

1- Le théorème de Green-Tao et autres secrets des nombres premiers

Une activité pour le collège et le lycée

Les nombres premiers intéressent les mathématiciens depuis l'Antiquité et l'article de Michel Waldschmidt met bien en lumière la multitude de conjectures à leur sujet, qui s'énoncent facilement mais se démontrent difficilement. Ils constituent un exemple probant de ce glissement qui se produit parfois en mathématiques : un jeu de l'esprit gratuit et intrigant peut trouver son utilité de façon inattendue.

Pour aborder le sujet dès la 6ème, voici une activité pour fabriquer un bel outil, le crible d'Eratosthène. Cette activité est ici présentée comme un travail individuel mais peut aussi faire l'objet d'une recherche collective dans le cadre de la classe.

1- Un nombre premier est un nombre (entier) qui admet exactement deux diviseurs, lui-même et 1. Donne un exemple de nombre premier. Donne un exemple de nombre qui ne soit pas premier. A ton avis, avec cette définition, 1 lui-même est-il un nombre premier ?

2- Ceci est un tableau des nombres entiers de 1 à 100, bien rangés.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Voici une méthode pour trouver tous les nombres premiers de ce tableau.
Il te faut pour cela suffisamment de crayons de couleurs.

- Barre le 1, puisqu'on s'est mis d'accord : il n'est pas premier.
- Choisis une couleur. 2 est un nombre premier : tu l'entoures. Par contre, les multiples de 2 autres que 2 ne sont pas premiers : ils ont au moins trois diviseurs 1, 2 et eux-mêmes. Barre les, avec la couleur qui t'a servi à entourer le 2.
- Change de couleur. 3 est premier : il n'a pas d'autre diviseur que lui-même et 1. Il serait déjà barré s'il était multiple d'un nombre situé avant lui dans le tableau. Entoure le 3. Puis barre tous les multiples de 3 autres que 3, qui eux ne sont pas premiers, avec la couleur qui t'a servi à entourer le 3. Quels sont les nombres qui ont été barrés deux fois ?

- d) Change de couleur. Le premier nombre non encore barré est 5. Il est certainement premier car s'il avait un diviseur, ce diviseur serait avant lui, et 5 serait déjà barré. Entoure-le puis barre ses multiples.
- e) Continue avec ce principe. A chaque changement de couleur, le premier nombre non encore barré est premier, tu l'entoures, puis tu barres ses multiples.
- f) quand tu arrives à 11, ton travail est fini !

En effet, les multiples de 11 du tableau ont déjà été barrés, parce qu'ils sont multiples d'un autre nombre plus petit que 11 (5×11 , $7 \times 11 \dots$). Le premier multiple de 11 qu'il te faudrait barrer est 11×11 , mais 11×11 vaut 121, et 121 est trop grand, il n'est pas dans ton tableau. Comme le raisonnement fait pour 11 vaut aussi pour les suivants (13, 17...), tu peux être tranquille. Tous les nombres qui restent sont premiers et tu peux les entourer.

3- Utilise ton tableau pour faire la liste de tous les nombres premiers plus petits que 100 (les nombres entourés). Observe ta liste et fais des remarques. Observe aussi la disposition des nombres barrés en fonction de la couleur de la barre et fais le plus possible de remarques.

Ce tableau porte le nom de crible d'Eratosthène.

Un crible, c'est un tamis : ici un tamis qui sert à trier les nombres premiers. Il ne reste plus qu'eux à la fin.

Eratosthène est un mathématicien grec qui vivait à Alexandrie (actuelle Egypte) il y a très longtemps (au troisième siècle avant Jésus-Christ). Son nom est associé aux nombres premiers mais il a aussi été le premier à mesurer précisément le rayon de la Terre.