle vaut $1/R$ si le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique, $-1/R$ sinon.

Exemple. Au point $(0,0)$, la courbure de la parabole d'équation $y = x^2$, parcourue dans le sens des x croissants, vaut 2.

Exercice 28 *Soit $t \mapsto (t, f(t))$ le graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle. Calculer sa courbure. Dans quelles conditions la dérivée seconde de f donne-t-elle une bonne approximation de la courbure ?*

Exercice 29 *Soit c la courbe plane définie par l'équation polaire $r = f(\theta)$. On introduit le repère tournant*

$$e_r(r,\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad e_\theta(r,\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Paramétrer la courbe c. Au moyen de ce repère, exprimer la tangente à la courbe c. Calculer la courbure.

4.3.2 Une courbe est déterminée par sa courbure

Théorème 13 *Soit κ une fonction continue sur un intervalle I. Soit $t_0 \in I$, soit P un point du plan et v un vecteur unitaire. Il existe une et une seule courbe X de classe C^2, paramétrée par son abscisse curviligne, telle que*

- *la courbure de X en $X(s)$ est $\kappa(s)$;*
- *$X(t_0) = P$ et $X'(t_0) = v$.*

Preuve.

Notons $\phi(s)$ l'angle que fait v avec le vecteur vitesse. Si on identifie le plan euclidien orienté avec les nombres complexes, cela s'écrit

$$X'(s) = \exp(i\phi(s))v.$$

En dérivant, on trouve que

$$X''(s) = i\phi'(s)X'(s)$$

d'où

$$\kappa(s) = \phi'(s).$$

La condition initiale $\phi(t_0) = 0$ force que $\phi(s) = \int_{t_0}^{s} \kappa(u)\,du$ et la condition initiale $X(t_0) = P$ donne

$$X(s) = P + (\int_{t_0}^{s} \exp(i\phi(s))\,ds)v.$$

Réciproquement, cette formule définit une courbe de classe C^2 de courbure κ issue de P et de vitesse initiale v. ■

Remarque. On a utilisé l'existence d'une détermination différentiable de l'argument.

Exercice 30 *Montrer qu'une courbe plane a une courbure constante si et seulement si c'est une droite ou un cercle.*

4.3.3 Déviation par rapport à la tangente

Lemme 54 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe de classe C^2 paramétrée par son abscisse curviligne. La distance algébrique δ de la courbe à sa tangente satisfait*

$$\delta(s) =: \det(X(s) - X(0), X'(0)) = \frac{1}{2}\kappa(0)s^2 + o(s^2).$$

Si pour tout s, $|\kappa(s)| \leq K$, alors pour tout s,

$$|\delta(s)| \leq \frac{1}{2}Ks^2.$$

Preuve. Le développement limité de Taylor-Young donne

$$X(s) = X(0) + sX'(0) + \frac{1}{2}\kappa(0)JX'(0) + o(s^2)$$

où J est la rotation de $+\pi/2$. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$X(s) = X(0) + sX'(0) + \int_0^s (1-u)X''(u)\,du$$

et $\| X'' \| \leq \kappa$. ■

4.3.4 Rayon de courbure

Lemme 55 *Soit γ une courbe orientée de classe C^2, P un point de γ, soient τ le vecteur tangent unitaire et ν la normale orientée en P (de sorte que la base orthonormée (τ, ν) soit directe. Pour r réel, notons $C(r)$ le cercle de rayon $|r|$ et de centre $P + r\nu$. Il est tangent à γ en P.*

Le cercle $C(r)$ a un contact d'ordre 2 avec la courbe γ en P si et seulement si $r = \kappa(P)^{-1}$. Si $r \neq \kappa(P)^{-1}$, $C(r)$ est d'un seul côté de la courbe au voisinage de P : du coté de la matière (à gauche de la courbe) si $1 - r\kappa(P) > 0$, du côté opposé si $1 - r\kappa(P) < 0$.

Si $\kappa(P) = 0$, on dit que la courbe γ admet en P un point d'inflexion*. Dans ce cas, elle a un contact d'ordre 2 avec sa tangente.*

Si $\kappa(P) \neq 0$, le cercle $C(\kappa(P)^{-1})$ s'appelle le cercle osculateur `(osculating circle)` *en P et $\kappa(P)^{-1}$ le* rayon de courbure `(radius of curvature)` *en P.*

Preuve. Soit $s \mapsto X(s)$ la paramétrisation de γ par l'abscisse curviligne d'origine P, de sorte que $X'(0) = \tau$. On calcule un développement limité du carré de la distance de $X(s)$ au centre $P + r\nu$ du cercle $C(r)$. Comme

$$X(s) = X(0) + s\tau + \frac{1}{2}\kappa(P)s^2 + o(s^2),$$

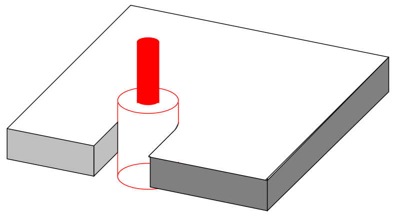


Figure 4.1: Une fraiseuse

$$\begin{aligned} \| X(s) - P - r\nu \|^2 &= \| s\tau + (-r + \frac{1}{2}s^2\kappa(P))\nu \|^2 + o(s^2) \\ &= s^2 + (-r + \frac{1}{2}s^2\kappa(P))^2 + o(s^2) \\ &= r^2 + (1 - r\kappa(P))s^2 + o(s^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\kappa(P) \neq 1/r$, $\| X(s) - P - r\nu \|^2 - r^2$ a un signe constant au voisinage de 0, donc $C(r)$ est d'un seul côté de γ au voisinage de P. Plus précisément, du coté de la matière (à gauche de la courbe) si $1 - r\kappa(P) > 0$, du côté opposé si $1 - r\kappa(P) < 0$.

Si $\kappa(P) = 1/r$, la paramétrisation annule l'équation du cercle à l'ordre 2, donc courbe et cercle ont un contact d'ordre 3. ■

Exercice 31 *Soit $t \mapsto D(t)$ une famille de droites du plan. On appelle* enveloppe *de cette famille une courbe $t \mapsto c(t)$ telle que pour tout t, c est tangente à $D(t)$ en $c(t)$.*

On suppose que $D(t)$ est la droite passant par un point $P(t)$ et de vecteur unitaire directeur $u(t)$. Montrer que si la dérivée u' ne s'annule pas, alors la famille $D(t)$ admet une enveloppe.

Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe de classe C^2 paramétrée par son abscisse curviligne. Montrer que si X n'a pas de point d'inflexion, la famille de ses normales possède une enveloppe appelée développée *de X. Montrer que le la développée est le lieu des centres des cercles osculateurs.*

4.4 Rayon d'injectivité normal

4.4.1 Un problème d'usinage

Dans une plaque de bois, plastique ou métal, on cherche à découper une forme curviligne. Pour cela, on fixe la plaque sur le plateau d'une machine-outil (dont on peut commander la translation horizontale) et on utilise comme seul outil d'une *fraiseuse*. C'est un cylindre dentelé qui tourne à grande vitesse autour d'un axe vertical fixe. Dans chaque position du plateau, la fraiseuse enlève un cylindre de matière, sur toute l'épaisseur de la plaque. Lorsque le plateau se déplace, le partie de la matière qui est enlevée est donc une réunion de cylindres d'axes verticaux, de même hauteur égale à l'épaisseur de la plaque (voir figure 4.1).

On modélise la plaque par un rectangle plan, l'outil par un cercle de rayon $\epsilon > 0$, et le déplacement du plateau par un déplacement du centre du cercle par rapport au rectangle. Autrement dit, le guidage de l'outil est modélisé par une courbe plane $t \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, appelée *guide*. La matière enlevée est représentée par la réunion de disques ouverts

$$U_\epsilon(c) = \bigcup_{t \in [a,b]} B(c(t), \epsilon)$$

Le *profil* à réaliser est décrit par une autre courbe orientée σ, la matière à conserver étant à gauche de σ, voir figure 4.2.

Problème.

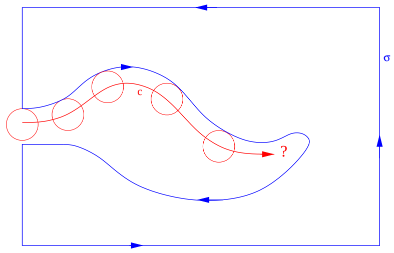


Figure 4.2: Modélisation du problème d'usinage

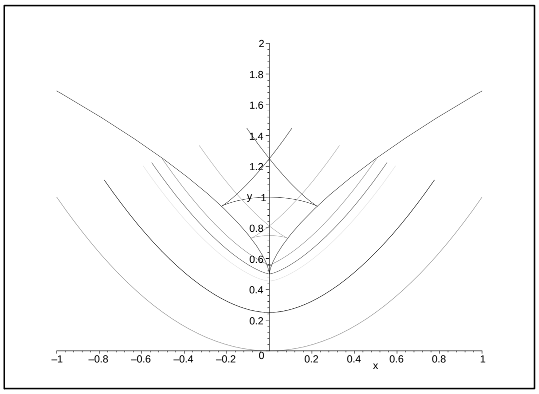


Figure 4.3: Courbes équidistantes et développée d'une parabole

1. Le profil σ est-il usinable, i.e. existe-t'il une courbe c tel que le complémentaire de $U_\epsilon(c)$ soit exactement le domaine entouré par σ ?
2. Si c'est le cas, comment trouver la courbe guide c à partir du profil σ ?

4.4.2 Lien entre usinage et courbes equidistantes

On va montrer que le profil σ est une *courbe équidistante* de c.

Définition 56 *Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe de classe C^1. Notons $\tau(t)$ son vecteur unitaire tangent. Fixons un réel ϵ. La* courbe équidistante `(offset curve)` *c_ϵ est donnée par*

$$t \mapsto c_\epsilon(t) = c(t) + \epsilon J\tau(t).$$

4.4.3 Rayon d'injectivité

Exemple. Courbes équidistantes à une parabole.

La courbe en V est la *développée* de la parabole, i.e. le lieu des centres des cercles osculateurs. Remarquer que les courbes équidistantes sont lisses tant qu'elles ne rencontrent pas la développée.

Exercice 32 *Vérifier que si $s \mapsto X(s)$, $s \in I$ est de classe C^2 et paramétrée par son abscisse curviligne, alors*

$$X'_\epsilon(s) = (1 - \epsilon\kappa(s))\tau(s).$$

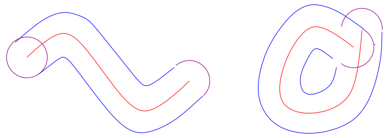


Figure 4.4: Voisinage tubulaire d'une courbe

On suppose la courbure bornée. En déduire que

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon}\mathrm{long}\,(X_\epsilon)_{|\epsilon=0} = -\int_I \kappa(s)\,ds.$$

Lemme 57 *Soit p un point du disque $B(c(t),\epsilon)$. Alors*

- *ou bien il existe $r \in]-\epsilon,\epsilon[$ et $t' \in$ tels que $p = c(t') + rJ\tau(t')$;*
- *ou bien il existe $r \in [0,\epsilon[$ et un vecteur unitaire τ' tels que $\tau'\cdot\tau(b) > 0$ et $p = c(b) + r\tau'$;*
- *ou bien il existe $r \in [0,\epsilon[$ et un vecteur unitaire τ' tels que $\tau'\cdot\tau(a) < 0$ et $p = c(a) + r\tau'$;*

Preuve. On considère la fonction $t \mapsto f(t) = \| c(t) - p \|^2$ sur l'intervalle $[a,b]$. Par compacité, elle atteint son minimum, disons, en t'. Si $t' \neq a$ et $t' \neq b$, alors $f'(t') = 0$. Or

$$f'(t') = 2(c(t') - p)\cdot\frac{dc}{dt}(t') = 2\,\|\frac{dc}{dt}(t')\|\,(c(t') - p)\cdot\tau(t').$$

donc si $f'(t') = 0$, $c(t') - p$ est orthogonal à $\tau(t')$, donc colinéaire à $J\tau(t')$. De plus,

$$\| c(t') - p \| = \sqrt{f(t')} \leq \sqrt{f(t)} < \epsilon$$

donc on peut écrire $p - c(t') = rJ\tau(t')$ avec $|r| < \epsilon$.

Si $f'(t') \neq 0$, c'est que $t' = a$ (dans ce cas $f'(a) > 0$ et $f(a) \leq f(t)$) ou $t' = b$ (dans ce cas $f'(b) < 0$ et $f(b) \leq f(t)$). Dans le premier cas, on pose $\tau' = p - c(a)/\,\| p - c(a) \|$, et

$$\tau'\cdot\tau(a) = -\frac{1}{2\,\| p - c(a) \|\|\| \frac{dc}{dt}(a) \|}f'(a) < 0.$$

On choisit $r = \| p - c(a) \| = \sqrt{f(a)} \leq \sqrt{f(t)} < \epsilon$. Le second cas est identique. ∎

Proposition 58 *Soit c une courbe régulière orientée, de classe G^2. On note τ son vecteur unitaire tangent. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, le bord de $U_\epsilon(c)$ est contenu dans la réunion des deux courbes équidistantes*

$$t \mapsto c(t) \pm \epsilon J\tau(t)$$

et des deux demi-cercles de rayon ϵ et de centres $c(a)$ et $c(b)$ opposé à $\tau(a)$ (resp. centré sur $\tau(b)$), voir figure 4.4.

Preuve. Soit p un point du bord de l'ouvert $U_\epsilon(c)$. Alors p est limite d'une suite de points p_j de $U_\epsilon(c)$. Chaque p_j appartient à un disque $B(c(t_j),\epsilon)$ donc s'écrit

$$p_j = c(t'_j) + r_jJ\tau(t'_j) \quad \text{ou} \quad p_j = c(a) + r_j\tau'_j \quad \text{ou} \quad p_j = c(b) + r_j\tau'_j.$$

Si le premier cas se produit une infinité de fois, on peut extraire des suites convergentes de t'_j et r_j et conclure que

$$p = c(t) + rJ\tau(t)$$

avec $|r| \leq \epsilon$.

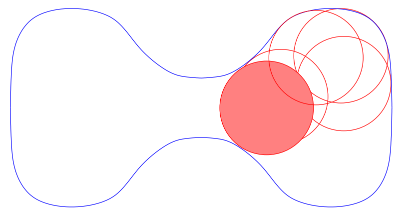


Figure 4.5: Courbe dont la courbure est suffisante mais non usinable

Si le second cas se produit une infinité de fois, on peut extraire une suite convergente de τ'_j et r_j et conclure que

$$p = c(a) + r\tau'$$

avec $0 \leq r \leq \epsilon$ et $\tau' \cdot \tau(a) \leq 0$.

Si le second cas se produit une infinité de fois, on peut extraire une suite convergente de τ'_j et r_j et conclure que

$$p = c(b) + r\tau'$$

avec $0 \leq r \leq \epsilon$ et $\tau' \cdot \tau(a) \geq 0$.

Supposons que, dans l'un des trois cas, $|r| < \epsilon$. Alors p appartient à un disque de la forme $B(c(t), \epsilon)$, $t \in [a, b]$, donc p est un point intérieur de $U_\epsilon(c)$, contradiction. On conclut que dans chacun des cas, $|r| = \epsilon$. Cela signifie que p appartient à l'une des courbes équidistantes ou à l'un des demi-cercles. ■

Remarque. La figure 4.4 montre un exemple où la proposition 58 est optimale (le bord du voisinage tubulaire est exactement la réunion de deux courbes équidistantes et de deux demi-cercles) et un autre où elle ne l'est pas.

4.4.4 Usinabilité et courbure

Proposition 59 *Soit σ une courbe fermée plane orientée de classe G^2. Si σ est usinable (i.e. σ borde le complémentaire d'une réunion de disques de rayon ϵ), alors sa courbure est partout au moins égale à $-1/\epsilon$.*

Preuve. Notons M (la matière) le domaine entouré par σ. Soit p un point de σ. Montrons que le disque ouvert de rayon ϵ et de centre $p - \epsilon J\tau(p)$ est disjoint de M.

Par hypothèse, p est la limite d'une suite de points p_j contenus dans des disques $B(q_j, \epsilon)$ disjoints de M. On peut supposer que la suite q_j converge vers q. Si $q' \in B(q, \epsilon)$, alors pour j assez grand, $q \in B(q_j, \epsilon)$. Par conséquent $B(q, \epsilon)$ est disjoint de M. En particulier, $p \notin B(q, \epsilon)$. Or $p_j \in B(q, \epsilon)$ pour j assez grand. Par conséquent, p est sur le bord de $B(q, \epsilon)$. Comme σ est disjointe de $B(q, \epsilon)$, le cercle $\partial B(q, \epsilon)$ est tangent à σ en p. Son centre q est donc l'un des points $p \pm J\tau(p)$. Comme $B(q, \epsilon)$ est disjointe de M, $q = p - \epsilon J\tau(p)$.

D'après la proposition 55, pour tout réel r tel que $1 - r\kappa(p) > 0$, le cercle de centre $p + rJ\tau(p)$ et de rayon $|r|$ est dans la matière au voisinage de p. Par conséquent $1 + \epsilon\kappa(p) \leq 0$. ■

Remarque. La condition nécessaire donnée dans la proposition 59 n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple de la figure 4.5. On va la compléter.

Proposition 60 *Soit σ une courbe plane fermée orientée, régulière, de classe G^2. Si σ est usinable (i.e. σ borde le complémentaire d'une réunion de disques de rayon ϵ), alors l'application*

$$\Phi : [a, b] \times [0, \epsilon[\to \mathbf{R}^2, \quad (t, r) \mapsto c(t) - rJ\tau(t)$$

est injective.

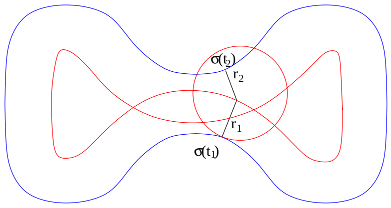


Figure 4.6: Défaut d'injectivité

Preuve. Notons à nouveau M la matière. Raisonnons par l'absurde. Supposons que σ est usinable mais que Φ n'est pas injective. Alors il existe $(t_1, r_1) \neq (t_2, r_2)$ tels que $\Phi(t_1, r_1) = \Phi(t_2, r_2)$. On peut supposer que $r_1 \geq r_2$. Comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 59, pour tout point p de σ, le disque $B(p - \epsilon J\tau(p))$ est disjoint de M. Or le disque fermé $\overline{B}(\Phi(t_1, r_1), r_1)$ contient le point $c(t_2)$, voir figure 4.6. Ce disque, privé de $c(t_1)$, est contenu dans $B(p - \epsilon J\tau(p))$ pour $p = c(t_1)$, contradiction. ∎

4.4.5 Coordonnées de Fermi

Dans ce paragraphe, on vérifie que la condition d'injectivité apparue dans la proposition 60 est satisfaite pour ϵ assez petit, et on la relie à la terminologie standard en géométrie riemannienne.

Proposition 61 *Soit $s \mapsto X(s)$, $s \in [a, b]$ une courbe de classe C^2 et paramétrée par son abscisse curviligne. On note $K = \sup |\kappa|$. Si $\epsilon < K$, alors l'application*

$$(s, r) \mapsto \Phi(s, r) = X(s) + r\nu(s), \quad]a, b[\times] - \epsilon, \epsilon[\to \mathbf{R}^2$$

est un difféomorphisme local.

On suppose de plus que X est injective. Soit $[c, d] \subset]a, b[$ un intervalle fermé et borné. Il existe un nombre $\epsilon_0 > 0$ tel que Φ soit un difféomorphisme de $]a, b[\times] - \epsilon, \epsilon[$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Le meilleur ϵ_0 s'appelle le rayon d'injectivité normal *de la courbe X, et le difféomorphisme Φ^{-1} s'appelle les* coordonnées de Fermi.

De même, on parle du rayon d'injectivité extérieur *de X lorsqu'on ne se préoccupe que de l'injectivité de Φ sur $]a, b[\times[0, \epsilon[$*

Preuve. Comme les dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \nu \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = (1 - t\kappa)\tau$$

sont linéairement indépendantes, la différentielle de Φ est un isomorphisme tant que $t\kappa(s)$ reste < 1. D'après le théorème d'inversion locale, Φ est injective au voisinage de chaque point. Notons $Y = [c, d] \times [-\epsilon, \epsilon]$, et considérons, dans le produit $Y \times Y$, le sous-ensemble Z formé des couples de points ayant la même image par Φ. C'est un compact qui contient la diagonale $\Delta = \{((s, r), (s, r))\ ;\ (s, r) \in Y\}$.

Montrons par l'absurde que $Z \setminus \Delta$ est fermé. Soit $((s_j, r_j), (s'_j, r'_j))$ une suite dans $Z \setminus \Delta$. Supposons qu'elle converge vers un point de (s, r) de Δ. Comme Φ est injectif au voisinage de (s, r), nécessairement $(s_j, r_j) = (s'_j, r'_j)$ pour j assez grand, contradiction.

La famille d'ouverts $U_{\epsilon'} = [c, d] \times]\epsilon', \epsilon'[\subset Y$ est croissante. Comme X est injective,

$$(Z \setminus \Delta) \cap \bigcap_{\epsilon' \in]0, \epsilon[} U_{\epsilon'} \times U_{\epsilon'} = \emptyset.$$

Il existe par compacité de $Z \setminus \Delta$ un $\epsilon' > 0$ tel que $(Z \setminus \Delta) \cap U_{\epsilon'} \times U_{\epsilon'} = \emptyset$. Autrement dit, Φ est injectif sur $U_{\epsilon'}$. ∎

Interprétation. Soit γ une courbe plane et P un point du plan. Si P est assez proche de γ, on peut écrire $P = \Phi(s,r)$ et (s,r) sont les coordonnées de Fermi de P. On a envie d'appeler *projection* de P sur γ le point de γ le plus proche de P. Alors s est l'abscisse curviligne de cette projection. Quant à r, c'est la *distance algébrique* à la courbe, i.e. $r = \pm dist(P,\gamma)$ avec $\pm = +1$ si P est à gauche de la courbe γ, et $\pm = -1$ si P est à droite de γ.

Corollaire 62 *Soit γ une courbe plane de classe C^k. Sur leur domaine de définition, les coordonnées de Fermi s et r sont de classe C^{k-1}. Leur gradient est donné par les formules suivantes.*

$$\nabla_P r = \nu(s) \quad et \quad \nabla_P s = \frac{1}{1-r\kappa(s)}\tau(s)$$

où τ et ν désignent le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire à γ au point $X(s)$, projection de P sur γ.

Preuve. Notons ϵ_0 le rayon d'injectivité normal. Montrons que si $P = \Phi(s,t)$, $|r| < \epsilon_0$, alors le point de la courbe le plus proche de P est $X(s)$. En effet, par compacité, le minimum δ de la distance de P à un point de la courbe est atteint en un point $X(s')$. Le segment $[X(s'),P]$ est nécessairement orthogonal à la courbe en $X(s')$. Par conséquent, il s'écrit $u \mapsto X(s') + u\nu(s')$ ou $u \mapsto X(s') - u\nu(s')$ pour $u \in [0,\delta]$. Comme $\| P - X(s) \| = |r| \geq \delta$, $\delta < \epsilon_0$, donc $\Phi(s',\delta) = P$. Comme Φ est injectif, $s = s'$ et $\delta = |t|$. On conclut que

$$dist(\Phi(s,t),\gamma) = |r|$$

donc la fonction distance algébrique $P \mapsto r = \pm dist(P,\gamma)$ et la projection $P \mapsto X(s)$ sont aussi régulières que Φ, soit de classe C^{k-1}.

Par définition, $r(\Phi(s,t)) = t$. En dérivant par rapport à s puis par rapport à t, on trouve que si $P = \Phi(s,t)$,

$$\nabla_P r \cdot (1 - r\kappa(s))\tau(s) = 0, \quad \nabla_P r \cdot \nu(s) = 1$$

et donc $\nabla_P r = \nu(s)$, où $Q = X(s)$ est la projection de P sur γ. De même,

$$\nabla_P s \cdot (1 - r\kappa(s))\tau(s) = 1, \quad \nabla_P r \cdot \nu(s) = 0$$

donc $\nabla_P s = \frac{1}{1-r\kappa(s)}\tau(s)$. ∎

Exercice 33 *Soit γ une courbe plane fermée de classe C^2, de rayon d'injectivité normal i. Soit $\epsilon < i$. Montrer qu'on peut faire glisser deux disques de rayon ϵ le long de γ, un de chaque côté. Fixons un des côtés de γ. A quelle condition (plus faible) peut-on faire glisser un disque de ce côté ?*

Remarque. Une borne sur la courbure seule ne suffit pas à contrôler le rayon d'injectivité normal. Néanmoins, on peut estimer le rayon d'injectivité normal au moyen de la courbure si l'arc est suffisamment court.

Exemple. En mettant bout à bout des arcs de cercles de rayon 1, on peut aisément réaliser une courbe de classe C^1 et sans points doubles, en forme de haricot, qui passe deux fois à proximité du même point, puis la rendre de classe C^2 sans altérer ces propriétés. Le rayon d'injectivité normal peut être rendu arbitrairement petit en gardant la courbure inférieure à 1 en valeur absolue.

Proposition 63 *Soit γ une courbe de longueur L. Soit $K = sup|\kappa|$ la borne supérieure de la courbure de γ. Si $L < \dfrac{1}{K}$, alors le rayon d'injectivité normal de γ est au moins égal à $\frac{1}{K} - L$.*

Preuve. Soit $s \mapsto X(s)$, $s \in [0, L]$ une paramétrisation par l'abscisse curviligne de γ. Soit i le rayon d'injectivité. Par définition, il existe deux points distincts (s_1, r_1) et $(s_2, r_2) \in [0, L] \times [-i, i]$ tels que $\Phi(s_1, r_1) = \Phi(s_2, r_2)$. On note P ce point. Remarquer que $s_1 \neq s_2$. Alors la fonction $s \mapsto f(s) = \| X(s) - P \|^2$ a une dérivée nulle en s_1 et en s_2. D'après le théorème de Rolle, sa dérivée seconde s'annule en un point $s \in]0, L[$. Or

$$f'(s) = 2X'(s) \cdot (X(s) - P),$$

$$f''(s) = 2X''(s) \cdot (X(s) - P) + 2X'(s) \cdot X'(s) = 2\kappa(s)X'(s) \cdot (X(s) - P) + 2.$$

Par conséquent

$$1 = -\kappa(s)X'(s) \cdot (X(s) - P) \leq K(L + i).$$

Comme $L < \dfrac{1}{K}$, il vient $\delta > \dfrac{1}{K} - L$. ∎

4.4.6 Congés

Il s'agit d'arrondir les angles. Autrement dit, étant donné une courbe de classe C^2 par morceaux, de modifier la courbe au voisinage des sommets, pour la rendre de classe C^1 et à courbure bornée. Un moyen classique consiste à insérer un arc de cercle.

Théorème 14 *Soient γ_1 et γ_2 deux courbes planes de classe C^2, de même longueur L. On suppose qu'elles se coupent transversalement en leur milieu P et qu'elle y font un angle $\alpha \in]0, \pi[$. Soit K un majorant de la courbure de γ_1 et de γ_2. On suppose que $L < \dfrac{\sin\alpha}{2K}$. Si $\epsilon < \dfrac{1}{4}L\sin\alpha$, il existe dans chacun des 4 secteurs délimités par γ_1 et γ_2 un unique cercle de rayon ϵ tangent à la fois à γ_1 et à γ_2.*

Preuve. Soit $s_i \mapsto X_i(s_i)$ la paramétrisation par l'abscisse curviligne d'origine P de γ_i, $\tau_i(s_i)$ le vecteur tangent et $\nu_i(s_i)$ le vecteur unitaire normal.

Montrons que pour $s_1 \in [-L/2, L/2]$, $s_2 \in [-L/2, L/2]$, $\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2) > \sin\alpha - KL > 0$. Comme $\nu_1' = -\kappa_1\tau_1$,

$$|\frac{\partial}{\partial s_1}\nu_1 \cdot \tau_2| \leq K$$

donc $|\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(0) - \nu_1(0) \cdot \tau_2(0)| \leq KL/2$. De même, $|\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2) - \nu_1(s_1) \cdot \tau_2(0)| \leq KL/2$, donc $|\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2) - \nu_1(0) \cdot \tau_2(0)| \leq KL$. Or $\nu_1(0) \cdot \tau_2(0) = \sin\alpha$ par hypothèse, donc

$$\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2) > \sin\alpha - KL > \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

D'après la proposition 63, le rayon d'injectivité normal de γ_1 ou γ_2 est au moins égal à $\frac{1}{2K}$ donc supérieur à L. Cela signifie que $\Phi_i : (s, r) \mapsto X(s) + r\nu_i(s)$ est un difféomorphisme de $]-L/2, L/2[\times]-L, L[$ sur un ouvert U_i du plan. En particulier, les coordonnées de Fermi r_i (distance algébrique à γ_i) et s_i (abscisse de la projection sur γ_i) sont de classe C^1 sur $U_1 \cap U_2$.

Fixons $\epsilon < \frac{1}{12}L\sin\alpha$. Soit

$$U = \{Q \in U_1 \cap U_2 \; ; \; |r_1(Q)| < \epsilon, \; |r_2(Q)| < \epsilon\}.$$

On pose $F = (r_1, r_2) : U \to \mathbf{R}^2$. Alors F est un difféomorphisme local. En effet, le gradient de r_1 (resp. r_2 au point Q est un vecteur de la forme $\nu_1(s_1)$ (resp. $\nu_2(s_2)$). Comme le produit scalaire $\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2)$ est non nul, les gradients ne sont pas colinéaires. Les formes linéaires dr_1 et dr_2 étant linéairement indépendantes, la différentielle dF est un isomorphisme.

Pour tout $u \in]-\epsilon, \epsilon[$, l'ensemble de niveau $\{r_1 = u\}$ est contenu dans l'image de la courbe équidistante $s_1 \mapsto X_{1,u}(s_1)$, $s_1 \in [-L/2, L/2]$. Le long de cette courbe, la fonction r_2 est strictement croissante. En effet

$$\frac{\partial}{\partial s_1}r_2(X_{1,u}(s_1)) = \nabla r_2 \cdot (1 - u\kappa_1(s_1))\tau_1(s_1) = (1 - u\kappa_1(s_1))(\nu(s_2) \cdot \tau_1(s_1) > 0.$$

Si Q et Q' sont des points de U tels que $F(Q) = F(Q')$, alors $r_1(Q) = r_1(Q')$, donc Q et Q' sont sur la même courbe équidistante, $Q = X_{1,u}(s)$ et $Q = X_{1,u}(s')$ où $u = r_1(Q)$. Comme $r_2(Q) = r_2(Q')$, nécessairement $Q = Q'$.

Montrons que F est surjective de U sur $]-\epsilon,\epsilon[\times]-\epsilon,\epsilon[$.

On montre d'abord que l'image de F contient $\{0\}\times]-\epsilon,\epsilon[$. Cela revient à examiner les valeurs de la fonction r_2 le long de $\gamma_1 \cap (U_1 \cap U_2) = \gamma_1 \cap U_2$. Pour $s \in]-L/2, L/2[$ tel que $X_1(s) \in U_2$, on pose

$$f(s) = r_2(X_1(s)) \quad \text{et} \quad g(s) = s_2(X_1(s)).$$

Alors $f'(s) = \nu_2(g(s)) \cdot \tau_1(s)$ donc

$$f'(s) \geq \frac{1}{2}\sin\alpha$$

tant que $X_1(s) \in U_2$. De même

$$g'(s) = \nabla_{X_1(s)} s_2 \cdot \tau_1(s) = \frac{1}{1 - f(s)\kappa_2(s)} \tau_2(g(s)) \cdot \tau_1(s)$$

donc $|g'(s)| \leq \dfrac{1}{1-(KL/2)} \leq 2$. Soit s_m la borne supérieure des $s \leq L/2$ tels que $X_1([0,s]) \subset U_2$. Il vient, pour tout $s \leq s_0$,

$$f(s) \geq \frac{1}{2}\sin(\alpha)s \quad \text{et} \quad |g(s)| \leq 2s.$$

Supposons $2s_m < L/2$. L'inégalité $|g(s_m)| \leq 2s_m$ entraîne que $X_1(s_m) \in U_2$. Or l'ensemble des s tels que $X_1(s) \in U_2$ est un ouvert, cela contredit le choix de s_m. On conclut que $s_m \geq L/4$ et donc que

$$f(s_m) \geq \frac{1}{8} L \sin(\alpha) > \epsilon.$$

Ceci montre que la fonction r_2 prend toute valeur comprise entre 0 et ϵ le long de $\gamma_1 \cap U_2$, i.e. que l'image $F(U)$ contient $\{0\} \times [0,\epsilon[$. Quitte à changer l'orientation de γ_1, on montre que $F(U)$ contient $\{0\}\times]-\epsilon, 0[$.

Fixons $u \in]-\epsilon,\epsilon[$. On sait qu'il existe un point $X_1(s_1)$ de $\gamma_1 \cap U_2$ tel que $r_2(s_1) = u$. On reprend les estimations du paragraphe précédent en remplaçant r_2 par r_1 et X_1 par la courbe équidistante $X_{2,u} : s \mapsto X_2(s) + u\nu_2(s)$. En gardant les mêmes notations, les estimations obtenues sont cette fois

$$f' \geq (1-\epsilon K)(\sin\alpha - KL) \geq \frac{1}{3}\sin\alpha \quad \text{et} \quad |g'| \leq \frac{1+\epsilon K}{1-\epsilon K} \leq 2$$

car $\epsilon K \leq \frac{1}{3}$. De nouveau, on trouve un nombre $s_m \geq L/4$ tel que $X_{2,u}([0,s_m]) \subset U_1 \cap U_2$ et $r_1(X_{2,u}(s_m)) > \epsilon$. Comme r_2 est constant le long de la courbe $X_{2,u}$, ceci montre que $F(U)$ contient $[0,\epsilon[\times\{u\}$. Quitte à changer l'orientation de γ_2, on montre que $F(U)$ contient $]-\epsilon,0[\times\{u\}$.

On conclut que F est un difféomorphisme de U sur $]-\epsilon,\epsilon[^2$. Pour tout $0 < u < \epsilon$, les quatre points $F^{-1}(u,u)$, $F^{-1}(-u,u)$, $F^{-1}(u,-u)$, $F^{-1}(-u,-u)$ sont exactement à distance u de γ_1 et de γ_2, donc les disques de rayon u centrés en ces points sont tangents à γ_1 et à γ_2 sans empiéter dessus. Réciproquement, si un disque de rayon $u < \epsilon$ touche γ_1 et γ_2, son centre P est dans le domaine des coordonnées de Fermi de γ_1 et de γ_2 et satisfait $|r_1(P)| = |r_2(P)| = u$, donc $F(P)$ est l'un des quatre points $(\pm u, \pm u)$. Comme F est bijective, P est l'un des quatre points décrits plus haut. ∎

4.5 Convexité

Définition 64 *Une courbe plane γ est dite* localement convexe (`locally convex`) *si pour tout $P \in \gamma$, il existe r et un convexe $C \subset B(x,r)$ tel que*

$$\partial_{B(x,r)} C = \gamma \cap B(x,r).$$

Exemple. Le bord d'un convexe C d'intérieur non vide est une courbe continue. En effet, si P est un point intérieur de C, l'application $Q \mapsto Q - P/ \parallel Q - P \parallel$ est un homéomorphisme de ∂C sur le cercle unité.

Par définition, ∂C est localement convexe.

Remarque. Une courbe plane fermée localement convexe sans points doubles borde un convexe. On démontrera plus loin une généralisation de ce résultat en toute dimension.

Exemple. La spirale $t \mapsto \exp(-t+it)$ (notation complexe) est localement convexe, mais ne borde pas un convexe.

Proposition 65 *Une courbe plane de classe C^2 est localement convexe en tout point si et seulement si sa courbure garde un signe constant.*

Preuve. On montre un peu plus : le côté convexe est à gauche si la courbure est positive ou nulle, à droite sinon.

Première étape. Au voisinage de $P = X(0)$, dans le repère $(P, \tau(0), \nu(0))$ où $\tau(0)$ est le vecteur unitaire tangent et $\nu(0)$ le vecteur unitaire normal en P, la courbe γ est définie par une équation $y = f(x)$ où f est de classe C^2. Notons $\phi(s)$ l'angle entre $\tau(0)$ et $\tau(s)$. Si $X(s) = (x(s), y(s))$, alors $f'(x(s)) = \tan(\phi(s))$ donc la dérivée f' est croissante si et seulement si ϕ est croissante. On conclut que f est convexe si et seulement si la courbure $\kappa(s) = \phi'(s)$ est positive ou nulle.

Deuxième étape. Soit f une fonction réelle définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, telle que $f(0) = 0$. Soit $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ son graphe. Soit C un ouvert du plan dont le bord, au voisinage de $P = (0,0)$, coïncide avec γ. Alors au voisinage de P, C coïncide avec l'un des deux ensembles $C_+ = \{y > f(x)\}$ ou $C_- = \{y < f(x)\}$. Cela résulte de la connexité de $C_\pm$.

Troisième étape. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. L'ensemble $\{(x,y) \in I \times \mathbf{R} \,;\, y > f(x)\}$ est convexe si et seulement si la fonction f est convexe. ∎

Exercice 34 *Soit $s \mapsto X(s)$, $t \in \mathbf{R}/L\mathbf{Z}$, une courbe plane* **fermée** *de classe C^3, paramétrée par son abscisse curviligne. Montrer qu'il existe un entier $w \in \mathbf{Z}$ tel que*

$$\int_0^1 \kappa(s)\, ds = 2\pi w.$$

Ce nombre s'appelle nombre d'enroulement `(winding number)` *de la courbe.*

Donner pour chaque entier $m \in \mathbf{Z}$ un exemple de courbe de nombre d'enroulement égal à m.

Montrer que si la courbe $X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z})$ est strictement convexe (i.e. elle ne contiient pas de segment de droite et c'est le bord d'un convexe), alors $w = \pm 1$.

4.5.1 Courbure des courbes B-splines

On utilise des notations du chapitre sur les B-splines. On rappelle la proposition 115.

Proposition 66 *Soit γ la courbe B-spline de degré $k \geq 2$ associée à un vecteur de noeud $\mathbf{t}$ tel que $t_0 = \cdots = t_k < t_{k+1}$ et à un polygone de contrôle plan $\mathbf{P}$ tel que $P_0 \neq P_1$. Notons c la longueur du côté P_0P_1 et A l'aire algébrique du triangle de sommets P_0, P_1 et P_2. Alors la courbe γ a pour origine P_0. Sa tangente en ce point est la demi-droite P_0P_1 et sa courbure en ce point est*

$$\kappa = \frac{k-1}{k} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+2} - t_k} \frac{2A}{c^3}.$$

Remarque. Les résultats (mais pas toujours les preuves) énoncés pour des courbes de classe C^2 s'étendent aux courbes de classe C^1 mais seulement C^2 par morceaux. Cela s'applique notamment aux B-splines de degré 2.

4.6 Repère de Frenet

Passons aux courbes gauches.

Définition 67 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe dans l'espace $\mathbf{R}^3$ orienté, paramétrée par son abscisse curviligne. On note toujours $\tau(s) = X'(s)$ le vecteur unitaire tangent. La* tangente *à la courbe en $X(s)$ est la droite passant par $X(s)$ et dirigée par $\tau(s)$.*

Le nombre $\kappa(s) = \| X''(s) \|$ s'appelle la courbure `(curvature)` *de la courbe.*

On dit que $X(s)$ est un point d'inflexion `(inflexion point)` *de la courbe si $X''(s) = 0$. Dans ce cas, la courbe admet en $X(s)$ un contact d'ordre 2 avec sa tangente. Sinon, on appelle* normale unitaire orientée *le vecteur*

$$\nu(s) = \frac{X''(s)}{\| X''(s) \|}.$$

et on appelle binormale *le vecteur unitaire $b(s)$ tel que (τ, ν, b) soit une base orthonormée directe. Autrement dit, $b = \tau \wedge \nu$. Le repère mobile $s \mapsto (X(s), \tau(s), \nu(s), b(s))$ s'appelle le* repère de Frenet `(Frenet frame)` *de la courbe.*

Dépendance par rapport aux orientations. La coubure d'une courbe gauche est positive ou nulle par définition. Par conséquent, elle ne dépend ni de l'orientation de la courbe, ni de celle de l'espace. Il en est de même du vecteur unitaire normal orienté ν. La binormale ne dépend pas de l'orientation de la courbe. En revanche, la binormale change de signe lorsqu'on change l'orientation de l'espace ambiant.

Remarque. Une courbe gauche est une droite si et seulement si sa courbure est nulle.

Remarque. Le vecteur unitaire tangent trace une courbe $s \mapsto \tau(s)$ sur la sphère unité appelée *hodographe*. La courbure est la vitesse de parcours de l'hodographe.

Proposition 68 *Soit γ une courbe dans l'espace.*

Soit P un point d'inflexion de γ. Alors un plan admet un contact d'ordre 2 avec γ en P si et seulement si il contient la tangente en P.

Supposons que P n'est pas un point d'inflexion de γ. Soit (τ, ν, b) le repère de Frenet en P. Un et un seul plan admet un contact d'ordre 2 avec la courbe en P, c'est le plan osculateur *engendré par τ et ν.*

Preuve. Soit π un plan affine passant par P. Soit u un vecteur unitaire orthogonal à P. Alors $\{u \cdot (x - P) = 0\}$ est une équation non dégénérée de π. Soit s une abscisse curviligne d'origine P. Du dévéloppement limité de Taylor-Young

$$X(s) = P + s\tau + \frac{1}{2}s^2\kappa\nu + o(s^2),$$

on tire

$$u \cdot (X(s) - P) = su \cdot \tau + \frac{1}{2}s^2\kappa u \cdot \nu + o(s^2).$$

La plan π a un contact d'ordre 1 avec la courbe si et seulement si $u \cdot \tau = 0$, i.e. si π contient la tangente. Si P est un point d'inflexion, $\kappa = 0$ et tous les plans contenant la tangente ont un contact d'ordre 2. Sinon, seul le plan tel que $u \cdot \tau = u \cdot \nu = 0$, i.e. le plan dirigé par τ et ν, a un contact d'ordre 2. ■

Remarque. Soit γ une courbe de classe C^3 et P un point de γ qui n'est pas un point d'inflexion. Alors il existe exactement un cercle qui a un contact d'ordre 2 avec γ en P, c'est le cercle de rayon $\kappa(s)^{-1}$ centré au point $X(s) + \kappa(s)^{-1}\nu(s)$.

Proposition 69 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe dans l'espace munie d'un paramètre quelconque, mais dont la vitesse ne s'annule pas. Sa courbure est donnée par la formule*

$$\kappa = \frac{\| \frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} \|}{\| \frac{dX}{dt} \|^3}.$$

Si la courbure est non nulle, le plan osculateur est dirigé par $X'(t)$ et $X''(t)$.

Preuve. On rappelle que $\frac{ds}{dt} = \| \frac{dX}{dt} \|$. On dérive

$$\frac{dX}{dt} = \| \frac{dX}{dt} \| \frac{dX}{ds}$$

en

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|)\frac{dX}{ds} + \| \frac{dX}{dt} \| \frac{d}{dt}(\frac{dX}{ds}) = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|)\frac{dX}{ds} + \| \frac{dX}{dt} \|^2 \frac{d^2X}{ds^2}$$

d'où

$$\frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} = \| \frac{dX}{dt} \|^2 \frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{ds^2} = \| \frac{dX}{dt} \|^3 \frac{dX}{ds} \wedge \frac{d^2X}{ds^2}$$

et

$$\| \frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} \| = \| \frac{dX}{dt} \|^3 \kappa.$$

En particulier, si $\kappa \neq 0$, $\frac{dX}{dt}$ et $\frac{d^2X}{dt^2}$ ne sont pas colinéaires. De plus, comme $\frac{d^2X}{dt^2}$ est une combinaison de $\frac{dX}{ds}$ et de $\frac{d^2X}{ds^2}$, il engendre avec $\frac{dX}{dt}$ le plan osculateur. ■

4.6.1 Torsion

Définition 70 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe dans $\mathbf{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne. On suppose qu'il n'y a pas de points d'inflexion. On dérive la normale unitaire. La fonction $\theta(s) = \nu'(s) \cdot b(s)$ s'appelle la* torsion *de la courbe. Les dérivées des vecteurs du repère de Frenet sont alors données par*

$$\tau' = \kappa\nu, \quad \nu' = -\kappa\tau + \theta b, \quad b' = -\theta\nu.$$

Preuve. Soit A la matrice dont les colonnes sont les composantes dans le repère de Frenet des dérivées des vecteurs du repère de Frenet. Le fait que A est antisymétrique traduit le fait que le repère de Frenet est orthonormé. Une matrice antisymétrique n'a que 3 composantes indépendantes. L'hypothèse que $\tau' = \kappa\nu$ donne 2 composantes, c'est la troisième qu'on baptise torsion. ■

Exercice 35 *La torsion d'une courbe sans point d'inflexion est nulle si et seulement si celle-ci est contenue dans un plan.*

Plus généralement, la torsion mesure le fait que la courbe ne reste pas dans un plan.

Proposition 71 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe de classe C^3 paramétrée par son abscisse curviligne, sans point d'inflexion. On a le développement limité*

$$(X(s) - X(0)) \cdot b(0) = \kappa(0)\theta(0)\frac{s^3}{6} + o(s^3).$$

Autrement dit, la torsion mesure à quelle vitesse la courbe s'éloigne de son plan osculateur.

Preuve. Comme $\kappa \neq 0$, le repère de Frenet est bien défini et on calcule

$$X''' = -\kappa^2 \tau + \frac{\partial \kappa}{\partial s}\nu + \kappa\theta b.$$

Comme $X'(0)$ et $X''(0)$ sont orthogonaux à $b(0)$, le dévéloppement de Taylor-Young de $(X(s) - X(0)) \cdot b(0)$ est celui annoncé. ∎

Exercice 36 *Une* hélice *est une courbe qui, dans un repère orthonormé, admet une paramétrisation de la forme*

$$t \mapsto (R\cos t, R\sin t, \alpha t)$$

où $R > 0$ et $\alpha \neq 0$ sont des constantes. Calculer la courbure et la torsion de cette hélice. Montrer qu'une courbe a une courbure et une torsion constante si et seulement si c'est un cercle ou une hélice.

Proposition 72 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe munie d'un paramètre quelconque, sans point d'inflexion. Sa torsion est donnée par la formule*

$$\theta = \kappa^{-2} \parallel \frac{dX}{dt} \parallel^{-6} \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^3X}{dt^3}) = \parallel \frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} \parallel^{-2} \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^3X}{dt^3}).$$

Preuve. On note s l'abscisse curviligne et X', X'' les dérivées par rapport à s. On écrit $\frac{dX}{dt} = \frac{ds}{dt}X'$,

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}X' + (\frac{ds}{dt})^2 X'' = \frac{d^2s}{dt^2}X' + (\frac{ds}{dt})^2\kappa\nu,$$

$$\frac{d^3X}{dt^3} = \frac{d^3s}{dt^3}X' + (\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt} + 2\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt})X'' + (\frac{ds}{dt})^2(\frac{d\kappa}{dt})\nu + (\frac{ds}{dt})^3\kappa\nu'.$$

Il vient

$$\frac{d^3X}{dt^3} \cdot b = (\frac{ds}{dt})^3 \kappa\nu' \cdot b = (\frac{ds}{dt})^3\kappa\theta.$$

Or

$$\frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} = (\frac{ds}{dt})^3 X' \wedge X'' = (\frac{ds}{dt})^3 \kappa\tau \wedge \nu = (\frac{ds}{dt})^3\kappa b.$$

On trouve enfin

$$(\frac{ds}{dt})^6\kappa^2\theta = \frac{d^3X}{dt^3} \cdot (\frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2}) = \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^3X}{dt^3}). \blacksquare$$

Exercice 37 *Calculer la courbure et la torsion de la courbe $t \mapsto X(t) = (t, t^2, t^3)$. Quel est le plan osculateur en $t = 0$? la normale ? la binormale ?*

4.6.2 Equation intrinsèque

Une courbe gauche est déterminée par sa courbure et sa torsion. Cependant, il n'y a pas de formule explicite pour une courbe de courbure et de torsion donnée. Cela tient au fait que le groupe $SO(3)$ des rotations de $\mathbf{R}^3$ n'est pas commutatif, alors que le groupe $SO(2)$ des rotations du plan l'est.

Théorème 15 *Soient κ_0 une fonction strictement positive, de classe C^1 et θ_0 une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Soit (P, τ_0, ν_0, b_0) un repère orthonormé direct de $\mathbf{R}^3$ orienté. Il existe une et une seule courbe X de classe C^3, paramétrée par son abscisse curviligne $s \in I$, sans points d'inflexion, telle que*

- *la courbure (resp. la torsion) de X en $X(s)$ est $\kappa_0(s)$ (resp. $\theta_0(s)$) ;*

- $X(0) = P$, $X'(0) = \tau_0$ *et* $X''(0) = \kappa_0(0)\nu_0$.

Preuve. Notons

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_0(s) & 0 \\ \kappa_0(s) & 0 & -\theta_0(s) \\ 0 & \theta_0(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Unicité. Soit $s \mapsto X(s)$ est une courbe de classe C^3 paramétrée par son abscisse curviligne, sans points d'inflexion, de courbure κ_0 et de torsion θ_0. Supposons que le repère de Frenet de X en $s = 0$ est (P, τ_0, ν_0, b_0). Notons $M(s)$ la matrice carrée 3×3 dont les colonnes sont les composantes dans le repère (P, τ_0, ν_0, b_0) des vecteurs $\tau(s)$, $\nu(s)$ et $b(s)$ du repère de Frenet de X. D'après la définition 70, la matrice M satisfait l'équation différentielle linéaire

$$M'(s) = M(s)A(s).$$

avec la condition initiale $M(0) = I_3$. Elle est donc uniquement déterminée par les fonctions κ_0 et θ_0. La relation $X'(s) = \tau(s)$ et la condition initiale $X(0) = P$ déterminent X uniquement.

Existence. L'équation différentielle $M' = MA$ admet une unique solution $s \mapsto M(s)$ définie sur I et telle que $M(0)$ soit la matrice unité I_3. Comme A est antisymétrique, $M(s)$ est orthogonale. Par continuité, son déterminant vaut 1. Notons $\tau(s)$, $\nu(s)$ et $b(s)$ les vecteurs colonnes de la matrice $M(s)$. Ils forment une base orthonormée directe pour tout s. Posons $X(s) = P + \int_0^s \tau(u)\,du$.

Montrons que la courbe X a les propriétés souhaitées. Comme A est continue, τ est de classe C^1 donc X est de classe C^2. Par construction, $X(0) = P$, $X'(s) = \tau(s)$ donc en particulier $X'(0) = \tau_0$.

$$X''(s) = \tau'(s) = M'(s)(1,0,0) = M(s)(0, \kappa_0(s), 0) = \kappa_0(s)\nu(s)$$

donc $X''(0) = \kappa_0(0)\nu_0$. Comme $\nu(s) \cdot \tau(s) = 0$, $X''(s) \cdot X'(s) = 0$ donc $\| X'(s) \|$ est constant, il vaut $\| \tau_0 \| = 1$. Par conséquent, le paramètre s est bien l'abscisse curviligne. La courbure de X est $\| X''(s) \| = \kappa_0(s)$. Comme la fonction κ_0 ne s'annule pas, le vecteur unitaire normal est $\nu(s)$. Comme la fonction κ_0 est supposée de classe C^1, $X'' = \kappa_0 \nu$ est de classe C^1 donc X est de classe C^3. La dérivée

$$\nu'(s) = M'(s)(0,1,0) = M(s)(-\kappa_0(s), 0, \theta_0(s)) = -\kappa_0(s)\tau(s) + \theta_0(s)b(s)$$

montre que la torsion vaut $\theta_0(s)$. ■

4.7 Condition de raccord

Théorème 16 *Soient γ_1 et γ_2 deux courbes de classe C^3 d'origine P dans $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$). Mettons ces deux courbes bout à bout de façon compatible avec les orientations.*

1. *Cas des courbes planes.*
   - *La courbe γ obtenue est de classe G^1 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente.*
   - *γ est de classe G^2 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente et même courbure.*
   - *γ est de classe G^3 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente, même courbure, et même dérivée de courbure.*
2. *Cas des courbes gauches (i.e. dans $\mathbf{R}^3$).*
   - *La courbe γ obtenue est de classe G^1 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente.*

- *γ est de classe G^2 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente, même courbure et même normale orientée.*
- *Supposons que P n'est pas un point d'inflexion de γ_1 et de γ_2. La courbe γ est de classe G^3 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente, même courbure, même normale orientée, même dérivée de courbure et même torsion.*

Preuve. Les conditions énoncées sont évidemment nécessaires, puisque les grandeurs évoquées ne dépendent pas d'un choix de paramétrisation et ne dépendent que des dérivées d'une paramétrisation jusqu'à l'ordre 2 (resp. 3).

Inversement, supposons que les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente et même courbure et même normale orientée. Introduisons la paramétrisation $s \mapsto X(s)$ de γ par l'abscisse curviligne d'origine P. Alors $X'(s)$ est bien définie pour $s \neq 0$ et se prolonge par continuïté en 0. Cela suffit pour montrer que X est de classe C^1. La dérivée $X''(s) = \kappa(s)\nu(s)$ se prolonge aussi par continuïté, donc X' est de classe C^1 et X est de classe C^2.

Supposons de plus que la dérivée de la courbure par rapport à l'abscisse curviligne et la torsion au point P sont les mêmes pour γ_1 et γ_2. Alors la dérivée troisième

$$X'''(s) = -\kappa(s)^2\tau(s) + \frac{\partial\kappa}{\partial s}\nu(s) + \kappa(s)\theta(s)\tau(s) \wedge \nu(s)$$

se prolonge par continuité, donc X'' est de classe C^1 et X est de classe C^3. ■

Chapter 5

Courbure des surfaces

5.1 Motivation

Cette fois, il s'agit de donner des conditions de raccord G^k pour des surfaces. De nouveau, on commence par attacher à une surface des invariants indépendants d'une paramétrisation : le plan tangent et la seconde forme fondamentale.

La section 5.2 donne la formule pour le calcul de l'aire d'une surface. La seconde forme fondamentale est introduite en section 5.3. Elle joue pour une surface le rôle que joue la courbure pour une courbe : elle contient l'information au 2ème ordre, indépendamment de tout choix de paramétrisation. C'est un objet plus complexe, une forme quadratique sur le plan tangent. On peut y penser comme à une fonction sur les directions (la courbure des sections par des plans perpendiculaires au plan tangent). Comme elle est quadratique, elle est en fait déterminée par un repère orthonormé du plan tangent (les directions principales) et deux nombres, les courbures principales (ou alternativement par la courbure moyenne et la courbure de Gauss).

La courbure de Gauss et la courbure moyenne ont chacune une interprétation géométrique. La courbure de Gauss donne l'aire de l'image de la surface par l'application de Gauss (section 5.4), tandis que la courbure moyenne intervient dans l'aire des surfaces équidistantes (section 5.5). La positivité de la courbure de Gauss traduit la convexité. L'annulation de la courbure moyenne caractérise les surfaces minimales, qui modélisent les films de savon. A la différence de la courbure moyenne, la courbure de Gauss est invariante par déformation isométrique : c'est un invariant intrinsèque de la surface. Borner la courbure d'une surface, c'est simplement borner les courbures principales. Cela joue un rôle dans la construction des congés par roulement d'une bille dans la gouttière formée par deux surfaces.

Les conditions de raccord G^1 et G^2 sont enfin obtenues en section 5.6.

5.2 Première forme fondamentale

Soit X une surface dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. Le plan tangent hérite de la structure euclidienne de l'espace ambiant. Etant donnée une paramétrisation locale $(u,v) \mapsto X(u,v)$, si

$$w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}$$

est un vecteur tangent, sa norme euclidienne est

$$\| w \|^2 = a^2 \| \frac{\partial X}{\partial u} \|^2 + 2ab\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + b^2 \| \frac{\partial X}{\partial v} \|^2 .$$

Si $t \mapsto c(t) = (u(t), v(t))$ est une courbe tracée dans le domaine des paramètres, la longueur de la courbe correspondante $\mapsto X(u(t), v(t))$ tracée sur la surface vaut

$$\text{long}\,(X \circ c) = \int \sqrt{u'(t)^2 \parallel \frac{\partial X}{\partial u} \parallel^2 + 2u'(t)v'(t)\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + v'(t)^2 \parallel \frac{\partial X}{\partial v} \parallel^2}\, dt.$$

La forme quadratique (dépendant du point (u, v))

$$ds^2 = \parallel \frac{\partial X}{\partial u} \parallel^2 du^2 + 2\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v}\, dudv + \parallel \frac{\partial X}{\partial v} \parallel^2 dv^2$$

s'appelle parfois la *première forme fondamentale* de la surface X.

On note traditionnellement $E = \parallel \frac{\partial X}{\partial u} \parallel^2$, $G = \parallel \frac{\partial X}{\partial v} \parallel^2$, $F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v}$.

Elle sert non seulement au calcul des longueurs de courbes, mais aussi à celui des aires.

Définition 73 *L'*aire (`area`) *d'une surface* $(u, v) \mapsto X(u, v)$ $(u, v) \in U$*, est donnée par l'intégrale*

$$\text{Aire}(X) = \int_U \parallel \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \parallel\, du\, dv.$$

L'aire ne dépend pas du choix de paramétrisation. Cela résulte de la formule de changement de variable dans les intégrales doubles. Remarquer que l'intégrand vaut

$$\parallel \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \parallel = \sqrt{EG - F^2}.$$

Exercice 38 *On paramètre la sphère unité par la latitude θ et la longitude ϕ. Ecrire cette paramétrisation. La normale orientée sort elle ou rentre-t-elle dans la sphère ? Ecrire la première forme fondamentale. Calculer la longueur d'un parallèle. Calculer l'aire de la sphère unité.*

Exercice 39 *Si P et Q sont deux points de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$, on définit leur distance $d(P, Q)$ comme la borne inférieure des longueurs des courbes tracées sur la sphère qui relient P à Q. Montrer que $d(P, Q) = \mathrm{Arccos}(P \cdot Q)$, i.e. que la borne inférieure est atteinte par un des arcs du grand cercle passant par P et Q.*

Exercice 40 *Calculer l'aire d'une surface de révolution générale, puis dans le cas particulier du tore de révolution dont la méridienne est un cercle de rayon r_2 dont le centre est situé à distance $r_1 > r_2$ de l'axe.*

Noter que le vecteur $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$ est orthogonal au plan tangent, et non nul par hypothèse. Il détermine donc une orientation normale du plan tangent. C'est l'*orientation déterminée par la paramétrisation* $(u, v) \mapsto X(u, v)$. Le *vecteur unitaire normal orienté* à X est

$$\Gamma(X(u, v)) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\parallel \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \parallel}.$$

5.3 Seconde forme fondamentale

La courbure d'une courbe plane en un point P est un nombre indépendant d'un choix de paramétrisation. On la définit à partir d'une paramétrisation canonique, l'abscisse curviligne. Voici une autre définition possible, reposant sur un autre choix de paramétrisation canonique. Soit $\tau(P)$ le vecteur tangent unitaire et $\nu(P)$ le vecteur normal unitaire. Dans le repère $(P, \tau(P), \nu(P))$, la courbe est un graphe $t \mapsto (t, f(t))$, où $f(0) = f'(0) = 0$. Alors f admet le développement limité à l'ordre 2

$$f(t) = \frac{1}{2}\kappa(P)t^2 + o(t^2)$$

en 0 (exercice du chapitre sur les courbes) et on pourrait partir de ce développement limité pour définir la courbure en P. La même idée va nous guider pour définir la courbure d'une surface.

5.3.1 Courbure d'un graphe

Soit f une fonction sur $\mathbf{R}^2$ qui s'annule avec ses 2 dérivées partielles en $(0,0)$. Considérons son graphe $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$. C'est une surface dont le plan tangent en $P=(0,0,0)$ est le plan des coordonnées x et y. f admet un développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la forme

$$f(x,y) = px^2 + 2qxy + ry^2 + o(x^2+y^2).$$

La forme quadratique $2(px^2+2qxy+ry^2)$ sur le plan tangent va tenir lieu de courbure du graphe au point P. La courbure d'une surface n'est pas seulement un nombre, mais une forme quadratique (3 composantes indépendantes).

5.3.2 Paramétrisation d'une surface par son plan tangent

Soit X une surface normalement orientée. Alors (voir la preuve du théorème 2) X est le graphe d'une fonction définie sur son plan tangent en P. Plus précisément, il existe une unique fonction f sur T_PX telle que l'application

$$T_PX \to \mathbf{R}^3, \quad v \mapsto P + v + f(v)\Gamma(P)$$

soit une paramétrisation locale de X.

Définition 74 *La partie principale q du développement limité à l'ordre 2 de f en 0 est une forme quadratique sur T_PX, définie indépendamment de tout choix de paramétrage de X. On appelle $II = 2q$ la* seconde forme fondamentale de X en P.

Remarque. Changer l'orientation normale de la surface change le signe de la seconde forme fondamentale.

Exercice 41 *Calculer la seconde forme fondamentale de la sphère unité au pôle nord.*

Exercice 42 *Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe tracée dans le plan horizontal $\{z=0\}$ de $\mathbf{R}^3$. Soit C le cylindre droit sur c, i.e. la réunion des droite verticales coupant la courbe c. Calculer la seconde forme fondamentale du cylindre C en l'un de ses points.*

5.3.3 Courbures principales, directions principales, sections normales

Définition 75 *Il existe un unique endomorphisme symétrique S du plan tangent T_PX tel que pour tout $v \in T_PX$, $II(v) = v \cdot S(v)$. Les valeurs propres k_1, k_2 de S s'appellent les* courbures principales *de X en P et les droites propres de S s'appellent les* directions principales. *Une courbe tracée sur X dont la vitesse est en chaque point une direction principale s'appelle une* ligne de courbure. *La trace de S s'appelle la* courbure moyenne `(mean curvature)` *et le déterminant de S la* courbure de Gauss `(Gauss curvature)`.

Soit (e_1,e_2) une base orthonormée formée de vecteurs propres de S (i.e. de directions principales). Dans cette base, la forme quadratique II_P s'écrit

$$II(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1^2k_1 + a_2^2k_2$$

où k_1 et k_2 sont les courbures principales. Alors

- II est non dégénérée si et seulement si les deux courbures principales sont non nulles ;
- II est définie positive si et seulement si $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$;
- II possède 2 droites isotropes si et seulement si $k_1k_2 < 0$;

L'intersection du plan (orienté) passant par P et dirigé par τ et ν est une courbe, et sa courbure en P vaut par définition $II(\tau)$. Si $\tau(\theta)$ fait un angle θ avec e_1, alors

$$II(\tau(\theta)) = k_1^2 \cos(\theta)^2 + k_2^2 \sin(\theta)^2.$$

Par conséquent, les courbures principales sont les valeurs extrèmes de la courbure des sections planes, elles sont atteintes par les directions principales.

La courbure moyenne s'écrit $h = \mathrm{tr}(S) = k_1 + k_2$, la courbure de Gauss $K = \det(S) = k_1 k_2$. On en donnera plus loin des interprétations géométriques.

5.3.4 Intersection avec le plan tangent

Soit P un point de la surface X. Soit ν le vecteur unitaire normal orienté en P.

Si II_P est définie positive (resp. définie négative), il résulte du développement limité que la fonction f garde un signe constant au voisinage de P, et ne s'annule qu'en P.

Le lieu des zéros (vecteurs isotropes) de la forme quadratique II_P dans le plan tangent donne une idée de l'intersection de la surface X avec son plan tangent. En effet, si II_P est non dégénérée, le lemme de Morse (voir [MM]) garantit qu'il existe un difféomorphisme local du plan tangent, fixant l'origine et dont la différentielle à l'origine est l'identité, envoyant l'intersection $T_P X \cap X$ sur le cône isotrope de II_P.

Proposition 76
- *si II_P est définie positive (resp. définie négative), la surface X est entièrement au-dessus (resp. au-dessous) de son plan tangent au voisinage de P ;*
- *si II_P change de signe, alors $T_P X \cap X$ coïncide au voisinage de P avec la réunion de deux courbes transverses en P, et chacune est tangente à une* direction asymptotique *de II_P, i.e. une droite isotrope.*

Par conséquent, si la courbure de Gauss est strictement positive, la surface reste d'un seul côté de son plan tangent. Si au contraire la courbure de Gauss est strictement négative, la surface traverse son plan tangent.

En particulier, si X est le bord d'un convexe, alors la courbure de Gauss de X est positive ou nulle. Sa seconde forme fondamentale relative à la normale sortante est en chaque point une forme quadratique négative ou nulle.

5.3.5 Courbes tracées sur une surface

Lemme 77 *Soit $t \mapsto Y(t)$ une courbe tracée sur la surface X. Soit $P = Y(0) \in X$, $\tau = Y'(0) \in T_P X$. Alors $II_P(\tau)$ est la composante normale à X de l'accélération $Y''(0)$.*

Preuve. Notons $c(t)$ la projection orthogonale de $Y(t) - P$ sur le plan vectoriel $T_P X$. Ecrivons X comme le graphe d'une fonction f définie sur son plan tangent. Alors pour tout t proche de 0,

$$Y(t) = P + c(t) + f(c(t)\nu = P + t\tau + \frac{t^2}{2} Y''(0) + o(t^2)$$

mais aussi

$$Y(t) = P + t\tau + \frac{t^2}{2}(c''(0) + II(\tau)\nu) + o(t^2)$$

donc $II_P(\tau)$ est la composante normale à X de l'accélération. ■

Exercice 43 *Supposons que la surface X contient la droite D. Montrer que D est une direction asymptotique de X*

5.3.6 Calcul des courbures principales

Proposition 78 *Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une surface paramétrée. La seconde forme fondamentale au point $X(u,v)$ est la forme quadratique sur le plan tangent (engendré par $\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$) peut se calculer comme suit.*

$$II_{X(u,v)}(a\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)+b\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)) = a^2A+2abB+b^2C$$

où

$$\begin{aligned} A &= \| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \|^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u,v), \frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)),\\ B &= \| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \|^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(u,v), \frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)),\\ C &= \| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \|^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u,v), \frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)). \end{aligned}$$

Preuve. On considère la courbe $t \mapsto Y(t) = X(u+at, v+bt)$ tracée sur la surface. Ses dérivées sont

$$Y'(t) = a\frac{\partial X}{\partial u}(u+at, v+bt) + v\frac{\partial X}{\partial v}(u+at, v+bt)$$

et

$$Y''(0) = a_2\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u,v) + 2ab\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(u,v) + b^2\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u,v).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} II_{X(u,v)}(a\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)+b\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)) &= II(Y'(0))\\ &= Y''(0)\cdot \nu\\ &= \| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \|^{-1} \det(Y''(0), \frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial X}{\partial v}(u,v))\\ &= a_2A+2abB+b^2C. \end{aligned}$$

Exercice 44 *Soit X le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$. Calculer sa seconde forme fondamentale, ses courbures principales. Quelles sont les directions asymptotiques ? On utilisera deux systèmes de coordonnées différents, $(u,v) \mapsto X(u,v) = (u,v,uv)$ et $(u',v') \mapsto X_1(u',v') = (u'/v', v', u')$ et on comparera les résultats obtenus.*

Exercice 45 *Soit c une courbe tracée dans le plan $\{z=0\}$. Soit $V = (0,0,1)$, soit X le cône de sommet V et de base c. Calculer sa seconde forme fondamentale. Quelle est sa signature ?*

Exercice 46 *Soit c une courbe tracée sur la sphère unité. Soit X le cône de sommet l'origine et de base c. Calculer sa seconde forme fondamentale.*

Corollaire 79 *Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une surface paramétrée, munie de l'orientation normale déterminée par la paramétrisation. Notons*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \quad et \quad A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2$$

la première et la seconde forme fondamentales. La matrice dans la base $(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v})$ de l'endomorphisme symétrique S qui relie les deux formes quadratiques est le produit

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

(elle n'est pas nécessairement symétrique). Les courbures principales sont les valeurs propres de cette matrice et les directions principales ses droites propres. En particulier, la courbure de Gauss est donnée par la formule

$$K(X(u,v)) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

Preuve. Soient $w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}$ et $w = a'\frac{\partial X}{\partial u} + b'\frac{\partial X}{\partial v}$ deux vecteurs tangents à X au point $X(u,v)$. Leur produit scalaire s'écrit au moyen de la première forme fondamentale,

$$w' \cdot w = \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme symétrique S est défini par la relation

$$II_{X(u,v)}(w', w) = w' \cdot S(w).$$

Sa matrice M satisfait donc

$$\begin{aligned} w' \cdot S(w) &= \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres d'un endomorphisme se calculent à partir de sa matrice dans n'importe quelle base, les courbures principales sont les valeurs propres de M.

Enfin

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \det(M) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

donc

$$K = \det(S) = \det(M) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}. \blacksquare$$

Exercice 47 *Soit X la surface de révolution décrite par une courbe plane située dans un plan vertical (la* méridienne*) qu'on fait tourner autour de l'axe des z. Paramétrer X, calculer les courbures principales et les directions principales. Traiter le cas particulier du tore de révolution de méridienne circulaire.*

Exercice 48 *Soit c une courbe gauche sans point d'inflexion. Dans le plan affine passant par $c(t)$ et orthogonal à la tangente à c, on trace un cercle de rayon ϵ. Soit X la surface de décrite par ce cercle. En utilisant le repère de Frenet de c, paramétrer X, calculer l'aire, l'intégrale par rapport à l'élément d'aire de la courbure de Gauss ainsi que de sa valeur absolue, les courbures principales et les directions principales.*

5.3.7 Contact d'ordre 2

Soit X une surface. Parmi tous les plans affines passant par P, le plan $\pi = P + T_P X$ est le seul qui approche le la surface au sens suivant : il existe un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(P) = P$, $d_P\phi$ est l'identité et $X = \phi(\pi)$ au voisinage de P. Ce difféomorphisme est construit dans la preuve du théorème 2.

Cela a pour conséquence le fait que le plan π épouse la surface : si $M \in X$ est voisin de P, il existe $M' \in \pi$ tel que

$$\| M - M' \| \leq \epsilon(\| M - P \|)$$

où la fonction ϵ satisfait $\lim_{x\to 0} x^{-1}\epsilon(x) = 0$. En effet, comme $d_P(\phi^{-1}) = id$, pour $M \in X$ voisin de P,

$$\phi^1(M) = P + (M - P) + o(\| M - P \|)$$

donc $M' = \phi^1(M) \in \pi$ et $\| M - M' \| = o(\| M - P \|)$.

L'exemple du plan tangent suggère une notion de contact plus générale.

Définition 80 *Deux surfaces X_1 et X_2 ont un* contact d'ordre k *au point P s'il existe un difféomorphisme local ϕ envoyant X_1 and X_2 et admettant en P un développement limité de la forme*

$$\phi(M) = P + o(\| M - P \|^k).$$

Exemple. Deux surfaces ont un contact d'ordre 1 en P si et seulement si elles contiennent P et ont même plan tangent en P.

En effet, la condition de contact à l'ordre 0 est que $P \in X_1 \cap X_2$. S'il y a contact à l'ordre 1, le difféomorphisme ϕ a une différentielle en P égale à l'identité, donc $T_P X_2 = d_P\phi(T_P X_1) = T_P X_1$. Inversement, si les surfaces X_1 et X_2 ont même plan tangent en P, elles ont chacune un contact d'ordre un avec le même plan affine, donc elles ont un contact d'ordre 1 entre elles.

Proposition 81 *Deux surfaces X_1 et X_2 ont un contact d'ordre 2 au point P si et seulement si elles contiennent P, y ont même plan tangent et même seconde forme fondamentale.*

Preuve. Composer une paramétrisation d'une surface avec un difféomorphisme tangent à l'ordre 2 à l'identité en P ne change pas les dérivées secondes en P, donc ne change pas la seconde forme fondamentale, proposition 78.

Inversement, supposons que X_1 et X_2 ont même plan tangent et même seconde forme fondamentale en P. Choisissons des coordonnées cartésiennes d'origine P et telles que le plan tangent commun en P ait pour équation $\{z = 0\}$. Ecrivons X_1 et X_2 comme des graphes au-dessus de leur plan tangent commun, i.e. utilisons les paramétrisations

$$(u, v) \mapsto X_1(w) = (u, v, f_1(u, v)) \quad \text{et} \quad (u, v) \mapsto X_2(w) = (u, v, f_2(u, v)).$$

pour X_1 et X_2. Posons

$$\phi(x, y, z) = (x, y, z + f_2(x, y) - f_1(x, y)).$$

Alors ϕ est un difféomorphisme local de $\mathbf{R}^3$ qui fixe P et dont la différentielle en P est l'identité. Il envoie X_1 sur X_2. L'égalité des secondes formes fondamentales entraîne que le développement limité à l'ordre 2 de $f_2 - f_1$ est de la forme

$$(f_2 - f_1)(x, y) = o(x^2 + y^2)$$

donc celui de ϕ est de la forme

$$\phi(x, y, z) = (x, y, z) + o(x^2 + y^2 + z^2).$$

i.e.

$$\phi(M) = P + (M - P) + o(\| M - P \|^2).$$

donc il y a contact à l'ordre 2. ∎

Exercice 49 *Montrer qu'une surface a en un point P un contact d'ordre 2 avec un plan si et seulement si la seconde forme fondamentale II_P est nulle. Montrer qu'une surface a en un point P un contact d'ordre 2 avec une sphère si et seulement si en P les courbures principales sont égales et non nulles.*

5.4 L'application de Gauss

Définition 82 *Soit X une surface normalement orientée dans $\mathbf{R}^3$. L'application de X dans la sphère unité S^2 qui à un point P associe le vecteur unitaire normal orienté $\Gamma(P)$ s'appelle l'*application de Gauss `(Gauss map)`.

Remarque. Si X est une surface normalement orientée de classe C^k, l'application de Gauss est de classe C^{k-1}.

5.4.1 Dérivée de l'application de Gauss

Lemme 83 *Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe tracée sur une surface X, telle que $c(0) = P$ et $c'(0) = \tau$. Soit $\Gamma : X \to S^2$ l'application de Gauss. Alors pour tout vecteur tangent $w \in T_P X$,*

$$(\frac{d}{dt}\Gamma(c(t))) \cdot w = -II(\tau, w)$$

où on a encore noté II la forme bilinéaire symétrique associée à II. En particulier,

$$\frac{d}{dt}\Gamma(c(t)) \cdot \tau = -II(\tau).$$

Preuve. Prolongeons la paramétrisation $t \mapsto c(t)$ en une paramétrisation locale $(t, u) \mapsto X(t, u)$ de X telle que $\frac{\partial X}{\partial u} = w$ (c'est toujours possible). Notons $\Gamma(t, u) = \Gamma(X(t, u))$. Comme pour tout t, $\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \Gamma(t, u) = 0$, il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = 0$$

i.e.

$$(\frac{d}{dt}\Gamma(c(t))) \cdot w = -G \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = -II(\tau, \frac{\partial X}{\partial u}) = -II(\tau, w)$$

d'après la proposition 78. ∎

Corollaire 84 *La seconde forme fondamentale est la dérivée de l'application de Gauss. Plus précisément, notons S l'endomorphisme symétrique de l'espace tangent $T_P X$ tel que pour tout vecteur tangent w $II_P(w) = S(w) \cdot w$. Alors l'espace tangent $T_{\Gamma(P)} S^2 = \Gamma(P)^{\perp} = T_P X$ et $S = -d\Gamma$.*

Théorème 17 *L'intégrale de la courbure de Gauss par rapport à l'élément d'aire est l'aire de l'image de l'application de Gauss. En particulier, pour une surface compacte et sans bord, l'intégrale de la courbure de Gauss est un multiple entier de l'aire de la sphère unité,*

$$\int_X K \, dA = 4\pi\delta.$$

Le nombre δ (au signe près) est la moitié de la caractéristique d'Euler de X, et ne dépend que de la topologie de X.

Preuve.
Voir [S], Volume III, Chapter 6, Theorem 10, page 428. ∎

Exercice 50 *Soit X une surface et π un plan de $\mathbf{R}^3$. Le* contour apparent dans X *est l'ensemble des points de X où la projection orthogonale sur π n'est pas une submersion. Montrer que le contour apparent dans X est une courbe lisse, sauf peut-être aux points où la courbure de Gauss s'annule. Le* contour apparent dans π *est la projection dans π du contour apparent dans X. Montrer que le contour apparent dans π est lisse sauf peut-être aux points où la normale à π est une direction asymptotique de X.*

5.4.2 Déformations isométriques

Définition 85 *Deux surfaces X_1 et X_2 sont dites* isométriques *s'il existe un difféomorphisme de l'une sur l'autre qui préserve la longueur des courbes. Autrement dit, qui préserve la première forme fondamentale.*

Exemple. Un cône, un cylindre et un plan sont localement isométriques. En effet, si C est le cylindre vertical de section une courbe plane horizontale c paramétrée par son abscisse curviligne, l'application

$$\mathbf{R}^2 \to C, \quad (u,v) \mapsto X(u,v) = (c(u),v)$$

est isométrique, car la première forme fondamentale dans cette paramétrisation se lit $du^2 + dv^2$.

Pour la même raison, si K est le cône de sommet l'origine s'appuyant sur une courbe c tracée sur la sphère unité et paramétrée par son abscisse curviligne, l'application

$$\mathbf{R}^2 \to K, \quad (s,r) \mapsto r\, c(s)$$

est isométrique.

Définition 86 *Soit X une surface, soient P et Q deux points de X. La* distance intrinsèque *entre P et Q est la borne inférieure des longueurs des courbes tracées sur X reliant P à Q.*

Exemple. Si X est la sphère unité, la distance intrinsèque est donnée par la formule

$$dist(P,Q) = \mathrm{Arccos}(P \cdot Q).$$

Voir exercice 39.

Théorème 18 *Soit X une surface, P un point de X. Pour $r > 0$, notons C_r le lieu des points de X dont la distance intrinsèque à P est exactement égale à r. Alors, pour r assez petit, C_r est une courbe. On a le développement limité*

$$\mathrm{long}\,(C_r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3} K(P) r^3 + o(r^3)$$

où $K(P)$ est la courbure de Gauss en P.

Preuve. Voir [S], Volume III, chapter 2. ■

Corollaire 87 *Un difféomorphisme isométrique entre deux surfaces préserve la courbure de Gauss.*

Exemple. La sphère n'est pas localement isométrique à un plan. On peut montrer que deux surfaces de même courbure constante sont toujours localement isométriques.

Géométrie riemannienne. On peut en fait donner une formule pour la courbure de Gauss en fonction de la première forme fondamentale seule, c'est le Theorema Egregium de Gauss. Plus généralement, l'étude des propriétés *intrinsèques* d'une surface munie d'une première forme fondamentale s'appelle la *géométrie riemannienne*, voir par exemple [GHL].

5.5 Surfaces équidistantes

Définition 88 *Soit X une surface normalement orientée. La* surface équidistante `(offset surface)` *X_ϵ est le lieu des points de la forme $P + \epsilon\Gamma(P)$ où $\Gamma(P)$ est le vecteur normal unitaire orienté en P.*

Lemme 89 *Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale d'une surface. Posons*

$$(u,v) \mapsto X_\epsilon(u,v) = X(u,v) + \epsilon\Gamma(X(u,v))$$

C'est une paramétrisation locale de la surface équidistante X_ϵ tant que le produit de ϵ et des courbures principales de X reste inférieur à 1.

Soit S l'endomorphisme qui relie la seconde forme fondamentale de X à la première. Soit M sa matrice dans la base $(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v})$. Alors la première forme fondamentale de X_ϵ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} E_\epsilon & F_\epsilon \\ F_\epsilon & G_\epsilon \end{pmatrix} = (1-\epsilon M)^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (1-\epsilon M).$$

La seconde forme fondamentale de X_ϵ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} A_\epsilon & B_\epsilon \\ B_\epsilon & C_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1-\epsilon M).$$

En particulier, pour ϵ petit,

$$\mathrm{Aire}(X_\epsilon) = \mathrm{Aire}(X) - \epsilon \int_X h\, dA + \epsilon^2 \int_X K\, dA$$

où h est la courbure moyenne et K la courbure de Gauss de X. La courbure de Gauss de X_ϵ vaut

$$K_\epsilon(P+\epsilon\Gamma(P)) = \frac{K(P)}{1-\epsilon h(P) + \epsilon^2 K(P)}.$$

Preuve. Soit $w = a\dfrac{\partial X}{\partial u} + b\dfrac{\partial X}{\partial v}$ un vecteur tangent à X en P. Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe tracée sur X telle que $c(0) = P$ et $c'(0) = w$. La courbe

$$t \mapsto c_\epsilon(t) = c(t) + \epsilon\Gamma(c(t))$$

est tracée sur X_ϵ. Sa vitesse en $t = 0$ vaut

$$w_\epsilon = c'(0) + \epsilon d_P\Gamma(c'(0)) = w - \epsilon S(w)$$

d'après le corollaire 84. C'est un vecteur de T_PX. On conclut que les plans tangents T_PX et $T_{P+\epsilon\Gamma(P)}X_\epsilon$ coïncident, et que les normales sont égales,

$$\Gamma_\epsilon(P+\epsilon\Gamma(P)) = \Gamma(P).$$

Soient k_1 et k_2 les courbures principales de X en P. Alors les valeurs propres de l'endomorphisme $id - \epsilon S$ de T_PX sont $1-\epsilon k_1$ et $1-\epsilon k_2$. Si $\epsilon k_1 < 1$ et $\epsilon k_2 < 1$, alors $id - \epsilon S$ est inversible donc

$$\frac{\partial X_\epsilon}{\partial u} = (id-\epsilon S)\frac{\partial X}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial X_\epsilon}{\partial v} = (id-\epsilon S)\frac{\partial X}{\partial v}$$

sont linéairement indépendants, X_ϵ est une surface au voisinage de $P+\epsilon\Gamma(P)$.

Par définition,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\epsilon & F_\epsilon \\ F_\epsilon & G_\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ = \ & \| \frac{d}{dt}(c(t) + \epsilon\Gamma(c(t))) \|^2 \\ = \ & \| (1-\epsilon S)(w) \|^2 \\ = \ & ((1-\epsilon M) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1-\epsilon M) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ = \ & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} (1-\epsilon M)^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1-\epsilon M) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{pmatrix} E_\epsilon & F_\epsilon \\ F_\epsilon & G_\epsilon \end{pmatrix} = (1-\epsilon M)^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1-\epsilon M).$$

De même, d'après le lemme 83,

$$\begin{aligned} II_\epsilon(w_\epsilon) &= -\frac{d}{dt}\Gamma_\epsilon(c_\epsilon(t)) \cdot w_\epsilon \\ &= -\frac{d}{dt}\Gamma(c(t)) \cdot w_\epsilon \\ &= II(w, w_\epsilon). \end{aligned}$$

Matriciellement, cela s'écrit

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\epsilon & B_\epsilon \\ B_\epsilon & C_\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ = \ & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix})^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1-\epsilon M) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} A_\epsilon & B_\epsilon \\ B_\epsilon & C_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1-\epsilon M).$$

La densité par rapport à $du\,dv$ de l'élément d'aire sur X_ϵ est

$$\begin{aligned} \sqrt{E_\epsilon G_\epsilon - F_\epsilon^2} &= \sqrt{EG-F^2}\,\det(1-\epsilon M) \\ &= \sqrt{EG-F^2}(1-\epsilon k_1)(1-\epsilon k_2) \\ &= \sqrt{EG-F^2}(1-\epsilon h + \epsilon^2 K) \end{aligned}$$

où h est la courbure moyenne de X et K la courbure de Gauss de X en P. La formule pour l'aire de X_ϵ en résulte immédiatement. Celle pour la courbure de Gauss résulte du corollaire 79,

$$\begin{aligned} K_\epsilon(X_\epsilon(u,v)) &= \frac{A_\epsilon C_\epsilon - B_\epsilon^2}{E_\epsilon G_\epsilon - F_\epsilon^2} \\ &= \frac{(AC-B^2)\det(1-\epsilon M)}{(EG-F^2)\det(1-\epsilon M)\det((1-\epsilon M)^T)} \\ &= \frac{K(X(u,v))}{\det(1-\epsilon M)} \\ &= \frac{K(X(u,v))}{1-\epsilon h(X(u,v)) + \epsilon^2 K(X(u,v))}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

5.5.1 Rayon d'injectivité normal

Comme pour une courbe dans le plan, à une surface normalement orientée X de $\mathbf{R}^3$ est associée l'application *exponentielle normale*

$$X \times]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbf{R}^3, \quad (P,t) \mapsto P + t\Gamma(P).$$

C'est un difféomorphisme pour $\epsilon > 0$ assez petit (même argument que pour les courbes planes). Le plus grand $\epsilon > 0$ tel que l'exponentielle normale soit un difféomorphisme s'appelle le *rayon d'injectivité normal* de X.

Exemple. Soit c une courbe contenue dans un plan affine π et X le tube de rayon $\epsilon > 0$ autour de c (voir exercice 48). Soit i le rayon d'injectivité normal de la courbe plane c. Alors le rayon d'injectivité normal de X est $\min\{\epsilon, i-\epsilon\}$.

Soit X une surface fermée de classe C^k. Si i est le rayon d'injectivité normal de X, alors sur l'ensemble U des points de $\mathbf{R}^3$ situés à distance de X inférieure à i, la projection sur X est bien définie et de classe C^{k-1}. De même, la distance algébrique à X est de classe C^{k-1}. Si $0 < \epsilon < i$, le lieu des points situés à distance exactement ϵ de X est la réunion des deux surfaces équidistantes X_ϵ et $X_{-\epsilon}$. En particulier, on peut faire glisser une sphère de rayon ϵ sur la surface X, d'un côté ou de l'autre, sans jamais rencontrer d'obstacle.

5.5.2 Congés

Théorème 19 *Soient X_1, X_2 et X_3 trois surfaces de classe C^2 se coupant en un point P. On suppose que les normales en P sont linéairement indépendantes, i.e. que $\alpha = \det(\Gamma_1(P), \Gamma_2(P), \Gamma_3(P)) > 0$. Soit M un majorant des courbures principales des trois surfaces en tous leurs points. On suppose que les trois surfaces sont contenues dans une boule de centre P et de rayon $L < \alpha/2M$. Soit $\epsilon < \alpha L/8$. Alors sur la boule $B(P, L/8)$, la distance algébrique δ_i à X_i est bien définie, et l'application de composantes $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ est un difféomorphisme d'un voisinage de P sur $]-\epsilon, \epsilon[^3$. En particulier, le lieu des centres des sphères de rayon ϵ tangentes à X_1 et à X_2 est formé de 8 courbes qui s'arrêtent aux centres des 8 sphères tangentes simultanément aux 3 surfaces.*

Preuve. C'est le même argument que pour les courbes. Le seul point nouveau est que si un point Q de X_1 est proche de P, alors il existe une courbe tracée sur X_1, reliant P à Q, de longueur approximativement $\| P - Q \|$. On utilise une section plane. ∎

Soient X_1 et X_2 deux surfaces normalement orientées de classe C^2 qui se coupent transversalement. Leur intersection est une courbe γ (ayant éventuellement plusieurs composantes connexes). On note X_1^+ la réunion des composantes connexes du lieu des points dont la distance algébrique à X_2 est ≥ 0 qui rencontrent γ. On définit X_2^+ de la même façon.

Un *congé* (`fillet`) est une surface X de classe G^1 qui coïncide avec $(X_1 \setminus X_1^+) \cup (X_2 \setminus X_2^+)$ en dehors d'un voisinage de γ.

Une méthode classique pour construire un congé consiste à considérer la famille des sphères de rayon $\epsilon < L/8$, borne donnée dans le théorème 19. Leur *enveloppe* est une surface tangente à X_1 (resp. à X_2) le long d'une courbe, la *cicatrice*. Cette enveloppe, lieu des points situés à distance ϵ de la courbe des centres, est un *tube* (`canal surface`), voir l'exercice 48. Elle est réunion de cercles de rayon ϵ, et sa normale est le rayon du cercle. Par conséquent, le long de la cicatrice, le plan tangent du tube coïncide avec celui de la surface donnée, et le raccord est de classe G^1. Il n'est pas G^2 en général.

Une méthode plus générale consiste à faire rouler dans la gouttière entre deux surfaces une bille de rayon variable. Le congé est alors l'enveloppe d'une famille de sphères de rayon variable. C'est à nouveau la réunion de cercles situés dans des plans orthogonaux à la courbe des centres.

5.6 Conditions de raccord

On se donne une courbe γ dans $\mathbf{R}^3$ et deux surfaces orientées X_1 et X_2 de classe C^2, de même bord γ. On suppose que $X_1 \cap X_2 = \gamma$. On note X l'ensemble obtenu en recollant X_1 et X_2 le long de γ. On va donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que X soit une surface de classe G^1 (resp. G^2). A l'ordre un, il faut la coïncidence des espaces tangents le long de γ (autrement dit, annuler une fonction). A l'ordre 2, il faut la coïncidence des secondes formes fondamentales (on verra que cela revient à annuler une fonction).

On a besoin d'un lemme d'analyse.

Lemme 90 *Soit γ une courbe plane de classe C^1, soit P un point de γ. Soit f une fonction continue sur un voisinage U de P, de classe C^1 sur $U \setminus \gamma$. Supposons que les dérivées partielles de f se prolongent par continuïté à γ. Alors f est de classe C^1 sur U.*

Preuve. Quitte à composer f avec un difféomorphisme, on peut supposer que γ est l'axe $\{y = 0\}$. On note g_x et g_y les prolongements continus des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On écrit

$$\begin{aligned} f(x+u,v) &- f(x,0) - ug_x(x,0) - vg_y(x,0) \\ &= \int_0^1 (u(g_x(x+tu,tv) - g_x(x,0)) + v(g_y(x+tu,tv) - g_y(x,0)))\,dt \\ &= o(\sqrt{u^2+v^2}). \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 20 *L'ensemble $X = X_1 \cup X_2$ est une surface de classe G^1 si et seulement si les orientations induites par X_1 et X_2 sur γ sont opposées, et en tout point de γ, les plans tangents à X_1 et X_2 coïncident.*

X est une surface de classe G^2 si et seulement si les orientations induites par X_1 et X_2 sur γ sont opposées, en tout point de γ, les plans tangents à X_1 et X_2 coïncident et les secondes formes fondamentales de X_1 et X_2 sur ce plan sont égales.

Preuve.

Les conditions énoncées ne dépendent que des dérivées premières (resp. premières et secondes) d'une paramétrisation de X, donc elles sont nécessaires.

Inversement, supposons que les orientations induites par X_1 et X_2 sur γ sont opposées et qu'en tout point de γ, les plans tangents à X_1 et X_2 coïncident. Plaçons nous au voisinage d'un point P de γ. Quitte à translater, on peut supposer que $P = 0$. Soit $T = T_P X_1 = T_P X_2$. Au voisinage de P, la projection orthogonale pr sur T est un difféomorphisme de X_i sur un fermé D_i dont le bord est $\gamma' = pr(\gamma)$. Comme D_1 et D_2 induisent des orientations opposées sur γ', ils sont de part et d'autre de γ', i.e. ils recouvrent un voisinage de 0 et leurs intérieurs sont disjoints. Ecrivons X_i comme le graphe d'une fonction f_i définie sur D_i. Alors f_1 et f_2 sont de classe C^2 et coïncident le long de γ'. A elles 2, elles constituent une fonction définie au voisinage de 0 dont le graphe est X au voisinage de P.

Fixons des coordonnées cartésiennes (x,y,z) telles que l'équation de T soit $\{z = 0\}$. Parmi les vecteurs orthogonaux au plan tangent à X_i en $(x,y,f(x,y))$, il y en a exactement un dont la 3ème composante vaut 1, il dépend continûment de x et y. Comme ce vecteur a pour composantes

$$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, 1),$$

on conclut que les dérivées partielles de f se prolongent par continuïté à γ'. D'après le lemme 90, f est de classe C^1, dont X est de classe G^1 au voisinage de P..

Supposons de plus que X_1 et X_2 ont même seconde forme fondamentale en tout point de γ. Notons $X(u,v) = (u,v,f(u,v))$ dans les coordonnées choisies. On vient de voir que cette application est de classe C^1. Par conséquent, une fonction comme

$$(u,v) \mapsto II_{(u,v,f(u,v))}(\frac{\partial X}{\partial u})$$

est continue au voisinage de 0. Les dérivées secondes de X n'ont qu'une composante non nulle, la dérivée seconde de f, donc

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = (0, 0, \| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \| \, II_{(u,v,f(u,v))}(\frac{\partial X}{\partial u}))$$

est continue au voisinage de 0, ainsi que ses soeurs $\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$. D'après le lemme 90, $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$ sont de classe C^1, donc X est de classe C^2. $\blacksquare$

Corollaire 91 *Soit γ une courbe de classe C^2 dans $\mathbf{R}^3$. Soient X_1 et X_2 deux surfaces orientées de classe C^2, de même bord γ et induisant sur γ des orientations opposées. On suppose que $X_1 \cap X_2 = \gamma$. On suppose que pour tout point P de γ, il existe des vecteurs $w_i \in T_P X_i$ transverses à γ et tels que*

1. *w_1, w_2 et la tangente τ à γ sont coplanaires ;*
2. *les secondes formes fondamentales II^1_P et II^2_P des deux surfaces prennent la même valeur sur le vecteur w_1.*

Alors la réunion $X_1 \cup X_2$ est une surface de classe G^2.

Preuve.
La condition 1) équivaut à l'égalité des plans tangents en tout point de γ, et entraîne donc la continuïté G^1.

Montrons que 2 des 3 composantes des secondes formes fondamentales sont alors automatiquement égales. Choisissons une paramétrisation $v \mapsto \gamma(v)$ de γ et prolongeons là en une paramétrisation $(u,v) \mapsto X_1(u,v)$ de X_1 de classe C^2 telle que $X_1(0,0) = P$ et $\frac{\partial X_1}{\partial u}(0,0) = w_1$. Notons ν le vecteur unitaire normal orienté au plan tangente commun aux deux surfaces le long de γ. Notons τ le vecteur unitaire tangent à γ en P. Alors

$$II^1_P(\tau) = \frac{\partial^2\gamma}{\partial v^2}(0)\cdot\nu(P) \quad \text{et} \quad II^1_P(\tau, w_1) = -\frac{\partial\nu}{\partial v}(0)\cdot w_1$$

d'après le lemme 83. On peut aussi prolonger la paramétrisation de γ en une paramétrisation $(u,v) \mapsto X_2(u,v)$ de X_1 de classe C^2 telle que $X_2(0,0) = P$ et $\frac{\partial X_2}{\partial u}(0,0) = w_1$, et on trouve

$$II^2_P(\tau) = \frac{\partial^2\gamma}{\partial v^2}(0)\cdot\nu(P) = II^1_P(\tau) \quad \text{et} \quad II^2_P(\tau, w_1) = -\frac{\partial\nu}{\partial v}(0)\cdot w_1 = II^1_P(\tau, w_1).$$

Par conséquent, si en plus $II^2_P(w_1) = II^1_P(w_1)$, alors les secondes formes fondamentales II^2_P et II^1_P sont égales. Le théorème 20 s'applique, et $X_1 \cup X_2$ est une surface de classe G^2 au voisinage de γ. ∎

Corollaire 92 *Soient X_1 et X_2 deux surfaces à bord de classe C^2, de même bord γ, et telles que $X_1 \cap X_2 = \gamma$. Pour que la réunion $X = X_1 \cup X_2$ soit une surface de classe G^2, il faut et il suffit que par tout point de γ, il passe une courbe de classe G^2, transverse à γ et entièrement contenue dans X.*

Preuve. La condition est clairement nécessaire. Inversement, étant donnée une courbe transverse à γ, de classe G^2 et contenue dans $X_1 \cup X_2$, on oriente les surfaces X_1 et X_2 au voisinage de γ de façon compatible, et on applique le corollaire 91 en choisissant pour $w_1 = w_2$ le vecteur vitesse de la courbe. ∎

Corollaire 93 *Soient X_1 et X_2 deux surfaces à bord de classe C^2, de même bord γ, et telles que $X_1 \cap X_2 = \gamma$. On suppose que γ n'est pas une ligne asymptotique de X_1. Pour que la réunion $X = X_1 \cup X_2$ soit une surface de classe G^2, il faut et il suffit que les courbures de Gauss de X_1 et de X_2 en tout point de γ coïncident.*

Preuve. Soit τ le vecteur unitaire tangent à γ et η la normale à γ dans X_1. La matrice de la seconde forme fondamentale de X_1 (resp. X_2) dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} (resp. \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix})$$

où

$$a_1 = II_1(\tau) = -\frac{d}{dt}\Gamma\cdot\tau = II_2(\tau) = a_2,$$

$$b_1 = II_1(\tau,\eta) = -\frac{d}{dt}\Gamma\cdot\eta = II_2(\tau,\eta) = b_2.$$

Si les courbures de Gauss sont égales et si $a_1 \neq 0$,

$$a_1 c_1 - b_1^2 = a_2 c_2 - b_2^2$$

entraîne que $c_1 = c_2$ donc les secondes formes fondamentales coïncident. ■

Exercice 51 *Soient c_1 et c_2 deux courbes, soit $\epsilon > 0$ et soient X_1, X_2 les tubes de rayon ϵ autour de c_1 et c_2. Montrer que X_1 et X_2 se raccordent G^0 si et seulement si les courbes c_1 et c_2 se raccordent G^1. Montrer que les tubes se raccordent G^2 si et seulement si les courbent se raccordent G^2.*

Chapter 6

B-splines

6.1 Motivation

6.1.1 Les besoins du `design`

Les objets fabriqués par l'industrie comportent des lignes courbes. Les logiciels de CAO proposent un catalogue de formes simples (segments de droites, arcs de cercles, de côniques...) mais elles ne suffisent pas. Le `designer` a besoin d'une famille plus riche de courbes, dépendant de paramètres. Il souhaite

- disposer de suffisamment de paramètres pour pouvoir spécifier des conditions aux limites et autres contraintes ;
- deviner l'effet de chaque paramètre, pour trouver rapidement en les ajustant une courbe qui correspond à celle qu'il a imaginée.

D'autre part, le calcul de la courbe en fonction des paramètres doit être rapide.

Les B-splines, utilisées en analyse numérique depuis les années 30, possèdent les propriétés voulues. Comme il est impossible de paramétrer exactement un cercle au moyen de B-splines, on introduit une famille un peu plus large, les *B-splines rationnelles* `(NURBS)`.

L'objet de ce chapitre est de définir les B-splines et leurs variantes (elles font partie des fonctionnalités de ACIS et CATIA), de décrire les algorithmes nécessaires à leur manipulation, les paramètres en jeu, leur signification et leurs effets.

6.1.2 Construction des B-splines

On se donne une suite de points $t_0 \leq \ldots \leq t_m$ de la droite réelle, appelés *noeuds* `(knots)`. Le vecteur $(t_0, \ldots, t_m)$ s'appelle le *vecteur des noeuds* `(knot vector)`. Certains noeuds peuvent être confondus. Si r noeuds sont égaux à un réel τ, on dit que τ est de *multiplicité* r.

On se donne d'autre part des points $P_0, \ldots, P_m$ dans $\mathbf{R}^n$, appelés *points de contrôle* `(control points)` qui forment ensemble le *polygone de contrôle* `(control polygon)`. On l'imagine comme une courbe $t \mapsto X_0(t)$ qui saute d'un point à l'autre aux temps t_i, i.e.

$$X_0(t) = P_i \quad \text{pour} \quad t \in [t_i, t_{i+1}[.$$

(Si le noeud $t_i = t_{i+1}$, le sommet P_i est simplement ignoré).

On cherche à approcher cette courbe discontinue par une courbe plus régulière. Le première étape consiste à faire passer une ligne polygonale par les points P_i, i.e. lorsque t varie entre deux noeuds t_i et t_{i+1}, $X_1(t)$ décrit le segment $[P_{i-1}, P_i]$ à vitesse constante. On trouve la formule

$$X_1(t) = (1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i})P_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}P_i.$$

(Si $t_i = t_{i+1}$, la courbe saute de P_{i-1} à P_i en t_i). Si les noeuds sont tous distincts, la courbe obtenue est continue mais non dérivable en général. Ses composantes sont des fonctions linéaires par morceaux.

L'étape suivante conduit (si les noeuds sont tous distincts) à une courbe X_2 de classe C^1 (mais non C^2 en général), au prix d'augmenter le degré : elle est quadratique par morceaux. Elle ne passe plus par les sommets P_i, mais conserve une proximité au polygone en un sens différent : si t est compris entre les noeuds t_i et t_{i+1}, $X_2(t)$ est dans l'enveloppe convexe des sommets P_{i-2}, P_{i-1} et P_i.

Comment trouver X_2, et plus généralement, X_k pour $k \geq 2$? Supposons les points P_i affinement indépendants. Alors la courbe X_{k-1} s'écrit de manière unique comme combinaison

$$X_{k-1}(t) = \sum_i B_{i,k-1}(t)P_i$$

où les fonctions $B_{i,k}$ sont positives ou nulles, et leur somme vaut 1. Pour gagner un degré de différentiabilité, l'idée est de remplacer dans cette formule la suite de points fixés P_i par des points $P_i(t)$ mobiles le long du polygone de contrôle, où $P_i(t)$ se déplace de P_{i-1} à P_i pendant l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+k}]$. Autrement dit, on pose

$$X_k(t) = \sum_i B_{i,k-1}(t)((1 - \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i})P_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i}P_i)$$

Cela donne pour les fonctions $B_{i,k}$ la relation de récurrence

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i}B_{i,k-1}(t) + (1 - \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+k+1} - t_{i+1}})B_{i+1,k-1}(t)$$

qui les détermine uniquement.

Cela une famille de courbes au service du `design`. Le paramètre principal est le polygone de contrôle, dont la courbe épouse les formes. La complexité du calcul de la courbe dépend avant tout du degré de différentiabilité (on s'arrête souvent à $k = 3$). Le paramètre secondaire est le vecteur des noeuds. On s'en sert avant tout pour s'assurer que la courbe passe par des points prescrits avec des tangentes prescrites, i.e. pour contrôler les raccords.

6.1.3 Plan de la suite du chapitre

1. Définition et propriétés des fonctions splines
2. Courbes splines et courbes de Bézier
3. Algorithmes : calcul du point courant, de la dérivée, ajout d'un point de contrôle
4. Convexité
5. Courbure et condition de raccord
6. NURBS
7. Interpolation
8. Surfaces B-splines produits tensoriels

6.1.4 Bibliographie

Ces notes sont très largement inspirées du livre de J.-J. Risler, [R].

On trouvera dans les ouvrages de G. Farin, [F] et J. Hoschek et D. Lasser; [HL] de nombreuses figures, une présentation plus complète de la problématique du design ainsi que des notes historiques.

6.2 Définition et propriétés des fonctions B-splines

6.2.1 Définition

On se donne une suite de noeuds $t_0 \leq \cdots \leq t_m$ sur la droite réelle.

Notation. Soit $j = 1, \ldots, m+1-i$. Si $t_i < t_{i+1}$, on *note*

$$\omega_{i,j}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i}.$$

Si $t_i = t_{i+1}$, on pose $\omega_{i,j} = 0$.

Convention. Cette notation illustre une convention qu'on va utiliser partout : *Chaque fois qu'on écrit une fraction dont le dénominateur est nul, il faut l'interpréter par* 0.

Définition 94 *On définit par récurrence sur k les fonctions* B-splines $B_{i,k}$ *pour* $i = 0, \ldots, m-k-1$, *par les relations suivantes.*

$$B_{i,0}(t) = 1 \quad pour \quad t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad = 0 \quad sinon,$$

et pour $k \geq 1$,

$$B_{i,k}(t) = \omega_{i,k}(t) B_{i,k-1}(t) + (1 - \omega_{i+1,k}(t)) B_{i+1,k-1}(t).$$

Remarque. Les fonctions B-splines constituent une base (parmi d'autres) de l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $[t_0, t_{m-k}]$, polynômiales de degré inférieur ou égal à k sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, de classe C^{k-r} au voisinage de chaque noeud de multiplicité r (voir [R], paragraphe 1.4). Les mérites particuliers à cette base sont énumérés dans les propositions 99 et 22.

6.2.2 B-splines uniformes

Proposition 95 *On pose, pour* $i \in \mathbf{Z}$, $t_i = i$. *Alors pour tout* $i \in \mathbf{Z}$, $k \geq 1$ *et* $t \in \mathbf{R}$,

$$B_{i,k}(t+1) = B_{i-1,k}(t) \quad et \quad B_{0,k}(k+1-t) = B_{0,k}(t).$$

Soient $i \in \mathbf{Z}$ et $t \in \mathbf{R}$. A l'aide des identités $B_{i,0}(t+1) = B_{i-1,0}(t)$ et $\omega_{i,k}(t+1) = \omega_{i-1,k}(t)$, on montre aisément par récurrence sur k que $B_{i,k}(t+1) = B_{i-1,k}(t)$ pour tout k.

Montrons par récurrence sur k que pour $k \geq 1$, $B_{0,k}(k+1-t) = B_{0,k}(t)$. On calcule $B_{0,1}(t) = t\,\mathbf{1}_{[0,1[} + (2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$. Cette fonction satisfait $B_{0,1}(2-t) = B_{0,1}(t)$. Supposons l'identité démontrée pour la B-spline uniforme de degré $k-1$. On remarque que $\omega_{0,k}(k+1-t) = \frac{k+1-t}{k} = 1 - \omega_{1,k}(t)$. Par l'hypothèse de récurrence et l'invariance par translation,

$$B_{0,k-1}(k+1-t) = B_{0,k-1}(t-1) = B_{1,k-1}(t).$$

Il vient

$$\begin{aligned} B_{0,k}(k+1-t) &= \omega_{0,k}(k+1-t) B_{0,k-1}(k+1-t) + (1 - \omega_{1,k}(k+1-t)) B_{1,k-1}(k+1-t) \\ &= (1 - \omega_{1,k}(t)) B_{1,k-1}(t) + \omega_{0,k}(t) B_{0,k-1}(t) \\ &= B_{0,k}(t). \end{aligned}$$

On ne calcule que $B_{0,k}$, les autres fonctions B-splines uniformes s'en déduisent par translation.
La relation de récurrence qui définit les B-splines devient

$$B_{0,k}(t) = \frac{t}{k} B_{0,k-1}(t) + \frac{k+1-t}{k} B_{0,k-1}(t-1).$$

On calcule $B_{0,0} = \mathbf{1}_{[0,1[}$, $B_{0,1} = t\mathbf{1}_{[0,1[} + (2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$, $B_{0,2} = \frac{t^2}{2}\mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{-2t^2+6t-3}{2}\mathbf{1}_{[1,2[} + \frac{(3-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{0,3} = \frac{t^3}{6}\mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{-3t^3+12t^2-12t+4}{6}\mathbf{1}_{[1,2[} + \frac{3t^3-24t^2+60t-44}{6}\mathbf{1}_{[2,3[} + \frac{(4-t)^3}{6}\mathbf{1}_{[3,4[}$. ■

6.2.3 Polynômes de Bernstein

Proposition 96 *On pose $t_0 = t_1 = \cdots = t_k = 0$, $t_{k+1} = \cdots = t_{2k+1} = 1$. Alors, pour $i = 0, \ldots, k$,*

$$B_{i,k}(t) = C_k^i t^i (1-t)^{k-i}$$

pour $t \in [0, 1[$, $B_{i,k}(t) = 0$ sinon. Les autres fonctions B-splines sont nulles. En particulier,

$$B_{k-i,k}(t) = B_{i,k}(1-t).$$

Preuve. On calcule $\omega_{i,k} = 0$ sauf si $t_i = 0$ et $t_{i+k} = 1$, auquel cas $\omega_{i,k} = t$. Comme le support de $B_{i,k-1}$ est l'intervalle $[t_i, t_{i+k}[$, constate que pour $t \in [0, 1[$, $\omega_{i,k}(t) \neq 0 \Leftrightarrow B_{i,k-1}(t) \neq 0$. Par conséquent, la relation de récurrence devient, pour $t < 1$,

$$B_{i,k}(t) = tB_{i,k-1}(t) + (1-t)B_{i+1,k-1}(t),$$

d'où la formule de l'énoncé résulte aisément. ∎

6.2.4 Exercices

Entre les deux situations extrèmes ci-dessus (noeuds tous simples pour les B-splines uniformes, noeuds de multiplicités maximale pour les polynômes de Bernstein), il est utile d'étudier les situations intermédiaires.

Exercice 52 *On pose $t_0 = t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, etc.. Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3-k$.*

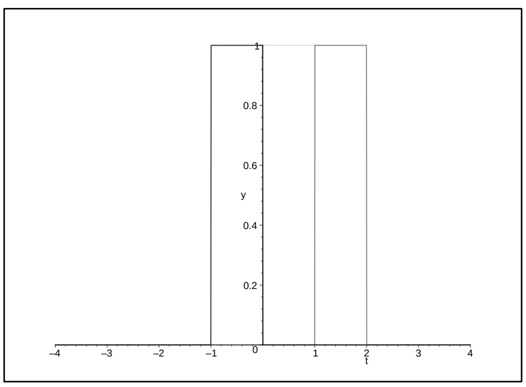
Exercice 53 *On pose $t_0 = t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, etc..*
Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3-k$.

Exercice 54 *On pose $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = 2$, $t_6 = 3$, etc..*
Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3-k$.

Exercice 55 *On pose $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = t_4 = 3$, $t_5 = 4$, $t_6 = 5$, $t_7 = 6$ et $t_8 = 7$.*
Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 5$, ainsi que $B_{0,3}$ et $B_{1,3}$.
Montrer que $\omega_{i,k}(6-t) = 1 - \omega_{7-k-i,k}(t)$. En déduire que (sauf pour t entier si $k = 0$) $B_{i,k}(6-t) = B_{6-k-i,k}(t)$.

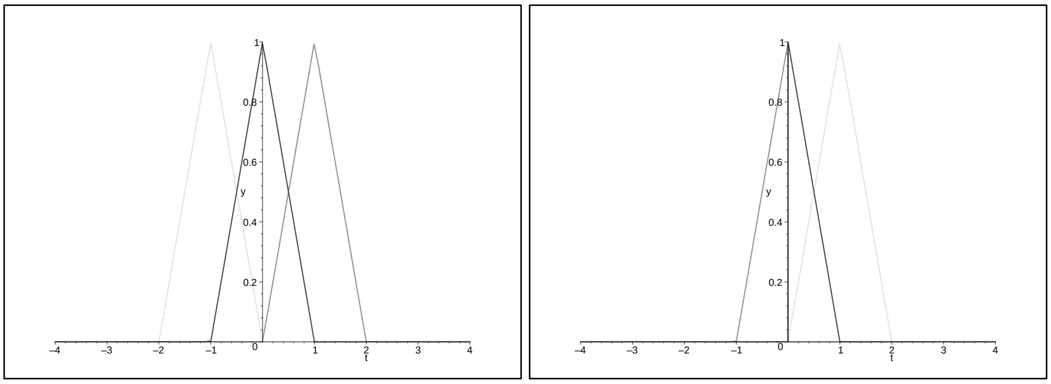
6.2.5 Graphes de quelques fonctions B-splines

Degré 0



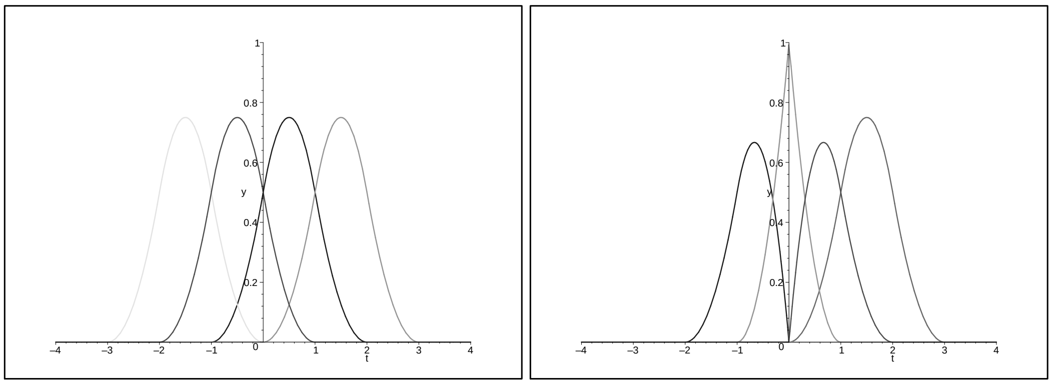
Trois fonctions B-splines uniformes de degré 0

Degré 1

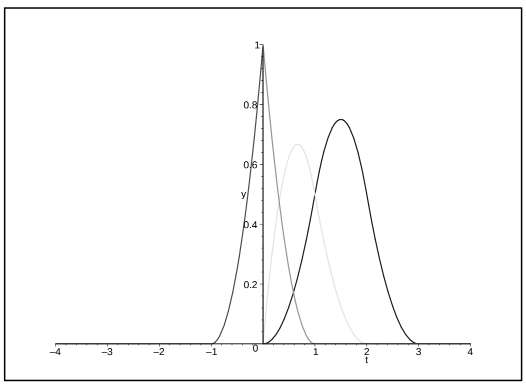


Trois fonctions B-splines de degré 1 uniformes (resp. relatives au vecteur de noeuds $(... -2, -1, 0, 0, 1, 2, ...)$

Degré 2

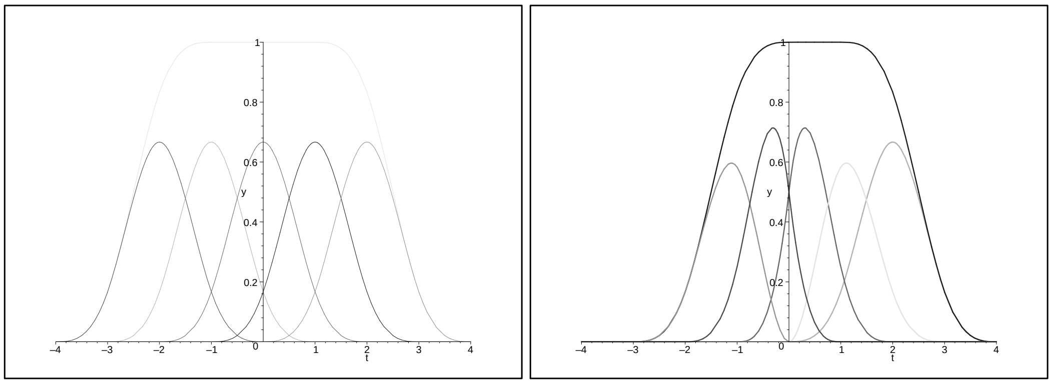


Quatre fonctions B-splines de degré 2 uniformes (resp. relatives au vecteur de noeuds $(... -2, -1, 0, 0, 1, 2, ...)$)

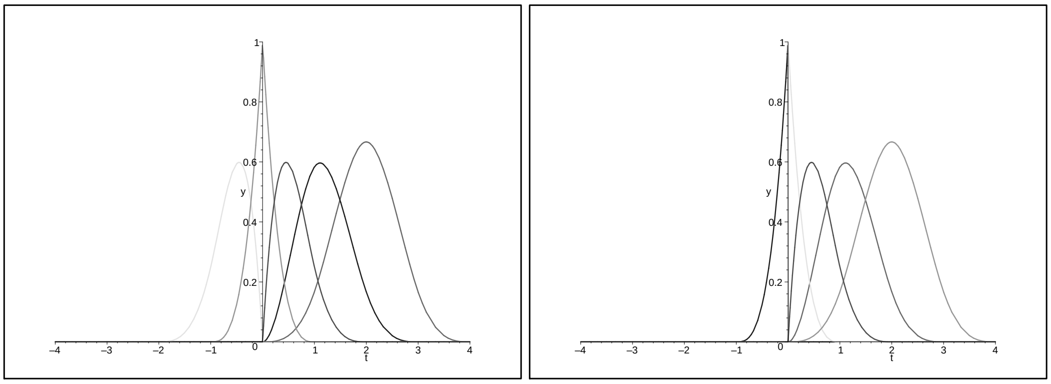


Quatre fonctions B-splines de degré 2 relatives au vecteur de noeuds $(... -2, -1, 0, 0, 0, 1, 2, ...)$

Degré 3



Cinq fonctions B-splines uniformes (resp. relatives au vecteur de noeuds $(... - 2, -1, 0, 0, 1, 2, ...)$ et leur somme



Cinq fonctions B-splines relatives aux vecteurs de noeuds $(-2, -1, 0, 0, 0, 1, 2, ...)$ et $(-1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3..)$

6.2.6 Symétries

Toute symétrie du vecteur de noeuds se traduit par des relations entre les fonctions B-splines correspondantes. On l'a vu dans deux cas particuliers (B-splines uniformes et polynômes de Bernstein). Voici un énoncé général.

Proposition 97 *On suppose que le vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$ *est périodique, i.e. il existe un entier* I *et un réel* T *tels que pour tout* $i \in \mathbf{Z}$,

$$t_{i+I} = t_i + T.$$

Alors les fonctions B-splines correspondantes satisfont

$$B_{i,k}(t - T) = B_{i+I,k}(t)$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Preuve. Par récurrence sur k.

La fonction $t \mapsto B_{i,0}(t - T)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[t_i + T, t_{i+1} + T[= [t_{i+I}, t_{i+I+1}[$, donc elle coïncide avec $B_{i+I,0}$.

D'autre part,

$$\omega_{i,k}(t - T) = \omega_{i+I,k}(t).$$

Supposant connu que pour tout $i \in \mathbf{Z}$,

$$B_{i,k-1}(t - T) = B_{i+I,k-1}(t),$$

il vient

$$\begin{aligned} B_{i,k}(t-T) &= \omega_{i,k}(t-T)B_{i,k-1}(t-T) + (1-\omega_{i+1,k}(t-T))B_{i+1,k-1}(t-T) \\ &= \omega_{i+I,k}(t)B_{i+I,k-1}(t) + (1-\omega_{i+I+1,k}(t))B_{i+I+1,k-1}(t) \\ &= B_{i+I,k}(t) \end{aligned}$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$. ∎

Proposition 98 *On suppose que le vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$ *est symétrique par rapport à un réel* a, *i.e. il existe des entiers* I *et* ℓ *tels que pour tout* $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \dots, \frac{1}{2}(I+\ell)$,

$$t_{I-i} = 2a - t_i.$$

Alors les fonctions B-splines correspondantes satisfont (sauf peut-être aux noeuds)

$$B_{i,k}(2a-t) = B_{I-i-k-1,k}(t)$$

pour tout $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \dots, \frac{1}{2}(I+\ell) - k - 1$.

Preuve. Par récurrence sur k.

Si $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \dots, \frac{1}{2}(I+\ell) - 1$, $t \mapsto B_{i,0}(2a-t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]2a - t_{i+1}, 2a - t_i] =]t_{I-i-1}, t_{I-i}]$, qui ne diffère de $B_{I-i-1,0}$ qu'aux noeuds t_{I-i-1} et t_{I-i}.

D'autre part,

$$\omega_{i,k}(2a-t) = 1 - \omega_{I-i-k,k}(t).$$

Supposant connu que pour tout $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \dots, \frac{1}{2}(I+\ell) - k - 2$,

$$B_{i,k-1}(2a-t) = B_{I-i-k,k-1}(t),$$

il vient

$$\begin{aligned} B_{i,k}(2a-t) &= \omega_{i,k}(2a-t)B_{i,k-1}(2a-t) + (1-\omega_{i+1,k}(2a-t))B_{i+1,k-1}(2a-t) \\ &= (1-\omega_{I-i-k,k}(t))B_{I-i-k,k-1}(t) + \omega_{I-i-k-1,k}(t))B_{I-i-k-1,k-1}(t) \\ &= B_{I-i-k-1,k}(t) \end{aligned}$$

pour tout $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \dots, \frac{1}{2}(I+\ell) - k - 1$. ∎

6.2.7 Principales propriétés

Proposition 99 *Propriété générales des fonctions B-splines.*

1. *La fonction* $B_{j,k}$ *est sur chaque intervalle* $[t_i, t_{i+1}[$ *un polynôme de degré* $\leq k$.

   Support :

2. *la fonction* $B_{i,k}$ *s'annule en dehors de l'intervalle* $[t_i, t_{i+k}[$ *;*

3. *la fonction* $B_{i,k}$ *s'annule aussi en* t_i *sauf si* $t_i = t_{i+1} = \cdots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$ *auquel cas* $B_{i,k}(t_i) = 1$ *;*

4. $0 < B_{i,k}(t) \leq 1$ *pour* $t \in]t_i, t_{i+k}[$ *;*

5. *sur l'intervalle* $]t_i, t_{i+k}[$, *la fonction* $B_{i,k}$ *ne prend la valeur* 1 *que si* $t_{i+1} = \cdots = t_{i+k}$ *et en ce point seulement.*

   Partition de l'unité :

6. *sur l'intervalle* $[t_k, t_{m-k}[$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k} \equiv 1$.

   Différentiabilité :

7. *la fonction* $B_{i,k}$ *est* C^∞ *à droite de chaque point ;*

8. *au voisinage d'un noeud de multiplicité* r*, la fonction* $B_{i,k}$ *est seulement de classe* C^{k-r}.

Preuve. Elle se déroule sur plusieurs paragraphes. La propriété de support se démontre aisément par récurrence sur k.

6.2.8 Partition de l'unité

Démontrons par récurrence la propriété de partition de l'unité.

Elle est clairement vraie pour $k = 0$. Supposons la établie pour les B-splines de degré $\leq k-1$. On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k} &= \omega_{0,k}B_{0,k-1} + (1-\omega_{1,k})B_{1,k-1} + \omega_{1,k}B_{1,k-1} + (1-\omega_{2,k})B_{2,k-1} + \cdots + \\
&\quad +\omega_{m-k-1,k}B_{m-k-1,k-1} + (1-\omega_{m-k,k})B_{m-k,k-1} \\
&= (-1+\omega_{0,k})B_{0,k-1} + \sum_{i=0}^{m-k} B_{i,k-1}(-1+\omega_{m-k,k})B_{m-k,k-1}.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la somme $\sum_{i=0}^{m-k} B_{i,k-1}$ vaut 1 sur l'intervalle $[t_{k-1}, t_{m-k+1}[$, donc *a fortiori* sur $[t_k, t_{m-k}[$. D'après la propriété de support, la fonction $B_{0,k-1}$ est nulle hors de l'intervalle $[t_0, t_k[$ et $B_{m-k,k-1}$ est nulle hors de $[t_{m-k}, t_m[$, donc la somme $\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}$ vaut identiquement 1 sur l'intervalle $[t_k, t_{m-k}[$. Ceci achève la démonstration par récurrence. ∎

6.2.9 Continuïté

Si f est une fonction sur $\mathbf{R}$ qui admet des limites à droite et à gauche, notons $f(t+)$ (resp. $f(t-)$) ces limites.

Lemme 100 *Si* $t_{i-1} < t_i = t_{i+1} = \cdots = t_{i+r-1} < t_{i+r}$*, alors* $B_{i-1,r}(t\pm) = 1$*. Par conséquent, toutes les fonctions* $B_{j,k}$ *pour* $k \geq r$ *sont continues en* t_i.

Preuve. Montrons par récurrence sur $k \leq r$ que

$$B_{i-1,r}(t_i\pm) = B_{i-1,r-k}(t_i\pm) + B_{i,r-k}(t_i\pm) + \cdots + B_{i-1+k,r-k}(t_i\pm).$$

C'est vrai pour $k = 0$. Supposons l'énoncé démontré pour un entier k. La définition des B-splines donne, pour tout $j = i-1, \ldots, i-1+k$,

$$B_{j,r-k}(t_i\pm) = \omega_{j,r-k}(t_i)B_{j,r-k-1}(t_i\pm) + (1-\omega_{j+1,r-k}(t_i))B_{j+1,r-k-1}(t_i\pm).$$

Or $\omega_{j,r-k}(t_i) = \dfrac{t_i - t_j}{t_{j+r-k} - t_j}$ est nul sauf si $j = i-1$, auquel cas il vaut 1. Il vient

$$B_{i-1,r-k}(t_i\pm) = B_{i-1,r-k-1}(t_i\pm) + B_{i,r-k-1}(t_i\pm).$$

et pour $j = i, i+1, \ldots, i-1+k$,

$$B_{j,r-k}(t_i\pm) = B_{j+1,r-k-1}(t_i\pm),$$

d'où, en sommant et avec l'hypothèse de récurrence,

$$B_{i-1,r}(t_i\pm) = B_{i-1,r-k}(t_i\pm) + B_{i,r-k}(t_i\pm) + \cdots + B_{i-1+k,r-k}(t_i\pm).$$

Cela achève la preuve par récurrence.

Pour $k = 0$, on vérifie que $B_{j,0}(t_i+) = 0$ si $j = i-1,\ldots,i+r-2$ et $B_{i+r-1,0}(t_i+) = 1$ donc la somme $B_{i-1,r}(t_i+)$ vaut 1. On vérifie que $B_{j,0}(t_i-) = 0$ si $j = i,\ldots,i+r-1$ et $B_{i-1,0}(t_i-) = 1$ donc la somme $B_{i-1,r}(t_i-)$ vaut 1. On conclut que $B_{i-1,r}$ est continue en t_i.

Comme les B-splines de degré r sont à valeurs dans $[0,1]$ et leur somme vaut 1, cela entraîne que toutes ces fonctions sont continues en t_i et toutes sauf $B_{i-1,r}$ s'annulent en t_i. La relation de récurrence qui définit les B-splines montre que les B-splines de degré $\geq r$ sont aussi continues en t_i. Ceci achève la preuve du lemme 100. ∎

6.2.10 Différentiabilité

Lemme 101 *Pour tout $k \geq 0$, la fonction $B_{i,k}$ est dérivable à droite, de dérivée*

$$B'_{i,k} = k(\omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1}).$$

i.e.

$$B'_{i,k}(t) = k(\frac{B_{i,k-1}(t)}{t_{i+k}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}).$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur k. C'est vrai si $k = 0$. Supposons cette formule établie pour les B-splines de degré inférieur ou égal à $k-1$. En dérivant la relation de récurrence qui définit $B_{i,k}$, on obtient

$$B'_{i,k} = \omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1} + \omega_{i,k}B'_{i,k-1} + (1-\omega_{i+1,k})B'_{i+1,k-1}.$$

Avec l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k-1}(\omega_{i,k}B'_{i,k-1} + (1-\omega_{i+1,k})B'_{i+1,k-1}) &= \omega_{i,k}\omega'_{i,k-1}B_{i,k-2} - \omega_{i,k}\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2}\\ &\quad +(1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} - (1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+2,k-1}B_{i+2,k-2}.\end{aligned}$$

Or

$$\omega_{i,k}\omega'_{i,k-1} = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}\frac{1}{t_{i+k-1}-t_i} = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}\frac{1}{t_{i+k}-t_i} = \omega_{i,k-1}\omega'_{i,k},$$

$$\begin{aligned}(1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+2,k-1} &= \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\frac{1}{t_{i+k+1}-t_{i+2}}\\ &= \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+2}}\frac{1}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\\ &= (1-\omega_{i+2,k-1})\omega'_{i+1,k}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-\omega_{i,k}\omega'_{i+1,k-1} &+ (1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+1,k-1}\\ &= \frac{t_i-t}{(t_{i+k}-t_i)(t_{i+k}-t_{i+1})} + \frac{t_{i+k+1}-t}{(t_{i+k+1}-t_{i+1})(t_{i+k}-t_{i+1})}\\ &= \frac{t_{i+k}-t-(t_{i+k}-t_i)}{(t_{i+k}-t_i)(t_{i+k}-t_{i+1})} + \frac{t_{i+1}-t+(t_{i+k+1}-t_{i+1})}{(t_{i+k+1}-t_{i+1})(t_{i+k}-t_{i+1})}\\ &= \frac{t_{i+k}-t}{(t_{i+k}-t_i)(t_{i+k}-t_{i+1})} + \frac{t_{i+1}-t}{(t_{i+k+1}-t_{i+1})(t_{i+k}-t_{i+1})}\\ &= -\omega_{i+1,k-1}\omega' i+1,k + (1-\omega_{i+1,k-1})\omega' i,k\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\omega_{i,k}\omega'_{i,k-1}B_{i,k-2} &- \omega_{i,k}\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} + (1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} - (1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+2,k-1}B_{i+2,k-2} \\
&= \omega_{i,k-1}\omega'_{i,k}B_{i,k-2} - \omega_{i+1,k-1}\omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-2} + (1-\omega_{i+1,k-1})\omega'_{i,k}B_{i+1,k-2} - (1-\omega_{i+2,k-1})\omega'_{i+1,k}B_{i+2,k-2} \\
&= \omega'_{i,k}(\omega_{i,k-1}B_{i,k-2} + (1-\omega_{i+1,k-1})B_{i+1,k-2}) - \omega'_{i+1,k}(\omega_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} + (1-\omega_{i+2,k-1})B_{i+1,k-2}) \\
&= \omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1}.
\end{aligned}$$

En additionnant, il vient

$$B'_{i,k} = k(\omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1}).$$

Cela achève la preuve du lemme 101. ∎

6.2.11 Fin de la preuve de la proposition 99

Le lemme 101 démontre l'existence de dérivées à droite de tous ordres.

Si t est un noeud de multiplicité r, alors les B-splines de degré r sont continues en t. Avec le lemme 101, cela entraîne que les B-splines de degré $r+1$ sont de classe C^1 au voisinage de t. Par récurrence, on montre ainsi que les B-splines de degré $k \geq r$ sont de classe C^{k-r} au voisinage d'un noeud de multiplicité r.

Ceci achève la preuve de la proposition 99. ∎

6.3 Courbes B-splines et courbes de Bézier

6.3.1 Définition

Définition 102 *On se donne un vecteur de noeuds* $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_m)$ *et des points* $P_0, \ldots, P_m$ *dans* $\mathbf{R}^n$*, appelés* points de contrôle `(control points)` *qui forment ensemble le* polygone de contrôle `(control polygon)`*. La* courbe B-spline de degré k associée au vecteur de noeuds $\mathbf{t}$ et au polygone de contrôle $\mathbf{P}$ *est*

$$t \mapsto X_k(t) = \sum_i B_{i,k}(t)P_i.$$

Lorsque le vecteur de noeuds a la forme spéciale $(0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1)$*, où* 0 *et* 1 *apparaissent chacun* $k+1$ *fois, on parle de* courbe de Bézier*. Dans ce cas, seuls les* $k+1$ *premiers points de contrôle jouent un rôle.*

Les fonctions intervenant dans les courbes de Bézier sont donc les polynômes de Bernstein de la proposition 96.

Théorème 21 *La k-ième B-spline $t \mapsto X_k(t)$ a les propriétés suivantes.*

1. *Les composantes de $X_k(t)$ sont sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ des polynômes de degré k ;*
2. *en un noeud de multiplicité r, la courbe est de classe C^{k-r} ;*
3. *si $t \in [t_i, t_{i+1}[$, $X_k(t)$ ne dépend que des points de contrôle $P_{i-k}, \cdots, P_i$ et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points ;*
4. *si t_i est un noeud simple et $k \geq 1$, $X_k(t_i)$ ne dépend que des points de contrôle $P_{i-k}, \cdots, P_{i-1}$ et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points ;*
5. *si $t_i = \cdots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$ est un noeud de multiplicité $k+1$, alors $X_k(t_i) = P_i$ et $X'_k(t_i) = \dfrac{k}{t_{i+k+1} - t_i}(P_{i+1} - P_i)$;*
6. *la construction de la courbe X_k à partir des points de contrôle P_i est invariante par application affine.*

Preuve. Elle résulte des propriétés des fonctions B-splines, proposition 99. On donne seulement les détails pour le point 4. Si $t_0 = t_1 = \cdots = t_k = 0 < t_{k+1}$, alors pour tout $i = 0, \ldots, k$, $B_{i,k-i}(0) = 1$ et $B_{j,k-i} = 0$ pour $j \neq i$. En particulier $X_k(0) = P_0$ et, d'après le lemme 101,

$$X_k'(0) = \frac{k}{t_{k+1} - t_1}(P_1 - P_0). \blacksquare$$

6.3.2 Points et tangentes remarquables

Terminologie. On dit qu'une courbe B-spline est *vissée aux extrémités* (`clamped`) si elle est de degré k et si les noeuds extrêmes t_0 et t_m sont de multiplicité $k+1$, i.e. $t_0 = t_1 = \cdots = t_k = 0 < t_{k+1}$ et $t_{m-k} = \cdots = t_m$. Dans ce cas, le nombre de points de contrôle effectivement utiles est $m - k - 1$.

Il résulte du théorème 21 qu'une courbe vissée aux extrémités est tangente à son polygone de contrôle aux extrémités. Plus précisément

Proposition 103 *Soit X_k une courbe B-spline de degré k vissée aux extrémités. Alors $X_k(t_0) = P_0$ et $X_k(t_m = P_{m-k-1}$. Si de plus $P_1 \neq P_0$ (resp. $P_{m-k-2} \neq P_{m-k-1}$), alors la courbe est tangente en P_0 au segment P_0P_1 (resp $P_{m-k-2}P_{m-k-1}$).*

Exercice 56 Cubique passant par deux points donnés avec des tangentes orientées donnée *Construire un vecteur de noeuds et des points de contrôle (le moins possible) dans le plan de sorte que la B-spline de degré 3 associée passe par les points $M = (1, 0)$ et $N = (3, 0)$ avec en ces deux points une tangente dirigée par $(1, 1)$.*

Proposition 104 *Une B-spline de degré 2 relative à un vecteur de noeuds simple est toujours tangente aux côtés de son polygone de contrôle. Si le polygone de contrôle possède trois sommets consécutifs P_i, P_{i-1} et P_{i-2} alignés sur une même droite D, alors la courbe B-spline cubique correspondante X_3 est tangente à D en $t = t_{i+1}$.*

Preuve. En t_{i+1}, seules deux fonctions B-splines de degré 2 sont non nulles, $B_{i,2}$ et $B_{i-1,2}$. Par conséquent $X_2(t_{i+1})$ est dans l'enveloppe convexe de P_i et P_{i-1}, i.e. sur le segment $P_{i-1}P_i$. D'après le lemme 101, le vecteur vitesse s'écrit

$$X_2'(t_{i+1}) = \sum_j \frac{2}{t_{j+2} - t_j} B_{j,1}(t_{i+1})(P_j - P_{j-1}).$$

or en t_{i+1}, une seule B-spline de degré 1 est non nulle, c'est $B_{i,1}$, donc le vecteur vitesse est positivement colinéaire à $P_{i-1}P_i$, i.e. la courbe est tangente au côté du polygone de contrôle.

En t_{i+1}, seules trois fonctions B-splines de degré 3 sont non nulles, $B_{i,3}$, $B_{i-1,3}$ et $B_{i-2,3}$. Par conséquent $X_3(t_{i+1})$ est dans l'enveloppe convexe de P_i, P_{i-1} et P_{i-2}. Si ces trois points sont alignés, $X_3(t_{i+1})$ est sur la droite qui les porte. D'après le lemme 101, le vecteur vitesse s'écrit

$$X_3'(t_{i+1}) = \sum_j \frac{3}{t_{j+3} - t_j} B_{j,2}(t_{i+1})(P_j - P_{j-1}).$$

or en t_{i+1}, seulement deux B-splines de degré 2 sont non nulles, ce sont $B_{i,2}$ et $B_{i-1,2}$, donc le vecteur vitesse est une combinaison de $P_i - P_{i-1}$ et de $P_{i-1} - P_{i-2}$. Or ces vecteurs sont colinéaires. On conclut que de nouveau la courbe est tangente au côté du polygone de contrôle. $\blacksquare$

6.3.3 Périodicité

Proposition 105 *Si on se donne un vecteur de noeuds et un polygone de contrôle périodiques, i.e. tels qu'il existe $I \in \mathbf{N}$ et $T \in \mathbf{R}$ tels que $t_{i+I} = t_i + T$ et $P_{i+I} = P_i$, alors les courbes B-splines correspondantes sont périodiques, i.e. pour tout entier k et tout $t \in \mathbf{R}$, $X_k(t + T) = X_k(t)$.*

Preuve. D'après la proposition 97, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} X_k(t-T) &= \sum_{i\in\mathbf{Z}} B_{i,k}(t-T)P_i \\ &= \sum_{i\in\mathbf{Z}} B_{i+I,k}(t)P_i \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{j,k}(t)P_{j-I} \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{j,k}(t)P_j \\ &= X_k(t). \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 57 *Construire une courbe B-spline périodique de classe C^2 tangente aux côtés du carré de sommets $O=(0,0)$, $P=(2,0)$, $Q=(2,2)$ et $R=(0,2)$. Est-ce un cercle ?*

6.3.4 Symétries

Toute symétrie du polygone de contrôle compatible avec une symétrie du vecteur de noeuds (toujours satisfaite pour les vecteurs de noeuds utilisés par DesignMentor par exemple) se traduit par une symétrie de la courbe.

Proposition 106 *Soit σ une symétrie du polygone de contrôle qui préserve l'ordre des sommets, i.e. une transformation affine telle que $\sigma(P_i)=P_{i+I}$. Si le vecteur de noeuds est lui aussi périodique, i.e $t_{i+I}=t_i+T$, alors la courbe B-spline de degré k associée l'est aussi,*

$$\sigma(X_k(t)) = X_k(t+T).$$

Preuve. D'après la proposition 97, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \sigma(X_k(t)) &= \sum_{i\in\mathbf{Z}} B_{i,k}(t)\sigma(P_i) \\ &= \sum_{i\in\mathbf{Z}} B_{i,k}(t)P_{i+I} \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{j-I,k}(t)P_j \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{j,k}(t+T)P_j \\ &= X_k(t+T). \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 58 *Soit X_3 la courbe B-spline uniforme périodique de degré 3 ayant le carré unité pour polygone de contrôle. Montrer qu'elle est invariante par les rotations d'ordre 4 autour du point $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. En déduire que l'une de ses homothétiques est tangente aux 4 côtés du carré. Est-ce un cercle ?*

Proposition 107 *Soit σ une symétrie du polygone de contrôle qui renverse l'ordre des sommets, i.e. une transformation affine telle que $\sigma(P_i)=P_{I-i}$. Si le vecteur de noeuds est lui aussi périodique, i.e $t_{m-i}=2a-t_i$ pour $i=0,\dots,m$, où $m=I+k+1$, alors la courbe B-spline de degré k associée l'est aussi,*

$$\sigma(X_k(t)) = X_k(2a-t)$$

pour tout $t \in [t_k, t_I[$.

Preuve. Pour $t \in [t_k, t_I[$,

$$\begin{aligned}
\sigma(X_k(t)) &= \sum_0^I B_{i,k}(t)\sigma(P_i) \\
&= \sum_0^I B_{i,k}(t)P_{I-i} \\
&= \sum_0^I B_{I-j,k}(t)P_j \\
&= \sum_0^I B_{m-k-1-j,k}(t)P_j \\
&= \sum_0^I B_{j,k}(2a-t)P_j \\
&= X_k(2a-t).
\end{aligned}$$

(on a appliqué la proposition 98 avec $\ell = I$). ■

Remarque. DesignMentor n'utilise que deux types de vecteurs de noeuds, le vecteur uniforme (pour les courbes périodiques) ou des vecteurs avec des noeuds simples régulièrement espacés à l'exception des noeuds extrêmes de multiplicité $k+1$ (pour les courbes vissées aux extrémités). Dans les deux cas, la condition de symétrie demandée est satisfaite.

Exercice 59 *On reprend la courbe de l'exercice 58. Montrer qu'elle est symétrique par rapport aux diagonales et aux médianes du carré. En déduire la position des points $X_3(i)$, $i \in \mathbf{Z}$.*

Exercice 60 *On reprend la courbe de l'exercice 56. Montrer qu'elle admet une symétrie centrale.*

6.3.5 Continuïté par rapport à l'ensemble des paramètres

Proposition 108 *Soit $V_r \subset \mathbf{R}^{m+1}$ l'ensemble des couples $(\mathbf{t}, t)$ où $\mathbf{t}$ est un vecteur de noeud et t n'est pas un noeud de multiplicité $\geq r$. Pour $k \geq r$ et $s \leq k-r$, l'application définie sur $V_r \times \mathbf{R}^{nm}$ qui à un vecteur de noeuds $\mathbf{k}$, un temps t et un polygone de contrôle $\mathbf{P}$ associe la dérivée s-ième $X_k^{(s)}(t) \in \mathbf{R}^n$ est continue.*

Preuve. Comme $X_k^{(s)}(t)$ dépend linéairement du polygone de contrôle $\mathbf{P}$, il suffit de montrer que les coefficients, i.e. les fonctions B-splines et leurs dérivées, dépendent continûment de $(\mathbf{t}, t)$.

La formule 101 pour la dérivée permet de se ramener au cas où $s = 0$. En effet, les dénominateurs figurant dans cette formule ne s'annulent pas sur V_r.

Désormais $s = 0$. Soit $\mathbf{t}^\alpha$, t^α, une suite de vecteurs de noeuds et de temps convergeant vers $(\mathbf{t}, t) \in V_r$. Supposons que $t \in]t_\ell, t_{\ell+1}[$ n'est pas un noeud de $\mathbf{t}$. Soit $i \in \{0, \ldots, m\}$ et $j \leq k$. Sur tout segment contenu dans $]t_\ell, t_{\ell+1}[$, les fonctions $B_{i,j,\mathbf{t}^\alpha}$ sont pour α assez grand des polynômes de degré inférieur ou égal à k, à valeurs dans $[0,1]$, donc quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'ils convergent uniformément vers une fonction $C_{i,j}$. On obtient ainsi une famille de fonctions $C_{i,j}$ qui satisfont aux mêmes relations de récurrence que les B-splines. Les fonctions $C_{i,0}$, limites de fonctions constantes, sont constantes, valent 0 ou 1, une seule vaut 1 (leur somme vaut 1), c'est $C_{\ell,0}$. On conclut que $C_{i,j} = B_{i,j}$ est la B-spline associée au vecteur de noeuds $\mathbf{t}$. Ceci prouve la continuïté.

Supposons désormais que t est un noeud de multiplicité $r' \leq r$ de $\mathbf{t}$, $t = t_{\ell-r'+1} = \cdots = t_\ell = t < t_{\ell+1}$. Sur tout segment $[a,b]$ contenu dans $]t_\ell, t_{\ell+1}[$, on peut supposer que chaque polynôme $B_{i,j,\mathbf{t}^\alpha}$ (α assez grand) converge uniformément vers une fonction $C_{i,j}$. De nouveau, les relations de récurrence et les conditions initiales sont satisfaites, donc $C_{i,j}$ coïncide sur $[a,b]$ avec la B-spline

$B_{i,j}$ associée au vecteur de noeuds $\mathbf{t}$. La suite de l'argument suit la preuve du lemme 100. Par hypothèse, r' noeuds (en comptant les multiplicités) $t^{\alpha}_{\ell-r'+1}, \ldots, t^{\alpha}_{\ell}$ et t^{α} convergent vers t. Comme en 100, on montre que

$$B_{\ell-r',r',\mathbf{t}^{\alpha}}(t^{\alpha}) - B_{\ell-r'+1,0,\mathbf{t}^{\alpha}}(t^{\alpha}) - B_{\ell-r'+2,0,\mathbf{t}^{\alpha}}(t^{\alpha}) - \cdots - B_{\ell,0,\mathbf{t}^{\alpha}}(t^{\alpha})$$

tend vers 0. Or $B_{\ell,0,\mathbf{t}^{\alpha}}(t^{\alpha})$ vaut 0 ou 1. Ceci prouve que $B_{\ell-r',r',\mathbf{t}^{\alpha}}(t^{\alpha})$ tend vers $1 = B_{\ell-r',r'}(t)$ et que pour $i \neq \ell - r'$, $B_{i,r',\mathbf{t}^{\alpha}}(t^{\alpha})$ tend vers $0 = B_{i,r'}(t)$. Ceci prouve la continuïté de $(\mathbf{t}, t) \mapsto X_{r'}(t)$. Les relations de récurrence montrent alors que $(\mathbf{t}, t) \mapsto X_k(t)$ est continue pour $k \geq r'$. En effet, les dénominateurs présents dans les formules ne tendent pas vers 0. ∎

Interprétation. Que se passe-t-il lorsqu'on déforme le vecteur de noeuds ? Si k noeuds se rapprochent les uns des autres, la courbe va passer de plus en plus près d'un point de contrôle.

6.4 Algorithmes

6.4.1 Algorithme de de Casteljau

Pour calculer et tracer une courbe B-spline, plutt que de calculer symboliquement les fonctions B-splines, de les évaluer et calculer les combinaisons convexes de points de contrôle, il est plus efficace de partir des points de contrôle et d'effectuer des combinaisons convexes successives avec des poids linéaires en t, comme dans le schéma de Horner.

On se souvient que $X_k(t)$ coïncide avec la valeur en t de la courbe B-spline de degré $k-1$ associée au polygone de contrôle $P_i(t) = \omega_{i,k}(t)P_{i-1} + (1 - \omega_{i,k}(t))P_i$. C'est le point de départ de l'algorithme attribué à de Casteljau.

Proposition 109 *On fixe un vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$ *et un polygone de contrôle* $\mathbf{P}$. *On cherche à calculer la courbe B-spline* X_k *de degré* k *correspondante.*

Soit $t \in [t_i, t_{i+1}[$. *On pose* $P^0_j = P_j$ *pour* $i - k \leq j \leq i$. *Puis, pour* $r = 0, \ldots, k-1$, *on pose*

$$P^{r+1}_j = \omega_{j,k-r}(t)P^r_j + (1 - \omega_{j,k-r}(t))P^r_{j-1}$$

pour $i - k + r + 1 \leq j \leq i$. *Alors* $P^k_i = X_k(t)$.

Pratiquement, on peut disposer les points P^r_j en triangle. Par exemple, si $k = 3$ et $t \in [t_4, t_5[$, on écrit

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 & & P_2 & & P_3 & & P_4 \\
 & P^1_2 & & P^1_3 & & P^1_4 & \\
 & & P^2_3 & & P^2_4 & & \\
 & & & P^3_4 & & &
\end{array}$$

et chaque valeur de la $r+1$-ième ligne s'obtient en faisant une combinaison convexe des deux valeurs situées juste au-dessus affectées des poids respectifs $1 - \omega_{j,k-r}(t)$ (pour celui de gauche) et $\omega_{j,k-r}(t)$ (pour celui de droite).

Géométriquement, on place les points P^1_j sur les côtés du polygone de contrôle. Cela donne un nouveau polygone. On place les points P^2_j sur les côôtés de ce polygone. Cela donne un troisième polygone, sur un côté duquel on trouve $P^3_i = X_3(t)$.

Cas des courbes de Bézier. Dans ce cas particulier, les $\omega_{j,k}(t)$ qui interviennent valent tous t.

En effet, la courbe X_k est paramétrée par l'intervalle $[0, 1[= [t_k, t_{k+1}[$, donc on peut poser $i = k$. Pour tout $r = 0, \ldots, k-1$ et $j = i - k + r + 1 = r + 1, \ldots, i$, $t_{j+k-r} = 1$ et $t_j = 0$ donc $\omega_{j,3-r} = t$.

Exercice 61 *Soit* $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (2,-1)$, $P_3 = (3,0)$. *Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer* $X_3(t)$ *pour* $t \in [0,1[$. *Faire la construction géométrique pour* $t = 1/2$ *et* $t = 1/4$.

Solution de l'exercice 61. *Courbe de Bézier avec deux points et deux tangentes prescrites.*
Comme tous les $\omega_{j,3-r}$ valent t, il vient

$$\begin{array}{ccccccc}
P_0 & & P_1 & & P_2 & & P_3 \\
& (1-t)P_0 + tP_1 & & (1-t)P_1 + tP_2 & & (1-t)P_2 + tP_3 & \\
& & (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2 & & (1-t)^2P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2P_3 & & \\
& & & (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3 & & &
\end{array}$$

d'où

$$X_3(t) = ((1-t)^3+6t(1-t)^2+6t^2(1-t)+3t^3, 3t(1-t)^2-3t^2(1-t)) = (1+3t-3t^2+2t^3, 3t-9t^2+6t^3).$$

Construction géométrique : elle donne pour $X_3(1/2)$ le centre du carré et pour tangente une médiane du carré.

Exercice 62 *Construire une courbe de classe* C^2 *reliant* $P = (-2,0)$ *à* $Q = (2,0)$ *avec tangente horizontale aux extrémités, en forme de bosse (resp. de boucle).*

6.4.2 Calcul de la dérivée

Proposition 110 *On fixe un vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$ *et un polygone de contrôle* $\mathbf{P}$. *Les dérivées successives de la courbe B-spline* X_k *de degré* k *correspondante s'obtiennent comme suit.*

Soit $t \in [t_i, t_{i+1}[$. *On pose* $Q_j^0 = P_j$ *pour* $i-k \leq j \leq i$. *Puis, pour* $r = 0, \ldots, k-1$, *on pose*

$$Q_j^{r+1} = (k-r)\frac{1}{t_{j+k-r} - t_j}(Q_j^r - Q_{j-1}^r)$$

pour $i-k+r+1 \leq j \leq i$ *(la convention* $Q_j^{r+1} = 0$ *si le dénominateur est nul est en vigueur). Alors la dérivée* r*-ième de* X_k *au point* t *vaut*

$$X_k^{(r)}(t) = \sum_j B_{j,k-r}(t)Q_j^r.$$

Preuve. Par récurrence sur r à partir du lemme 101. ∎

Une fois calculés les Q_j^r, on emploie l'algorithme de de Casteljau pour calculer $X_k^{(r)}(t)$.

Exercice 63 *Soit* $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (2,-1)$, $P_3 = (3,0)$. *Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer la dérivée* $X_3'(t)$ *pour* $t \in [0,1[$.

Solution de l'exercice 63. *Dérivée de la courbe de Bézier avec deux points et deux tangentes prescrites.*
Il vient $Q_j^1 = 3(P_j - P_{j-1})$ Comme tous les $\omega_{j,3-r}$ valent t, il vient

$$\begin{array}{ccccc}
3(P_1 - P_0) & & 3(P_2 - P_1) & & 3(P_3 - P_2) \\
& -3(1-t)P_0 + 3(1-2t)P_1 + 3tP_2 & & -3(1-t)P_1 + 3(1-2t)P_2 + 3tP_3 & \\
& & -3(1-t)^2P_0 + 3(1-4t+3t^2)P_1 + 3(2t-3t^2)P_2 + 3t^2P_3 & &
\end{array}$$

Soit

$$\begin{aligned}
X_3'(t) &= -3(1-t)^2(1,0) + 3(1-4t+3t^2)(2,1) + 3(2t-3t^2)(2,-1) + 3t^2(3,0) \\
&= (3-6t+6t^2, 3-18t+18t^2).
\end{aligned}$$

6.4.3 Ajout d'un noeud

Ajouter un noeud consiste à se donner un nouveau noeud $\hat{t}$ et à calculer un nouveau polygone de contrôle qui donne la même courbe B-spline de degré k. Si l'utilisateur se sent à l'étroit, cette procédure met à sa disposition un paramètre supplémentaire : le polygone de contrôle fourni par la machine comporte un sommet supplémentaire, que l'utilisateur pourra ensuite déplacer à sa guise.

Proposition 111 *Soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeud et* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle, soit* $t \mapsto X_k(t)$ *la courbe B-spline de degré* k *correspondante. Soit* $\hat{t}$ *un noeud supplémentaire,* $\hat{t} \in [t_j, t_{j+1}[$*. On pose*

$$\begin{array}{rcl} & = & P_i \quad si \quad t_{i+k} \leq \hat{t}; \\ \hat{P}_i & = & (1-\omega_{i,k}(\hat{t}))P_{i-1} + \omega_{i,k}(\hat{t})P_i \quad si \quad t_i < \hat{t} < t_{i+k}; \\ & = & P_{i-1} \quad si \quad \hat{t} \leq t_i. \end{array}$$

Soit $\hat{X}_k$ *la courbe B-spline de degré* k *associée au vecteur de noeuds* $\hat{\mathbf{t}} = (t_0, \ldots, t_j, \hat{t}, t_{j+1}, \ldots, t_m)$ *et au polygone de contrôle* $\hat{\mathbf{P}}$*. Alors pour tout* $t \in \mathbf{R}$*,*

$$\hat{X}_k(t) = X_k(t).$$

Preuve. Fixons $t \in \mathbf{R}$. Il suffit de vérifier que l'opération $\mathbf{P} \mapsto \hat{\mathbf{P}}$ décrite dans l'énoncé commute avec l'opération $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{P}^1$ de l'algorithme de de Casteljau. En effet, $X_k(t)$ (resp. $\hat{X}_k(t)$) est la valeur en t de la courbe B-spline de degré $k-1$ associée à $\mathbf{t}$ et $\mathbf{P}^1$ (resp. à $\hat{\mathbf{t}}$ et $(\hat{\mathbf{P}})^1$). Si on sait montrer que $\hat{\mathbf{P}}^1 = \hat{(}\mathbf{P^1})$, une récurrence sur k permet de conclure.

Supposons que $t_i < \hat{t} < t_{i+k-1}$. On se rappelle (et on le fait apparaître dans la notation) que $P_i^1 = P_i^1(t)$ dépend de t et que l'opération $\mathbf{P} \mapsto \hat{\mathbf{P}}$ est relative à un degré de B-spline, qui vaut k quand elle s'applique à $\mathbf{P}$ mais $k-1$ quand elle s'applique à $\mathbf{P}^1$. On doit comparer

$$\begin{array}{rcl} \hat{(}P_i^1(t)) & = & (1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))P_{i-1}^1(t) + \omega_{i,k-1}(\hat{t})P_i^1(t) \\ & = & (1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))(1-\omega_{i-1,k}(t))P_{i-2} \\ & & +((1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))\omega_{i-1,k}(t) + (1-\omega_{i-1,k}(t))\omega_{i,k-1}(\hat{t})P_{i-1} \\ & & +\omega_{i,k-1}(\hat{t})\omega_{i,k}(t)P_i. \end{array}$$

à

$$\begin{array}{rcl} (\hat{P}_i)^1(t) & = & (1-\hat{\omega}_{i,k}(t))(1-\omega_{i-1,k}(\hat{t}))P_{i-2} \\ & & +((1-\hat{\omega}_{i,k}(t))\omega_{i-1,k}(\hat{t}) + (1-\omega_{i-1,k}(\hat{t}))\hat{\omega}_{i,k}(t))P_{i-1} \\ & & +\hat{\omega}_{i,k}(t)\omega_{i,k}(\hat{t})P_i, \end{array}$$

où

$$\hat{\omega}_{i,k}(t) = \frac{t-\hat{t}_i}{\hat{t}_{i+k}-\hat{t}_i} = \omega_{i,k-1}(t)$$

car on a supposé que $t_i < \hat{t} < t_{i+k-1}$. Or

$$\begin{array}{rcl} (1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))(1-\omega_{i-1,k}(t)) & = & \dfrac{(t_{i+k-1}-\hat{t})(t_{i+k-1}-t)}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k-1}-t_{i-1})} \\ & = & (1-\omega_{i,k-1}(t))(1-\omega_{i-1,k}(\hat{t})) \\ & = & (1-\hat{\omega}_{i,k}(t))(1-\omega_{i-1,k}(\hat{t})), \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))\omega_{i-1,k}(t) \quad + & \quad (1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))\omega_{i,k}(t) \\
= & \quad \frac{(t_{i+k-1}-\hat{t})(t-t_{i-1})}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k-1}-t_{i-1})} \\
& + \frac{(t_{i+k-1}-\hat{t})(t-t_i)}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k}-t_i)} \\
= & \quad \frac{(t_{i+k-1}-t)(\hat{t}-t_{i-1})}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k-1}-t_{i-1})} \\
& + \frac{(t_{i+k-1}-\hat{t})(t-t_i)}{(t_{i+k-1}-t_{i-1})(t_{i+k-1}-t_i)} \\
= & \quad ((1-\omega_{i,k-1}(t))\omega_{i-1,k}(\hat{t}) + (1-\omega_{i-1,k}(\hat{t}))\omega_{i,k-1}(t)) \\
= & \quad (1-\hat{\omega}_{i,k}(t))\omega_{i-1,k}(\hat{t}) + (1-\omega_{i-1,k}(\hat{t}))\hat{\omega}_{i,k}(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{i,k-1}(\hat{t})\omega_{i,k}(t) &= \frac{(\hat{t}-t_i)(t-t_i)}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k}-t_i)} \\
&= \omega_{i,k-1}(t)\omega_{i,k}(\hat{t}) \\
&= \hat{\omega}_{i,k}(t)\omega_{i,k}(\hat{t}).
\end{aligned}
$$

donc

$$
\hat{(P_i^1(t))} = (\hat{P}_i)^1(t)
$$

dans ce cas. On laisse au lecteur le soiin de compléter la vérification dans les cas où $\hat{t} \leq t_i$ ou $\hat{t} \geq t_{i+k-1}$. ∎

Construction géométrique.

Ca ressemble à la première étape de l'algorithme de de Casteljau. Voir des figures dans les ouvrages [HL], paragraphe 4.4 page 127 ou [F] page .

6.4.4 Subdivision

On a construit une courbe B-spline X_k à partir d'un vecteur de noeuds $\mathbf{t}$ et d'une polygone de contrôle $\mathbf{P}$. On est satisfait du résultat obtenu sur l'intervalle $[t_0, \tau]$ mais pas sur l'intervalle $[\tau, t_m]$. On voudrait pouvoir modifier la courbe sur le second intervalle, sans intervenir sur le premier.

Recette. On insère le noeud τ $k+1$ fois.

Cela ne change pas la courbe, mais désormais les deux moitiés de courbe sont indépendantes. En effet, les fonctions B-splines de degré k relatives à un vecteur de noeuds qui comporte un noeud τ de multiplicité $k+1$ ont leur support contenu dans $[t_0, \tau]$ ou dans $[\tau, t_m]$.

6.5 Convexité

6.5.1 Diminution de la variation

Soit H un hyperplan de $\mathbf{R}^n$ d'équation $\{u \cdot (x-P) = 0\}$. On appelle *variation* d'une courbe $t \mapsto X(t)$, $t \in [a,b]$, par rapport à H le nombre de changements de signe de la fonction $t \mapsto u \cdot (X(t) - P)$ sur $[a,b]$. On la *note* abusivement $\#(X \cap H)$. La variation d'un polygone $\mathbf{P}$ par rapport à l'hyperplan H est la variation de la courbe affine par morceaux correspondante.

Cette notion s'étend aux courbes (et polygones) périodiques. On compte les changements de signe dans une période.

Proposition 112 *Soit H un hyperplan de $\mathbf{R}^n$. Soit X_k la courbe B-spline associée au polygone de contrôle $\mathbf{P}$, restreinte à l'intervalle $[t_k, t_{m-k}]$ (pas de restriction dans le cas d'un polygone et d'un vecteur de noeuds périodiques). Alors*

$$
\#(X_k \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H).
$$

Preuve.

Insérons un noeud. Le polygone $\mathbf{P}$ est remplacé par un nouveau polygone $\mathbf{P}^1$ tel que $\#(\mathbf{P}^1 \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H)$. En effet, chaque sommet P_i' de $\mathbf{P}^1$ se trouve sur un côté $[P_{i-1}, P_i]$ de $\mathbf{P}$. Si le côté $[P_i^1, P_{i+1}^1]$ de $\mathbf{P}^1$ coupe H, nécessairement l'un des segments $[P_i^1, P_i]$ ou $[P_i, P_{i+1}^1]$ le coupe aussi. Or $\mathbf{P}$ est la réunion de ces paires de segments.

Soient $t_k < s_0 < \cdots < s_v < t_{m-k}$ des valeurs du paramètre telles que les points $X_k(s_j)$ soient de part et d'autre de H. Insérons k noeuds en chacune des valeurs $s_0, \ldots, s_v$. On obtient une courbe B-spline X_k de degré k qui paramètre γ, et dont le polygone de contrôle $\mathbf{P}'$ satisfait $\#(\mathbf{P}' \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H)$. Comme s_i est un noeud de multiplciité k, le point $X_k(s_i)$ est un sommet $P'_{j(i)}$ du polygone $\mathbf{P}'$. Comme $X_k([s_i, s_{i+1}])$ coupe H, la portion de $\mathbf{P}'$ comprise entre $P'_{j(i)}$ et $P'_{j(i+1)}$ coupe aussi H. On conclut que

$$\#(\gamma \cap H) = v \leq \#(\mathbf{P}' \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H). \blacksquare$$

6.5.2 Convexité dans le plan

Terminologie. On dira qu'une courbe plane est *convexe* si elle est contenue dans le bord d'un convexe.

Lemme 113 *Une courbe plane lisse par morceaux est convexe si et seulement si toute droite transverse la coupe en au plus deux points.*

Preuve. Soit γ une courbe plane lisse par morceaux et convexe, i.e. contenue dans le bord d'un convexe C. Soit D une droite transverse à γ, i.e. D coupe γ en des points lisses et en ces points, γ n'est pas tangente à D. Alors $\partial_D(C \cap D) = (\partial C) \cap D$. Or $C \cap D$ est convexe, donc c'est un intervalle de D, et son bord (qui contient $\gamma \cap D$) a au plus deux points.

Inversement, soit γ une courbe plane lisse par morceaux. Notons C son enveloppe convexe. Supposons que toute droite transverse coupe γ en au plus deux points. Montrons par l'absurde que γ est contenu dans le bord de C. Supposons qu'il existe un point M de γ qui est intérieur à C. Alors M est barycentre à coefficients strictements positifs de points de γ, donc est intérieur à un triangle dont les sommets P, Q et R sont sur γ. On peut déplacer légèrement ces points sur γ en conservant le fait que M est à l'intérieur du triangle PQR. On peut donc supposer (voir cours de topologie) que les droites PQ, QR et RP sont transverses à γ.

Les points P, Q et R délimitent 4 arcs le long de la courbe γ, et M se trouve ou bien entre deux des points P, Q et R, ou bien sur l'une des extrémités libres.

Dans le premier cas, convenons que M se trouve sur l'arc délimité par P et Q. Par hypothèse, la droite PQ coupe γ en au plus deux points, donc en P et en Q seulement. Par conséquent, l'intérieur de l'arc de courbe de P à Q est du même côté de la droite PQ que M, i.e., du même côté que R. Par transversalité, la courbe traverse la droite en P et en Q donc la droite PQ sépare R des autres arcs délimités sur γ par P et Q. Or l'un de ces arcs contient R, contradiction.

Dans le second cas, convenons qu'en parcourant γ on rencontre successivement M, P, Q et R. Comme γ ne coupe la droite PR qu'en P et R, l'arc PR de γ est d'un seul côté de la droite PR, i.e. la droite PR sépare Q de l'arc PR, contradiction.

On conclut que tout point de γ est sur le bord de C, donc γ est convexe. $\blacksquare$

Corollaire 114 *Si le polygone de contrôle est plan et convexe, alors la courbe B-spline associée est convexe.*

Exercice 64 *Montrer qu'aucune courbe convexe ne satisfait les conditions aux limites de l'exercice 56. Construire une solution de l'exercice 56 qui coupe toute droite en au plus* 3 *points.*

6.6 Courbure et condition de raccord

Proposition 115 *Soit γ la courbe B-spline de degré $k \geq 2$ associée à un vecteur de noeuds $\mathbf{t}$ tel que $t_0 = \cdots = t_k < t_{k+1}$ et à un polygone de contrôle $\mathbf{P}$ tel que $P_0 \neq P_1$. Notons c la longueur du côté P_0P_1 et A l'aire du triangle de sommets P_0, P_1 et P_2 (elle a un signe dans le cas des courbes tracées dans un plan orienté). Alors la courbe γ a pour origine P_0. Sa tangente en ce point est la demi-droite P_0P_1 et sa courbure en ce point est*

$$\kappa = \frac{k-1}{k}\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+2}-t_k}\frac{2A}{c^3}.$$

Si $A \neq 0$, le plan osculateur en P_0 est le plan contenant P_0, P_1 et P_2.

Supposons $A \neq 0$ et $k \geq 3$. Alors la torsion de la courbe au point P_0 vaut

$$\theta = \frac{k-2}{k}\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+3}-t_k}\frac{3V}{2A^2}$$

où V est le volume du simplexe de sommets P_0, P_1, P_2 et P_3.

Preuve. D'après la proposition 99, comme t_0 est un noeud de multiplicité k,

$$B_{0,k}(t_0) = B_{1,k-1}(t_0) = B_{2,k-2}(t_0) = 1$$

et les autres $B_{j,\ell}$, $\ell = k-2,\ k-1,\ k$ sont nulles en t_0. D'après la proposition 110,

$$X_k^{(r)}(t_0) = \sum_j B_{j,k-r}(t_0)Q_j^r = Q_r^r$$

où $Q_j^0 = P_j$ et

$$Q_j^{r+1} = (k-r)\frac{1}{t_{j+k-r}-t_j}(Q_j^r - Q_{j-1}^r)$$

Il vient $X_k(t_0) = Q_0^0 = P_0$,

$$X_k'(t_0) = Q_1^1 = \frac{k}{t_{k+1}-t_1}(P_1 - P_0)$$

et

$$X_k''(t_0) = Q_2^2 = \frac{k-1}{t_{k+1}-t_2}(Q_2^1 - Q_1^1)$$

d'oùù

$$\begin{aligned} X_k'(t_0) \wedge X_k''(t_0) &= \frac{k-1}{t_{k+1}-t_2}Q_2^1 \wedge Q_1^1 \\ &= \frac{k^2(k-1)}{(t_{k+1}-t_k)^2(t_{k+2}-t_k)}(P_1-P_0)\wedge(P_2-P_1). \end{aligned}$$

Par définition, la courbure vaut

$$\frac{\| X' \wedge X'' \|}{\| X' \|^3}$$

(pas de norme en dimension 2), donc

$$\kappa = \frac{k-1}{k}\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+2}-t_k}\frac{\| (P_1-P_0)\wedge(P_2-P_1) \|}{\| P_1 - P_0 \|^3}.$$

et on reconnaît dans $\| (P_1-P_0)\wedge(P_2-P_1) \| /2$ (resp. sans norme en dimension 2) l'expression de l'aire (resp. algébrique) du triangle $P_0P_1P_2$.

Si $k \geq 3$, alors $B_{3,k-3}(t_0) = 1$ et les autres $B_{j,k-3}$ sont nulles en t_0. Par conséquent $X_k'''(t_0) = Q_3^3$. Il vient

$$\begin{aligned}
\det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0)) &= \det(Q_1^1, Q_2^2, Q_3^3) \\
&= \frac{k(k-1)(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3} \det(Q_1^0, Q_2^1, Q_3^2) \\
&= \frac{k(k-1)(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3} \frac{k(k-1)}{(t_{k+2}-t_0)^2} \det(Q_1^0, Q_2^0, Q_3^1) \\
&= \frac{k^2(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2} \frac{k}{t_{k+3}-t_0} \det(Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0) \\
&= \frac{k^3(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2(t_{k+3}-t_0)} 6V.
\end{aligned}$$

On termine à l'aide de la formule 30

$$\theta = \frac{\det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0))}{\| X_k'(t_0) \wedge X_k''(t_0) \|^2}$$

du cours sur la courbure des courbes. ∎

Attention. La formule simple ci-dessus n'est valable qu'aux noeuds de multiplicité $k+1$.

Généralisation. Rien n'empêche de calculer la dérivée de la courbure par rapport à l'abscisse curviligne. Toutefois, la formule n'est pas belle.

Exercice 65 Courbure à l'origine d'une courbe de Bézier *Calculer la courbure au point M de la courbe de Bézier construite dans l'exercice 56.*

6.7 NURBS

6.7.1 Courbes rationnelles

Un cercle ne peut pas être paramétré par des polynômes. En effet, si P et Q sont des polynômes non constants, $P^2 + Q^2$ est un polynôôme non constant.

En revanche, le cercle unité admet une paramétrisation rationnelle

$$t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}).$$

Exercice 66 *Une* cônique *est une courbe plane définie par une équation du second degré (i.e. le lieu des zéros d'un polynôme en deux variables de degré total 2). Soit C une cônique non vide et non dégénérée (i.e. non réduite à une ou 2 droites) et P un point de C. En coupant C par les droites passant par P, montrer que C admet une paramétrisation rationnelle.*

Définition 116 *Une courbe paramétrée est dite* rationnelle par morceaux *si sur chaque intervalle d'une subdivision, chaque coordonnée est donnée par une fraction rationnelle (i.e. le quotient de deux polynômes) du paramètre.*

6.7.2 Projection centrale

Réalisons l'espace affine $\mathbf{R}^n$ comme l'hyperplan affine d'équation $\{x_0 = 1\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{n+1}$. La *projection centrale* de $\mathbf{R}^{n+1}$ privé de l'hyperplan vectoriel $\{x_0 = 0\}$ vers $\mathbf{R}^n$ est définie comme suit : la projection d'un vecteur v non nul est l'intersection de la droite engendrée par v avec l'hyperplan $\mathbf{R}^n$. Analytiquement, elle s'écrit

$$(v_0, \ldots, v_n) \mapsto (\frac{v_1}{v_0}, \ldots, \frac{v_n}{v_0}).$$

La projection centrale envoie les segments de droites ne rencontrant pas l'hyperplan $\{x_0 = 0\}$ sur des segments de droites. En particulier, sa restriction au demi-espace $\{x_0 > 0\}$ envoie segment sur segment, donc préserve la convexité.

Toute courbe rationnelle dans $\mathbf{R}^n$ s'obtient par projection centrale d'une courbe polynômiale tracée dans $\mathbf{R}^{n+1}$. En effet, quitte à réduire au même dénominateur, une courbe paramétrée rationnelle s'écrit

$$t \mapsto X(t) = (\frac{Q_1(t)}{Q_0(t)}, \ldots, \frac{Q_n(t)}{Q_0(t)})$$

où les Q_i sont des polynômes en t. Alors X est la projection centrale de la courbe polynômiale

$$t \mapsto X(t) = (Q_0(t), \ldots, Q_n(t)) \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

6.7.3 Transformations projectives

Par définition, une *transformation projective* de $\mathbf{R}^n$ est une application f définie sur $\mathbf{R}^n$ (éventuellement privé d'un hyperplan affine) telle qu'il existe une matrice carrée inversible A de taille $n+1$ telle que $f(P)$ soit la projection centrale de $A(1, P)$.

Les bijections affines de $\mathbf{R}^n$ sont des transformations projectives particulières (prendre pour A une matrice dont la première ligne est $(1, 0, \ldots, 0)$). Ce sont exactement les transformations projectives définies sur $\mathbf{R}^n$ entier.

Les transformations projectives du plan préservent les côniques.

Il y a beaucoup de transformations projectives. Etant donnés deux quadrilatères plans non dégénérés (pas de côtés alignés), il existe une et une seule transformation projective du plan envoyant l'un sur l'autre.

6.7.4 B-splines rationnelles

Définition 117 *Soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds, soit* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle dans* $\mathbf{R}^n$ *et* w_i *des poids* (`weights`) *attachés à chaque point de contrôle* P_i. *On suppose que les poids ne sont pas tous nuls. La* courbe B-spline rationnelle (`NURBS`) *de degré* k *associée à ces données est la courbe paramétrée par*

$$t \mapsto X(t) = \frac{\sum_i w_i B_{i,k}(t) P_i}{\sum_i w_i B_{i,k}(t)}.$$

Lorsque le vecteur de noeuds prend la forme spéciale $(0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1)$, *on parle de* courbe de Bézier rationnelle.

Autrement dit, la courbe B-spline rationnelle est la projection centrale de la courbe B-spline dans $\mathbf{R}^{n+1}$ associée au vecteur de noeuds $\mathbf{t}$ et aux points de contrôle $R_i = (w_i, w_i P_i) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Noter que le polygone de contrôle $\mathbf{P}$ est la projection centrale du polygone $\mathbf{R}$. D'autre part, multiplier tous les poids par une même constante non nulle ne change rien.

Exemple. Le quart de cercle unité comme courbe de Bézier rationnelle quadratique.

On pose $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (1, 1)$ et $P_2 = (0, 1)$, $w_0 = w_1 = 1$, $w_2 = 2$. On choisit comme vecteur de noeuds $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$. Alors la courbe de Bézier rationnelle de degré 2 obtenue est donnée pour $t \in [0, 1[$ par

$$t \mapsto c(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}).$$

Son image est exactement un quart du cercle unité.

Exercice 67 *Soit* a *un réel. Trouver des poids* w_0, w_1 *et* w_2 *de sorte que la courbe de Bézier rationnelle de degré 2 associée au polygone de contrôle* $P_0 = (1, 1)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (-1, 1)$ *et à ces poids soit le quart de cercle paramétré par*

$$t \mapsto c(\frac{t}{at + 1 - a}).$$

Exercice 68 *Vérifier que la courbe B-spline rationnelle de degré 2 associée au polygone de contrôle* $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (-1,1)$, $P_3 = (-1,0)$, $P_4 = (-1,-1)$, $P_5 = (0,-1)$, $P_6 = (1,-1)$, $P_7 = (1,0)$ *et* $P_{i+8} = P_i$, *aux poids* $w_{2j+1} = 1$, $w_{2j} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *et au vecteur de noeuds* $t_{2j} = t_{2j+1} = j$ *est une paramétrisation périodique de période 4 du cercle unité.*

6.7.5 Propriétés des courbes B-splines rationnelles

Elles se déduisent immédiatement des propriétés des courbes B-splines et de celles de la projection centrale.

Proposition 118 *Soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds,* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle et* $\mathbf{w}$ *un vecteur de poids non nul. La courbe B-spline rationnelle* X_k *de degré* k *associée à ces données a les propriétés suivantes.*

1. *Sur chaque intervalle* $[t_i, t_{i+1}[$, *les coordonnées de* X *sont des fractions rationnelles de degré* k *(i.e. quotients de deux polynômes de degré* k*).*

2. *En un noeud de multiplicité* r, *la courbe* X *est de classe* C^{k-r}.

3. *Si le vecteur de noeuds, le polygone de contrôle et le vecteur de poids sont périodiques, alors la courbe est périodique.*

4. *Si* $t_0 = t_1 = \ldots = t_k < t_{k+1}$ *est un noeud de multiplicité* $k+1$, *et si les poids* w_0 *et* w_1 *sont non nuls, alors la courbe* X_k *est tangente en* P_0 *au polygone de contrôle.*

5. *Supposons le vecteur de noeud simple. Si* $k = 2$, *la courbe* X_2 *est tangente à chaque côté du polygone de contrôle. Si* $k = 3$ *et si trois sommets successifs de* $\mathbf{P}$ *sont sur une même droite* D, *celle-ci est tangente à la courbe* X_3.

6. *Si* $t \in [t_i, t_{i+1}[$, *le point* $X_k(t)$ *ne dépend que les points de contrôle* $P_{i-k}, P_{i-k+1}, \ldots, P_i$ *et des poids* $w_{i-k}, w_{i-k+1}, \ldots, w_i$. *Si de plus les poids sont tous positifs ou nuls,* $X_k(t)$ *est dans l'enveloppe convexe des points* $P_{i-k}, P_{i-k+1}, \ldots, P_i$.

7. *Si* H *est un hyperplan affine de* $\mathbf{R}^n$, *alors*
$$\#(X_k([t_k, t_m]) \cap H \leq \#\mathbf{P} \cap H.$$
En particulier, si le polygone $\mathbf{P}$ *est convexe, la courbe* $X_k([t_k, t_m])$ *est convexe.*

8. *Soit* f *une transformation projective. Alors* $f(X)$ *est une courbe B-spline rationnelle associée au vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$, *au polygone de contrôle* $f(\mathbf{P})$ *et à un nouveau vecteur de poids* $\mathbf{w}'$.

Exercice 69 *On fixe* $s \in \mathbf{R}$. *Déterminer le point* P_1 *et les poids* w_0, w_1, *et* w_2 *de sorte que la courbe de Bézier rationnelle de degré 2 associée au polygone de contrôle* $P_0 = (1,1)$, $w_0 =?$, $P_1 =?$, $w_1 =?$, $P_2 = (\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2})$, $w_2 =?$, *soit le secteur circulaire paramétré par*
$$t \mapsto (\frac{1-s^2t^2}{1+s^2t^2}, \frac{2st}{1+s^2t^2}).$$
Même question pour la paramétrisation du secteur opposé,
$$t \mapsto (\frac{(2t-1)^2 - s^2t^2}{(2t-1)^2 + s^2t^2}, \frac{2st(2t-1)}{(2t-1)^2 + s^2t^2}).$$

Exercice 70 *Montrer que toute courbe de Bézier rationnelle de degré 2 est contenue dans une cônique.*

6.7.6 Dérivées, courbure

Les formules pour les dérivées successives d'une courbe B-spline rationnelle se déduisent de celles relatives aux courbes B-splines. On n'énonce que le cas particulier des dérivées aux extrémités.

Proposition 119 *Soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds,* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle et* $\mathbf{w}$ *un vecteur de poids non nul. Soit* $k \geq 2$*. On note* X_k *la courbe B-spline rationnelle de degré* k *associée à ces données. Supposons que* $t_0 = t_1 = \ldots = t_k < t_{k+1}$ *et que* $P_0 \neq P_1$*. Alors* $X_k(t_k) = P_0$*,*

$$X'_k(t_k) = \frac{k}{t_{k+1} - t_k} \frac{w_1}{w_0}(P_1 - P_0),$$

$$X'_k(t_k) \wedge X''_k(t_k) = \frac{k^2(k-1)}{(t_{k+1} - t_k)^2(t_{k+2} - t_k)} \frac{w_1 w_2}{w_0^2}(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0)$$

et si w_0 *et* w_1 *sont non nuls, la courbure au point* P_0 *vaut*

$$\kappa = \frac{k-1}{k} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+2} - t_k} \frac{w_1 w_2}{w_0^2} \frac{2A}{c^3}$$

où A *est l'aire (algébrique pour une courbe tracée dans un plan orienté) du triangle* $P_0P_1P_2$ *et* c *la longueur du côté* P_0P_1*.*

Supposons que $k \geq 3$*, que* w_0*,* w_1 *et* κ *sont non nuls. Alors la torsion de la courbe en* P_0 *vaut*

$$\theta = \frac{k-2}{k} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+3} - t_k} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \frac{3V}{2A^2}$$

oùù V *est le volume du simplexe de sommets* P_0*,* P_1*,* P_2 *et* P_3*.*

Il y a un énoncé correspondant à l'autre extrémité t_m *: remplacer* t_i *par* t_{m-i}*,* w_i *par* $w_{m-k-1-i}$ *et* P_i *par* $P_{m-k-1-i}$*.*

Preuve. Comme tout est invariant par translation, on peut supposer que $P_0 = 0$, de sorte que $X(t_0) = P_0 = 0$. Si X est la projection centrale d'une courbe Y, alors

$$Y = (x_0, x_0 X), \quad Y' = (x'_0, x'_0 X + x_0 X').$$

Par conséquent $w_0 X'_k(t_0) = Z(t_0)$ où Z est la courbe B-spline de degré k de points de contrôle les $w_i P_i$. La proposition 110 donne

$$Z'(t_0) = \frac{k}{t_{k+1} - t_0}(w_1 P_1 - w_0 P_0)$$

donc

$$X'_k(t_0) = \frac{k}{t_{k+1} - t_0} \frac{w_1}{w_0} P_1.$$

On dérive une seconde fois.

$$Y'' = (x''_0, x''_0 X + 2x'_0 X' + x_0 X'')$$

donne

$$w_0^2 X'_k(t_0) \wedge X''_k(t_0) = (x'_0 X + x_0 X') \wedge (x''_0 X + 2x'_0 X' + x_0 X'') = Z'(t_0) \wedge Z''(t_0)$$

On utilise à nouveau la proposition 110 (voir aussi la preuve de la proposition 115). Comme on a supposé que $P_0 = 0$,

$$Z'(t_0) \wedge Z''(t_0) = \frac{k^2(k-1}{(t_{k+1} - t_0)^2(t_{k+2} - t_0)} w_1 P_1 \wedge w_2 P_2$$

et enfin

$$X_k'(t_0) \wedge X_k''(t_0) = \frac{k^2(k-1}{(t_{k+1}-t_k)^2(t_{k+2}-t_k)} \frac{w_1 w_2}{w_0^2} P_1 \wedge P_2.$$

Supposons que $k \geq 3$. On dérive une troisième fois.

$$Y''' = (x_0''', x_0''' X + 3x_0'' X' + 3x_0' X'' + x_0 X''')$$

donne

$$\begin{aligned} w_0^3 \det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0)) &= \det(x_0' X + x_0 X', x_0'' X + 2x_0' X' + x_0 X'', \\ &\qquad x_0''' X + 3x_0'' X' + 3x_0' X'' + x_0 X''') \\ &= \det(Z'(t_0), Z''(t_0), Z'''(t_0)) \\ &= \frac{k^3(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2(t_{k+3}-t_0)} \det(w_1 P_1, w_2 P_2, w_3 P_3) \end{aligned}$$

soit

$$\det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0)) = \frac{k^3(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2(t_{k+3}-t_0)} \frac{w_1 w_2 w_3}{w_0^3} 6V.$$

et on conclut avec la formule

$$\theta = \frac{\det(X', X'', X''')}{\| X' \wedge X'' \|^2}. \blacksquare$$

Corollaire 120 *Soit $k \geq 2$. Soient $\mathbf{t}$ et $\bar{\mathbf{t}}$ deux vecteurs de noeuds tels que t_0 (resp $\bar{t}_m$ soit de multiplicité $k+1$. Soient $\mathbf{P}$ et $\bar{\mathbf{P}}$ deux polygones de contrôle dont le premier côté est de longueur non nulle. Soient $\mathbf{w}$ et $\bar{\mathbf{w}}$ deux vecteurs de poids tels que w_0, w_1, $\bar{w}_{m-k-2}$ et $\bar{w}_{m-k-1}$ sont non nuls. On note X_k et $\bar{X}_k$ les courbes B-splines rationnelles de degré k associée à ces données. Notons γ la courbe obtenue en mettant ces deux NURBS bout à bout. Alors*

- *La courbe γ est de classe G^0 si et seulement si $P_0 = \bar{P}_{m-k-1}$;*
- *γ est de classe G^1 si et seulement si $P_0 = \bar{P}_{m-k-1}$ et les points $\bar{P}_{m-k-2}$, P_0 et P_1 sont alignés dans cet ordre sur une droite D ;*
- *γ est de classe G^2 si et seulement si $P_0 = \bar{P}_{m-k-1}$, les points $\bar{P}_{m-k-2}$, P_0 et P_1 sont alignés dans cet ordre sur une droite D, les points $\bar{P}_{m-k-3}$, P_2 et la droite D sont dans un même plan π et l'équation*

$$\frac{t_{k+2}-t_k}{t_{k+1}-t_k} \frac{w_1 w_2}{w_0^2} \frac{A}{c^3} = \frac{\bar{t}_m - \bar{t}_{m-k-2}}{\bar{t}_m - \bar{t}_{m-k-1}} \frac{\bar{w}_{m-k-3} \bar{w}_{m-k-2}}{\bar{w}_{m-k-1}^2} \frac{\bar{A}}{\bar{c}^3}$$

  est satisfaite, où A (resp. $\bar{A}$) est l'aire algébrique du triangle $P_0P_1P_2$ (resp. $\bar{P}_{m-k-3}\bar{P}_{m-k-2}\bar{P}_{m-k-1}$) dans le plan π et c (resp. $\bar{c}$) la longueur du côté P_0P_1 (resp. $\bar{P}_{m-k-2}\bar{P}_{m-k-1}$).

Preuve. On combine la proposition 119 avec le théorème 5 du cours sur la courbure des courbes. L'hypothèse de coplanarité garantit que les NURBS ont la même normale en P_0. L'équation comporte une égalité de signes. Elle entraîne d'une part l'égalité des courbures, et d'autre part le fait que les normales orientées coïncident. $\blacksquare$

Remarque. De la même façon, on peut écrire la condition de raccord G^3, en dimension 2 ou bien en dimension 3 lorsque P_0 n'est pas un point d'inflexion. La condition d'égalité des dérivées de courbure est plutôt compliquée.

Remarque. Etant donnés deux polygones de contrôle satisfaisant aux conditions d'alignement et de coplanarité du corollaire 120, il est toujours possible d'ajuster les poids pour compléter la continuïté G^2.

Exemple. Partons de la courbe en bosse de l'exercice 62. Tâchons de la raccorder à une droite horizontale en gardant le même polygone de contrôle et le même vecteurs de noeuds. Il suffit d'annuler la courbure, par exemple en introduisant les poids $w_2 = 0$, $w_0 = w_1 = w_3 = w_4 = 1$. La courbe obtenue est un segment de droite. Pour raccorder la courbe en bosse au cercle de rayon 1 de tangente horizontale en $(-2, 0)$, situé au-dessus de la courbe en bosse, il suffit de rendre la courbure égale à 1. Or la courbure vaut initialement $2/3(2-a)^2$. On pose $w_0 = w_4 = 1$, $w_1 = w_2 = w_3 = 6 - 3a$. Pour raccorder la courbe en bosse à l'autre cercle de rayon 1 de tangente horizontale en $(-2, 0)$, il suffit de changer un signe, par exemple celui de w_2.

Exercice 71 *Sans changer de polygone de contrôle, peut on déformer la courbe de Bézier cubique de l'exercice 56 en une courbe de Bezier cubique rationnelle γ telle qu'en raccordant γ à sa translatée de vecteur $(2, 0)$, on obtienne une courbe de classe G^2 ?*

6.7.7 Effet des poids

On se limite au cas où les poids sont positifs ou nuls. Clairement, si on décrit un point Q de $\mathbf{R}^n$ comme barycentre de points P_i avec poids positifs ou nuls w_i, lorsque le rapport $w_i / \sum w_i$ tend vers l'infini, le point Q se rapproche de P_i. Par conséquent, augmenter le poids d'un point de contrôle rapproche la courbe de ce point. On trouvera des figures illustrant ce phénomène dans le livre [HL].

6.7.8 Généralisation

Soient $Q_0, \ldots, Q_m$ des points de $\mathbf{R}^n$. Considérons la courbe paramétrée

$$t \mapsto X(t) = \frac{\sum_i B_{i,k}(t) Q_i}{\sum_i B_{i,k}(t)}.$$

Si les poids w_i sont tous non nuls, alors X est la courbe B-spline rationnelle associée aux points de contrôle $P_i = w_i^{-1} Q_i$. Si on autorise que certains poids soient nuls, on obtient une classe plus large de courbes. Partant d'une vraie NURBS ($w_i \neq 0$), faisons tendre certains poids (mais pas tous) vers 0. Les points P_i correspondant tendent vers l'infini dans la direction Q_i. Autrement dit, les Q_i tels que $w_i = 0$ doivent être considérés comme des vecteurs indiquant qu'un point de contrôle P_i est parti à l'infini. Ce point de vue est développé dans le livre [N] de G. Farin.

6.8 Interpolation

Interpoler une famille de N points Q_j de $\mathbf{R}^n$ par une courbe B-spline, c'est trouver une courbe B-spline qui passe par ces points. Le problème se divise en deux phases.

Première phase : On se donne un vecteur de noeuds $\mathbf{t}$, N valeurs $s_j \in [t_0, t_m]$ et on cherche un polygone de contrôle $\mathbf{P}$ tel que la courbe B-spline X_k correspondante satisfasse $X(s_j) = Q_j$. L'interpolation se traduit alors par la résolution d'un système linéaire.

Deuxième phase : on cherche à optimiser le choix des valeurs s_j puis du vecteur de noeuds. C'est typiquement non linéaire.

6.8.1 Le problème linéaire

Il y a des conditions nécessaires sur les valeurs s_j. Par exemple, supposons que $k = 1$ et que 3 des s_j soient dans le même intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. Comme X_1 est affine sur $[t_i, t_{i+1}[$, elle ne peut interpoler 3 points Q_j que si ces points sont alignés. On va donner une condition nécessaire et suffisante dans deux situations,

1. lorsque $m = N + k$, $t_0 = \cdots = t_k$ et $t_{m-k} = \cdots = t_m$;
2. lorsque N est impair, $Q_{j+N} = Q_j$, $s_{j+N} = s_j + T$, $t_{i+N} = t_i + T$, on cherche un polygone de contrôle fermé $P_{i+N} = P_i$ de sorte que la courbe interpolante soit périodique.

Le problème à résoudre s'écrit

$$\forall j = 0, \ldots, N-1, \quad \sum_{i=0}^{N-1} B_{i,k}(s_j) P_i = Q_j.$$

Il possède une solution unique si et seulement si la matrice carrée A de coefficients $A_{i,j} = B_{i,k}(s_j)$ est inversible.

Lemme 121 *Si la matrice A est inversible, alors ses coefficients diagonaux $B_{j,k}(s_j)$ sont non nuls.*

Preuve. Supposons que $A_{jj} = B_{j,k}(s_j) = 0$. Alors ou bien $s_j \leq t_j$, ou bien $s_j \geq t_{j+k+1}$. Si $s_j \leq t_j$, alors pour tout $i \geq j$ et tout $\ell \leq j$, $s_\ell \leq t_i$ et donc $A_{i\ell} = B_{i,k}(s_\ell) = 0$. Par conséquent, les $j+1$ premières lignes de la matrice A ont leurs $N+1-j$ dernières composantes nulles. Elles sont nécessairement linéairement dépendantes, et A n'est pas inversible.

De même, si $s_j \geq t_{j+k+1}$, alors pour tout $i \leq j$ et tout $\ell \geq j$, $s_\ell \geq t_{i+k+1}$ et donc $A_{i\ell} = B_{i,k}(s_\ell) = 0$, et A n'est pas inversible. pour la même raison. ∎

Remarque. D'après la proposition 99, $B_{j,k}(s_j) \neq 0$ si et seulement si $s_j \in]t_i, t_{i+k+1}[$ (cas périodique) avec l'exception $s_0 = t_0$ ou $s_{N-1} = t_m$ (cas où les noeuds extrêmes sont de multiplicité $k+1$.

On va démontrer une réciproque du lemme 121. La preuve repose sur deux faits.

- les fonctions B-splines sont linéairement indépendantes ;
- une amélioration de la propriété de diminution de la variation.

Lemme 122 *Sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ non vide, les fonctions B-splines de degré k non identiquement nulles sont linéairement indépendantes.*

Preuve. On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 0$, il n'y a qu'une fonction B-spline non nulle par intervalle.

Les fonctions B-splines de degré k non identiquement nulles sur $[t_i, t_{i+1}[$ sont $B_{i-k,k}, \ldots, B_{i,k}$. Soient $P_{i-k}, \ldots, P_i$ des réels tels que la fonction $X_k = \sum_j B_{j,k} P_j$ soit identiquement nulle sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. D'après le lemme 101,

$$X'_k = \sum_{j=i-k}^{i} B_{j,k-1} \frac{k}{t_{i+k} - t_i} (P_j - P_{j-1}).$$

Cette fonction est nulle sur $[t_i, t_{i+1}[$. D'après l'hypothèse de récurrence, les fonctions $B_{i-k+1,k-1}$,..., $B_{i,k-1}$ sont linéairement indépendantes sur cet intervalle, donc pour $j = i-k+1, \ldots, i$, $P_j - P_{j-1} = 0$. Autrement dit, $P_{i-k} = \cdots = P_i$. Il vient

$$X_k = P_i \left(\sum_{j=i-k}^{i} B_{j,k} \right) = P_i = 0$$

donc $P_{i-k} = \cdots = P_i = 0$ et on conclut que les fonctions $B_{i-k,k}, \ldots, B_{i,k}$ sont linéairement indépendantes sur $[t_i, t_{i+1}[$. ∎

Lemme 123 *Soient* **t** *un vecteur de noeuds et* **P** *une suite de réels. On suppose*

1. *ou bien que les neuds extrêmes sont de multiplicité $k+1$, $t_0 = \cdots = t_k$ et $t_{m-k} = \cdots = t_m$, et on note $N = m - k$;*

2. *ou bien que le vecteur de noeuds est périodique,* $t_{i+N} = t_i + T$ *;*

3. *ou bien que* $P_0 = \cdots = P_k = 0$ *et* $P_{N-k} = \cdots = P_N = 0$ *;*

4. *ou un mélange de 1. et 3.*

Soit f *la fonction dééé finie sur* $D_f = [t_0, t_m]$ *(resp. sur* $D_f = \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$*) par*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} B_{i,k}(t) P_i.$$

Notons $Z(f)$ *le nombre de composantes connexes de* $D_f \cap f^{-1}(0)$ *et* $Z(\mathbf{P})$ *le nombre correspondant pour le polygone* $\mathbf{P}$*. Alors*

$$Z(f) \leq Z(P).$$

Preuve.

Pour ϵ réel, notons $P_i^\epsilon = P_i + \epsilon$. La fonction B-spline correspondante est $f^\epsilon = f + \epsilon$. D'après le théorème de Sard (voir [M]), pour presque tout ϵ, f^ϵ et $f^{-\epsilon}$ s'annule transversalement donc change de signe à chacun de ses zéros. Par conséquent, le nombre de zéros de $Z(f^{\pm\epsilon})$ est égal à la variation. D'après la propriété de diminution de la variation,

$$Z(f^{\pm\epsilon}) \leq N - 1.$$

Notons v (resp. v_+, resp v_-) est le nombre de composantes de $f^{-1}(0)$ au voisinage desquelles f change de signe (resp. reste positive ou nulle, resp. reste négative ou nulle).

Cas périodique. Au voisinage d'une composante où f change de signe (resp. reste positive ou nulle), f^ϵ possède au moins 1 (resp. 2) zéros. Par conséquent

$$v + 2v_+ \leq Z(f^\epsilon), \quad v + 2v_- \leq Z(f^{-\epsilon})$$

et l'égalité a lieu pour une fonction affine par morceaux, donc

$$\begin{aligned} 2Z(f) &= 2v + 2v_+ + 2v_- \\ &\leq Z(f^\epsilon) + Z(f^{-\epsilon}) \\ &\leq V(\mathbf{P}^\epsilon) + V\mathbf{P}^\epsilon) \\ &= 2Z(\mathbf{P}). \end{aligned}$$

Cas où les noeuds extrêmes sont de multiplicité $k+1$ ou bien le polygone $\mathbf{P}$ a ses sommets extrêmes de multiplicité $k+1$.

Comme $f(t_0) = P_0$ et $f(t_m) = P_{N-1}$, l'effet de bord (disparition d'un zéro par perturbation) est le même pour f et pour $\mathbf{P}$. L'argument ci-dessus donne encore que $Z(f) \leq Z(\mathbf{P})$. ■

Théorème 22 *Soient* $Q_0, \ldots, Q_{N-1} \in \mathbf{R}^n$ *des points à interpoler, soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds, soient* $s_0 < \cdots < s_{N-1}$ *des réels distincts tels que pour tout* $j = 0, \ldots, N-1$, $B_{j,k}(s_j) \neq 0$*. On suppose*

1. *ou bien que* $m = N + k$, $t_0 = \cdots = t_k$ *et* $t_{m-k} = \cdots = t_m$ *;*

2. *ou bien que* N *est impair,* $Q_{j+N} = Q_j$, $s_{j+N} = s_j + T$, $t_{i+N} = t_i + T$ *;*

Il existe un et un seul polygone de contrôle $\mathbf{P}$ *(resp. un polygone fermé) tel que la courbe B-spline de degré* k *associée satisfasse pour tout* $j = 0, \ldots, m$, $X_k(s_j) = Q_j$*.*

Preuve. On peut supposer que $n = 1$. Dans les deux cas, le nombre $Z(\mathbf{P})$ est au plus égal à $N - 1$. Dans le cas où les noeuds extrêmes sont de multiplicité $k+1$, c'est évident. Dans le cas périodique, on remarque que la variation de $\mathbf{P}$ est forcément paire et inférieure ou égale à N. Comme on a supposé N impair, la variation de P est au plus égale à $N-1$, et elle majore $Z(\mathbf{P})$.

D'après le lemme 123, le nombre de composantes connexes de $Z(X_k)$ est au plus égal à $N-1$. Cela signifie que deux des s_j sont dans la même composante connexe de $X_k^{-1}(0)$, i.e. que la fonction X_k est identiquement nulle sur un intervalle $[t_\ell, t_{\ell+1}[$. D'après le lemme 122, $P_{\ell-k} = \cdots = P_\ell = 0$. Par conséquent, pour tout $j = 0, \ldots, m$,

$$\sum_{i=0}^{\ell-k-1} B_{i,k}(s_j)P_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=\ell+1}^{m} B_{i,k}(s_j)P_i = 0.$$

(resp.

$$\sum_{i=\ell+1}^{N+\ell-k-1} B_{i,k}(s_j)P_i = 0).$$

On peut donc raisonner sur les intervalles $[t_0, t_\ell]$ et $[t_{\ell+1}, t_m]$ (resp. sur $[t_{\ell+1}, t_{N+\ell}]$ et conclure que tous les P_i sont nuls. Ceci prouve que la matrice A est inversible. ■

6.8.2 Interpolation d'une courbe

Si les points Q_j à interpoler sont les valeurs en s_j d'une courbe paramétrée $t \mapsto Y(t) \in \mathbf{R}^n$, on souhaite que lorsque le pas $\max |s_{j+1} - s_j|$ tend vers 0, la courbe B-spline X_k converge uniformément vers la courbe donnée Y.

On trouve dans [K], Theorem 8.33 page 176 et Theorem 8.34 page 178 les estimations suivantes, pour un problème d'interpolation légèrement différent (on prescrit une dérivée à chaque extrémité).

Théorème 23 *Soit $h = 1/m$. On choisit un vecteur de noeuds uniforme périodique $t_i = ih$, $s_j = t_j + 2h$, $k = 3$. Soit X_3 la courbe B-spline de degré 3 telle que $X_3(s_j) = Y(s_j)$.*

Si la courbe donnée Y est de classe C^2,

$$\| Y - X_3 \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} h^{3/2} \| Y'' \|_{L^2} \quad \textit{et} \quad \| Y' - X_3' \|_{L^\infty} \leq h^{1/2} \| Y'' \|_{L^2} .$$

Si Y est de classe C^4, alors

$$\| Y - X_3 \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{16} h^4 \| Y^{(4)} \|_{L^2} .$$

Exemple. Interpolation d'un polygone régulier à N côtés par une courbe B-spline cubique périodique.

Ici, $Y(t) = \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $\| Y^{(4)}(t) \| = (2\pi)^4$, $\| Y^{(4)} \|_{L^2} = (2\pi)^4$ donc

$$\| Y - X_3 \|_{L^\infty} \leq (\frac{\pi}{N})^4.$$

Pour que la courbe approche le cercle à 10^{-8} près, il suffit de prendre $N = 314$.

6.8.3 Choix du vecteur de noeuds

Soient Q_j les points qu'on souhaite interpoler. On suppose données les valeurs s_j du paramètre en lesquelles imposer les conditions $X(s_j) = Q_j$. Comment choisir les noeuds ? Il faut s'assurer que $B_{j,k}(s_j)$ est le plus grand possible. Un choix simple est

$$t_0 = \cdots = t_k = s_0;$$
$$t_i = \frac{s_{i-k} + \cdots + s_{i-1}}{k} \quad \text{pour} \quad k+1 \leq i \leq m-k-1;$$
$$t_{m-k} = \cdots = t_m = s_{m-1}.$$

Par construction, $B_{0,k}(s_0) = B_{m-1,k}(s_{m-1}) = 1$ et pour $k+1 \leq i \leq m-k-1$, $s_j > t_j$ et $s_j < t_{j+k+1}$ donc $B_{j,k}(s_j) > 0$. De plus, dans le cas où les s_j sont uniformément réépartis, ce choix maximise $B_{j,k}(s_j)$.

Ce n'est pas toujours le meilleur choix, voir [HL], figures 4.36c et 4.36d page 206.

6.8.4 Choix des valeurs où imposer la condition d'interpolation

Etant donnés les points Q_j à interpoler, quel est le meilleur choix des s_j ? Pour éviter que la dérivée de la courbe interpolantes soient grandes, il vaut mieux que des points Q_j et Q_{j+1} éloignés soient interpolés en des valeurs s_j et s_{j+1} éloignées. Autrement dit, il faut corréler les espacements $s_{j+1} - s_j$ avec les distances $\| Q_{j+1} - Q_j \|$.

Un choix simple consiste à poser

$$s_{j+1} - s_j = \| Q_{j+1} - Q_j \| .$$

Ce choix s'appelle la *paramétrisation cordale* (`chordal parametrization`). Elle a pour effet de produire une courbe interpolante paramétrée à vitesse à peu près constante.

Lorsque les distances $\| Q_{j+1} - Q_j \|$ varient brutalement, il y a de meilleurs choix, voir [HL], figures 4.36a et 4.36b pages 205 et 206.

6.9 Surfaces B-splines produits tensoriels

6.9.1 Définition

On étend naïvement à la dimension 2 l'idée des courbes B-splines. Le domaine de variation des paramètres est un rectangle, produit cartésien de deux intervalles. On se donne deux vecteurs de noeuds $u_0, \ldots, u_m$ et $v_0, \ldots, v_{m'}$. On se donne, à la place d'un polygone de contrôle, un *réseau de contrôle* (`control net`), i.e. des points P_{ij} indexés par les couples de noeuds $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, m'$.

Définition 124 *La* surface B-spline de bidegré (k, ℓ) *associée aux vecteurs de noeuds* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *et au réseau de contrôle* $\mathbf{P}$ *est la surface paramétrée*

$$(u, v) \mapsto \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m'} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v) P_{ij}.$$

Dans le cas particulier où les deux vecteurs de noeuds sont de la forme $(0, \ldots, O, 1, \ldots, 1)$*, on parle de* carreau de Bézier (`Bézier rectangular patch`).

Si on se donne en plus un poids w_{ij} *pour chaque point de contrôle, la* surface B-spline rationnelle de bidegré (k, ℓ) *associée à toutes les données est la surface paramétrée*

$$(u, v) \mapsto \frac{\sum_{i}^{m} \sum_{j=0}^{m'} w_{ij} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v) P_{ij}}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m'} w_{ij} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v)}.$$

Remarque. Noter que la restriction d'une telle surface paramétrée à toute droite du plan (u, v) parallèle à l'un des axes de coordonnées est une courbe B-spline (resp. rationnelle). Ce n'est pas le cas pour les droites obliques.

Remarque. Il y a des généralisations moins naïves des courbes B-splines aux dimensions supérieures. En effet, il y a une théorie des fonctions B-splines en plusieurs variables, les splines polyédrales, voir par exemple [R] paragraphe 4.7.

Lemme 125 *Soit* $X_{k,\ell}$ *la surface B-spline de bidegré* (k, ell) *associée aux vecteurs de noeuds* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *et au réseau de contrôle* $\mathbf{P}$*. Supposons que* $u_0 = \cdots = u_k$ *est un noeud de multiplicité* $k+1$*. En tout point* (u_0, v)*, les dérivées partielles par rapport à* u*,* $\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v)$ *et* $\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v)$*, coïncident avec les valeurs en* v *de deux courbes B-splines de degré* ℓ *associées aux polygones de contrôle*

$$R_j^1 = \frac{k}{u_{k+1} - u_0}(P_{1j} - P_{0j})$$

et

$$R_j^2 = \frac{k(k-1)}{(u_{k+1}-u_0)(u_{k+2}-u_0)}(P_{2j} - 2P_{1j} + P_{0j})$$

respectivement.

Preuve.
La courbe $u \mapsto X_{k,\ell}(u,v)$ est la B-spline de degré k associée au polygone de contrôle

$$P_i(v) = \sum_j B_{j,\ell}(v) P_{ij}.$$

Si u_0 est un noeud de multiplicité $k+1$, sa dérivée est donnée par la proposition 110

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v) &= \frac{k}{u_{k+1}-u_0}(P_1(v) - P_0(v)) \\ &= \sum_j B_{j,\ell}(v) \frac{k}{u_{k+1}-u_0}(P_{1j} - P_{0j}), \end{aligned}$$

qui est la valeur en v de la courbe B-spline de degré ℓ associée au polygone de contrôle

$$R_j^1 = \frac{k}{u_{k+1}-u_0}(P_{1j} - P_{0j}).$$

Le mécanisme est le même pour la dérivée seconde. ∎

6.9.2 Condition suffisante de raccord pour des surfaces B-splines

Les quantités mises en oeuvre dans le théorème du cours sur la courbure des surfaces ne sont pas données par des formules simples (bien que le calcul soit immédiat à l'aide de l'algorithme de de Casteljau), car elles sont non linéaires. Néanmoins, on peut donner une condition suffisante, mais non nécessaire, de raccord.

On se donne deux surfaces B-splines qu'on cherche à recoller le long d'une courbe à u constant. On donne les conditions pour que les courbes à v constant présentent un raccord G^1 (resp. G^2) pour tout v.

Proposition 126 *Soient* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *et* $\bar{\mathbf{u}}$ *des vecteurs de noeuds. Soient* $\mathbf{P}$ *et* $\bar{\mathbf{P}}$ *des réseaux de contrôle. On suppose que*

- $u_0 = \cdots = u_k$ *et* $\bar{u}_{m-k} = \cdots = \bar{u}_m$ *;*
- *pour tout* j, $P_{0j} = \bar{P}_{(m-k-1)j}$ *;*
- *il existe une constante* $\lambda > 0$ *telle que pour tout* j,

$$P_{1j} - P_{0j} = \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j}).$$

Alors la réunion des deux surfaces B-splines de degré k X_k *(resp.* $\bar{X}_k$*) associées aux noeuds* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *et au réseau de contrôle* $\mathbf{P}$ *(resp. aux noeuds* $\bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}$ *et au réseau de contrôle* $\bar{\mathbf{P}}$*) est une surface de classe* G^1*. Supposons de plus que*

- *il existe des constantes* $\mu > 0$ *et* μ' *telles que pour tout* j,

$$P_{2j} - 2P_{1j} + P_{0j} = \mu(\bar{P}_{(m-k-1)j} - 2\bar{P}_{(m-k-2)j} + \bar{P}_{(m-k-3)j}) + \mu'(P_{1j} - P_{0j});$$

- *pour tout* j,

$$\frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{(u_{k+2}-u_0)(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1})}{(u_{k+1}-u_0)(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2})}.$$

Alors la réunion $X_{k,\ell} \cup \bar{X}_{k,\ell}$ est une surface de classe G^2.

Preuve. Ces conditions linéaires sur les réseaux de contrôle entraînent pour chaque v, des relations analogues pour les dérivées

$$\frac{u_{k+1}-u_0}{k}\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0,v) = \lambda\frac{\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-1}}{k}\frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m,v)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{(u_{k+1}-u_0)(u_{k+2}-u_0)}{k(k-1)}\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0,v) \quad &= \quad \mu\frac{(\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-1})(\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-2})}{k(k-1)}\frac{\partial^2 \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u^2}(\bar{u}_m,v) \\ &\quad +\mu'\frac{u_{k+1}-u_0}{k}\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0,v).\end{aligned}$$

La première entraîne l'égalité des tangentes orientées et donc le raccord G^1, d'après la proposition 115.

De la seconde, on tire que

$$\frac{(u_{k+1}-u_0)^2(u_{k+2}-u_0)}{k^2(k-1)}\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}\wedge\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2} = \lambda\mu\frac{(\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-1})^2(\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-2})}{k(k-1)}\frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}\wedge\frac{\partial^2 \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u^2}$$

qui entraîne l'égalité des normales orientées. Si de plus

$$\frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{(u_{k+2}-u_0)(\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-1})}{(u_{k+1}-u_0)(\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-2})},$$

alors les courbures coïncident. Par conséquent, pour chaque v, les courbes $u \mapsto X_{k,\ell}(u,v)$ et $u \mapsto \bar{X}_{k,\ell}(u,v)$ satisfont les conditions de raccord G^2 de la proposition 115. Le corollaire du cours sur le courbure des surfaces montre alors que les surfaces se raccordent avec régularité G^2. ■

6.9.3 Raccordement le long d'une droite

Les conditions suffisantes de raccord de la proposition 126 ne sont évidemment pas nécessaires. Par exemple, pour raccorder une surface B-spline à un demi-plan, il suffit que le réseau de contrôle soit contenu dans le plan considéré.

Toutefois, dans le cas particulier où la courbe de suture est une droite (à l'ordre 2 il faut en plus que le plan tangent soit constant le long de cette droite, ce qui est le cas pour les cylindres et les cônes), on peut donner une condition suffisante qui est génériquement nécessaire.

Proposition 127 *Soient* $\mathbf{u}$, $\bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}$ *des vecteurs de noeuds. On suppose que* $u_0 = \cdots = u_k$ *et* $\bar{u}_{m-k} = \cdots = \bar{u}_m$. *Soit* $\bar{\mathbf{P}}$ *un réseau de contrôle tel que la surface B-spline* $\bar{X}_{k,\ell}$ *correspondante soit bordée par une droite* D. *Soit* $\mathbf{P}$ *un autre réseau de contrôle, et* $X_{k,\ell}$ *la surface B-spline de bidegré* (k,ℓ) *correspondante.*

- *Pour que les surfaces* $X_{k,\ell}$ *et* $\bar{X}_{k,\ell}$ *se raccordent* G^0, *il faut et il suffit que les points* P_{0j} *soient sur* D.

- *Supposons que pour tout* j, $P_{0j} = \bar{P}_{(m-k-1)j}$. *Notons* τ *un vecteur directeur de la droite* D *qui borde* $\bar{X}_{k,\ell}$. *Pour que le raccord soit de classe* G^1, *il suffit qu'il existe une constante* λ *telle que pour tout* j,

$$(P_{1j}-P_{0j})\wedge\tau = \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j}-\bar{P}_{(m-k-2)j})\wedge\tau,$$

  et c'est génériquement nécessaire.

- *Supposons de plus que le plan tangent à $\bar{X}_{k,\ell}$ est constant le long du bord, de vecteur normal Γ. Pour que le raccord soit de classe G^2, il faut et il suffit que pour tout j,*

$$\frac{u_{k+1}-u_0}{u_{k+2}-u_0}(P_{2j}-P_{0j})\cdot\Gamma = \lambda^2\frac{\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-1}}{\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-2}}(\bar{P}_{(m-k-1)j}-\bar{P}_{(m-k-3)j})\cdot\Gamma.$$

Preuve. Si les points de contrôle P_{0j} sont sur D, la courbe B-spline $v\mapsto X_{k,\ell}(u_0,v)$ est contenue dans D.

Inversement, notons pr la projection parallèlement à $D=\partial\bar{X}_{k,\ell}$ sur un plan π transverse à D. S'il y a raccord G^0, c'est que la courbe $v\mapsto X_{k,\ell}(u_0,v)$ est contenue dans la droite D, donc sa projection est constante (mettons, égale à 0). On a donc pour tout v

$$\sum_j B_{j,\ell}(v)pr(P_{0j})=0.$$

Comme les fonctions B-splines non nulles sur un intervalle entre deux noeuds sont linéairement indépendantes (lemme 122), cela entraîne que $pr(P_{0j})=0$ pour tout j, i.e. que les points P_{0j} sont sur la droite D.

Supposons que pour tout j, $P_{0j}=\bar{P}_{(m-k-1)j}$ et

$$(P_{1j}-P_{0j})\wedge\tau=\lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j}-\bar{P}_{(m-k-2)j})\wedge\tau,$$

où λ ne dépend pas de j. Alors, comme dans la preuve de la proposition 126, pour tout v,

$$\frac{u_{k+1}-u_0}{k}\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0,v)\wedge\tau=\lambda\frac{\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-1}}{k}\frac{\partial\bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m,v)\wedge\tau.$$

Par conséquent, les vecteurs τ, $\dfrac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0,v)$ et $\dfrac{\partial\bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m,v)$ sont coplanaires, donc les deux surfaces ont même plan tangent en chaque point de leur bord, et le raccord est de classe G^1.

La condition que pour tout j, $P_{0j}=\bar{P}_{(m-k-1)j}$ n'est pas nécessaire mais on la suppose satisfaite, car c'est seulement dans ce cas que la condition de raccord G^1 est linéaire. Supposons le raccord de classe G^1. Alors pour tout v, les plans tangents en $X_{k,\ell}(u_0,v)$ aux surfaces $\bar{X}_{k,\ell}$ et $X_{k,\ell}$ sont égaux, donc les vecteurs

$$\frac{\bar{u}_m-\bar{u}_{m-k-1}}{k}\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0,v)\wedge\tau=\begin{pmatrix}A(v)\\B(v)\\C(v)\end{pmatrix}$$

et

$$\frac{u_{k+1}-u_0}{k}\frac{\partial\bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m,v)\wedge\tau=\begin{pmatrix}E(v)\\F(v)\\G(v)\end{pmatrix}$$

sont colinéaires. Pour un choix générique du réseau de contrôle $\bar{\mathbf{P}}$, les polynômes A et B (resp. A et C) sont premiers entre eux, donc l'égalité $AF-EB=0$ (resp. $AG-EC=0$) entraîne que C divise G, B divise F et A divise E, donc il existe un polynôme H tel que $E=HA$, $F=HB$ et $G=HC$. Comme les polynômes en jeu sont de même degré ℓ, nécessairement $H=\lambda$ est constant. Or

$$\begin{pmatrix}E\\F\\G\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$$

est la courbe B-spline de degré ℓ associée au polygone de contrôle

$$(P_{1j}-P_{0j}-\lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j}-\bar{P}_{(m-k-2)j}))\wedge\tau.$$

Si elle est identiquement nulle, tous les points de contrôle sont nuls, donc pour tout j,

$$(P_{1j} - P_{0j} - \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j})) \wedge \tau = 0.$$

Supposons que le plan tangent à la surface $\bar{X}_{k,\ell}$ le long de D est constant, de vecteur normal Γ. Pour toute surface X contenant D et de vecteur normal constant, égal à Γ, le long de D, la seconde forme fondamentale en tout point P du bord est dégénérée, avec τ comme direction principale, de courbure principale nulle. En effet,

$$II_P(\tau, w) = \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \cdot w = 0$$

pour tout vecteur $w \in T_P X$. Par conséquent $II_P(w)$ ne dépend que de la composante orthogonale à τ de w. Soient $\bar{w}$ et w deux vecteurs orthogonaux à Γ, et tels que

$$w \wedge \tau = \bar{w} \wedge \tau \neq 0.$$

Alors les surfaces $\bar{X}_{k,\ell}$ et $X_{k,\ell}$ ont même seconde forme fondamentale en P si et seulement si

$$\bar{II}_P(\bar{w}) = II_P(w).$$

Au point $P = X_{k,\ell}(u_0, v)$, on choisit

$$\bar{w} = \lambda(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1})\frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v) \quad \text{et} \quad w = (u_{k+1} - u_0)\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v).$$

Or

$$II_P(\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v)) = \Gamma \cdot \frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v)$$

et le lemme 125 donne

$$\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v) = \sum_j B_{j,\ell} \frac{k(k-1)}{(u_{k+1} - u_0)(u_{k+2} - u_0)}(P_{2j} - 2P_{1j} + P_{0j}),$$

donc l'identité

$$\bar{II}_{X_{k,\ell}(u_0,v)}(\bar{w}) = II_{X_{k,\ell}(u_0,v)}(w).$$

est satisfaite pour tout v si et seulement si pour tout j,

$$\frac{u_{k+1} - u_0}{u_{k+2} - u_0}(P_{2j} - P_{0j}) \cdot \Gamma = \lambda^2 \frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2}}(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-3)j}) \cdot \Gamma.$$

On conclut à l'aide du théorème du cours sur la courbure des surfaces. ∎

6.10 Surfaces NURBS

6.10.1 Définition

Définition 128 *Une surface NURBS dans $\mathbf{R}^3$, c'est la projection centrale d'une surface B-spline produit tensoriel dans $\mathbf{R}^4$. Autrement dit, on se donne deux vecteurs de noeuds, un polyèdre de contrôle et un poids w_{ij} pour chaque point de contrôle P_{ij}, et la surface associée est paramétrée par*

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = \frac{\sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w_{ij}}.$$

De la sorte, les courbes à u constant et à v constant sont des NURBS.

6.10.2 Surfaces de révolution

Proposition 129 *Soit γ une NURBS de degré k tracée dans un plan Π et soit D une droite de Π. La surface de révolution obtenue en faisant tourner γ autour de D est une NURBS de bidegré $(2,k)$.*

Preuve. Montrons le pour un quart de cette surface (pour obtenir la totalité de la surface par une paramétrisation périodique, utiliser l'exercice 68). On va utiliser la paramétrisation rationnelle d'un quart de cercle,

$$u \mapsto (\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}).$$

On voit cette courbe comme la projection centrale de la courbe de Bézier quadratique σ de $\mathbf{R}^3$ donnée par

$$u \mapsto \sigma(u) = (1+u^2, 1-u^2, 2u).$$

On peut supposer que la droite D est l'axe Oz et Π le plan des x et z. Notons P_{0j} le polygone de contrôle de γ, w_{0j} les poids et $R_{0j} = (w_{0j}, w_{0j}P_{0j}) \in \mathbf{R}^4$. Notons v le paramètre sur γ. On veut qu'à v constant, $u \mapsto X(u,v)$ soit le quart de cercle du plan $\{z = z(v)\}$ d'origine $\gamma(v) = (x(v), 0, z(v))$ et d'extrémité $(0, y(v), z(v))$, paramétré rationnellement. On pose donc

$$\begin{aligned} X(u,v) &= \begin{pmatrix} x(v)\frac{1-u^2}{1+u^2} \\ x(v)\frac{2u}{1+u^2} \\ z(v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-u^2}{1+u^2} & -\frac{2u}{1+u^2} & 0 \\ \frac{2u}{1+u^2} & \frac{1-u^2}{1+u^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma(v). \end{aligned}$$

Soit

$$c(v) = \sum_j B_{j,k}(v) R_{0j}$$

la courbe B-spline dans $\mathbf{R}^4$ dont la projection centrale est γ. Posons

$$Y(u,v) = \begin{pmatrix} 1+u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-u^2 & -2u & 0 \\ 0 & 2u & 1-u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+u^2 \end{pmatrix} c(v).$$

Alors $Y(u,v) = (\sigma_0(u)c_0(v), \sigma_0(u)c_0(v)X(u,v))$. Autrement dit, X est la projection centrale de Y.

Il reste à montrer que Y est une surface B-spline produit tensoriel. Décomposons la matrice

$$M(u) = \begin{pmatrix} 1+u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-u^2 & -2u & 0 \\ 0 & 2u & 1-u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

dans la base des polynômes de Bernstein de degré 2. Il vient

$$M(u) = (1-u)^2 M_0 + 2u(1-u)M_1 + u^2 M_2$$

où

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} Y(u,v) &= M(u)c(v) \\ &= (\sum_i B_{i,2}(u)M_i)(\sum_j B_{j,k}(v)R_{0j}) \\ &= \sum_{i,j} B_{i,2}(u)B_{j,k}(v)R_{ij} \end{aligned}$$

où $R_{ij} = M_i R_{0j}$. On conclut que Y est une surface B-spline produit tensoriel de bidegré $(2,k)$, donc X est une surface NURBS.

Le polyèdre de contrôle de X s'obtient à partir de celui de γ comme suit. Les P_{0j} sont les points de contrôle de γ. P_{2j} est l'image de P_{0j} par la rotation de 90^0 autour de l'axe Oz, et P_{1j} est l'image de P_{0j} par la rotation de 45^0 autour de l'axe Oz suivie d'une dilatation d'un facteur $\sqrt{2}$ dans les directions horizontales.

Les poids pour la surface X sont les $w_{ij} = w'_i w_j$ où les w'_i sont les poids 1, 1 et 2 du quart de cercle et les w_j sont les poids de γ. ∎

Exercice 72 *Déterminer le polyèdre de contrôle et les poids pour un quart de cylindre droit d'axe vertical, de hauteur h et de section circulaire de rayon 1 et pour un huitième de la sphère unité.*

Exercice 73 *Soit V un vecteur de $\mathbf{R}^3$. Soit γ une courbe NURBS dans $\mathbf{R}^3$. Déterminer le polyèdre de contrôle et les poids pour la surface balayée par la translation de γ le long de V.*

Exercice 74 *Soit Q un point de $\mathbf{R}^3$. Soit γ une courbe NURBS dans $\mathbf{R}^3$ ne passant pas par Q. Déterminer le polyèdre de contrôle et les poids pour le cône de sommet Q sur γ, i.e. la réunion des segments reliant Q aux point de γ.*

6.10.3 Surfaces de balayage

La terminologie de ce paragraphe et du suivant est empruntée à CATIA.

Une *surface de balayage* (`sweep surface`) dépend de la donnée de trois courbes

1. La *courbe guide*(`guide`) g, dans l'espace.
2. Le *profil* (`profile`) p, dans un plan.
3. L'*épine dorsale* (`spine`) s, dans l'espace.

Lorsque l'épine dorsale est une droite, l'idée est de translater le profil le long de la guide. La surface obtenue a pour bord deux translatées de la guide et deux translatées du profil. Plus généralement, on souhaite, tout en le translatant, faire tourner le plan où se trouve le profil. Dans le cas général, l'épine dorsale sert à spécifier un plan mobile via son plan normal. Plus précisément, soit $F(u)$ la rotation de l'espace qui amène le repère de la scène sur le repère de Frenet (ses colonnes sont les composantes des vecteurs τ, ν et b dans le repère fixe). Alors la surface de balayage est obtenu en appliquant la rotation $F(u)F(0)^{-1}$ au profil, puis en le translatant de $g(u)$. Noter le paramètre u commun à s et g : on dit que g et s sont *couplées*.

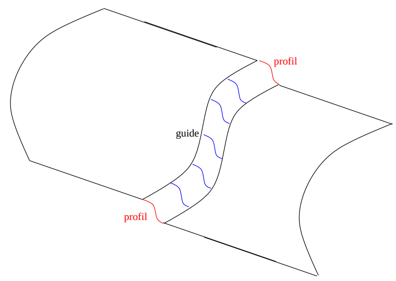


Figure 6.1: Loft servant à raccomoder une surface brisée

Définition 130 *Etant données une courbe plane p et deux courbes gauches g et s* couplées, *i.e. paramétrées par le même paramètre, la* surface de balayage *correspondante est paramétrée par*

$$X(u,v) = g(u) + F(u)F(0)^{-1}p(v).$$

où $F(u)$ est la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs τ, ν et b du repère de Frenet de s dans le repère fixe.

Exemple. Une surface de révolution peut être vue comme une surface de balayage. Le profil est la méridienne, dans un plan. La guide et l'épine dorsale sont des cercles dont l'axe est l'axe de révolution.

Exemple. Un tube est une surface de balayage pour laquelle le profil est un cercle, la guide et l'épine dorsale coïncident.

Exemple. On peut prescrire le bord de la surface, pourvu que deux arêtes opposées soient translatées l'une de l'autre. Par exemple, imaginons qu'on casse une surface en deux le long d'une courbe g et qu'on translate une moitié. On construit des raccords plans pour les courbes qui formaient le bord de la surface initiale. Alors une surface de balayage à spine rectiligne convient pour raccorder la surface brisée, voir figure 6.1.

Exemple. Les surfaces de balayage, et plus généralement les lofts, ont plus de degrés de liberté et permettent de traiter des situations plus générales.

Par exemple, pour une surface de balayage, on peut prescrire le bord, à condition qu'il soit formé de deux translatés de la guide et de deux images du profil par des déplacements. En effet, soient Π et Π' les plans contenant les deux copies du profil. Soit Π'' un plan perpendiculaire à Π et à Π'. Si la seconde copie est obtenue à partir de la première par une rotation d'axe parallèle à Π, toute courbe tracée dans Π'' et coupant orthogonalement Π et Π' peut servir d'épine dorsale.

Clairement, si g, p et $u \mapsto M(u)$ sont des NURBS, la surface de balayage est rationnelle, donc c'est une surface NURBS. On décrit deux exemples de surfaces de balayage pour lesquelles ont peut préciser le réseau de contrôle.

Proposition 131 *Si s est une droite et si g et p sont des NURBS de degrés k et k', la surface de balayage est une surface NURBS de bidegré (k,k'). Si P_i (resp. w_i) sont les points de contrôle (resp. les poids) de g et Q_j (resp. w'_j) les points de contrôle (resp. les poids) de p, alors le réseau de contrôle de la surface de balayage est $P_{i,j} = P_i + Q_j$ et ses poids sont $w_{i,j} = w_i w'_j$.*

Preuve. Lorsque l'épine dorsale est une droite, la surface de balayage est paramétrée par

$$\begin{aligned} X(u,v) &= g(u) + p(v) \\ &= \frac{\sum_i B_{i,k}(u) w_i P_i}{\sum_i B_{i,k}(u) w_i} + \frac{\sum_j B_{j,k'}(v) w'_j Q_j}{\sum_j B_{j,k'}(v) w'_j} \\ &= \frac{\sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w_i w'_j (P_i + Q_j)}{\sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w_i w'_j}. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque. Si l'épine dorsale s est une NURBS, les vecteurs τ, ν et b du repère de Frenet, qui ne dépendent pas linéairement de s, ne sont pas des NURBS en général. Il sera donc nécessaire de les remplacer par des B-splines obtenue par exemple par interpolation. C'est pourquoi l'énoncé suivant répond bien aux exigences de la pratique.

Proposition 132 *Soit p une courbe NURBS plane de poids w'_j, de points de contrôle Q_j. Soit g une courbe B-spline gauche de points de contrôle P_i. Soit $u \mapsto M(u)$ une courbe B-spline dans l'espace des matrices 3×3, de points de contrôle M_i. On suppose M couplée à g, avec même degré et même vecteur de noeuds. Alors la surface paramétrée par*

$$X(u,v) = g(u) + M(u)p(v)$$

est une surface NURBS de poids $w_{i,j} = w'_j$ et de réseau de contrôle $P_{i,j} = P_i + M_iQ_j$.

Preuve. Par hypothèse,

$$M(u) = \sum_i B_{i,k}(u)M_i,$$

$$g(u) = \sum_i B_{i,k}(u)P_i$$

et

$$p(v) = \frac{\sum_j B_{j,k'}(v)w'_jQ_j}{\sum_j B_{j,k'}(v)w'_j}.$$

Il vient

$$X(u,v) = \frac{\sum_{i,j} B_{i,k}(u)B_{j,k'}(v)w'_j(P_i + M_iQ_j)}{\sum_j B_{j,k'}(v)w'_j}$$

qui est bien la surface NURBS de poids $w_{i,j} = w'_j$ et de réseau de contrôle $P_{i,j} = P_i + M_iQ_j$. ∎

Remarque. Si g et M sont des NURBS de degré k, alors la surface de balayage est une surface NURBS de bidegré $(2k, k')$, dont le réseau de contrôle est donné par une formule moins simple.

6.10.4 Surfaces de remplissage

Une *surface de remplissage* (`loft`) est déterminée par

- une *courbe guide* (`guide`) g dans l'espace ;
- deux *profils* (`profiles`) p_0 et p_1 tracés dans un même plan ;
- une *épine dorsale* (`spine`) s dans l'espace.

Comme dans le cas de la surface de balayage, la guide sert à translater le premier profil, l'épine dorsale sert à spécifier une famille de matrices $u \mapsto M(u)$. Pour compléter la description, il faut spécifier un procédé de déformation continu du premier profil au second. Choisissons une déformation affine

$$u \mapsto (1-u)p_0(v) + up_1(v).$$

Définition 133 *Etant données deux courbes gauches g et s et deux courbes p_0 et p_1 tracées dans un même plan, la* surface de remplissage *correspondante est paramétrée par*

$$X(u,v) = g(u) + F(u)F(0)^{-1}((1-u)p_0(v) + up_1(v))$$

où $F(u)$ est la matrice dont les colonnes sont les composantes dans le repère fixe des vecteurs $\tau(u)$, $\nu(u)$ et $b(u)$ du repère de Frenet de s.

Proposition 134 *Soient p_1 et p_2 deux courbes B-splines couplées, ayant même degré et même vecteur de noeuds, tracées dans un même plan. Soit g une courbe B-spline dans l'espace. Soient $u \mapsto M_0(u)$ et $u \mapsto M_1(u)$ deux courbes B-spline dans l'espace des matrices 3×3, couplées à g, de même degré et même vecteur de noeuds. Alors la surface paramétrée par*

$$X(u,v) = g(u) + M_0(u)p_0(v) + M_1(u)p_1(v))$$

est la surface B-spline (resp. une surface NURBS) de réseau de contrôle $P_{i,j} = P_i + M_i^0 Q_j^0 + M_i^1 Q_j^1$.

Preuve. Par hypothèse,

$$M(u) = \sum_i B_{i,k}(u) M_i,$$

$$g(u) = \sum_i B_{i,k}(u) P_i$$

et

$$p_0(v) = \sum_j B_{j,k'}(v) Q_j^0, \quad p_1(v) = \sum_j B_{j,k'}(v) Q_j^1$$

Il vient

$$X(u,v) = \sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w_j'(P_i + M_i^0 Q_j^0 + M_i^1 Q_j^1). \blacksquare$$

Remarque. A quelle condition une surface de balayage ou de remplissage est-elle régulière ? L'expérience semble prouver qu'il vaut mieux choisir la spine la plus simple possible. Lorsque c'est possible, une droite a des chances de donner le meilleur résultat.

6.11 Appendice : Résolution numérique d'un problème d'interpolation par une courbe B-spline

On va traiter le cas le plus favorable.

Supposons que $k = 3$, que le vecteur de noeuds est uniforme $t_i = i$ et que s_j est au maximum de la fonction $B_{j,3}$, i.e. $s_j = t_j + 2$ et $B_{j,3}(s_j) = 2/3$. On se donne un polygone périodique ($Q_m = Q_0$) à interpoler et on cherche un polygone de contrôle périodique. On peut supposer que $n = 1$. Il s'agit de résoudre le système $A\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ pour $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^N$ et $A_{ij} = B_{i,3}(s_j)$. Cela s'écrit (les indices sont modulo N)

$$\frac{1}{6} P_{j-1} + \frac{2}{3} P_j + \frac{1}{6} P_{j+1} = Q_j.$$

La matrice A est symétrique. Les coefficients non nuls de A se rangent dans au plus 4 diagonales. De plus (on utilise la structure euclidienne de $\mathbf{R}^N$), la matrice A est *coercive*,

$$A\mathbf{p}.\mathbf{p} \geq \frac{1}{3} \parallel \mathbf{P} \parallel^2 .$$

Cela indique que la résolution devrait être efficace. On applique la méthode du *gradient conjugué*.

6.11.1 Rappels sur la méthode du gradient conjugué

Soit E un espace de Hilbert et q une forme quadratique définie positive sur E, $q(x) = Ax \cdot x$. Alors x est solution de l'équation $Ax = y$ si et seulement si x est le minimum de la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{2} Az \cdot z - y \cdot z$. La méthode consiste à chercher les minima x_r de la fonction f sur les sous-espaces vectoriels croissants

$$E_r = vect\{y,\, Ay, \ldots, A^r y\}.$$

Alors $x_r - x_{r-1}$ est donné par une formule simple au moyen de produits scalaires. La suite x_r converge vers la solution véritable x_∞. En particulier, si E est de dimension N, alors $x_N = x_\infty$. L'expérience prouve que $x_{N/5}$ est souvent déjà très proche de x_∞.

Proposition 135 *On définit trois suites x_r, v_r et e_r par $x_0 = 0$, $v_0 = y$, les relations de récurrence*

$$x_{r+1} = x_r - \frac{e_r \cdot v_r}{Av_r \cdot v_r} v_r,$$

$$v_{r+1} = e_{r+1} - \frac{Av_r \cdot e_{r+1}}{Av_r \cdot v_r} v_r$$

et

$$e_r = Ax_r - y.$$

Alors la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}Ax \cdot x - y \cdot x$ atteint son minimum sur E_r en x_r. La suite x_r converge vers l'unique solution x_∞ de l'équation $Ax = y$. De plus, on a l'estimation a posteriori

$$A(x_\infty - x_r) \cdot (x_\infty - x_r) = e_r \cdot (x_{r+1} - x_r).$$

Si A est coercive, i.e. $\| x \|^2 \leq C\, Ax \cdot x$, on a l'estimation a posteriori

$$\| x_\infty - x_r \| \leq C \ \| Ax_r - y \| .$$

Preuve. Définissons x_r comme le point de E_r où la restriction de f à E_r atteint son minimum. Il existe et est unique par stricte convexité. Pour la même raison, si E_∞ est l'adhérence de la réunion des E_r, la fonction uniformément convexe f atteint son minimum sur E_∞ en un unique point x_∞.

On utilise le produit scalaire associé à la forme quadratique q,

$$a \cdot_A b = Aa \cdot b.$$

Relativement à cette structure euclidienne, les ensembles de niveau de f sont des sphères centrées en x_∞. Les ensembles de niveau de la restriction de f à E_r sont des sphères centrées en x_r. Soit $s \leq r - 1$. Au point x_s où f atteint son minimum sur E_s cette sphère est tangente à E_s, donc $x_r - x_s \perp_A E_s$. En particulier $x_\infty - x_s \perp_A E_s$.

Posons $e_r = Ax_r - y$. Alors $e_r \in E_{r+1}$. Or $e_r = A(x_r - x_\infty) \perp E_r$, donc en particulier $e_r \cdot e_{r-1} = 0$.

Considérons la suite v_r définie par $v_0 = y$ et par la relation de récurrence

$$v_{r+1} = e_{r+1} - \frac{v_r \cdot_A e_{r+1}}{v_r \cdot_A v_r} v_r.$$

Montrons par récurrence sur r que $v_r \in E_{r+1}$, $v_r \perp_A E_r$ et

$$x_{r+1} = x_r - \frac{e_r \cdot v_r}{Av_r \cdot v_r} v_r.$$

Lorsque $r = 0$, $v_0 = y \in E_1$ par définition et $E_0 = \{0\}$.

Supposons connu que $v_{r-1} \in E_r$, $v_{r-1} \perp_A E_{r-1}$ et

$$x_r = x_{r-1} - \frac{e_{r-1} \cdot v_{r-1}}{Av_{r-1} \cdot v_{r-1}} v_{r-1}.$$

On remarque que $e_r \in AE_r \subset E_{r+1}$ donc $v_r \in E_{r+1}$.

D'autre part, $x_\infty - x_r \perp_A E_r$, donc $e_r = A(x_\infty - x_r) \perp_A A^{-1}E_r$. Or $AE_{r-1} \subset E_r$ donc $e_r \perp_A E_{r-1}$. Comme v_r est un vecteur du plan engendré par e_r et v_{r-1}, il est orthogonal à E_{r-1}. Par construction, $v_r \perp_A v_{r-1}$.

Si $v_{r-1} = 0$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, $x_r = x_{r-1}$, donc $e_r = e_{r-1}$. Comme $e_r \cdot e_{r-1} = O$, nécessairement $e_{r-1} = 0$, donc $x_\infty = x_{r-1}$. On conclut que $x_{r+1} = x_r$, $v_r = 0$ et la relation de récurrence pour x_{r+1} est satisfaite.

On peut donc supposer que $v_{r-1} \neq 0$. Alors E_r est engendré par E_{r-1} et v_{r-1}, donc $v_r \perp_A E_r$.

Si $v_r = 0$, alors e_r est colinéaire à v_{r-1}. Or $e_r \perp E_{r-1}$. Nécessairement $e_r = 0$, donc $x_{r+1} = x_r$ et la relation de récurrence pour x_{r+1} est à nouveau satisfaite.

On peut donc supposer que $v_r \neq 0$. Alors v_r est une base de l'orthogonal de E_{r-1} dans E_r, donc il existe un réel λ tel que $x_{r+1} - x_r = \lambda v_r$. Comme cette valeur de λ minimise $f(x_r + \lambda v_r)$, nécessairement

$$\lambda = -\frac{x_r \cdot_A v_r - y \cdot v_r}{v_r \cdot_A v_r},$$

comme annoncé.

Par construction, la distance (mesurée au moyen de $x \mapsto AX \cdot x$) de x_∞ au sous-espace E_r est atteinte en x_r. Comme la réunion des E_r est dense dans E_∞, cette distance, égale à $A(x_\infty - x_r) \cdot (x_\infty - x_r)$, tend vers 0. Remarquer que les vecteurs $x_{r+1} - x_r$ sont deux à deux orthogonaux (ils sont colinéaires aux vecteurs obtenus en orthonormalisant la base y, Ay,...,$A^r y$...). On a donc

$$\sum_{r=0}^{\infty} A(x_{r+1} - x_r) \cdot (x_{r+1} - x_r) = Ax_\infty \cdot x_\infty.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \| x_r - x_\infty \|^2 &\leq C\, A(x_r - x_\infty) \cdot (x_r - x_\infty) \\ &= (Ax_r - y) \cdot (x_r - x_\infty) \\ &\leq \| Ax_r - y \| \| x_r - x_\infty \| \end{aligned}$$

d'où

$$\| x_\infty - x_r \| \leq C \ \| Ax_r - y \| \ . \blacksquare$$

6.11.2 Méthode de Jacobi

On peut aussi utiliser la méthode de résolution de Jacobi (voir [K], Theorem 4.2 page 55). Soit D est la diagonale de A. Alors

$$Ax = y \Leftrightarrow x = -D^{-1}(A - D)x + D^{-1}y$$

et on itère la transformation affine $x \mapsto -D^{-1}(A - D)x + D^{-1}y$. Celle-ci est contractante lorsque $\mathbf{R}^{n+1}$ est muni de la norme ℓ^1. En effet,

$$q = \| D^{-1}(A - D) \|_{\ell^1 \to \ell^1} = \max\{|A_{jj}|^{-1} \sum_{i \neq j} |A_{ji}| \ ; \ j = 0, \ldots, m\}$$

qui dans le cas présent vaut $q = 1/2$. Posant $x_0 = O$ et

$$x_{\nu+1} = -D^{-1}(A - D)x_\nu + D^{-1}y,$$

on peut affirmer que la solution x satisfait

$$\| x - x_\nu \|_{\ell^1} \leq \frac{q^\nu}{1-q} \| D^{-1}y \|_{\ell^1} \ .$$

et dans le cas présent $\dfrac{q^\nu}{1-q} = 2^{1-\nu}$.

Exemple. Interpolation d'un polygone régulier à m côtés par une courbe B-spline cubique périodique.

Le polygone à interpoler (la donnée y) est

$$Q_j = (\cos(2\pi j/m), \sin(2\pi j/m)).$$

Munissons $(\mathbf{R}^2)^m$ de la norme

$$\| \mathbf{Q} \|_{\ell^1} = \sum_{j=1}^{m} \| Q_j \| \ .$$

Alors

$$\| D^{-1}y \| = \frac{3m}{2}$$

donc après ν itérations, la distance ℓ^1 à la solution vaut au plus $12m/2^\nu$. Si $m = 10$, pour que la somme des erreurs (distances de la courbe aux points à interpoler) soit inférieure à 10^{-8}, il suffit de 33 itérations. L'estimation

$$\| x - x_\nu \|_{\ell^1} \leq \frac{q}{1-q} \| x_\nu - x_{\nu-1} \|_{\ell^1}$$

indique qu'il suffit de s'arrêter lorsque $\| x_\nu - x_{\nu-1} \|_{\ell^1} \leq 10^{-8}$.

Noter que chaque itération nécessite moins de $10m$ opérations arithmétiques et une capacité de stockage du même ordre.

Chapter 7

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1. *Hyperboloïdes.*

La différentielle de l'équation de X_ϵ est $2xdx + 2ydy - 2zdz$ qui s'annule à l'origine. Si $\epsilon \neq 0$, l'origine n'est pas sur X_ϵ, donc X_ϵ est une surface lisse. Si $\epsilon = 0$, X_ϵ n'est pas une surface lisse au voisinage de 0. En effet, supposons qu'il existe un difféomorphisme ϕ qui redresse X_0 sur un plan vectoriel π. Alors pour t assez petit, π contient la courbe $t \mapsto \phi(t, 0, t)$ donc π contient son vecteur vitesse $d_P\phi(1, 0, 0)$. Pour la même raison, π contient $d_P\phi(0, 1, 0)$ et $d_P\phi(1, 1, \sqrt{2})$. Or ces 3 vecteurs forment une base $\mathbf{R}^3$, donc aussi leurs images par la différentielle $d_P\phi$, contradiction. ∎

Solution de l'exercice 2. *Projection d'une courbe.*

La différentielle d'une projection orthogonale est la projection orthogonale sur un plan vectorielle. Par conséquent, la dérivée de $t \mapsto pr(c(t))$ est $pr(c'(t))$. Ce vecteur s'annule si et seulement si $c'(t)$ est dans le noyau de pr, i.e. est orthogonale au plan image de la projection. ∎

Solution de l'exercice 3. *Paramétrisation de la sphère au voisinage des pôles.*

Au voisinage du pôle nord $N = (0, 0, 1)$, on peut par exemple écrire la sphère comme le graphe d'une fonction f définie au au voisinage de $(0, 0)$ dans le plan. Celle-ci doit satisfaire $f(0, 0) = 1$ et $x^2 + y^2 + f(x, y)^2 = 1$ donc $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. La paramétrisation est alors $(u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$. Elle est non dégénérée en chaque point du disque plan $D = \{(u, v)\,;\, u^2 + v^2 < 1\}$.

Au voisinage du pôle sud, on prend $(u, v) \mapsto (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$. ∎

Solution de l'exercice 4. *Plan tangent à un paraboloïde hyperbolique.*

C'est le plan vectoriel orthogonal au gradient de la fonction $(x, y, z) \mapsto z - xy$, son équation est $-vx - uy + z = 0$. C'est aussi le plan engendré par les dérivées partielles de la paramétrisation $(u, v) \mapsto (u, v, uv)$, soit $(1, 0, v)$ et $(0, 1, u)$. Un vecteur orthogonal à ce plan est le produit vectoriel $(-v, -u, 1)$ donc on retrouve l'équation $-vx - uy + z = 0$. ∎

Solution de l'exercice 5. *Plans verticaux transverses à un tore de révolution.*

On calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\cos(v)\sin(u) \\ -\sin(v)\sin(u) \\ \cos(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix} -sin(v)(2 + \cos(u)) \\ \cos(v)(2 + \cos(u)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis un vecteur normal

$$\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} = (2 + \cos(u)) \begin{pmatrix} -\cos(v)\cos(u) \\ -\sin(v)\cos(u) \\ -\sin(u) \end{pmatrix}.$$

Le plan d'équation $\{y = \epsilon\}$ est tangent au tore si et seulement si il existe u et v tels que $\sin(v)(2 + \cos(u)) = \epsilon$ et $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$ est colinéaire à $(0, 1, 0)$. La seconde condition donne $\sin(u) = 0$ puis

$\cos(v) = 0$ ce qui correspond à 4 points du tore,

$$(0,3,0), \quad (0,1,0), \quad (0,-1,0), \quad (0,-3,0).$$

Il y a dans la famille de plans considérés exactement 4 plans qui ne sont pas transverses au tore. ∎

Solution de l'exercice 7. *Lieu des zéros d'une fonction définie sur une surface.*

Par hypothèse, $d_P f \neq 0$ donc au voisinage de P, f est l'équation non dégénérée d'une surface X'. L'ensemble qui nous intéresse est l'intersection $X \cap X'$. Or le plan tangent à X' en P, noyau de $d_P f$, est distinct de $T_P X$, donc d'après le théorème 4, l'intersection $X \cap X'$ est une courbe au voisinage de P, et sa tangente en P est l'intersection des plans tangents, donc le noyau de la restriction de $d_P f$ à $T_P X$. ∎

Solution de l'exercice 9. *Arête d'un polyèdre curviligne.*

D'après le théorème 5, quitte à faire un changement de coordonnées curviligne (i.e. à transporter la figure par un difféomorphisme) on peut supposer que $P = 0$ et que X_1 et X_2 sont les plans de coordonnées $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$.

Soit B une boule ouverte de centre P telle que $\partial F \cap B \subset X_1 \cup X_2$. Comme F est propre, P est dans l'adhérence de l'intérieur de F, donc $B \cap \mathrm{int(F)} \neq \emptyset$. Soit $Q = (u, v, w)$ un point intérieur de F voisin de P. Comme l'intérieur de F n'est pas contenu dans $X_1 \cup X_2$, on peut supposer que $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Quitte à changer de coordonnées, on peut supposer que $u > 0$ et $v > 0$.

Notons $B_{++} = B \cap \{u > 0,\, v > 0\}$. C'est un convexe donc il est connexe. Supposons que $F \cap B_{++} \neq \emptyset$. Comme F est fermé, $F \cap B_+$ est fermé dans B_{++}. Comme ∂F est disjoint de B_{++}, $F \cap B_{++} = \mathrm{int(F)} \cap B_+$ est ouvert dans B_+. On conclut que $F \cap B_{++} = B_{++}$, i.e. que F contient B_{++}.

De la même façon, on montre que $F \cap B$ privé de $X_1 \cup X_2$ est la réunion de plusieurs des 4 secteurs $B_{\pm\pm}$, intersections de B avec les 4 quadrants ouverts définis par X_1 et X_2. Il y a donc 4 cas de figure : ou bien F ne contient qu'un secteur, ou bien il en contient 2 contigus, ou bien 2 opposés, ou bien il contient 3 secteurs. Dans le second cas, F est une variété à bord au voisinage de p. Dans le troisième cas, $F = X_1 \cup X_2$ au voisinage de P. Dans le premier et le dernier cas, $F \cap X_i$ est un demi-plan, i.e. une surface à bord, au voisinage de P. ∎

Solution de l'exercice 10. *Orientation du bord d'un hémisphère.*

D'après l'énoncé, au point $(1,0,0)$, la normale orientée à $H = \{P \in \mathbf{R}^3 \,;\, x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, z \geq 0\}$ est $\Gamma = (1,0,0)$. La normale sortante au bord de H est $\Delta = (0,0,-1)$. La tangente orientée au bord est donc $\tau = (0,1,0)$. La paramétrisation $s \mapsto (\cos s, \sin s, 0)$ est compatible avec cette orientation. ∎

Solution de l'exercice 11. *Orientations induites sur une arête par deux faces contigües.*

Par hypothèse, il existe un difféomrphisme qui redresse F au voisinage de P sur le quadrant $Q = \{x \geq 0,\, y \geq 0\}$ ou son complémentaire (voir exercice 9. Les surfaces X_1 et X_2 sont redressées sur les plans $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ qui délimitent le quadrant Q. Si F coïncide localement avec Q, la normale sortante à X_1 est $\Gamma_1 = (0,-1,0)$ et la normale sortante à X_2 est $\Gamma_2 = (-1,0,0)$. La tangente induite par $F \cap X_1$ sur $X_1 \cap X_2$ est $\tau_1 = (-1,0,0)$ alors que la tangente induite par $F \cap X_2$ sur $X_1 \cap X_2$ est $\tau_2 = (1,0,0)$. Si F coïncide avec le complémentaire de Q au voisinage de P, toutes les orientations sont renversées. Dans les 2 cas, les orientations induites par les surfaces à bord $F \cap X_1$ et $F \cap X_2$ sur $X_1 \cap X_2$ au voisinage de P sont opposées.

Solution de l'exercice 12. *Coarêtes.*

L'arête (A, B) fait partie du bord de 4 facettes carrées

$$F_1 = \{x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}, \quad F_2 = \{x = 1, 1 \leq y \leq 2, 1/2 \leq z \leq 3/2\},$$

$$F_3 = \{y = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}, \quad F_4 = \{y = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

L'orientation normale de F_1 est donnée par $(1,0,0)$ donc une base orthonormée directe du plan contenant F_1 est $((0,1,0),(0,0,1))$. L'ordre circulaire sur les sommets de F_1 fait donc venir $A = (1,1,1/2)$ avant $B = (1,1,1)$, et $((A,B),F_1)$ est une coarête de P.

L'orientation normale de F_2 est donnée par $(-1,0,0)$ donc une base orthonormée directe du plan contenant F_2 est $((0,1,0),(0,0,-1))$. L'ordre circulaire sur les sommets de F_2 fait donc venir $A=(1,1,1/2)$ avant $B=(1,1,1)$, et $((A,B),F_2)$ est une coarête de P.

L'orientation normale de F_3 est donnée par $(0,1,0)$ donc une base orthonormée directe du plan contenant F_3 est $((0,0,1),(1,0,0))$. L'ordre circulaire sur les sommets de F_3 fait donc venir $B=(1,1,1)$ avant $A=(1,1,1/2)$, et $((A,B),F_3)$ n'est pas une coarête de P.

L'orientation normale de F_4 est donnée par $(0,-1,0)$ donc une base orthonormée directe du plan contenant F_4 est $((0,0,1),(-1,0,0))$. L'ordre circulaire sur les sommets de F_4 fait donc venir $B=(1,1,1)$ avant $A=(1,1,1/2)$, et $((A,B),F_4)$ n'est pas une coarête de P.

Solution de l'exercice ??. *Intersection nettoyées versus réunion.*
Montrer que si F et G sont des fermés propres, $(F^*\cap G^*)^*=F\cup G$.

Solution de l'exercice 13. *Espaces tangents à la bipyramide.*
Soit Q le polyèdre de $\mathbf{R}^3$ défini par les inéquations $\{x_i\geq 0,\sum x_i\leq 1\}$. Soit Q' le polyèdre obtenu en translatant S du vecteur $(1/3,1/3,1/3)$. On pose $P=Q\cup Q'$. Déterminer pour chaque point de P son espace tangent.

Solution de l'exercice 14. *Facteur euclidien.*
Soit C un cône polyédral de sommet 0. Vérifier qu'il existe un cône polyédral $C'\subset (T_0C)^{\perp}$ tel que C soit le produit de C' et de l'espace affine T_0C.

Solution de l'exercice 15. *Cône tangent à l'intersection d'une boule et d'un cylindre..*
Le cône tangent en P à la sphère unité est le demi-espace $\{z\leq 1\}$. Le cône tangent en P au cylindre droit d'axe $\{x=0;\, y=1\}$ et de rayon 1 est le demi-espace $\{y\geq 0\}$. Par conséquent, le cône tangent au point $P=(0,0,1)$ à F est l'intersection de ces demi-espaces, soit le quadrant $\{z\leq 1;\, y\geq 0\}$. L'espace tangent est donc la droite $\{z=1;\, y=0\}$.

En chaque point du bord du cylindre, le plan tangent contient le vecteur $(1,0,0)$. Ce vecteur n'est tangent à la sphère que le long de l'équateur. Or l'équateur ne coupe le cylindre qu'en 2 points du plan $\{z=0\}$. Or sphère et cylindre coupent ce plan suivants 2 cercles transverses, donc en ces points la sphère et le bord du cylindre sont transverses, et leur intersection c est une courbe lisse. On conclut que la sphère et le bord du cylindre sont transverses. Par conséquent, la dimension de l'espace tangent à F en un point du bord de F vaut 1 le long de c et 2 ailleurs. Il y a donc une arête, c, et 2 facettes.

Solution de l'exercice 16. *Bord d'un cône.*
Vérifier que $\partial\text{cône}\,(x,L)=\text{cône}\,(x,\partial L)$.

Solution de l'exercice 17. *Lien d'un orthant.*
Dessiner le sous-ensemble L de la sphère tel que le cône sur L soit un orthant.

Solution de l'exercice 18. *Triangle sphérique.*
Sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$, soit $\theta_1=(0,0,1)$ le pôle nord, soit $\theta_2=(1,0,0)$ le point de l'équateur de longitude nulle et soit $\theta_3=(0,1,1/\sqrt{2})$ le point de longitude 90^0 et de latitude 45^0. Dessiner l'enveloppe convexe de ces trois points sur la sphère.

Solution de l'exercice 19. *Cônes dans la sphère.*
Dans $\mathbf{R}^3$, soit $\theta=(0,0,1)$ le pôle nord de la sphère unité. Soit L l'ensemble des points de l'équateur de longitude multiple de 15^0. Soit L' l'ensemble des points de l'équateur de longitude comprise entre 0 et 15^0. Dessiner le cône de sommet θ et de base L (resp. L').

Solution de l'exercice 20. *Faces d'un polyèdre sphérique.*
Soit L un polyèdre sphérique. Vérifier que si F est une face de F de dimension k, alors $\text{cône}\,(0,F)$ est une face de $\text{cône}\,(0,L)$ de dimension $k+1$.

Solution de l'exercice 21. *Bord d'un lien.*
Vérifier que $\text{lien}(x,\partial P)=\partial\text{lien}(x,P)$.

Solution de l'exercice 22. *Critère local de convexité.*

Montrer qu'un polyèdre P est convexe si et seulement si P est connexe et pour tout $x \in P$, lien(x, P) est contenu dans une hémisphère.

Solution de l'exercice 23. *Transversalité de deux cubes.*
Soit P le cube unité de $\mathbf{R}^3$ et $Q_v = P + v$ le cube obtenu en translatant P du vecteur v. Montrer que P et Q_v sont transverses si et seulement si $v \notin \partial P$.

Solution de l'exercice 24. *Limite pour une courbe de longueur finie.*

$$\| X(t) - X(a) - \int_a^t X'(u)\,du \| \leq \int_t^b \| X'(u) \| \ du$$

qui tend vers 0 quand t tend vers b.

Solution de l'exercice 25. *Variation d'une fonction le long d'une courbe.*
$t \mapsto f(X(t))$ est une courbe de classe C^1 dans $\mathbf{R}$ donc sa longueur est donnée par

$$\begin{aligned}
\text{long}\,(f \circ c) &= \int_a^b \| \nabla f(X(t)) \cdot X'(t) \| \ dt \\
&\leq \int_a^b \| \nabla f(X(t)) \| \| X'(t) \| \ dt \\
&\leq \int_a^b \| X'(t) \| \ dt \\
&= \text{long}\,(c).
\end{aligned}$$

Enfin, la distance entre les extrémités $f(X(a))$ et $f(X(b))$ est majorée par la longueur.

Solution de l'exercice 26. *Longueur d'une courbe donnée par une équation polaire.*
On paramètre c par $t \mapsto f(t)(\cos(t), \sin(t))$. Le vecteur vitesse s'écrit

$$c'(t) = f'(t)e_r + f(t)e_\theta$$

où la base

$$e_r(r, \theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad e_\theta(r, \theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

est orthonormée. Par conséquent $\| c'(t) \| = \sqrt{f'(t)^2 + f(t)^2}$ et la longueur de la courbe entre ses points d'angles polaires θ_1 et θ_2 vaut

$$lng(c) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta. \ \blacksquare$$

Solution de l'exercice 27. *Abscisse curviligne le long d'une parabole.*
On calcule

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + u^2}\, du = \frac{1}{2}(\log(t + \sqrt{1 + t^2}) + t\sqrt{1 + t^2}). \ \blacksquare$$

Solution de l'exercice 28. *Courbure d'un graphe.*
On calcule

$$\frac{dX}{dt} = (1, f'(t)), \quad \| \frac{dX}{dt} \| = \sqrt{1 + f'(t)^2}, \quad \frac{d^2X}{dt^2} = (0, f''(x))$$

d'où

$$\kappa = \frac{f''(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}^3}.$$

La dérivée seconde est égale à la courbure si $f'(t) = 0$, i.e. si la tangente est horizontale. Elle donne une bonne idée de la courbure tant que la pente de la tangente n'est pas trop grande. $\blacksquare$

Solution de l'exercice 29. *Tangente et courbure d'une courbe donnée par une équation polaire.*
On paramètre c par $t \mapsto f(t)(\cos(t), \sin(t))$. Le vecteur vitesse s'écrit

$$c'(t) = f'(t)e_r + f(t)e_\theta$$

donc la tangente est la droite de pente f/f' dans le repère tournant.
L'accélération s'écrit

$$c''(t) = (f''(t) - f'(t))e_r + 2f'(t)e_\theta$$

donc la courbure vaut

$$\kappa(c(t)) = \frac{2f'^2 - ff'' + f^2}{\sqrt{f^2 + f'^2}^3}. \blacksquare$$

Solution de l'exercice 30. *Caractérisation des cercles.*
On peut utiliser la proposition 13. Une fois fixée la position et la vitesse initiale, il y a une seule courbe de courbure κ. Si $\kappa = 0$, une droite convient. Sinon, un cercle convient.
Autre solution. Soit $x \mapsto X(s)$ une courbe plane paramétree par son abscisse curviligne, de courbure constante κ. Si $\kappa = 0$, $X''(s) = 0$ donc $X(s) = X(0) + s\tau(0)$ est une droite. Supposons $\kappa \neq 0$. Posons $Y(s) = X(s) + \frac{1}{\kappa}\nu(s)$. Alors $Y'(s) = \tau(s) + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\tau(s)) = 0$ donc $Y(s) = P$ est constant et $\| X(s) - P \| = \frac{1}{\kappa}$ est constant, X paramètre le cercle de cercle de centre P et de rayon $\frac{1}{\kappa}$. $\blacksquare$

Solution de l'exercice 32. *Vitesse de la courbe équidistante.*
Comme $\nu(s) = J\tau(s)$ et J est linéaire et indépendante de s,

$$\nu'(s) = J\tau'(s) = JX''(s) = J(\kappa(s)\nu(s)) = -\kappa(s)\tau(s).$$

Il vient

$$X_\epsilon'(s) = X'(s) - \epsilon\nu'(s) = (1 - \epsilon\kappa(s))\tau(s)$$

puis

$$\mathrm{long}\,(X_\epsilon) = \int_I |1 - \epsilon\kappa(s)|\, ds.$$

Si ϵ est assez petit, alors pour tout s, $\kappa(s) < 1/\epsilon$, d'où

$$\mathrm{long}\,(X_\epsilon) = \int_I (1 - \epsilon\kappa(s))\, ds = \mathrm{long}\,(X) - \epsilon \int_I \kappa(s)\, ds. \blacksquare$$

Solution de l'exercice 33. *Roulement d'un disque le long d'une courbe.*
Les centres décrivent les courbes équidistantes X_ϵ et $X_{-\epsilon}$. D'après la proposition-définition 61, comme $\epsilon < i$, le long de X_ϵ (resp $X_{-\epsilon}$), la distance à γ vaut ϵ. Cela signifie que le disque de rayon ϵ et de centre $X_\epsilon(s)$ est tangent à γ en $X(s)$ mais n'empiète pas sur γ. $\blacksquare$

Solution de l'exercice 34. *Nombre d'enroulement.*
On pose

$$\phi(s) = \int_0^s \kappa(u)\, du.$$

Alors le vecteur vitesse est donné, en notation complexe, par

$$X'(s) = \exp(i\phi(s))X'(0).$$

Comme X est périodique de période L, $X'(L) = X'(0)$ donc $\exp(i\phi(L)) = 1$, i.e. $\phi(L)$ est un multiple entier de 2π.
Etant donné $m \neq 0$, un cercle parcouru $|m|$ fois dans un sens convenable a pour nombre d'enroulement m. Cas où $m = 0$: on pose, pour $t \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$,

$$X(t) = (\frac{1}{2}\sin 2t, 2\sqrt{2}\sin t).$$

Alors $\| X'(t) \| = 2\cos^2 t + 1$ ne s'annulle pas. La longueur de la courbe est $L = 4\pi$. Par conséquent, on peut reparamétrer X par son abscisse curviligne. Les symétries de X

$$X(t+2\pi) = X(t), \quad X(t+\pi) = \sigma(X(t))$$

où σ est la symétrie par rapport à l'axe des x, se traduisent en symétries de X_1,

$$X_1(s+L) = X_1(s), \quad X_1(s+\frac{1}{2}L) = \sigma(X_1(s)).$$

Comme σ renverse l'orientation, la courbure satisfait

$$\kappa(s+\frac{1}{2}L) = -\kappa(s).$$

Par conséquent

$$\int_0^L \kappa(s)\, ds = 0.$$

Supposons la courbe strictement convexe. Alors la fonction $s \mapsto \phi(s)$, $\mathbf{R}/L\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, est strictement croissante. Par conséquent, elle envoie tout intervalle ouvert assez petit sur un intervalle ouvert. En particulier, son image est un ouvert de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Comme elle est continue et comme $\mathbf{R}/L\mathbf{Z}$ est compact, son image est compacte. Par connexité, son image est tout $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, i.e. tout vecteur unitaire u est la tangente à X en au moins un point $X(s)$, s modulo L. En fait, l'équation $\tau(s) = u$ a au plus 2 solutions distinctes modulo L. En effet, les solutions correspondent à des tangentes parallèles. Or un compact convexe possède exactement 2 tangentes parallèles à une direction donnée. Etant donné un vecteur unitaire u, notons $s_{1,+}$ et $s_{2,+}$ (resp. $s_{1,-}$ et $s_{2,-}$) les solutions de l'équation $\tau(s) = u$ (resp. $\tau(s) = -u$). Comme exactement 2 des points $X(s_{i,\pm})$ sont distincts, nécessairement $s_{1,+} = s_{2,+}$ (resp. $s_{1,-} = s_{2,-}$), i.e. la fonction $s \mapsto \phi(s)$, $\mathbf{R}/L\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, est une bijection. Cela entraîne que $\phi(L) = \phi(0) \pm 2\pi$, i.e. que $w(X) = \pm 1$. ∎

Solution de l'exercice 35. *Caractérisation des courbes planes.*

Supposons la courbe sans point d'inflexion. Alors $b' = -\theta\nu$.

Si la courbe est contenue dans un plan π, alors π est automatiquement le plan osculateur en tout point, donc la binormale est constante, et la torsion est nulle.

Inversement, si la torsion est nulle, la binormale b est constante. La dérivée du produit scalaire $X(s)\cdot b$ vaut $\tau \cdot b = 0$ donc $X(s)\cdot b$ est constant, $X(s)$ reste dans un plan orthogonal à b. ∎

Solution de l'exercice 36. *Caractérisation des hélices.*

On calcule $\dfrac{dX}{dt} = (-R\sin t, R\cos t, \alpha)$ d'où $\| \dfrac{dX}{dt} \| = \sqrt{R^2+\alpha^2}$ est constant. Par conséquent, l'abscisse curviligne est $s = t/\sqrt{R^2+\alpha^2}$ et

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{R^2+\alpha^2}}(-R\sin t, R\cos t, \alpha).$$

On calcule $\dfrac{d^2X}{dt^2} = (-R\cos t, -R\sin t, 0)$ d'où

$$X''(s) = \frac{1}{R^2+\alpha^2}(-R\cos t, -R\sin t, 0).$$

Le plan osculateur fait donc un angle constant avec la verticale, $\nu = (-\cos t, -\sin t)$,

$$\kappa = \frac{R}{R^2+\alpha^2} \quad \text{et} \quad b = \tau \wedge \nu = \sqrt{R^2+\alpha^2}^{-1}(\alpha \sin t, -\alpha\cos t, R).$$

On calcule $\dfrac{d}{dt}\nu = (\sin t, -\cos t, 0)$ d'où

$$\nu' = \sqrt{R^2+\alpha^2}^{-1}(\sin t, -\cos t, 0)$$

et

$$\theta = \frac{\alpha}{R^2 + \alpha^2}.$$

On constate que courbure et torsion sont constantes.

Réciproquement, supposons que $s \mapsto X(s)$ est une courbe paramétrée par son abscisse curviligne, dont la courbure et la torsion sont constantes. Si $\kappa = 0$, la courbe est une droite. Sinon, le repère de Frenet est bien défini et satisfait une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants $F' = AF$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \theta \\ 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix},$$

qui se résoud en $F(s) = \exp(sA)F(0)$. Il vient $\tau(s) = \exp(sA)\tau(0)$ et

$$X(s) = X'0) + \int_0^s \exp(sA)\tau(0)\, ds.$$

Autrement dit, la courbe X est uniquement déterminée à déplacement près.

La matrice $\exp(sA)$ est celle d'une rotation d'axe $\theta\tau(0) + \kappa b(0)$. Par conséquent, le vecteur $\theta\tau(s) + \kappa b(s)$ est constant. Choisissons un repère de référence orthonormé direct dont le troisième vecteur e_3 est colinéaire à $\theta\tau(0) + \kappa b(0)$. Alors les produits scalaires $\tau(s) \cdot e_3$, $\nu(s) \cdot e_3$ et $b(s) \cdot e_3$ sont constants. En particulier (quitte à déplacer l'origine) $X(s) \cdot e_3 = cs$ est une fonction linéaire de s. Posons $Y(s) = X(s) - cse_3$. Alors la courbe Y est plane et sa courbure est constante, donc c'est un cercle parcouru à vitesse constante (exercice 30). On conclut que X est une hélice.

Solution de l'exercice 37. *Courbure et torsion de la courbe normale.*

On trouve $\| \frac{dX}{dt} \| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$. Le plan osculateur a pour équation $3t^2x - 3ty + z = 0$. La courbure vaut $2\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}^{-3}\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}$, la torsion vaut $\frac{3}{1 + 9t^2 + 9t^4}$. La binormale vaut

$$b = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}^{-1}(3t^2, -3t, 1)$$

et la normale

$$\nu = b \wedge \tau = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}^{-1}\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}^{-1}(-9t^3 - 2t, -9t^4 + 1, 6t^3 - 3t).$$

En $t = 0$, le plan osculateur est horizontal, la normale vaut $(0, 1, 0)$, la binormale $(0, 0, 1)$.

Solution de l'exercice 38. *Première forme fondamentale de la sphère.*

Le point de longitude $\phi = 0$ et de latitude $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ a pour coordonnées $(\cos\theta, 0, \sin\theta)$. Le point de longitude $\phi \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et de latitude θ s'obtient en lui appliquant une rotation d'angle ϕ autour de l'axe des z, i.e.

$$X(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$ds^2 = d\theta^2 + (\cos\theta)^2 d\phi^2.$$

Un parallèle est paramétré par $\phi \mapsto (\theta, \phi)$, $\phi \in [0, 2\pi[$, donc sa longueur est

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\theta)^2}\, d\phi = 2\pi\cos\theta.$$

On calcule

$$\frac{\partial X}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial\phi} = -X(\theta, \phi)$$

donc le vecteur unitaire normal orienté est $\Gamma(\theta,\phi) = -X(\theta,\phi)$, il pointe vers l'intérieur de la sphère. L'élément d'aire vaut $\cos\theta\,d\theta\,d\phi$ donc l'aire de la sphère vaut

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\,d\phi = 4\pi. \blacksquare$$

Solution de l'exercice 39. *Distance intrinsèque sur la sphère.*

On note $N = (0,0,1)$ le pôle nord et on utilise les coordonnées θ (latitude) et ϕ (longitude). Si $P = X(\theta,\phi)$ (voir exercice 38), alors $\mathrm{Arccos}(P\cdot N) = (\pi/2)-\theta$. Soit $t\mapsto(\theta(t),\phi(t))$, $t\in[0,1]$, une courbe dans le plan reliant (θ_0,ϕ_0) à $(\pi/2,\phi_1)$. La longueur de son image sur la sphère satisfait

$$\begin{aligned}\mathrm{long}\,(X\circ c) &= \int_0^1\sqrt{\theta'(t)^2+\cos(\theta(t))^2\phi'(t)^2}\,dt\\ &\geq \int_0^1|\theta'(t)|\,dt\\ &\geq |\frac{\pi}{2}-\theta_0|.\end{aligned}$$

L'égalité a lieu si $\phi' = 0$, i.e. pour un arc de méridien. Par conséquent, parmi toutes les courbes reliant $P = X(\theta_0,\phi_0)$ au pôle nord et qui sont l'image d'une courbe plane par la paramétrisation X, l'arc de méridien a une longueur minimum.

Il reste à voir que toute courbe évitant les pôles mais convergeant vers le pôle nord est de ce type. C'est un argument topologique. $\blacksquare$

Solution de l'exercice 40. *Aire d'une surface de révolution.*

On remplace le méridien semi-circulaire

$$\theta\mapsto\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\sin\theta\end{pmatrix}.$$

par une courbe quelconque

$$u\mapsto\begin{pmatrix}r(u)\\0\\z(u)\end{pmatrix}$$

tracée dans le plan $\{y=0\}$. On obtient pour la surface de révolution la paramétrisation

$$(u,v)\mapsto X(u,v) = \begin{pmatrix}r(u)\cos v\\r(u)\sin v\\z(u)\end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \begin{pmatrix}r'(u)\cos v\\r'(u)\sin v\\z'(u)\end{pmatrix},\quad \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix}-r(u)\sin v\\r(u)\cos v\\0\end{pmatrix},\quad \frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v} = r(u)\begin{pmatrix}-z'(u)\cos v\\-z'(u)\sin v\\r'(u)\end{pmatrix}$$

d'où

$$\|\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}\| = r(u)\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}$$

et enfin, si on considère le secteur de la surface d'angle ϕ,

$$\mathrm{Aire}(X) = \int\int_0^{\phi} r(u)\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}\,dv\,du = \int_0^{\ell}\phi r(s)\,ds$$

où s est l'abscisse curviligne le long de la méridienne. Si ℓ désigne la longueur de la méridienne, la valeur moyenne

$$\ell^{-1}\int r(s)\,ds$$

est la distance du centre de gravité de la méridienne à l'axe. On obtient donc le théorème de Guldin : l'aire d'un secteur d'une surface de révolution est le produit de la longueur de la méridienne par la longueur du cercle parcouru par le centre de gravité de la méridienne.

Dans le cas d'un tore de révolution, l'aire vaut donc $2\pi r_1 \times 2\pi r_2$.

Solution de l'exercice 41. *Seconde forme fondamentale de la sphère.*

Au pôle nord $P = (0,0,1)$, le plan tangent est le plan vectoriel horizontal $H = \{z = 0\}$, la normale orientée est le vecteur $\nu = (0,0,-1)$. Au voisinage du pôle nord, la sphère unité est paramétrée par

$$H \mapsto \mathbf{R}^3, \quad v \mapsto P + v + f(v)\Gamma$$

où $f(v) = -\sqrt{1-\parallel v \parallel^2}$. Le développement limité à l'ordre 2 de f en 0 est

$$f(v) = \frac{1}{2} \parallel v \parallel^2 + o(\parallel v \parallel^2)$$

donc la seconde forme fondamentale est simplement $v \mapsto \parallel v \parallel^2$. En fonction des coordonnées x et y sur H, elle s'écrit $(x,y) = x^2 + y^2$ ou bien simplement $dx^2 + dy^2$. Les courbures principales valent 1. Toute direction est une direction principale, toute courbe est une ligne de courbure.

Solution de l'exercice 42. *Seconde forme fondamentale d'un cylindre.*

Au point $P = (c(0), z)$, le plan tangent au cylindre est engendré par $(0,0,1)$ et par le vecteur tangent à la courbe $\tau(0)$. La normale unitaire est donc la normale $\nu(0)$ à la courbe. On écrit la courbe comme un graphe

$$u \mapsto P + u\tau + f(u)\Gamma,$$

de sorte que la courbure apparaissent dans le développement limité

$$f(u) = \frac{1}{2}\kappa(0)u^2 + o(u^2).$$

Le cylindre devient un graphe

$$(u,v) \mapsto P + u\tau + (0,0,v) + f(u)\Gamma$$

avec une fonction qui ne dépend que de u. Le développement limité ci-dessus donne pour la seconde forme fondamentale du cylindre l'expression

$$q(u,v) = \kappa(0)u^2.$$

Elle est dégénérée. Les courbures principales valent 1 et $\kappa(s)$. Les directions principales en un point $(c(s), z)$ sont la droite verticale et la tangente à c. Les liignes de courbure sont les droites verticales (directrices) et les sections par des plans horizontaux.

Solution de l'exercice 43. *Les droites contenues dans les surfaces sont des directions asymptotiques.*

Soit $t \mapsto Y(t) = P + su$ une paramétrisation affine de D. Alors $Y'' = 0$ donc en chaque point $II(u) = II(Y'(t)) = Y''(t) \cdot \Gamma(Y(t)) = 0$ et D est une direction asymptotique.

Solution de l'exercice 44. *Seconde forme fondamentale et lignes asymptotiques d'un paraboloïde hyperbolique.*

A partir de la paramétrisation $(u,v) \mapsto X(u,v) = (u,v,uv)$, on calcule

$$\parallel \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \parallel = \sqrt{1+u^2+v^2},$$

$A = C = 0$ et
$$B = \| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \|^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$
donc la seconde forme fondamentale s'écrit
$$II = \frac{2}{\sqrt{1+u^2+v^2}} du\, dv.$$
Les droites isotropes de cette forme quadratique sont les axes de coordonnées. On retrouve le fait que les droites contenues dans la surfaces sont des courbes asymptotiques.

Avec la paramétrisation $(u', v') \mapsto X_1(u', v') = (u'/v', v', u')$, il vient
$$\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \| = v'^{-2} \sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2},$$
puis $A = 0$,
$$B = \frac{1}{\sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2}}$$
et
$$C = \frac{2u'}{v' \sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2}}$$
d'où
$$II_{(\frac{u'}{v'}, v', u')} = \frac{1}{\sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2}} (2\, du'\, dv' - 2\frac{u'}{v'}\, dv'^2).$$
Il s'agit bien de la même forme quadratique sur le plan tangent. En effet, si on substitue $u' = uv$, $v' = v$, $du' = v\, du + u\, dv$, $dv' = dv$, on trouve
$$II_{(\frac{u'}{v'}, v', u')} = \frac{2}{\sqrt{1+u^2+v^2}} du\, dv = II(u, v, uv).$$
En d'autres termes, un vecteur tangent au point $P = (\frac{u'}{v'}, v', u') = (u, v, uv)$ peut s'écrire sous deux formes,
$$w = a\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) + b\frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \quad \text{ou} \quad a'\frac{\partial X}{\partial u}(u', v') + b'\frac{\partial X}{\partial v}(u', v').$$
Nécessairement
$$a' = du'(w) = (v\, du + u\, dv)(w) = va + ub \quad \text{et} \quad b' = dv'(w) = dv(w) = b.$$
Alors
$$II_P(w) = \frac{1}{\sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2}} (2a'b' - 2\frac{u'}{v'} b'^2) = \frac{2ab}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

Solution de l'exercice 45. *Seconde forme fondamentale et lignes asymptotiques du cône sur une courbe plane.*

On suppose c paramétrée par son abscisse curviligne. On utilise la paramétrisation
$$(u, v) \mapsto X(u, v) = (1-u)V + uc(v) = (ux(v), uy(v), 1-u).$$
Il vient
$$\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \| = |u| \sqrt{1 + \det(c, c')^2},$$
$A = B = 0$ et
$$C = \| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \|^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}) = \frac{-|u|\kappa(v)}{\sqrt{1 + \det(c, c')^2}}.$$

La seconde forme fondamentale s'écrit donc

$$II = \frac{-|u|\kappa(v)}{\sqrt{1+\det(c,c')^2}}dv^2.$$

Elle est dégénérée, du signe de la courbure de c. Le long de la directrice passant par un point de c où la courbure de c n'est pas nulle, la droite isotrope est l'axe des u. Par conséquent, lorsque c n'a pas de point d'inflexion, les courbes asymptotiques sont les directrices du cône. Le long de la directrice passant par un point d'inflexion de c, la seconde forme fondamentale est identiquement nulle.

Solution de l'exercice 46. *Seconde forme fondamentale et lignes asymptotiques du cône sur une courbe tracée sur la sphère unité.*

On suppose c paramétrée par son abscisse curviligne. On utilise la paramétrisation

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = uc(v).$$

Il vient

$$\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \| = |u|$$

car $c' \cdot c = 0$, $A = B = 0$ et

$$C = \| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \|^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}) = |u| \det(c, c', c'').$$

Autrement dit, C s'annule si et seulement si le plan osculateur de la courbe c passe par l'origine. La seconde forme fondamentale s'écrit donc

$$II = |u| \det(c, c', c'')\, dv^2.$$

Elle est dégénérée, son signe dépend de la position de l'origine par rapport au plan osculateur de la courbe c. Le long de la directrice passant par un point de c où la courbure de c n'est pas nulle, la droite isotrope est l'axe des u. Par conséquent, lorsque le plan osculateur de c ne passe jamais par l'origine, les courbes asymptotiques sont les directrices du cône.

Solution de l'exercice 47. *Courbures principales, directions principales d'une surface de révolution. Cas particulier d'un tore de révolution.*

On paramètre la méridienne par

$$u \mapsto \begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix}$$

et la surface entière en faisant tourner la méridienne autour de l'axe des z, soit

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u)\cos v \\ r(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \begin{pmatrix} r'(u)\cos v \\ r'(u)\sin v \\ z'(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix} -r(u)\sin v \\ r(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(X(u,v)) = \sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}^{-1} \begin{pmatrix} -z'(u)\cos v \\ -z'(u)\sin v \\ r'(u) \end{pmatrix}.$$

La première forme fondamentale est donc

$$(r'(u)^2 + z'(u)^2)du^2 + r(u)^2 dv^2.$$

On calcule ensuite

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} r''(u)\cos v \\ r''(u)\sin v \\ z''(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} -r'(u)\sin v \\ r'(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -r(u)\cos v \\ -r(u)\sin v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{(-z'(u)r''(u) + z''(u)r'(u))}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}},$$

$B = 0$ et

$$C = \frac{r(u)z'(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}}.$$

La seconde forme fondamentale s'écrit donc

$$II_{X(u,v)} = \frac{(-z'(u)r''(u) + z''(u)r'(u))du^2 + (r(u)z'(u))dv^2}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}}.$$

La matrice S qui permet d'exprimer la seconde forme fondamentale par rapport à la première est donc

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} r'(u)^2 + z'(u)^2 & 0 \\ 0 & r(u)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{-z'(u)r''(u)+z''(u)r'(u)}{\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r(u)z'(u)}{\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-z'(u)r''(u)+z''(u)r'(u)}{\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}^3} & 0 \\ 0 & \frac{z'(u)}{r(u)\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc les directions principales sont les axes, les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles, les courbures principales sont

$$k_1(X(u,v)) = \frac{-z'(u)r''(u) + z''(u)r'(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}^3}$$

(c'est la courbure de la méridienne) et

$$k_2(X(u,v)) = \frac{z'(u)}{r(u)\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}}.$$

Cas particulier du tore de révolution.

Dans ce cas, la méridienne est un cercle ne rencontrant pas l'axe de rotation, soit

$$r(u) = r_1 + r_2 \cos u, \quad z(u) = r_2 \sin u$$

où $0 < r_2 < r_1$. Les courbures principales sont

$$k_1 = \frac{1}{r_1} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\cos u}{r_1 + r_2 \cos u}.$$

La courbure de Gauss change de signe le long des 2 cercles de points où le plan tangent est horizontal, elle est positive dans la partie convexe et négative du côté de l'axe, comme il se doit.

Solution de l'exercice 48. *Courbures principales d'un tube.*

Soit $u \mapsto c(u)$ une courbe gauche sans point d'inflexion, paramétrée par son abscisse curviligne. Le plan vectoriel orthogonal à la tangente τ à c est engendré par la normale unitaire ν et la binormale b. On choisit de paramétrer la surface X balayée par le cercle de rayon ϵ par

$$(u,v) \mapsto c(u) + \epsilon\cos(v)\nu(u) + \epsilon\sin(v)b(u).$$

On calcule

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (1 - \epsilon\kappa\cos(v))\tau - \epsilon\theta\sin(v)\nu + \epsilon\theta\cos(v)b, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\epsilon\sin(v)\nu + \epsilon\cos(v)b.$$

On note $J(u,v) = 1 - \epsilon\kappa(u)\cos(v)$ et on suppose que cette quantité est toujours positive. Il vient

$$E = \| \frac{\partial X}{\partial u} \|^2 = J^2 + \epsilon^2\theta^2, \quad F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = \epsilon^2\theta,$$

$$G = \| \frac{\partial X}{\partial v} \|^2 = \epsilon^2, \quad EG - F^2 = \epsilon^2 J^2.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}(X) &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \epsilon J \, dv \, du \\ &= \epsilon \int_0^L \int_0^{2\pi} (1 - \epsilon\kappa(u)\cos(v)) \, dv \, du \\ &= 2\pi\epsilon L \end{aligned}$$

où L est la longueur de la courbe c.

Le vecteur unitaire normal est

$$\Gamma(X(u,v)) = -\cos(v)\nu(u) - \sin(v)b(u) = c(u) - X(u,v).$$

On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \epsilon(\kappa(u)\theta(u)\sin(v) - \kappa'(u)\cos(v))\tau(u) + (\kappa(u)J(u,v) - \epsilon\theta'(u)\sin(v) \\ &\quad -\epsilon\theta(u)^2\cos(v))\nu(u) + \epsilon(\theta'(u)\cos(v) - \theta(u)^2\sin(v))b(u), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \epsilon\kappa(u)\sin(v)\tau(u) - \epsilon\theta(u)\cos(v)\nu(u) - \epsilon\theta(u)\sin(v)b(u),$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = -\epsilon\cos(v)\nu(u) - \epsilon\sin(v)b(u).$$

d'où

$$A = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \cdot \Gamma(X(u,v)) = -\kappa(u)\cos(v)J(u,v) + \epsilon\theta(u)^2,$$

$$B = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \cdot \Gamma(X(u,v)) = \epsilon\theta(u),$$

$$C = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \cdot \Gamma(X(u,v)) = \epsilon.$$

Pour la courbure de Gauss, on utilise la formule

$$\begin{aligned} K(X(u,v)) &= \frac{AC - B^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-\epsilon\kappa\cos(v)J}{\epsilon^2 J^2} \end{aligned}$$

puis on intègre par rapport à l'élément d'aire $\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$. Il vient

$$\begin{aligned} \int K \, dA &= \int_0^L \int_0^{2\pi} K(X(u,v))\sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} -\kappa(u)\cos(v) \, du \, dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int |K|\, dA &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \kappa(u)|\cos(v)|\, du\, dv \\ &= 4\int_0^L \kappa(u)\, du. \end{aligned}$$

Pour trouver les courbures principales, on calcule la matrice de l'endomorphisme S au moyen de la formule

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} &= \frac{1}{\epsilon^2 J^2} \begin{pmatrix} \epsilon^2 & -\epsilon^2\theta \\ -\epsilon^2\theta & J^2+\epsilon^2\theta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\kappa J\cos(v)+\epsilon\theta^2 & \epsilon\theta \\ \epsilon\theta & \epsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{J} & 0 \\ \frac{\theta\kappa}{J}\cos(v)-\epsilon & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les courbures principales sont les valeurs propres de cette matrice, soit $-\dfrac{\kappa}{J}\cos(v)$ et $\frac{1}{\epsilon}$. Les directions principales sont $\{du=0\}$ (tangent au cercle) et $\{\epsilon(\theta\kappa\cos(v)-\epsilon J)du+(J+\epsilon\kappa\cos(v))dv = 0\}$. On constate que les cercles sont des lignes de courbure. ∎

Solution de l'exercice 50. *Contour apparent.*

Soit X une surface et π un plan de $\mathbf{R}^3$. Soit V un vecteur unitaire orthogonal à π. Soit $P \in X$. Alors P est sur le contour apparent si et seulement si le plan tangent $T_P X$ contient V. L'équation du contour apparent est donc $\{f(P)=0\}$ où $f(P)=\Gamma(P)\cdot V$. La différentielle de f est donnée par

$$d_P f(w) = d_P\Gamma(w)\cdot V = -S_P(w)\cdot V = -II_P(w,V) = -S_P(V)\cdot w$$

d'après le corollaire 84. La différentielle de f en P s'annule si et seulement si V est dans le noyau de S_P, ce qui ne peut se produire que si $K=\det S=0$. De plus, dans ce cas $II_P(V)=S_P(V)\cdot V=0$ donc V est une direction asymptotique.

Supposons que $V\in T_P X$ mais que $S_P(V)\neq 0$. Alors le contour apparent dans X est lisse au voisinage de P, c'est une courbe dont la tangente en P est la droite orthogonale à $S_P(V)$ dans $T_P X$. Si $II_P(V)=S_P(V)\cdot V\neq 0$, cette droite n'est pas orthogonale au plan π, donc la composition de la projection pr et du contour apparent dans X est une courbe dans la vitesse en $pr(P)$ ne s'annule pas. ∎

Solution de l'exercice 51. *P.*

our construire le tube, on n'a besoin que de la direction de la tangente. Par conséquent, des courbes qui se raccordent G^1 donnent un tube continu. Le raccord des tubes est alors G^1, car la normale en un point du tube ne dépend que de la tangente à la courbe.

Inversement, le raccord G^0 des tubes forcent les plans normaux à coïncider, et donc entraîne le raccord G^1 des courbes.

Si les courbes se raccordent G^2, alors le plan osculateur et la courbure sont continus. Or la courbure de Gauss du tube ne dépend que du plan osculateur et de la courbure de la courbe (voir exercice 48). Le raccord a lieu le long d'un cercle qui n'est pas une ligne asymptotique (la seconde forme fondamentale vaut $1/\epsilon$ dans la direction du cercle). D'après le corollaire 93, le raccord des surfaces est G^2. Inversement, la formule

$$K = \frac{-\epsilon\kappa\cos(v)(1-\epsilon\kappa\cos(v))}{\epsilon^2(1-\epsilon\kappa\cos(v))^2}$$

montre que si la courbure de Gauss est continue, alors la courbure de la courbe et son plan osculateurs sont continus. On conclut que si les tubes X_1 et X_2 se raccordent G^2, alors les courbent se raccordent G^2. ∎

Solution de l'exercice 52. *Cas du vecteur de noeuds* $(0,0,1,2,3,4,\ldots)$.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$B_{i,0}$	0	$\mathbf{1}_{[0,1[}$	$\mathbf{1}_{[1,2[}$	$\mathbf{1}_{[2,3[}$
$\omega_{i,1}$	0	t	$t-1$	$t-2$
$1-\omega_{i,1}$		$1-t$	$2-t$	$3-t$
$B_{i,1}$	$(1-t)\mathbf{1}_{[0,1[}$	$t\mathbf{1}_{[0,1[}+$ $(2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$	$(t-1)\mathbf{1}_{[1,2[}+$ $(3-t)\mathbf{1}_{[2,3[}$	
$\omega_{i,2}$	t	$t/2$	$(t-1)/2$	
$1-\omega_{i,2}$		$(2-t)/2$	$(3-t)/2$	
$B_{i,2}$	$\frac{t(4-3t)}{2}\mathbf{1}_{[0,1[}$ $+\frac{(2-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}$	$\frac{t^2}{2}\mathbf{1}_{[0,1[}$ $+\frac{-2t^2+6t-3}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}$ $+\frac{(3-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$		
$\omega_{i,3}$	$t/2$	$t/3$		
$1-\omega_{i,3}$		$(3-t)/3$		

et enfin $B_{0,3} = \dfrac{t^2(-11t+18)}{12}\mathbf{1}_{[0,1[} + \dfrac{-t^3-12t^2+54t-18}{12}\mathbf{1}_{[1,2[} + \dfrac{(3-t)^3}{6}\mathbf{1}_{[2,3[}$.

Solution de l'exercice 53. *Cas du vecteur de noeuds* $(0,0,0,1,2,3,\ldots)$.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$B_{i,0}$	0	0	$\mathbf{1}_{[0,1[}$	$\mathbf{1}_{[1,2[}$
$\omega_{i,1}$	0	0	t	$t-1$
$1-\omega_{i,1}$		1	$1-t$	$2-t$
$B_{i,1}$	0	$(1-t)\mathbf{1}_{[0,1[}$	$t\mathbf{1}_{[0,1[}+$ $(2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$	$(t-1)\mathbf{1}_{[1,2[}+$ $(3-t)\mathbf{1}_{[2,3[}$
$\omega_{i,2}$	0	t	$t/2$	$(t-1)/2$
$1-\omega_{i,2}$		$1-t$	$(2-t)/2$	$(3-t)/2$
$B_{i,2}$	$(1-t)^2\mathbf{1}_{[0,1[}$	$\frac{t(4-3t)}{2}\mathbf{1}_{[0,1[}+$ $\frac{(2-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}$	$\frac{t^2}{2}\mathbf{1}_{[0,1[}+$ $\frac{-2t^2+6t-3}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}+$ $\frac{(3-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$	
$\omega_{i,3}$	t	$t/2$	$t/3$	
$1-\omega_{i,3}$		$(2-t)/2$	$(3-t)/3$	

d'où $B_{0,3} = \dfrac{t(7t^2-18t+12)}{4}\mathbf{1}_{[0,1[}+\dfrac{(2-t)^3}{4}\mathbf{1}_{[1,2[}$, $B_{1,3} = \dfrac{t^2(-11t+18)}{12}\mathbf{1}_{[0,1[}+\dfrac{-t^3-12t^2+54t-18}{12}\mathbf{1}_{[1,2[}+$ $\dfrac{(3-t)^3}{6}\mathbf{1}_{[2,3[}$.

Solution de l'exercice 54. *Cas du vecteur de noeuds* $(0,0,0,0,1,2,\ldots)$.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$B_{i,0}$	0	0	0	$\mathbf{1}_{[0,1[}$	$\mathbf{1}_{[1,2[}$
$\omega_{i,1}$	0	0	0	t	$t-1$
$1-\omega_{i,1}$		1	1	$1-t$	$2-t$
$B_{i,1}$	0	0	$(1-t)\mathbf{1}_{[0,1[}$	$t\mathbf{1}_{[0,1[}+$ $(2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$	$(t-1)\mathbf{1}_{[1,2[}+$ $(3-t)\mathbf{1}_{[2,3[}$
$\omega_{i,2}$	0	0	t	$t/2$	$(t-1)/2$
$1-\omega_{i,2}$		1	$1-t$	$(2-t)/2$	$(3-t)/2$
$B_{i,2}$	0	$(1-t)^2\mathbf{1}_{[0,1[}$	$\frac{t(4-3t)}{2}\mathbf{1}_{[0,1[}+$ $\frac{(2-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}$	$\frac{t^2}{2}\mathbf{1}_{[0,1[}+$ $\frac{-2t^2+6t-3}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}+$ $\frac{(3-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$	
$\omega_{i,3}$	0	t	$t/2$	$t/3$	
$1-\omega_{i,3}$		$1-t$	$(2-t)/2$	$(3-t)/3$	
$B_{i,3}$	$(1-t)^3\mathbf{1}_{[0,1[}$	$\frac{t(7t^2-18t+12)}{4}\mathbf{1}_{[0,1[}+$ $\frac{(2-t)^3}{4}\mathbf{1}_{[1,2[}$	$\frac{t^2(-11t+18)}{12}\mathbf{1}_{[0,1[}+$ $\frac{-t^3-12t^2+54t-18}{12}\mathbf{1}_{[1,2[}+$ $\frac{(3-t)^3}{6}\mathbf{1}_{[2,3[}$		

Solution de l'exercice 55. *Cas du vecteur de noeuds* $(0,1,2,3,3,4,5,6)$.

Par définition, $B_{3,0}\equiv 0$ et les autres B-splines de degré 0 sont les fonctions caractéristiques d'intervalles $[i,i+1[$.

On tabule $\omega_{i,1}$: $\omega_{0,1}(t)=t$, $\omega_{1,1}(t)=t-1$, $\omega_{2,1}(t)=t-2$, $\omega_{3,1}(t)=0$, $\omega_{4,1}(t)=t-3$, $\omega_{5,1}(t)=t-4$, $\omega_{6,1}(t)=t-5$.

Il vient $B_{0,1}=t\mathbf{1}_{[0,1[}+(2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$, $B_{1,1}=(t-1)\mathbf{1}_{[1,2[}+(3-t)\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{2,1}=(t-2)\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{3,1}=(4-t)\mathbf{1}_{[3,4[}$, $B_{4,1}=(t-3)\mathbf{1}_{[3,4[}+(5-t)\mathbf{1}_{[4,5[}$, $B_{5,1}=(t-4)\mathbf{1}_{[4,5[}+(6-t)\mathbf{1}_{[5,6[}$, $B_{6,1}=(t-5)\mathbf{1}_{[5,6[}+\cdots$.

On tabule $\omega_{i,2}$. $\omega_{0,2}=\frac{t}{2}$, $\omega_{1,2}=\frac{t-1}{2}$, $\omega_{2,2}=t-2$, $\omega_{3,2}=t-3$, $\omega_{4,2}=\frac{t-3}{2}$, $\omega_{5,2}=\frac{t-4}{2}$, $\omega_{6,2}=\frac{t-5}{2}$.

Il vient $B_{0,2}=\frac{t^2}{2}\mathbf{1}_{[0,1[}+\frac{-2t^2+6t-3}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}+\frac{(3-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{1,2}=\frac{(t-1)^2}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}+\frac{(3-t)(3t-5)}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{2,2}=(t-2)^2\mathbf{1}_{[2,3[}+(4-t)^2\mathbf{1}_{[3,4[}$, $B_{3,2}=\frac{(t-3)(-3t+13)}{2}\mathbf{1}_{[3,4[}+\frac{(5-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[4,5[}$, $B_{4,2}=\frac{(t-3)^2}{2}\mathbf{1}_{[3,4[}+\frac{-2t^2+18t-39}{2}\mathbf{1}_{[4,5[}+\frac{(6-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[5,6[}$, $B_{5,2}=\frac{(t-4)^2}{2}\mathbf{1}_{[3,4[}+\cdots$.

On tabule $\omega_{i,3}$. $\omega_{0,3}=\frac{t}{3}$, $\omega_{1,3}=\frac{t-1}{2}$, $\omega_{2,3}=\frac{t-2}{2}$.

Il vient $B_{0,3}=\frac{t^3}{6}\mathbf{1}_{[0,1[}+\frac{-7t^3+27t^2-27t+9}{12}\mathbf{1}_{[1,2[}+\frac{(3-t)^2(11t-15)}{12}\mathbf{1}_{[2,3[}$,

$B_{1,3}=\frac{(t-1)^3}{4}\mathbf{1}_{[1,2[}+\frac{-5t^3+53t^2-69t+47}{4}\mathbf{1}_{[2,3[}+\frac{(4-t)^3}{2}\mathbf{1}_{[3,4[}$.

Comme pour $i=0,\dots,7$, $t_i+t_{7-i}=6$,

$$\begin{aligned}
\omega_{i,k}(6-t) &= \frac{6-t-t_i}{t_{i+k}-t_i}\\
&= \frac{t_{7-i}-t}{(6-t_{7-k-i})-(6-t_{7-i})}\\
&= 1-\frac{t-t_{7-k-i}}{t_{7-i}-t_{7-k-i}}\\
&= 1-\omega_{7-i-k,k}(t).
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur k que $B_{i,k}(6-t)=B_{6-k-i,k}(t)$ sauf peut-être pour t entier.

Supposons $k=0$. Comme $6-t_i=t_{7-i}$ et $6-t_{i+1}=t_{6-i}$,

$$B_{i,0}(6-t)=\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(6-t)=\mathbf{1}_{]6-t_{i+1},6-t_i]}(t)=B_{6-i,0}(t)$$

si $6-t\neq t_i,\ t_{i+1}$.

Soit $t \in \mathbf{R}$ et $k \geq 1$. Supposons montré que pour tout entier i, $B_{i,k-1}(6-t) = B_{6-(k-1)-i,k}(t)$. Alors

$$\begin{aligned}
B_{i,k}(6-t) &= \omega_{i,k}(6-t)B_{i,k-1}(6-t) + (1-\omega_{i+1,k-1}(6-t))B_{i+1,k-1}(6-t) \\
&= (1-\omega_{7-k-i,k}(t))B_{6-(k-1)-i,k-1}(t) + \omega_{7-k-(i+1),k-1}(t)B_{6-(k-1)-(i+1),k-1}(t) \\
&= \omega_{6-k-i,k-1}(t)B_{6-k-i,k-1}(t) + (1-\omega_{6-k-i+1,k}(t))B_{6-k-i+1,k-1}(t) + \\
&= B_{6-k-i,k}(t).
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve par récurrence. Si $k \geq 1$, les fonctions $B_{i,k}$ sont continues, donc la formule s'étend aux valeurs entières de t.

Solution de l'exercice 57. *Construction d'une courbe tangente à son polygone de contrôle.*

On choisit un vecteur de noeuds uniforme. D'après l'exercice 104, si on place des points de contrôle sur les côtés, on aura les tangences voulues. On pose donc $P_0 = O$, $P_1 = (1,0)$, $P_2 = P$, $P_3 = (2,1)$, $P_4 = Q$, $P_5 = (1,2)$, $P_6 = R$, $P_7 = (0,1)$, $P_8 = O$. On complète par périodicité de période 8.

La courbe obtenue n'est certainement pas un cercle. En effet, l'expression $\| X_3(t) - (1,1) \|^2$ est sur l'intervalle $[0,1[$ un polynôme de degré 6 dont le coefficient directeur ne s'annulle pas, car c'est la somme de deux carrés.

Solution de l'exercice 62. *Courbe en bosse ou en boucle.*

On utilise des B-splines de degré 3. Il faut au moins 5 points de contrôle. En effet, si on ne prend que 4 points, ils devront être alignés pour que la condition sur les tangentes soit satisfaite. La courbe B-spline correspondante serait contenue dans une droite. On pose donc $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = t_6 = t_7 = t_8 = 2$. Les points $P_0 = P$, P_1, P_3 et $P_4 = Q$ sont nécessairement alignés. Pour simplifier, on choisit un polygone de contrôle symétrique par rapport à la médiatrice du segment PQ, soit $P_1 = (-a,0)$, $P_2 = (0,b)$ et $P_3 = (a,0)$. Lorsque b varie, le polygone de contrôle se déforme suivant une famille d'*affinités* (transformations affines fixant la droite PQ et dilatant la médiatrice). Il en est donc de même de la courbe B-spline associée. On peut donc fixer $b = 2$ sans perdre de généralité. En revanche, le paramètre a joue un rôle intéressant, alors on le garde. On calcule les poids $\omega_{1,3}(t) = \omega_{2,2}(t) = \omega_{3,1}(t) = t$, $\omega_{2,3}(t) = \omega_{3,3}(t) = \omega_{3,2}(t) = t/2$. Pour $t \in [0,1[= [t_3, t_4[$, il vient

$$P_1^1 = (1-t)P_0 + tP_1 = (-2+2t+2at, 0), \quad P_2^1 = (1-\frac{t}{2})P_1 + \frac{t}{2}P_2 = (a(2-t), t),$$

$$P_3^1 = (1-\frac{t}{2})P_2 + \frac{t}{2}P_3 = (-at, 2-t),$$

puis

$$P_2^2 = (1-t)P_1^1 + tP_2^1 = (-2(1-t)^2 + a(4t-3t^2), 0), \quad P_3^2 = (1-\frac{t}{2})P_2^1 + \frac{t}{2}P_3^1 = (2a(1-t), 2t-t^2),$$

et enfin

$$X_3(t) = P_3^3 = (1-t)P_2^2 + tP_3^2 = (-2(1-t)^3 + 3at(2-3t+t^2), 3t^2 - 2t^3).$$

Si on pose $u = t-1$, alors

$$X_3(t) = (-2u^3 + 3au(1-u^2), 1 - 3u^2 - 2u^3).$$

La partie de la courbe paramétrée par $[1,2]$ s'obtient par symétrie. Comme la coordonnée $y(t)$ n'est pas une fonction paire de u, la dérivée troisième est discontinue en $t = 1$, comme on s'y attend pour une B-spline de degré 3 en un noeud simple.

On constate que si $a \neq 0$, la vitesse en $t = 1$ est horizontale. Si $a > 0$, elle est orientée vers la droite, ce qui suggère une forme en bosse. En fait, lorsque $a \geq 0$, les deux coordonnées sont fonctions strictement croissantes de t.

Lorsque $a < 0$, la coordonnée x atteint un maximum strictement positif avant de revenir sur la médiatrice, d'où une forme en boucle.

Lorsque $a = 0$, la courbe a un point de rebroussement en $t = 1$, avec la médiatrice comme tangente. On verra ci-dessous qu'il s'agit d'un phénomène général : si 3 points de contrôôle consécutifs sont alignés, la B-spline de degré 3 est tangente au côté correspondant du polygone de contrôle.

Solution de l'exercice 64. *Courbe de variation minimale.*

Soit $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$, une courbe passant pas M et N, dont le vecteur vitesse en M et en N est positivement proportionnel à $(1,1)$. La droite MN coupe nécessairement γ en 3 points. En effet, la fonction y (seconde coordonnée) est continue sur $[0,1]$, s'annule en 0 et en 1. Comme $y'(0) > 0$, y prend des valeurs strictement positives au voisinage à droite de 0. Comme $y'(1) > 0$, y prend des valeurs strictement positives au voisinage à gauche de 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction y prend la valeur 0 en au moins un point de $]0,1[$, d'où les 3 points d'intersection avec la droite MN.

La courbe de Bézier décrite dans la solution de l'exercice 56 convient. En effet, le polygone de contrôle n'a que 3 segments donc ne peut couper transversalement une droite qu'en au plus 3 points.

Solution de l'exercice 65. *Courbure à l'origine d'une courbe de Bézier.*

Comme $P_0 = M = (1,0)$, $P_1 = (2,1)$ et $P_2 = (2,-1)$, l'aire algébrique du triangle $P_0P_1P_2$ vaut -1 et la longueur du côté P_0P_1 vaut $\sqrt{2}$ donc la courbure en M de la courbe de Bézier vaut $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Solution de l'exercice 66. *Les côniques sont rationnelles.*

Soit $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ l'équation de C. Pour $t \in \mathbf{R}$, soit D_t la droite passant par P et de pente t, i.e. de vecteur directeur $(1,t)$. Comme $P \in C$, l'équation du second degré en λ $f(P + \lambda(1,t)) = 0$ possède la solution $\lambda = 0$, donc $f(P + \lambda(1,t)) = \lambda(Q(t)\lambda + R(t))$ où Q et R sont des polynômes. Comme C est non dégénérée, le polynôme Q n'est pas nul. Le point

$$X(t) = P + \frac{R(t)}{Q(t)}(1,t)$$

parcourt la cônique C. Inversement, si $P' \in C$ n'est pas sur la droite verticale passant par P, la droite PP' a une pente $t \in \mathbf{R}$, et $P' = X(t)$. Autrement dit, la courbe X passe par tous les points de C avec au plus 2 exceptions.

Solution de l'exercice 67. *Reparamétrisation rationnelle d'un quart de cercle.*

On cherche des poids w_0, w_1 et w_2 de sorte que la courbe de Bézier de degré 2 associée au polygone de contrôle $R_0 = (w_0, w_0, 0)$, $R_1 = (w_1, w_1, w_1)$, $R_2 = (w_2, 0, w_2)$ soit la courbe paramétrée par

$$t \mapsto ((at + 1 - a)^2 + t^2, (at + 1 - a)^2 - t^2, 2t(at + 1 - a)).$$

En faisant $t = 0$, il vient $w_0 = (1-a)^2$, en faisant $t = 1$ il vient $w_2 = 2$. En dérivant en $t = 0$ il vient $w_1 = 1 - a$, et on vérifie que pour tout t

$$\begin{pmatrix} (at+1-a)^2 + t^2 \\ (at+1-a)^2 - t^2 \\ 2t(at+1-a) \end{pmatrix} = (1-t)^2 \begin{pmatrix} (1-a)^2 \\ (1-a)^2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2t(1-t) \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-a \\ 1-a \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 68. *Le cercle unité entier comme courbe B-spline rationnelle quadratique périodique.*

On note $R_i = (w_i, w_i P_i)$. On note ρ la rotation de $+\pi/2$ autour de l'origine dans le plan et σ la rotation de $\mathbf{R}^3$ définie par

$$\sigma(x_0, P) = (x_0, \rho(P)).$$

On constate que $R_{i+2} = \sigma(R_i)$ et $t_{i+2} = t_i + 1$. Par conséquent, la courbe B-spline de degré 2 Y associée à $\mathbf{t}$ et $\mathbf{R}$ satisfait

$$Y(t+1) = \sigma(Y(t)).$$

En effectuant une projection centrale, on trouve que la courbe B-spline rationnelle de degré 2 X associée à $\mathbf{t}$, $\mathbf{w}$ et $\mathbf{P}$ satisfait

$$X(t+1) = \rho(X(t)).$$

Il suffit donc de calculer $X(t)$ pour $t \in [0,1[$.

Première méthode. En revenant à la définition, on calcule les $B_{i,2}$. Sur l'intervalle $[0,1[$, on trouve que

$$B_{-1,2}(t) = (1-t)^2, \quad B_{0,2}(t) = 2t(1-t), \quad B_{1,2}(t) = t^2$$

et les autres $B_{i,2}$ sont nulles. Il vient

$$\sum_i w_i B_{i,2}(t) = (1-t)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} 2t(1-t) + t^2 = 1 + (\sqrt{2}-2)t + (2-\sqrt{2})t^2$$

et

$$\begin{aligned}\sum_i w_i B_{i,2}(t) P_i &= (1-t)^2 P_{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} 2t(1-t) P_0 + t^2 P_1 \\ &= (1 + (\sqrt{2}-2)t + (1-\sqrt{2})t^2, \sqrt{2}t + (1-\sqrt{2})t^2).\end{aligned}$$

d'où

$$X(t) = (\frac{1 + (\sqrt{2}-2)t + (1-\sqrt{2})t^2}{1 + (\sqrt{2}-2)t + (2-\sqrt{2})t^2}, \frac{\sqrt{2}t + (1-\sqrt{2})t^2}{1 + (\sqrt{2}-2)t + (2-\sqrt{2})t^2}).$$

L'image $X([0,1[)$ est exactement le quart du cercle unité situé entre les points P_{-1} et P_1.

Deuxième mééthode. On utilise l'algorithme de de Casteljau. Pour $t \in [0,1[= [t_1, t_2[$, on part de

$$R_{-1} = (1,1,0), \quad R_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{et} \quad R_1 = (1,0,1).$$

Comme pour $j = 0$, 1, $\omega_{j,2} = t - t_j = t$,

$$R_0^1 = (1-t)R_{-1} + tR_0 = (1 + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)t, 1 + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)t, \frac{1}{\sqrt{2}}t)$$

et

$$R_1^1 = (1-t)R_0 + tR_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}} + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})t, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}t, \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})t).$$

Comme $\omega_{1,1}(t) = t$,

$$Y(t) = R_1^2 = (1-t)R_0^1 + tR_1^1 = (1 + (\sqrt{2}-2)t + (2-\sqrt{2})t^2, 1 + (\sqrt{2}-2)t + (1-\sqrt{2})t^2, \sqrt{2}t + (1-\sqrt{2})t^2)$$

ce qui donne le même résultat.

Solution de l'exercice 69. *Tout arc de cercle, petit ou grand, est une NURBS quadratique.*

Pour respecter les tangentes aux extrémités, le point P_1 doit se trouver à l'intersection des tangentes au cercle en P_0 et P_2. Par symétrie, la droite $0P_1$ est orthogonale à la droite P_0P_2, laquelle est orthogonale à la droite AP_2 (où $A = (-1,0)$), laquelle a pour pente s. Par conséquent $P_1 = (1,s)$.

On cherche des poids de sorte que

$$Y_2(t) = (1 + s^2t^2, 1 - s^2t^2, 2st).$$

En faisant $t = 0$ et $t = 1$, on trouve que $w_0 = 1$ et $w_2 = 1 + s^2$, puis que $w_1 = 1$ convient.

Ensuite on cherche des poids de sorte que

$$Y_2(t) = ((2t-1)^2 + s^2t^2, (2t-1)^2 - s^2t^2, 2st(2t-1)).$$

En faisant $t = 0$ et $t = 1$, on trouve que $w_0 = 1$ et $w_2 = 1 + s^2$, puis que $w_1 = -1$ convient.

Solution de l'exercice 70. *Une courbe de Bezier rationnelle quadratique est contenue dans une cônique.*

Une telle courbe paramétrée est déterminée par trois points de contrôle P_0, P_1 et P_2. Si ces points sont alignés, la courbe est contenue dans une droite, qui est une cônique particulière. Sinon, on peut sans perte de généralité supposer que $P_1 = (0,0)$, $P_0 = (1,0)$ et $P_2 = (0,1)$. En effet, tout triangle est l'image du triangle de référence par une transformation affine, et les transformations affines préservent les côniques. Notons $D(t) = (1-t)^2 w_0 + 2t(1-t)w_1 + t^2$. Les coordonnées de $X(t) = (x(t), y(t))$ sont

$$x(t) = \frac{(1-t)^2 w_0}{D(t)} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^2 w_2}{D(t)}.$$

On calcule

$$x(t)y(t) = \frac{1}{4}(\frac{2t(1-t)}{D(t)})^2 w_0 w_2 \quad \text{et} \quad x(t) + y(t) = 1 - w_1 \frac{2t(1-t)}{D(t)}$$

d'où

$$xy = \frac{1}{4}\frac{w_0 w_2}{w_1^2}(1-x-y)^2$$

ce qui est l'équation d'une cônique.

Attention, seul un arc de la cônique est parcourue (cf. l'exercice 69).

On voit qu'en variant les poids, on obtient une famille à deux paramètres de coniques paramétrées passant par deux points avec des tangentes prescrites. Or une cônique dépend de 5 paramètres. En effet, c'est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

et deux équations définissent la même cônique si et seulement si elles sont proportionnelles. La condition de passer par un point donné se traduit par une équation linéaire sur les coefficients. De même, prescrire la tangente en ce point représente encore une équation linéaire. Il ne reste donc qu'un degré de liberté pour une cônique passant par deux points fixés avec des tangentes prescrites. On conclut qu'en jouant sur les poids, on peut obtenir plusieurs paramétrisations de la même cônique. C'est effectivement le cas, comme on l'a vu dans l'exercice 67.

Solution de l'exercice 71. *Raccord G^2 obtenu en ajustant des poids.*

La courbure au point $M = (1,0)$ de la courbe de Bezier $\bar{\gamma}$ vaut $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (exercice 65). Or celle-ci est symétrique par rapport au point $(2,0)$. Par conséquent, sa courbure au point $N = (3,0)$ vaut $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Si on introduit des poids, la courbure en M devient

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{w_1 w_2}{w_0^2}$$

et la courbure en N devient

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{w_1 w_2}{w_3^2}.$$

Pour qu'elles soient égales (condition nécéssaire de raccord G^2 avec la translatée), il faut que $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ ou que $w_0^2 = -w_3^2$. On sort donc du cadre de validité de la formule 119. Néanmoins, le choix $w_1 = w_2 = 0$ donne un segment de droite horizontal, qui est une solution au problème posé.

Solution de l'exercice 72. *Un cylindre de section circulaire, un huitième de sphère comme surface NURBS.*

Le cylindre est la surface de révolution balayée par la rotation autour de l'axe Oz du segment d'extrémités $P_{00} = (1,0,0)$ et $P_{01} = (1,0,h)$. Le segment est une courbe de Bézier de degré 1. D'après la proposition 129, le polyèdre $P_{20} = (0,1,0)$, $P_{21} = (0,1,h)$ et les poids $w_{0j} = w_{1j} = 1$, $w_{2j} = 2$ conviennent.

Le huitième de sphère est la surface de révolution balayée par la rotation autour de l'axe Oz du quart de cercle d'extrémités $P_{00} = (1,0,0)$ et $P_{02} = (0,0,1)$. Le quart de cercle est une courbe de Bézier rationnelle de degré 2, avec un troisième point de contrôle $P_{01} = (1,0,1)$ et des poids $w'_i = 1, 1, 2$. D'après la proposition 129, le polyèdre $P_{20} = (0,1,0)$, $P_{21} = (0,1,1)$ $P_{22} = (0,0,1)$, $P_{10} = (1,1,0)$, $P_{11} = (1,1,1)$, $P_{12} = (0,0,1)$ et les poids $w_{ij} = w'_i w'_j$ conviennent. Autrement dit, les points de contrôle sont certains des sommets du cube unité, et trois d'entre eux sont confondus. D'ailleurs, la paramétrisation est dégénérée au pôle nord.

Solution de l'exercice 73. *Extrusion d'une courbe NURBS.*
La surface cherchée peut être paramétrée par

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = (1-u)\gamma(v) + u(\gamma(v) + V).$$

Or $B_{0,1}(u) = 1-u$ et $B_{1,1}(u) = u$ sont les polynômes de Bernstein de degré 1. Soit P_{0j} le polygone de contrôle et w_j les poids de γ. Posons $P_{1j} = P_{0j} + V$. Il vient

$$\begin{aligned} X(u,v) &= B_{0,1}(u)\frac{\sum_j B_{j,k}(v)w_j P_{0j}}{\sum_j B_{j,k}(v)w_j} + B_{1,1}(u)(\frac{\sum_j B_{j,k}(v)w_j(P_{0j}+V)}{\sum_j B_{j,k}(v)w_j}) \\ &= \frac{\sum_{i,j} B_{i,1}(u)B_{j,k}(v)w_j P_{ij}}{\sum_j B_{j,k}(v)w_j} \\ &= \frac{\sum_{i,j} B_{i,1}(u)B_{j,k}(v)w_j P_{ij}}{\sum_j B_{i,1}(u)B_{j,k}(v)w_j} \end{aligned}$$

donc X est la surface NURBS associée au polygone de contrôle P_{ij} où P_{1j} s'obtient en translatant P_{0j} de V, et aux noeuds $w_{ij} = w_{0j}$.

Solution de l'exercice 74. *Cône sur une courbe NURBS.*
La surface cherchée peut être paramétrée par

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = (1-u)\gamma(v) + uQ.$$

Or $B_{0,1}(u) = 1-u$ et $B_{1,1}(u) = u$ sont les polynômes de Bernstein de degré 1. Soit P_{0j} le polygone de contrôle et w_j les poids de γ. Posons $P_{1j} = Q$ pour tout j. Il vient

$$\begin{aligned} X(u,v) &= B_{0,1}(u)\frac{\sum_j B_{j,k}(v)w_j P_{0j}}{\sum_j B_{j,k}(v)w_j} + B_{1,1}(u)(\frac{\sum_j B_{j,k}(v)w_j Q}{\sum_j B_{j,k}(v)w_j}) \\ &= \frac{\sum_{i,j} B_{i,1}(u)B_{j,k}(v)w_j P_{ij}}{\sum_j B_{j,k}(v)w_j} \\ &= \frac{\sum_{i,j} B_{i,1}(u)B_{j,k}(v)w_j P_{ij}}{\sum_j B_{i,1}(u)B_{j,k}(v)w_j} \end{aligned}$$

donc X est la surface NURBS associée au polygone de contrôle P_{ij} où $P_{1j} = Q$ et aux noeuds $w_{ij} = w_{0j}$.

Bibliography

[F] G. FARIN, *Curves and surfaces for computer aided geometric design, a practical guide.* 2nd ed. Academic Press. Boston, Mass. (1990).

[N] G. FARIN, *NURBS. From projective geometry to practical use.* 2nd ed. A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1999).

[GHL] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian geometry.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[H] Ch. HOFFMANN, *Geometric and solid modeling, an introduction.* Morgan Kaufmann, San Mateo CA, (1989).

[HL] J. HOSCHEK, D. LASSER, *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung.* Teubner, Stuttgart (1989). `English translation :` *Fundamentals of computer aided geometric design.* A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1993).

[K] R. KRESS, *Numerical Analysis.* Graduate Texts in Math. **181**. Springer, Heidelberg (1998).

[M] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint.* The University Press of Virginia, (1965).

[MM] J. MILNOR, *Morse Theory.* Annals of Math. Studies, Princeton University Press, (1963).

[S] M. SPIVAK, *A comprehensive introduction to differential geometry.* 5 volumes. Publish or Perish, Berkeley CA. (1979).

[R] J.-J. RISLER, *Méthodes mathématiques pour la CAO.* Masson, Paris (1991).

Contents

Laboratoire de Mathématique d'Orsay
U.M.R. 8628 du C.N.R.S.
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay
France
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`
`http://www.math.u-psud.fr/~pansu`