

# L'oeuvre mathématique de Jacqueline Ferrand

P. Pansu

11 avril 1997

Ne en 1918 à Als (Gard), Jacqueline Ferrand est bachelière en 1934. En 1936, elle entre à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, où elle passe l'agrégation (masculine) en 1939. Elle prend immédiatement fonction d'agrégée préparatrice à l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles. La directrice, Madame Cotton, convaincue que les filles devaient nourrir les mêmes ambitions intellectuelles que les garçons, comptait sur cette jeune mathématicienne d'exception pour amener l'enseignement des mathématiques à Paris au niveau de celui de la rue d'Ulm. Nous avons de nombreux témoignages de l'énergie avec laquelle Jacqueline Ferrand s'acquittait de cette tâche, dans les conditions matérielles difficiles de l'époque. Avec la même énergie elle se lance dans la recherche, sous la direction lointaine d'Arnaud Denjoy. Elle soutient le 12 juin 1942 une thèse remarquable, qui lui vaudra d'être distinguée par l'Institut (prix Girbal Barral en 1943) et la Fondation Peccot en 1946. Sa carrière universitaire sera ensuite très rapide : charge de cours à Bordeaux en 1943, elle est professeur à Caen en 1945, Lille en 1948 puis Paris, de 1956 sa retraite en 1984.

## 1 Premiers travaux

La thèse de Jacqueline Ferrand porte sur les valeurs au bord de la représentation conforme d'un domaine plan. Depuis Riemann, Koebe et Poincaré, on sait que tout domaine simplement connexe  $\Delta$  du plan admet une représentation conforme  $f$  sur le disque  $D$ , i.e., une carte géographique dans laquelle les angles sont conservés. On peut voir  $f$  comme une fonction analytique d'une variable définie sur le disque, qui est une bijection du disque sur  $\Delta$ . La question se pose de savoir si  $f$  admet une limite en chaque point du bord. La réponse est oui si le bord de  $\Delta$  est suffisamment régulier, et le problème devient difficile si le bord est irrégulier.

En 1913, Constantin Carathéodory [C] a fait un pas décisif en introduisant la notion de *bout premier*. Carathéodory considère des *coupures embotées* de  $\Delta$ . Ce sont des suites de sous-domaines embotés délimités par des arcs simples reliant deux points du bord, et dont la longueur tend vers 0. Deux suites de coupures sont dites équivalentes si chacune peut être embotée dans l'autre. Un *bout premier* est une classe d'équivalence de coupures embotées. Cette définition, qui fait intervenir des longueurs, n'est pas évidemment invariante par transformation conforme.

Carathodory donne une preuve de l'invariance qui repose sur des propriétés fines des fonctions holomorphes.

Dans sa thèse, Jacqueline Ferrand donne une nouvelle preuve de l'invariance conforme des bouts premiers, qui met en évidence le rôle joué par l'aire balayée par la transformation conforme  $f$  dans le contrôle de la longueur de l'image de presque toute courbe par  $f$ . D'autre part, le fait que  $f$  est ouverte permet de passer de presque toute courbe à toute courbe et donc de majorer le module de continuité de  $f$ , [F2].

Les estimations précises obtenues conduisent à des conditions suffisantes sur le domaine  $\Delta$  pour que la représentation conforme ait des limites le long de courbes contenues dans le disque et ayant un contact d'ordre élevé avec le bord du disque. Sous des hypothèses plus fortes, elle montre l'existence de la "drive angulaire"  $\lim(f(z) - \alpha)/(z - a)$  en un point  $a$  du bord, [F1].

Pour une bijection conforme (ou holomorphe), l'aire de l'image coïncide avec l'intégrale de Dirichlet

$$\int_D \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2.$$

Pour une fonction harmonique  $h$  (partie réelle d'une fonction holomorphe  $f$ ), l'intégrale de Dirichlet remplace l'aire de  $f$  et le principe du maximum remplace le fait que  $f$  est ouverte. Les méthodes développées pour les représentations conformes s'étendent donc à l'étude au bord des fonctions harmoniques, et aussi des fonctions surharmoniques, [F4].

## 2 Fonctions prholomorphes

L'article [F3] développe une discrétisation de la notion de fonction holomorphe. Il s'agit, tant donné  $h > 0$ , de remplacer le plan  $\mathbf{C}$  (ou un domaine borné  $\Delta \in \mathbf{C}$ ) par le sous-ensemble fini  $Z_h$  des points de  $\Delta$  dont les parties réelle et imaginaire sont des multiples entiers de  $h$ . Classiquement, on dit qu'une fonction sur  $Z_h$  est harmonique (J. Ferrand parle de fonctions *prharmoniques*) si pour tout  $z \in Z_h$

$$4u(z) = u(z + h) + u(z - h) + u(z + ih) + u(z - ih).$$

Il est moins classique de discrétiser l'équation des fonctions holomorphes. Jacqueline Ferrand appelle *fonction prholomorphe* une fonction  $f$  à valeurs complexes sur  $Z_h$  qui satisfait pour tout  $x \in Z_h$

$$f(z + ih) - f(z + h) = i(f(z + h + ih) - f(z)).$$

La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction prholomorphe sont des fonctions prharmoniques sur les deux sous-ensembles  $Z'_h = \{z \in Z_h \mid (\Re(z) + \Im(z))/h \text{ est pair}\}$  et  $Z''_h = \{z \in Z_h \mid (\Re(z) + \Im(z))/h \text{ est impair}\}$ . Inversement, toute fonction prharmonique sur  $Z'_h$  est la partie réelle d'une fonction prholomorphe sur  $Z_h$ . J. Ferrand montre que lorsque  $h$  tend vers 0 les fonctions prholomorphes sur  $Z_h$  convergent vers des fonctions holomorphes sur  $\Delta$ . Les

estimes *a priori* de module de continuité le long du bord jouent un rôle nouveau et essentiel.

Elle en déduit une preuve très simple du théorème de représentation conforme des domaines non simplement connexes (voir [F5] chapitre V). *Soit  $\Delta$  un domaine plan dont le bord possède au moins une composante connexe isolée non réduite à un point. Alors il existe une représentation conforme essentiellement unique de  $\Delta$  sur un rectangle privé de segments parallèles à l'un de ses côtés.*

La notion de fonction conforme a donné lieu à de nombreux développements, dont certains très récents, voir [M].

### 3 Actions de groupes

À l'occasion d'un séjour à l'Institute for Advanced Study de Princeton, Jacqueline Ferrand se demande quand une action d'une algèbre de Lie sur une variété s'intègre en une action de groupe. Il en sort une caractérisation d'analyse fonctionnelle de la complétude d'un champ de vecteurs, [F6].

*Soit  $X$  un champ de vecteurs localement Lipschitzien, divergence nulle, sur une variété  $M$  munie d'un élément de volume  $\mu$ . Alors  $X$  est complet si et seulement si l'opérateur différentiel  $iX$  s'étend en un opérateur autoadjoint de  $L^2(\mu)$ . Supposons que  $X$  engendre un groupe un paramètre d'isométries de  $M$ . Ce groupe est périodique si et seulement si l'opérateur  $iX$  est d'image fermée.*

Ce résultat particulièrement élégant n'a pas reçu beaucoup d'attention.

### 4 Ouvrages d'enseignement

La production mathématique de Jacqueline Ferrand connaît une baisse de régime entre 1958 et 1968. À cette époque, Jacqueline Ferrand est mère de quatre jeunes enfants (nés en 1949, 1951, 1952 et 1958). Elle s'investit dans l'enseignement à l'université, rédigeant une série de cours polycopiés qui, avec l'effort de travail, deviennent des livres. Un cours de géométrie différentielle (second cycle) paraît chez Masson en 1963. Ses cours de premier cycle paraissent chez Armand Colin en 1964, Dunod en 1967. Dunod publiera au cours des années 1970 la série d'ouvrages avec Jean-Marie Arnaudis qui couvre l'ensemble du programme des premiers cycles universitaires (cours et exercices), et qui est encore utilisé dans les classes préparatoires.

### 5 Géométrie riemannienne

C'est à l'issue de cette période que Jacqueline Ferrand obtient ses résultats les plus connus, qui lui vaudront de donner une conférence invitée au Congrès International des Mathématiciens à Vancouver en 1974. Il s'agit de la résolution d'un problème de géométrie riemannienne posé par Andrzej Lichnerowicz en 1964, [L], et sur lequel de nombreuses réponses partielles avaient été publiées, voir notamment [O] et les références qui s'y trouvent.

Une transformation conforme d'un ouvert de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  est un difféomorphisme dont la différentielle préserve les angles. Cette notion se généralise aux ouverts de  $\mathbf{R}^n$  munis d'une *métrique riemannienne*, i.e, d'un produit scalaire dépendant du point, aux sous-variétés de l'espace euclidien, puis aux variétés riemanniennes abstraites. Le prototype d'une variété riemannienne compacte est la sphère  $\{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ . La projection stéréographique réalise un difféomorphisme conforme de la sphère privée d'un point sur l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$ . Par transport, les similitudes de  $\mathbf{R}^n$  deviennent des difféomorphismes conformes de la sphère. On voit ainsi que le groupe des transformations conformes de la sphère est non compact.

**Thème** [F7]. *Si une variété riemannienne compacte  $M$  a un groupe de transformations conformes non compact, alors  $M$  est conforme à la sphère.*

Il s'agit d'estimer *a priori* le module de continuité d'une transformation conforme, en dimension quelconque cette fois. Utilisons l'invariant conforme de 4 points introduit dans [F8]. La définition que nous donnons dans l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  s'étend immédiatement aux variétés riemanniennes.

**Définition.** Soient  $F_0, F_1$  deux compacts connexes disjoints de  $\mathbf{R}^n$ , La *capacité*  $cap(F_0, F_1)$  est la borne inférieure des intégrales  $\int |du|^n$  pour toutes les fonctions lisses  $u$  sur  $\mathbf{R}^n$  telles que  $u = 0$  sur  $F_0$  et  $u = 1$  sur  $F_1$ .

Soient  $x, y, z, t$  quatre points de  $\mathbf{R}^n$ . L'*invariant de Ferrand*  $j(x, y, z, t)$  est la borne inférieure des capacités des couples  $(F_0, F_1)$  de compacts connexes tels que  $F_0$  contient  $x$  et  $z$  et  $F_1$  contient  $y$  et  $t$ .

En utilisant une estimation *a priori* du module de continuité des fonctions  $u$  qui minimisent  $\int |du|^n$  (une généralisation non linéaire et  $n$ -dimensionnelle de [F2]), J. Ferrand montre que cette borne inférieure est non nulle. En fait (voir [F13]),  $z$  et  $t$  fixes,  $d(x, y) = j(x, y, z, t)^{1/1-n}$  est une distance qui définit la topologie usuelle sur  $\mathbf{R}^n \setminus \{z, t\}$  et qui tend vers l'infini si  $y$  fixe  $x$  tend vers  $z$ .

Pour donner une première idée de l'utilisation faite de l'invariant  $j$ , montrons que, dans une variété riemannienne quelconque, le groupe  $G$  des transformations conformes qui fixent 3 points  $y, z$  et  $t$  est compact. En effet,  $G$  agit par isométries pour la métrique  $d$  et fixe le point  $y$ , donc toute suite d'éléments de  $G$  a une sous-suite qui converge  $C^0$  vers un homomorphisme. Il reste à montrer que la limite est un difféomorphisme conforme, et que la convergence est  $C^\infty$ . C'est un théorème de régularité elliptique non linéaire, de F. Gehring et Yu. Reshetnjak dans le cas euclidien, et étendu par J. Ferrand au cas des variétés riemanniennes, [F10].

On peut tirer plus de l'invariant  $j$ . Si une suite  $f_i$  de transformations conformes diverge, alors pour toute suite  $x_i, z_i, t_i$ , si  $f_i(z_i)$  converge vers  $z$  et  $f_i(t_i)$  converge vers  $t \neq z$ , alors  $f_i(x_i)$  converge vers  $z$  ou vers  $t$ . Cela signifie qu'il y a au plus deux limites possibles  $z$  et  $t$ . Si  $z \neq t$ , alors, quitte à extraire,  $f_i$  envoie le complémentaire de tout voisinage de  $z$  dans des voisinages arbitrairement petits de  $t$ . Cela entraîne que la variété  $M$  est simplement connexe et sa métrique conformément plate, donc  $M$  est conforme à la sphère.

## 6 Transformations quasiconformes

Comment J. Ferrand a-t-elle dcouvert son invariant de 4 points ?

L'ide d'utiliser une mtrique naturellement invariante sous les transformations conformes remonte A. Lichnrowicz. Dans [L], A. Lichnrowicz utilise les mtriques courbure scalaire constante. Dans les annes 60, cette approche tait limite par le fait que le *problme de Yamabe*, existence et/ou unicite d'une mtrique courbure scalaire constante conforme une mtrique riemannienne donne, n'tait que partiellement rsolu. Le rsultat essentiel obtenu depuis est un pendant analytique du rsultat de [F7], d R. Schoen, [S].

*Soit  $(M, g)$  une varit riemannienne compacte non conforme la sphre standard. Alors l'ensemble des mtriques conformes  $g$ , courbure scalaire constante, est compact.*

L'ide de mtrique naturellement invariante a t dveloppe dans la catgorie holomorphe par S. Kobayashi, [K], avec un grand succs. S'il est vraisemblable que [F8] ait t influenc par les travaux de S. Kobayashi, la construction de ce dernier diffre essentiellement de celle de J. Ferrand. La transcription exacte de la dfinition de la mtrique de Kobayashi la catgorie conforme (ncessairement limite aux varits conformment plates) est dveloppe dans [KP].

Il faut plutt rechercher l'inspiration de J. Ferrand dans la thorie des transformations *quasiconformes* inaugure par H. Grtsch [Gr] et L. Ahlfors, [A].

Voici la dfinition que donne L. Ahlfors. Un *quadrilatre* est un domaine plan bord par une courbe de Jordan portant 4 points marqu  $x, z, y, t$ . Un tel domaine admet une reprsentation conforme sur un rectangle qui envoie les points marqu sur les sommets. Ce rectangle est unique similitude prs. Le rapport de deux cts conscutifs est un invariant conforme du quadrilatre donn, appel *module*. Un homomorphisme  $f$  entre domaines plans est dit  *$K$ -quasiconforme* si pour tout quadrilatre  $Q$ ,

$$K^{-1} \text{ module } Q \leq \text{ module } f(Q) \leq K \text{ module } Q.$$

Noter que le module d'un rectangle est exactement la moiti de la capacit de deux cts oppos. En dimension 2, la dfinition de J. Ferrand est donc trs proche de l'ide de L. Ahlfors.

Un homomorphisme entre domaines plans est quasiconforme si et seulement si il envoie les petites boules sur des domaines d'excentricit borne, voir par exemple [V]. Cette notion garde un sens sur un espace mtrique quelconque.

M. Gromov, la suite de G.D. Mostow et G.A. Margulis, a mis en vidence le rle que jouent les transformations quasiconformes en thorie des groupes : le bord l'infini d'un groupe hyperbolique possde une structure quasiconforme, [GP]. Ceci motive des travaux rcents, [KR], [H], [HK], o on tudie la rgularit de transformations quasiconformes sur des espaces mtriques de plus en plus gnraux. Le point essentiel dans ces travaux reste l'estimation de l'invariant de Ferrand.

M. Gromov a soulev le problme de savoir ce qu'il restait de la thorie quasiconforme en dimension infinie. Cela motive la recherche d'estimations de l'invariant de Ferrand indpendantes de la dimension, voir [F11].

L'invariant de Ferrand exploite l'invariance conforme de l'intégrale  $\int |du|^n$ . En un sens qu'on va préciser, ces intégrales déterminent entièrement la structure conforme. A la suite de H. Royden, J. Ferrand attache une famille d'algèbres de Banach à une variété riemannienne  $M$ . Étant donné  $p > 1$ , notons  $\mathcal{A}^p(M)$  l'espace des fonctions continues bornées sur  $M$  dont les dérivées partielles au sens des distributions sont des fonctions de puissance  $p$ -ième intégrable.  $\mathcal{A}^p(M)$  est une algèbre de Banach pour la norme  $\|u\|_\infty + \|du\|_p$ . Dans [F9], J. Ferrand montre que, si  $p = n$ , tout isomorphisme  $\mathcal{A}^n(M) \rightarrow \mathcal{A}^n(N)$  est induit par une transformation quasiconforme  $M \rightarrow N$ . En revanche, si  $p \neq n$ , tout isomorphisme  $\mathcal{A}^p(M) \rightarrow \mathcal{A}^p(N)$  est induit par un homomorphisme bilipschitzien  $M \rightarrow N$ . On trouvera un résultat qui va dans le même sens dans [GR].

J. Ferrand va plus loin. Elle caractérise les applications  $M \rightarrow N$  qui envoient  $\mathcal{A}^p(N)$  dans  $\mathcal{A}^p(M)$ , pour  $p > n$ . Le cas où  $p < n$  a été abordé dans [GGR]. Ce point de vue est développé dans [P].

## 7 Structures géométriques de type fini

Le problème de Lichnerowicz a une généralisation aux variétés non compactes. On dit qu'un groupe  $G$  de transformations conformes d'une variété riemannienne  $(M, g)$  est *inessentiel* s'il préserve une métrique riemannienne  $g'$  conforme à  $g$  (i.e. proportionnelle à  $g$  en chaque point). La question devient : montrer qu'une variété riemannienne non compacte dont le groupe conforme est essentiel est conforme à l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$ .

D.V. Alekseevski en a publié une solution dès 1972, [A]. C'est seulement en 1992 que R. Zimmer et K. Gutzschera ont trouvé une faille importante dans la preuve de D.V. Alekseevski.

Voici le contexte qui a amené R. Zimmer à étudier le problème de Lichnerowicz. R. Zimmer s'intéresse aux actions de groupes non compacts sur des variétés compactes, du point de vue des systèmes dynamiques. Si toute variété admet une action ergodique de  $\mathbf{R}$ , il semble que seules des variétés compactes très spéciales admettent une action ergodique d'un groupe de Lie semi-simple, voir par exemple [La]. On conjecture qu'une telle variété doit porter une structure géométrique de type fini, [Z].

Appelons *structure géométrique d'ordre  $r$*  sur une variété  $M$  la donnée d'une réduction du fibré des repères d'ordre  $r$  à un sous-groupe algébrique du groupe  $GL_n^{(r)}$  des  $r$ -jets de difféomorphismes fixant l'origine dans  $\mathbf{R}^n$ . Une structure géométrique est *de type fini* si tout automorphisme est déterminé par son jet d'ordre fini. Par exemple, une métrique (pseudo)-riemannienne, une structure conforme, projective est une structure de type fini. Une structure symplectique ou complexe ne l'est pas.

Un problème passionnant et actuel est l'étude des variétés compactes munies de structures géométriques de type fini qui admettent un groupe non compact d'automorphismes. Pour les structures conformes, le problème est entièrement résolu par [F7]. Dans le cas général, un pas important a été accompli par M.

Gromov qui montre que si le pseudo-groupe d'automorphismes locaux a une orbite dense, alors celle-ci est ouverte, [G]. Les objets cherchs sont donc "homogones presque partout". En utilisant ce rsultat, G. d'Ambra a pu montrer que le groupe d'isomtries d'une varit compacte simplement connexe munie d'une mtrique lorentzienne analytique relle est toujours compact, [D].

L'assertion de [Al] qui a attir l'attention de R. Zimmer est la suivante. Si  $G$  est un groupe ferm d'automorphismes d'une varit  $M$  munie d'une structure gomtrique de type fini, et si les stabilisateurs de tous les points sont compacts, alors  $G$  agit proprement sur  $M$ . Dans cette gnralit, l'nonc est faux. Dans le cas particulier d'une structure conforme, il est quivalent la conjecture de Lichnrowicz gnralise, qui a t rsolue rcemment par Jacqueline Ferrand, [F12], ainsi que sa version quasiconforme, [F14]. La solution utilise un invariant de 3 points, obtenu partir de l'invariant de 4 points en faisant tendre un point vers l'infini.

## 8 Conclusion

Les travaux de Jacqueline Ferrand ont une influence sensible dans plusieurs branches des mathmatiques. Pourtant, ils sont peu connus en France. Elle n'a pas cherch fonder une cole. Comme elle le dit avec modestie, elle a hsit entra ner des jeunes sur des pistes qu'elle jugeait insuffisamment prometteuses. Jacqueline Ferrand a men quelques collaborations l'tranger, notamment en Finlande o elle jouit d'une grande considration. Toutefois, son itinraire intellectuel est principalement solitaire. La valeur de ses travaux n'a t pleinement reconnue que lorsque l'actualit mathmatique l'a rejointe, ce qui s'est produit en 1942 au moment de sa thse, en 1969 avec le problme de Lichnrowicz et nouveau en 1996.

## References

- [A] L.V. AHLFORS, *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen*. Acta Soc. Sci. Fennicae **1**, 1 – 40 (1930).
- [Al] D.V. ALEKSEEVSKI, *Groups of transformations of Riemannian spaces*. Mat. Sbornik **89**, 280 – 296 (1972) = Math. USSR Sbornik **18**, 285 – 301 (1972).
- [C] C. CARATHEODORY, *ber die Begrenzung einfach zusammenhngender Gebiete*. Math. Ann. **73**, 323 – 370 (1913).
- [D] G. D'AMBRA, *Lorentz manifolds with noncompact isometry group*. Invent. Math. **92**, 555 – 565 (1988).
- [F1] J. FERRAND, *Etude de la representation conforme au voisinage de la frontire*. Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **59**, 43 – 106 (1942).
- [F2] J. FERRAND, *Etude de la correspondance entre les frontires dans la representation conforme*. Bull. Soc. Math. de France **70**, 143 – 174 (1942).

- [F3] J. FERRAND, *Fonctions prharmoniques et fonctions prholomorphes*. Bull. Sci. Math. **68**, 152 – 180 (1944).
- [F4] J. FERRAND, *Etude au voisinage de la frontire des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace*. Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **66**, 125 – 158 (1949).
- [F5] J. FERRAND, *Reprsentation conforme et transformations intgrale de Dirichlet borne*. Cahiers Scientifiques, Fasc. 12, Gauthier-Villars, Paris (1955).
- [F6] J. FERRAND, *Application des mthodes de Hilbert l’tude des transformations infinitsimales d’une varit differentiable*. Bull. Soc. Math. de France **86**, 1 – 26 (1942).
- [F7] J. FERRAND, *Transformations conformes et quasi-conformes des varits riemanniennes compactes*. Mm. Acad. Royale Belgique **39**, 1 – 44 (1971).
- [F8] J. FERRAND, *Invariants conformes globaux sur les varits riemanniennes*. J. Differen. Geom. **8**, 487 – 510 (1973).
- [F9] J. FERRAND, *Etude d’une classe d’applications lies des homomorphismes d’algbres de fonctions*. Duke Math. J. **40**, 163 – 186 (1973).
- [F10] J. FERRAND, *Geometrical interpretation of scalar curvature and regularity of conformal homeomorphisms*. P. 91-105 in “Differential Geometry and Relativity”, M. Cahen and M. Flato eds., D. Reidel, Dordrecht (1976).
- [F11] J. FERRAND, G. MARTIN and M. VUORINEN, *Lipschitz conditions in conformally invariant metrics*. J. d’Analyse Math. **156**, 187 – 210 (1991).
- [F12] J. FERRAND, *The action of conformal transformations on Riemannian manifolds*. Math. Ann. **304**, 277 – 291 (1996).
- [F13] J. FERRAND, *Conformal capacities and extremal metrics*. Pacific. J. Math. **172**, 89 – 97 (1996).
- [F14] J. FERRAND, *Convergence and degeneracy of quasiconformal maps of Riemannian manifolds*. J. Analyse Math. **69**, 1 – 24 (1996).
- [G] M. GROMOV, *Rigid transformation groups*. In “Gomtrie Diffrentielle”, D. Bernard et Y. Choquet-Bruhat eds., Hermann, Paris (1988).
- [GGR] V. GOLDSHTEIN, L. GUROV and A. ROMANOV, *Homeomorphisms that induce monomorphisms of Sobolev spaces*. Israel J. Math. **91**, 31 – 60 (1995).
- [GP] M. GROMOV and P. PANSU, *Rigidity of lattices, an introduction*. in “Geometric topology: recent developments”, Montecatini Terme 1990, P. de Bartolomeis and F. Tricerri eds, Lect. Notes in Math. Band 1504, Springer, Berlin (1990).



- [Gr] H. GRTSCH, *ber die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und ber eine damit Zusammenhngende Erweiterung des Picardschen Satzes*. Ber. Verh. Schs. Akad. Wiss. Leipzig **80**, 503 – 507 (1928).
- [GR] V. GOLDSHTEIN and M. RUBIN, *Reconstruction of domains from their groups of quasiconformal autohomeomorphisms*. Diff. Geom. and its Appl. **5**, 205 – 218 (1995).
- [H] J. HEINONEN, *A capacity estimate on Carnot groups*. Bull. Sci. Math. **119**, 475 – 484 (1995).
- [HK] J. HEINONEN and P. KOSKELA, *From local to global in quasiconformal structures*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **93**, 554 – 556 (1996).
- [K] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*. Marcel Dekker, Amsterdam (1970).
- [KP] R. KULKARNI and U. PINKALL, *A canonical metric for Moebius structures and its applications*. Math. Zeit. **216**, 89 – 129 (1994).
- [KR] A. KORANYI and M. REIMANN, *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group*. Adv. in Math. **111**, 1–87 (1995).
- [L] A. LICHNEROWICZ, *Sur les transformations conformes d’une varit riemannienne compacte*. C. R. Acad. Sci. Paris **259**, 697 – 700 (1964).
- [La] F. LABOURIE<sup>1</sup>, *Large group actions on manifolds*. Proceedings of ICM Berlin, 1998. Doc. Math., J. DMV Extra Vol. ICM II, 371-380 (1998).
- [M] Ch. MERCAT, *Holomorphie discrte et modle d’Ising*. Thse, Universit L. Pasteur, Strasbourg, 142 p. (1998).
- [O] M. OBATA, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. **77**, 265 – 270 (1971).
- [P] P. PANSU, *Diffomorphismes de  $p$ -dilatation borne*. A paratre aux Ann. Acad. Sci. Fennicae.
- [S] R. SCHOEN, *On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class*. P. 311-320 in “Differential geometry. A symposium in honour of Manfredo do Carmo”, Rio de Janeiro 1988, Pitman (1991).
- [V] J. VISL, *Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings*. Lect. Notes in Math. Band 129, Springer, Berlin (1971).
- [Z] R. ZIMMER, *Actions of semisimple groups and discrete subgroups*. P. 1247-1258 in “Proc. Intern. Cong. Math. Berkeley 1986”, Vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence (1987).

---

<sup>1</sup>Rfrences mises jour en janvier 2001

UMR 8628 du C.N.R.S.  
Mathématiques, Btiment 425  
Universit Paris-Sud  
91405 Orsay  
France  
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`