

2- Cryptage et décryptage : communiquer en toute sécurité

Une activité pour le primaire ou le collège

Les mathématiques sont utilisées pour sécuriser les outils modernes de communication ou d'échange. Mais, dans le simple numéro de chaque carte bancaire se cache déjà un code de contrôle, élaboré à partir d'une idée mathématique ancienne et simple qui ne demande que de savoir calculer des doubles et faire des additions.



Un numéro de carte bancaire, c'est un très grand nombre. Combien de chiffres comporte-t-il ? Comment sont-ils groupés ? D'habitude, on groupe plutôt les chiffres par tranches de trois... En fait, dans les modèles les plus courants, les six premiers chiffres sont des identifiants liés à la banque émettrice. Les neuf suivants sont des identifiants spécifiques de la carte elle-même et le seizième chiffre est un code de contrôle, qui se déduit des précédents par un calcul. Et, du coup, permet de vérifier si un numéro de carte bancaire a, ou non, l'air valide.

1- Vérifier la validité d'un numéro complet de carte bancaire

Il te suffit de savoir doubler et additionner pour effectuer cette vérification.

Ecris tes seize chiffres bien espacés.

3 1 6 5 4 1 2 3 8 7 7 2 3 9 7 8

En dessous, écris un nouveau nombre obtenu en laissant tel quel un chiffre sur deux à partir de la droite, et en remplaçant chacun des autres chiffres par son double :

3 1 6 5 4 1 2 3 8 7 7 2 3 9 7 8

6 1 12 5 8 1 4 3 16 7 14 2 6 9 14 8

Ensuite ajoute tous les chiffres que tu viens d'écrire :

$6 + 1 + 1 + 2 + 5 + 8 + 1 + 4 + 3 + 1 + 6 + 7 + 1 + 4 + 2 + 6 + 9 + 1 + 4 + 8 = 80$

Si le résultat est un multiple de dix (c'est-à-dire se termine par 0) le numéro de carte a des chances d'être valide.

Applique cette technique pour dire si les numéros suivants semblent ou non valides :

5131 7512 3456 7890

4275 3156 0372 5492

4417 1234 5678 9113

2- Calculer le quinzième chiffre

Tu vas maintenant te transformer en fabricant de carte, et fabriquer des numéros de carte qui seront valides.

Supposons que tu disposes des quinze premiers chiffres. Il te faut maîtriser 2 outils :

- savoir doubler un chiffre
- quand un de ces doubles dépasse 10, le remplacer par la somme de ses chiffres.

On appelle « double trafiqué » le nombre de 1 chiffre ainsi obtenu (soit le vrai double, soit la somme des chiffres du double.)

Exemple : le double trafiqué de 3 est 6, celui de 8 est 7 (1+6).

Ecris tes quinze chiffres bien espacés. En dessous, écris un nouveau nombre de quinze chiffres ainsi fabriqué. Un chiffre sur deux, à partir de la droite, est remplacé par son « double trafiqué ». Un chiffre sur deux est laissé tel quel.

Exemple : on a le début du numéro. On cherche le seizième chiffre :

3165 4123 8772 397 ?

On écrit les quinze premiers

3 1 6 5 4 1 2 3 8 7 7 2 3 9 7

On les transforme comme indiqué

6 1 3 5 8 1 4 3 7 7 5 2 6 9 5

Ensuite ajoute tous les chiffres que l'on vient d'écrire :

$$6 + 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 4 + 3 + 7 + 7 + 5 + 2 + 6 + 9 + 5 = 72$$

Le chiffre des unités du nombre ainsi trouvé est 2. Le chiffre manquant est le complément à dix de ce chiffre des unités, soit 8.

Le numéro complet est : 3165 4123 8772 3978

Calcule le dernier chiffre des numéros de carte bancaire dont voici le début :

5131 7512 3456 789

4275 3156 0372 549

4417 1234 5678 911

Ce code de contrôle permet de vérifier rapidement que le numéro d'une carte bancaire a l'air valide et de détecter des erreurs de saisie. Mais attention, il ne les détecte pas toutes (exemple : si deux chiffres éloignés de 2 places sont intervertis, cela ne se verra pas) Il a été inventé dans les années 1960 par un scientifique du nom de Luhn, qui a donné son nom à la formule de calcul décrite ci-dessus.

Compléments possibles :

- la preuve par 9 pour les multiplications
- algorithmique au lycée: programmation de l'algorithme de contrôle de validité

<http://maths-au-quotidien.fr/lycee/DM/Luhn.pdf>