

Pierre Pansu

COHOMOLOGIE L^p DES VARIÉTÉS À COURBURE NÉGATIVE, CAS DU DEGRÉ 1

L'inégalité de Sobolev sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ s'énonce de la manière suivante: pour toute fonction lisse u à support compact sur $\mathbb{R}^n$ et tout $p < n$,

$$(*) \quad \|u\|_q \leq C_{n,p} \|du\|_p,$$

où

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}.$$

En fait une inégalité légèrement modifiée reste vraie pour des fonctions dont le support n'est pas nécessairement compact: pour toute fonction lisse u sur $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $c = c(u)$ telle que

$$(**) \quad \|u - c\|_q \leq C_{n,p} \|du\|_p.$$

On a une inégalité similaire pour un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$, avec une constante qui dépend du diamètre et du volume ([7], chapitre 7).

En revanche, il existe des domaines où cette inégalité est en défaut: soit $\Omega = \mathbb{R}^m \times B^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$, où B^{n-m} est une boule; soit u une fonction qui ne dépend que de la variable angulaire du facteur $\mathbb{R}^m$. Alors $du \in L^p$ pour $p > m$ alors que $u - c \notin L^q$ quelles que soient les constantes $q \geq 1$ et $c \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, la question de savoir si l'inégalité (**) est vraie dans un domaine Ω dépend de la géométrie de Ω . En fait, cette question garde un sens si le domaine Ω est remplacé par une variété riemannienne M . Dans ce

cadre un peu plus général, donnons d'abord deux formulations équivalentes du problème

DEFINITION. Soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une expression de la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

s'appelle une *forme différentielle de degré un*. Par exemple, si u est une fonction lisse sur Ω , sa *différentielle totale*

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$$

est une forme différentielle de degré un. On dit qu'une 1-forme différentielle est *fermée* si, localement, c'est une différentielle totale. Autrement dit, si on

$$a \quad \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Il se peut dire que cette condition locale ne suffit pas pour que α soit globalement la différentielle totale d'une fonction. C'est pourquoi on introduit l'espace $H^1(\Omega, \mathbb{R})$, quotient de l'espace $Z^1(\Omega)$ des 1-formes fermées sur Ω par l'espace $B^0(\Omega)$ des différentielles totales de fonctions définies sur Ω . Si considère seulement des formes différentielles et des fonctions à support compact, on obtient un autre espace $H_c^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Ces notions, invariantes par changement des coordonnées, gardent un sens sur une variété différentiable abstraite M . L'espace $H^1(M, \mathbb{R})$ (resp. $H_c^1(M, \mathbb{R})$) ne dépend que de la topologie (en fait, du type d'homotopie pour le premier) de M et s'appelle le premier espace de *cohomologie* de de Rham (resp. à supports compacts) de M .

Si M est munie d'une métrique riemannienne, on peut imposer des conditions de décroissance à l'infini. On peut mesurer la longueur d'une forme différentielle, intégrer sa puissance p -ième par rapport au volume riemannien. On note alors $Z_p^1(M)$ l'espace des 1-formes différentielles fermées α telles que $|\alpha| \in L^p$, et $B_q^0(M)$ l'espace des différentielles totales de fonctions $u \in L^q(M)$. L'inégalité (*) n'est pas automatique pour une variété riemannienne. Cependant, dans de nombreux exemples, on a une inégalité de Sobolev, avec des exposants p et q qui dépendent de M . Lorsque l'inégalité de Sobolev (*) est vérifiée, $B_q^0(M)$ est un sous-espace fermé de $Z_p^1(M)$. On obtient un espace de *cohomologie* $L^{p,q}$

$$H_{n,q}^1(M) = Z_p^1(M) / B_q^0(M).$$

Si $p > 1$, la norme de $Z_p^1(M)$ est uniformément convexe, chaque classe de cohomologie $L^{p,q}$ contient un élément de norme minimum (qui est le seul point critique de la norme dans cette classe). Celui-ci satisfait l'équation d'Euler-Lagrange

$$\operatorname{div}(|\alpha|^{p-2}\alpha) = 0.$$

où $\operatorname{div} = - * d *$ en fonction de l'opérateur $*$ de Hodge. Si $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, α est la différentielle totale d'une fonction u , qui satisfait l'équation des fonctions p -harmoniques

$$\operatorname{div}(|du|^{p-2}du) = 0.$$

On arrive donc aux deux formulations suivantes:

1. PROPOSITION – Supposons que la variété M satisfait $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, et qu'elle est munie d'une métrique riemannienne vérifiant (*) avec $p > 1, q > 0$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- a) l'inégalité (**) est vraie sur M ;
- b) $H_{p,q}^1(M) = 0$;
- c) toute fonction p -harmonique sur M dont le gradient est dans L^p est constante.

L'espace $H_{p,q}^1(M)$ contient la cohomologie de de Rham à supports compacts qui ne dépend pas de la métrique – mais est souvent beaucoup plus grand, c'est véritablement un invariant riemannien. Cependant, c'est un invariant plutôt grossier: il ne change pas si la métrique riemannienne g est remplacé par une métrique équivalente g' telle que

$$C^{-1}g \leq g' \leq Cg.$$

En particulier, si N est une variété compacte, et $\tilde{N}$ son revêtement universel, l'espace de Banach $H_{p,q}^1(\tilde{N})$ est un invariant différentiable de N . On va voir que cette grandeur ne dépend en fait que du groupe fondamental.

Graphes et quasiisométries. – La cohomologie $L^{p,q}$ rentre dans le cadre de la géométrie des groupes, développée par M. Gromov dans [8] et [9]. En effet, on peut définir la cohomologie $L^{p,q}$ pour un graphe Γ , et donc, a fortiori, pour un groupe discret de type fini.

L'équivalent d'une 1-forme fermée est un *cocycle*, i.e., une fonction α sur $\Gamma \times \Gamma$ telle que

$$\alpha(a, c) = \alpha(a, b) + \alpha(b, c).$$

Sa longueur au point a est

$$|\alpha|(\alpha) = \sum_{b \text{ voisin de } \alpha} |\alpha(a, b)|.$$

La différentielle d'une fonction u sur Γ est

$$du(a, b) = u(b) - u(a).$$

Avec la mesure de comptage, on peut définir $Z_p^1(\Gamma)$ et $B_q^0(\Gamma)$, et, si l'inégalité (*) est satisfaite, leur quotient $H_{p,q}^1(\Gamma)$.

Une application f entre espaces métriques est une *quasiisométrie* s'il existe des constantes L et C telles que l'image de f soit C -dense dans X' et que, pour tous $x \neq y$,

$$-C + \frac{1}{L}d(x, y) \leq d(fx, fy) \leq Ld(x, y) + C.$$

Si N est compacte, le groupe discret $\pi_1(N)$ et le revêtement universel $\tilde{N}$ sont quasiisométriques. M. Kanai ([11]) a montré que les inégalités de Sobolev sont des invariants de quasiisométrie. On montre ici

2. THÉORÈME – Soient $q \geq p \geq 1$ deux réels. La cohomologie $L^{p,q}$ est un invariant de quasiisométries des variétés riemanniennes à rayon d'injectivité et courbure de Ricci minorés. En particulier, soit N une variété compacte, $\tilde{N}$ son revêtement universel, muni d'une métrique induite, Γ le graphe de Cayley du groupe fondamental $\pi_1(N)$. Alors les espaces de cohomologie $L^p H_{p,q}^1(\tilde{N})$ et $H_{p,q}^1(\Gamma)$ sont isomorphes.

Dans cet article, on étudie la classe des variétés complètes, simplement connexes, à courbure sectionnelle négative.

Ces variétés sont proches des domaines pour les raisons suivantes:

- il y a des coordonnées polaires globales;
- elles satisfont aux inégalités de Sobolev avec $q = p$;
- elles ont une sorte de "bord", la sphère à l'infini de P. Eberlein et B. O'Neill, [6].

La sphère à l'infini de M est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques, $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ étant équivalentes si la distance $\text{dist}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ est bornée pour $t \in \mathbb{R}_+$. Les coordonnées polaires – globales – permettent d'identifier la sphère à l'infini ∂M à la sphère unité tangente en un point quelconque.

Comme la croissance du volume est exponentielle, une fonction u dont

géodésique, c'est une sorte de "valeur au bord" u_∞ définie sur ∂M . Inversement, le résultat suivant, dû à R. Strichartz, ramène le calcul de la cohomologie L^p à un théorème de trace.

3. THÉORÈME (R. Strichartz, [14]). – Si $u_\infty = 0$ presque partout, alors $u \in L^p$. Par conséquent, l'espace de cohomologie $H_{p,q}^1(M)$ s'identifie à un sous-espace de fonctions sur ∂M modulo les constantes.

On calcule la cohomologie L^p pour certains espaces homogènes à courbure négative. Un tel espace est un groupe de Lie résoluble S muni d'une métrique invariante à gauche. Le groupe S est le produit semi-direct de $\mathbb{R}$ et d'un groupe nilpotent N , où l'action de $\mathbb{R}$ sur N est engendrée par une dérivation α dont les valeurs propres ont pour partie réelle $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$. On ne traite ici que le cas où α est semi-simple.

4. THÉORÈME – Soit M un espace homogène à courbure négative. La cohomologie L^p de M s'annule si et seulement si

$$p \leq \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}}{\lambda_1}$$

Notons $p(M)$ la valeur de p pour laquelle $H_{p,p}^1(M)$ commence à être non nulle. Il faut y penser comme à une sorte de dimension de Hausdorff de ∂M . On a l'inégalité suivante:

5. THÉORÈME – Si la courbure sectionnelle K est pincée entre $-\alpha^2$ et $-b^2$, alors

$$(n-1)\frac{b}{\alpha} \leq p(M) \leq (n-1)\frac{\alpha}{b}.$$

Exemple. – Soit H^n l'espace hyperbolique, i.e., une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle constante. Alors $H_{p,p}^1(M)$ s'identifie à l'espace de Besov

$$B_{n-1/p}^{p,p}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Cet exemple est typique: on peut généraliser la définition des espaces de Besov aux groupes nilpotents munis d'automorphismes contractants, et on a un énoncé similaire (théorème 5).

1. Invariance sous quasiisométries

On pose le problème dans le cadre des espaces métriques munis de mesures. L'invariance sous quasiisométries est générale dans ce cadre.

1.1 DÉFINITION – Soit X un espace de longueur, dx une mesure sur X . On suppose que

- (1) $v(r) = \inf\{\text{vol} B(x, r) | x \in X\}$ est positif pour r assez petit,
- (2) $V(R) = \sup\{\text{vol} B(x, R) | x \in X\}$ est fini pour R assez grand.

Un noyau est une fonction positive ψ sur $X \times X$ telle que

- (i) ψ est bornée,
- (ii) pour tout $x \in X$,

$$\int_X \psi(x, y) dy = \int_X \psi(y, x) dy = 1,$$

- (iii) il existe des constantes $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ et $R < +\infty$ telles que $\psi(x, y) > \delta$ si $d(x, y) \leq \epsilon$, $\psi(x, y) = 0$ si $d(x, y) > R$.

On a une opération de convolution sur les noyaux

$$\phi * \psi(x, y) = \int_X \phi(x, z) \psi(z, y) dz.$$

On note ψ^{*n} le produit de convolution de ψ avec lui-même n fois.

1.2 LEMME – Soit X un espace de longueur muni d'une mesure dx satisfaisant (1), ϕ et ψ deux noyaux. Alors il existe un entier m et une constante C tels que

$$\phi \leq C \psi^{*m}.$$

Fixons un $r < \epsilon$. Par hypothèse, étant donnés deux points x et y , il existe un z tel que $d(x, z)$ et $d(z, y)$ soient arbitrairement proches de $d(x, y)/2$. En particulier, si $d(x, y) < 2\epsilon - 2r$, il y a une boule de rayon $> r$ de points z tels que $d(x, z) < \epsilon$ et $d(z, y) < \epsilon$, d'où $\psi * \psi(x, y) \geq \delta^2 v(r)$. Ceci montre que le rayon de positivité de $\psi * \psi$ est au moins le double de celui de ψ . Soit ϕ un autre noyau, à support dans le voisinage de la diagonale de largeur R' , noté $T_{R'}$. Choisissons m tel que $m(\epsilon - r) > R'$. Alors $\psi^{*m} \geq \delta^m v(r)^{m-1}$ sur $T_{R'}$, donc

1.3 DÉFINITION – Un cocycle sur X est une fonction α définie sur $X \times X$ qui satisfait, pour tous $x, y, z \in X$,

$$\alpha(x, y) = \alpha(x, z) + \alpha(z, y).$$

Le cobord d'une fonction u est le cocycle du donné par

$$du(x, y) = u(x) - u(y).$$

Étant donné un noyau ψ et $p \geq 1$, on définit une semi-norme $N_{p, \psi}$ sur les cocycles sur X par la formule

$$N_{p, \psi}(\alpha) = \left(\int_{X \times X} |\alpha(x, y)|^p \psi(x, y) dx dy \right)^{1/p}.$$

1.4 LEMME – Les semi-normes $N_{p, \psi}$ sont deux à deux équivalentes. Cela résulte du lemme 1.2 et du fait suivant:

$$N_{p, \phi * \psi} \leq 2(\|\phi\|_\infty N_{p, \psi} + \|\psi\|_\infty N_{p, \phi}).$$

1.5 DÉFINITION – Soit X un espace de longueur, muni d'une mesure dx . Soit ψ un noyau sur X . L'espace de cohomologie grossière est le quotient

$$H_{p, q}^{1, \psi}(X) = Z_p^{1, \psi}(X) / B_q^0(X),$$

où Z_p^1 est l'espace des cocycles dont la norme $N_{p, \psi}$ est finie, et $B_q^0(X)$ le sous-espace des cobords de fonctions dans $L^q(X, dx)$. L'espace de cohomologie grossière réduite est le quotient $\bar{H}_{p, q}^{1, \psi}(X)$ de $Z_p^{1, \psi}(X)$ par l'adhérence de $B_q^0(X)$.

D'après le lemme 1.4, ces espaces ne dépendent pas du noyau particulier choisi.

Un noyau ψ permet, par convolution, de régulariser une fonction u :

$$u * \psi(x) = \int_X u(z) \psi(z, x) dz.$$

Plus généralement, on peut régulariser les cocycles. La convolution d'un cocycle α avec un noyau ψ est définie par

$$\alpha * \psi(x, y) = \int_{X \times X} \alpha(z, z') \psi(z, x) \psi(z', y) dz dz',$$

et on a

$$d(u * \psi) = (du) * \psi.$$

Cette opération est sans effet sur la cohomologie:

1.6 LEMME – La convolution $\alpha \mapsto \alpha * \psi$ induit l'identité en cohomologie si $q = p$, en cohomologie réduite si $q > p$.

Clairement,

$$N_{p,\psi}(\alpha * \psi) \leq N_{p,\psi'}(\alpha)$$

où $\psi' = \tilde{\phi} * \psi * \phi, \tilde{\phi}(x, y) = \phi(y, z)$.

Ecrivons

$$(\alpha * \phi - \alpha)(x, y) = \int_{X \times X} (\alpha(z, z') - \alpha(x, y)) \phi(z, x) \phi(z', y) dz dz'.$$

De la relation de cocycle, on tire

$$\alpha(z, z') - \alpha(x, y) = \alpha(y, z') - \alpha(x, z),$$

d'où

$$\alpha * \phi - \alpha = du$$

où

$$u(x) = \int_X \alpha(x, z) \phi(z, x) dz.$$

Clairement,

$$\|u\|_p \leq N_{p,\phi}(\alpha).$$

Ceci suffit lorsque $q = p$. Lorsque $q > p$, on remarque que $u \in L^\infty$ dès que $\alpha \in L^\infty$. Or les cocycles bornés sont denses. En effet, pour tout cocycle α , on a

$$\|\alpha * \chi\|_\infty \leq N_{p,\chi}(\alpha).$$

On peut d'abord rendre α continu. Alors lorsque le support de χ tend vers la diagonale, $\alpha * \chi$ converge presque partout vers α , est dominé dans $L^p(\psi(x, y) dx dy)$ donc converge dans cet espace. On conclut que $\alpha * \phi - \alpha \in \overline{H}_{p,q}^{1,\psi}(X)$. ■

1.7 PROPOSITION – Soient X, X' deux espaces de longueur satisfaisant aux conditions (1) et (2) de 1.1. Soit $f: X \rightarrow X'$ une quasimétrie, i.e., il existe

des constantes L et C telles que l'image de f soit C -dense dans X' et que, pour tous $x \neq y$,

$$-C + \frac{1}{L} d(x, y) \leq d(fx, fy) \leq L(d(x, y) + C).$$

Alors il existe des noyaux ϕ', ψ' sur X' et ψ sur X tels que l'application

$$\alpha \mapsto (\alpha * \phi) \circ f$$

envoie $Z_p^{1,\psi'}(X')$ dans $Z_p^{1,\psi}(X)$ et induise un isomorphisme de $H_{p,q}^{1,\psi'}(X')$ sur $H_{p,q}^{1,\psi}(X)$.

Fixons un $r > 0$ assez petit. Choisissons $\psi \geq \delta$ (resp. $\phi' \geq \delta'$) dans un voisinage de la diagonale de largeur $\varepsilon > 3LC + 2r$ (resp. $\varepsilon' > Lr + 2C$). On vérifie aisément que

$$N_{p,q}((\alpha * \phi') \circ f) \leq N_{p,q}(\alpha)$$

où

$$\psi'(x', y') = \int_{X \times X} \psi(x, y) \phi'(f(x), x') \phi'(f(y), y') dx dy.$$

Alors, si le support de ψ (resp. ϕ') est contenu dans le voisinage de largeur R (resp. R) de la diagonale,

$$\begin{aligned} \|\psi'\|_\infty &\leq \|\phi'\|_\infty^2 \text{vol}(f^{-1}B(x', R')) \\ &\leq \|\phi'\|_\infty^2 V(LR + 2LC), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'(x', y') &\geq v(r)^2 \delta \delta'^2 \text{ dès que } d(x', y') < \varepsilon - 2r)/L - 3C, \\ \psi'(x', y') &= 0 \text{ si } d(x', y') > LR + C + 2R'. \end{aligned}$$

Ceci montre que f envoie $Z_p^{1,\psi'}(X')$ dans $Z_p^{1,\psi}(X)$.

D'autre part,

$$\|(u * \phi') \circ f\|_q^q \leq \int_{X'} |u(x')|^q dx' \int_X \phi'(x', f(x)) dx$$

or la deuxième intégrale est bornée par

$$\|\phi'\|_\infty V(LR + 2LC).$$

On conclut que f envoie $B_q^0(X')$ dans $B_q^0(X)$. Comme l'inverse de f est une quasimétrie, l'application induite en cohomologie est un isomorphisme. ■

1.8 Cas des graphes – L'hypothèse (1) est automatiquement satisfaite pour un graphe, i.e., pour un CW -complexe de dimension 1 muni d'une métrique

de longueur. Sur un graphe, on a une métrique de longueur naturelle, qui donne une longueur 1 à chaque arête. L'hypothèse (2) équivaut à une borne sur le nombre d'arêtes partant d'un sommet.

M. Kanai ([11]) a construit des graphes Γ qui approchent une variété riemannienne M . Il montre que, si la courbure de Ricci et le rayon d'injectivité de M sont bornés inférieurement, Γ est quasimétrique à M .

1.9 Cas des variétés riemanniennes – Remarquons que, pour qu'une variété riemannienne ait les propriétés (1) et (2) de 1.1, il suffit

- (1') que son rayon d'injectivité soit borné (voir [2], page 427),
 (2') que sa courbure de Ricci soit bornée inférieurement, inégalité de R. Bishop.

La convolution avec un noyau de classe C^1 est réellement une régularisation.

1.10 LEMME – Soit X un ouvert dans une variété riemannienne M . Si les dérivées de ψ sont bornées, il existe un noyau ϕ ne dépendant que de ψ tel que

$$\begin{aligned} \|d(u * \psi)\|_{\infty} &\leq N_{\phi}(du), \\ \|d(u * \psi)\|_p &\leq N_{\phi}(du). \end{aligned}$$

En effet, notons α le cocycle $\alpha = du * \psi$. Alors, pour tout $y \in X$,

$$\begin{aligned} d(u * \psi)(x) &= d_x \alpha(x, y) \\ &= \int_{X \times X} (u(z') - u(z)) d_x \psi(z, y) \psi(z', y) dz dz'. \end{aligned}$$

On choisit $y = x$. Notant R la largeur du support de ψ , il vient

$$|d(u * \psi)(x)| \leq \|d\psi\|_{\infty} \|\psi\|_{\infty} \int_{B(x, R) \times B(x, R)} |u(z') - u(z)| dz dz'.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on conclut aux inégalités annoncées, avec

$$\phi(z, z') = \frac{\|d\psi\|_{\infty} \|\psi\|_{\infty}}{\text{vol} B(x, R)} 1_{d(z, z') \leq R}. \quad \blacksquare$$

Soit M une variété riemannienne, $x \in M$, y un point qui n'est pas dans le lieu de coupure (cut locus) de x , de façon qu'il existe une seule géodésique

minimisante de x à $y = \exp_x(r\theta)$. On note $\Theta(x, y)$ la densité de l'élément de volume de M en coordonnées polaires d'origine x , i.e.,

$$\Theta(x, y)^{-1} dy = dr d\theta.$$

1.11 LEMME – Pour presque tous $x, y \in M$, on a

$$\Theta(x, y) = \Theta(y, x).$$

Notons UM le fibré unitaire tangent à M , ζ' le flot géodésique sur UM , π la projection de UM sur M . L'application exponentielle

$$\exp : UM \times \mathbb{R} \rightarrow M \times M, \quad (w, t) \mapsto (\pi(w), \pi(\zeta^t w))$$

est un difféomorphisme d'un ouvert de $UM \times \mathbb{R}$ sur un ouvert de mesure pleine de $M \times M$. Sur cet ouvert, l'application

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (y, x)$$

se factorise par

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (w, t) = \exp^{-1}(x, y) \mapsto (w' = \zeta^t w, t' = -t) \mapsto (x', y') = \\ &= \exp(w', t') \end{aligned}$$

au cours de laquelle les mesures deviennent

$$\Theta(x, y)^{-1} dx dy \mapsto dw dt \mapsto dw' dt' \mapsto \Theta(x', y')^{-1} dx' dt',$$

on a utilisé l'invariance de la mesure de Liouville $dw = dx d\theta$ sur UM par le flot géodésique. Il vient

$$\Theta(x, y)^{-1} dx dy = \Theta(y, x)^{-1} dy dx,$$

et donc $\Theta(x, y) = \Theta(y, x)$ presque partout. $\blacksquare$

1.12 LEMME – Soit M un variété riemannienne complète. Pour toute fonction u de classe C^1 sur M , tout $p \geq 1$ et tout $R > 0$, on a l'inégalité

$$\int_{d(x, y) \leq R} |u(x) - u(y)|^p \Theta(x, y)^{-1} dx dy \leq \omega_{n-1} \frac{R^{p+1}}{p} \int_M |du|^p$$

On a

$$\int_{d(x,y) \leq R} |u(x) - u(y)|^p \Theta(x, y)^{-1} dx dy = \int_U dw \int_0^{\ell(w)} |u(w) - u(\zeta^t w)|^p dt$$

où $\ell(w) = \min\{R, \text{longueur de coupure}(w)\}$, or, pour tout w ,

$$|u(w) - u(\zeta^t w)|^p \leq t^{p-1} \int_0^t |du(\zeta^s(w))|^p ds$$

d'où

$$\int_0^{\ell(w)} |u(w) - u(\zeta^t w)|^p dt \leq \frac{R^p}{p} \int_0^{\ell(w)} |du(\zeta^t(w))|^p dt$$

et il vient

$$\begin{aligned} \int_{d(x,y) \leq R} |u(x) - u(y)|^p \Theta(x, y)^{-1} dx dy &\leq \frac{R^p}{p} \int_{d(x,y) \leq R} |du(y)|^p \Theta(x, y)^{-1} dx dy \\ &= \frac{R^p}{p} \int_{d(x,y) \leq R} |du(y)|^p \Theta(y, x)^{-1} dx dy = \frac{R^p}{p} \int_M |du(y)|^p dy \int_{U_x M} \ell(\theta) d\theta \\ &\leq \omega_{n-1} \frac{R^{p+1}}{p} \int_M |du|^p. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Supposons de plus que la cohomologie de de Rham s'annule, $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Sous ces hypothèses, la cohomologie L^p ordinaire et sa version grossière sont équivalentes. En effet

1.13 PROPOSITION – Soit M une variété riemannienne complète à rayon d'injectivité et courbure de Ricci minorés. Soit ψ un noyau de classe C^1 . Supposons que $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Alors

$$H_{p,q}^1(M) \simeq H_{p,q}^{1,\psi}(M).$$

La norme $N_{\kappa,\psi}$ sur les cocycles et la norme L^p sur les formes différentielles induisent des normes équivalentes en cohomologie.

Soit α une 1-forme différentielle fermée sur M . Son intégrale sur un chemin γ ne dépend que des extrémités x et y . On obtient donc un cocycle

$$\alpha'(x, y) = \int_\gamma \alpha.$$

Inversement, si α' est un cocycle, alors $\alpha' * \psi$ est une fonction de classe C^1 par rapport à la première variable. Fixant la seconde variable, on prend la différentielle extérieure, c'est une 1-forme différentielle fermée α .

Si $\alpha = du$, alors $\alpha' = du$ au sens de la définition 1.3 et réciproquement. Il reste à comparer les normes de α et α' .

D'après le lemme 1.10, il existe un noyau ϕ tel que

$$\|\alpha\|_p \leq N_{p,\phi}(\alpha').$$

Inversement, le lemme 1.12 donne une inégalité du type

$$N_{p,\phi}(\alpha') \leq \|\alpha\|_p,$$

où

$$\phi(x, y) = \text{const.} \max\{1, \Theta(x, y)^{-1}\} 1_{\{d(x,y) \leq R\}};$$

pour que cette fonction soit un noyau, il faut une borne inférieure uniforme pour ϕ , i.e., une borne supérieure uniforme pour Θ , sur les petites boules. La courbure de Ricci donne cette borne, inégalité de R. Bishop, [1] section 11.1.

Ceci achève la preuve du théorème 2 dans le cas $q = p$. Sinon, on fait l'hypothèse d'une inégalité de Sobolev

$$\|u\|_q \leq C_{n,p} \|du\|_p.$$

Elle signifie que $B_q^0(M)$ est fermé, donc

$$\overline{H_{p,q}^1}(X) = H_{p,q}^1(M)$$

est invariant par quasiisométrie. $\blacksquare$

1.14 REMARQUE – Pour $q' \notin \{p, q\}$, où p et q sont les exposants qui figurent dans l'inégalité de Sobolev, on a

$$\overline{B_q^0(M)} = B_q^0(M)$$

donc

$$\overline{H_{p,q'}^1}(M) \simeq H_{p,q'}^{1,\psi}(M).$$

est un invariant de quasiisométrie. En revanche, il n'est pas clair que la cohomologie non réduite soit invariante.

2. Cas de l'espace hyperbolique

On va voir que, dans la classe d'exemples étudiée, le calcul de $H_{p,q}^1(M)$ se ramène à des manipulations élémentaires en coordonnées polaires. Pour commencer, illustrons la méthode sur un exemple simple.

2.1 PROPOSITION – $H_{p,p}^n(H^n) = 0$ si et seulement si $p \leq n-1$.

Sur l'espace hyperbolique, on a des coordonnées polaires globales $H^n = \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$ où la métrique s'écrit $g = dr^2 \oplus \sinh(r)^2 g_{S^{n-1}}$.

Si u est une fonction lisse sur S^{n-1} , son prolongement radial $v(r, \theta) = u(\theta)$ n'est dans aucun L^q , mais son gradient est dans L^p pour tout $p > n-1$, donc $H_{p,q}^1(H^n) \neq 0$ pour $p > n-1$ et tout q .

Inversement, on montre que toute fonction dont le gradient est dans L^p est exponentielle proche d'une fonction radiale.

On note $S(r)$ la sphère de rayon r dans H^n . Si u est une fonction lisse sur H^n , telle que

$$\int_{H^n} |du|^p < +\infty,$$

on note u_r la fonction sur S^{n-1} donnée par

$$u_r(\theta) = u(r, \theta).$$

Alors

$$\|u_r\|_p^p = \int_{S^{n-1}} |u_r|^p = \sinh(r)^{1-n} \int_{S(r)} u^p,$$

$$\|du_r\|_p^p = \int_{S^{n-1}} |du_r|^p = \sinh(r)^{p-n+1} \int_{S(r)} |d(u|_{S(r)})|^p,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r} u_r \right\|_p^p = \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r \right)^p \leq \sinh(r)^{1-n} \int_{S(r)} |du|^p,$$

d'où

$$(*) \quad \|u\|_p^p = \int_0^{+\infty} \|u_r\|_p^p \sinh(r)^{n-1} dr,$$

$$(**) \quad \|du\|_p^p \geq \int_0^{+\infty} \|du_r\|_p^p \sinh(r)^{n-1} dr,$$

$$(***) \quad \|du\|_p^p \geq \int_0^{+\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial r} u_r \right\|_p^p \sinh(r)^{n-1} dr.$$

Montrons que, lorsque r tend vers $+\infty$, les u_r convergent dans L^p . Cela résulte de (**) et de la scholie suivante.

2.2 LEMME – Soit $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ une courbe dans un Banach. Soit $p > 1$. Si la dérivée v' est dans $L^p(\sinh(r)^{n-1} dr)$, alors v converge lorsque r tend vers $+\infty$.

En effet, l'inégalité de Hölder donne

$$\left(\int \|v'\|_p^p \right)^p \leq \left(\int \|v'\|_p^p \sinh(r)^{n-1} dr \right) \left(\int \sinh(r)^{1-n/p-1} dr \right)^{p-1}.$$

Comme $p > 1$, on a $\int_0^{+\infty} \sinh(r)^{n-1-p} dr = +\infty$, donc (**) entraîne qu'il existe une suite de rayons $r_j \rightarrow +\infty$ tels que $\|du_{r_j}\|_p$ tende vers 0. Par semi-continuité inférieure de la norme $W^{1,p}$, on conclut que la limite des u_r est une constante.

Retranchons cette constante à la fonction u , de façon que u_r tende vers 0 dans L^p . Montrons que la fonction $r \rightarrow \|u_r\|_p$ est dans $L^p(\sinh(r)^{n-1} dr)$.

2.3 LEMME – Soit $\mathbb{R}_+ \rightarrow E$ une courbe dans un Banach qui tend vers 0 à l'infini. Il existe une constante $C_{n,p}$ telle que

$$\|v\|_{L^p(\sinh(r)^{n-1} dr)} \leq C_{n,p} \|v'\|_{L^p(\sinh(r)^{n-1} dr)}.$$

Appliquer l'inégalité de Sobolev à la fonction sur l'espace hyperbolique

$$u(r, \theta) = |v(r)|. \quad \blacksquare$$

3. Variétés à courbure négative

La discussion de l'espace hyperbolique se généralise aux variétés à courbure variable, grâce à des théorèmes de comparaison. Soit M une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle. Fixons une origine $m \in M$. En coordonnées polaires d'origine m , la métrique s'écrit

$$g = dr^2 \oplus g_r,$$

et l'élément de volume s'écrit

$$vol = \Theta(r, \theta) dr d\theta.$$

Posons $h = \Theta'/\Theta$ (c'est la courbure moyenne des sphères). D'après le théorème de comparaison de Rauch, si la courbure sectionnelle $K \leq -b^2$, on a

$$h \geq (n-1)b,$$

d'où, en particulier,

$$\Theta(r, \theta) \geq \left(\frac{\sinh(br)}{b}\right)^{n-1}.$$

Mais il y a d'autres variétés pour lesquelles $h \geq \text{const.} > 0$, par exemple, les espaces symétriques, à condition d'éviter les directions parallèles à un facteur euclidien.

Soit u une fonction sur M telle que $du \in L^p$. Définissons une fonction u_r , sur la sphère unité S^{n-1} de $T_x M$ par

$$u_r(\theta) = u(\exp_x r\theta).$$

Alors

$$\|du\|_p^p \geq \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sinh(br)}{b}\right)^{n-1} \left\| \frac{\partial}{\partial r} u_r \right\|_p^p dr.$$

Posant $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow L^p(S^{n-1})$, $v(r) = u_r$, on a $v' \in L^p((\sinh(br)/b)^{n-1} dr)$, donc v converge (lemme 2.2). On note u_∞ la limite. Inversement, on a

$$\|u\|_p^p \geq \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sinh(br)}{b}\right)^{n-1} \|u_r\|_p^p dr,$$

donc, $u \in L^p$ entraîne $u_\infty = 0$. On conclut qu'on a une application bien définie de $H_{p,p}^1(M)$ dans $L^p(S^{n-1})$.

Montrons que la "valeur au bord" u_∞ ne dépend pas de l'origine choisie.

On a vu en 1.6 qu'on peut régulariser la fonction u par convolution avec un noyau ψ sans changer de classe de cohomologie, donc il suffit de vérifier cette propriété pour $u * \psi$.

3.1 LEMME – Si les dérivées de ψ sont bornées, la fonction régularisée $u * \psi$ converge "angulairement" vers u_∞ en presque tout point de la sphère à l'infini, i.e., si u converge le long d'une géodésique γ , alors $u * \psi$ converge vers la même limite dans tout tube $\{d(\cdot, \gamma) \leq \text{const.}\}$.

En effet, d'après 1.10 (et l'équivalence des normes $\|du\|$ et $N_{p,\phi}(du)$, 1.13) la norme C^1 de $u * \psi$ au point x est bornée par la norme L^p de u dans une boule de rayon fixé, quantité qui tend vers 0 à l'infini. ■

Par définition, deux géodésiques qui définissent le même point à l'infini restent à une distance bornée l'une de l'autre. La limite de $u * \psi$ est la même le long des deux géodésiques, ce qui prouve que la limite u_∞ , lorsqu'elle existe ne dépend que du point à l'infini considéré.

3.2 PROPOSITION (R. Strichartz, [14]) – Soit M une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, satisfaisant $h \geq (n-1)b$. Alors l'application

$$H_{p,p}^1(M) \rightarrow L^p(S^{n-1})/\mathbb{R}, \quad u \mapsto u_\infty$$

est injective.

On reproduit la démonstration à toutes fins utiles. De l'hypothèse

$$h \geq (n-1)b,$$

on tire, pour tout $p > 1$, r et θ ,

$$\int_r^{+\infty} \Theta(r)^{1/1-p} dr \leq \text{const.} \Theta(r)^{1/1-p}.$$

Fixons le paramètre angulaire θ . Il s'agit de montrer que, si une fonction v sur $\mathbb{R}_+$ tend vers 0 à l'infini, et si $\int_0^{+\infty} v'(r)^p \Theta(r) dr < +\infty$, alors

$$\int_0^{+\infty} v(r)^p \Theta(r) \leq \text{const.} \int_0^{+\infty} v'(r)^p \Theta(r) dr.$$

Par l'inégalité de Hölder et (+), on a pour tout r

$$\begin{aligned} v(r)^p &= \left(\int_r^{+\infty} v'(r) dr \right)^p \\ &\leq \left(\int_r^{+\infty} v'(r)^p \Theta(r) dr \right) \left(\int_r^{+\infty} \Theta(r)^{1/1-p} dr \right)^{p-1} \\ &\leq \text{const.} \left(\int_r^{+\infty} v'(r)^p \Theta(r) dr \right) \Theta(r)^{-1}. \end{aligned}$$

On intègre maintenant par parties. Pour tout s ,

$$\begin{aligned} \int_0^s v(r)^p \Theta(r) dr &\leq \text{const.} \int_0^s v(r)^p \Theta'(r) dr \\ &\leq \text{const.} \left(\int_0^s |v'(r)| v(r)^{p-1} \Theta(r) dr + |v(s)|^p \Theta(s) + |v(0)|^p \right) \\ &\leq \text{const.} \left(\int_0^s |v'(r)|^p \Theta(r) dr \right)^{1/p} \left(\int_0^s |v(r)|^p \Theta(r) dr \right)^{p-1/p} \\ &\quad + \text{const.} \left(\int_s^{+\infty} |v'(r)|^p \Theta(r) dr + |v(0)|^p \right). \end{aligned}$$

Si on pose $A = \int_0^a |v(r)|^p \Theta(r) dr$ et $B = \int_0^{+\infty} |v'(r)|^p \Theta(r) dr$, il vient

$$A \leq \text{const } B A^{p-1/p} + \text{const } B + \text{const},$$

d'où l'inégalité annoncée. ■

3.3 Preuve du théorème 5. – Si la courbure sectionnelle est comprise entre $-a^2$ et $-b^2$, $b \leq a$, alors $H_{p,p}^1(M) = 0$ pour $p \leq (n-1)b/a$, et $H_{p,p}^1(M) \neq 0$ pour $p > (n-1)a/b$.

En effet,

$$\|du_r\|_p^p \leq \left(\frac{\sinh(br)}{b} \right)^{1-n} \left(\frac{\sinh(ar)}{a} \right)^p \int_{S(r)} |du|^p.$$

Si $p \leq (n-1)b/a$, il existe une sous-suite r_j , telle que $\|du_{r_j}\|_p^p$ tende vers 0. Par semi-continuité de la norme $W^{1,p}$, on a $\|du_\infty\|_p = 0$, i.e., u_∞ est constante.

Inversement, si u est une fonction lisse non constante sur S^{n-1} , son prolongement radial n'est dans aucun L^q , mais son gradient est dans L^p pour tout $p > (n-1)a/b$, donc $H_{p,q}^1(M) \neq 0$ pour tout q et tout $p > (n-1)a/b$. ■

3.4 REMARQUE – Les résultats relatifs aux coordonnées polaires s'étendent sans changement au cas des coordonnées horosphériques (x, t) , $t \in \mathbb{R}$, $x \in H$ une horosphère, à ceci près que les u_r , et u_∞ ne sont pas dans $L^p(H)$, seulement dans $L_{loc}^p(H)$.

4. Faisceau $\underline{H}_p$

Le résultat précédent s'affine dans le cas des espaces homogènes. Ces espaces possèdent un point à l'infini spécial, qui, pour certaines valeurs de p , est responsable à lui tout seul de l'annulation de la cohomologie L^p . Pour détecter ce phénomène, on est amené à localiser la notion de cohomologie L^p .

4.1 DÉFINITION – Notons $X = M \cup \partial M$. Si U est un ouvert de X , notons $W_{loc}^{1,p}(U)$ l'espace des fonctions u telles que pour tout compact K de U ,

$$\int_{K \cap M} |du|^p < +\infty.$$

Notons $H_p(U)$ l'espace quotient

$$\underline{H}_p(U) = W_{loc}^{1,p}(U) / W_{loc}^{1,p} \cup L_{loc}^p(U).$$

On obtient ainsi un faisceau H_p sur X , qui est en fait concentré sur ∂M , et dont les sections globales sur ∂M coïncident avec $H_{p,p}^1(M)$.

Le raisonnement du paragraphe précédent s'étend en fait à l'annulation du faisceau $\underline{H}_p$: si la courbure est pincée entre $-a^2$ et $-b^2$, le faisceau $\underline{H}_p$ est nul pour $p \leq (n-1)b/a$.

D'après E. Heintze [10], tout espace homogène à courbure sectionnelle strictement négative est une métrique invariante sur un groupe de Lie résoluble, produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent N par $\mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ agit par une dérivation α dont les valeurs propres ont une partie réelle positive. Dans cet article, on supposera toujours α semi-simple. On note toujours $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ les parties réelles des valeurs propres de α .

La métrique invariante à courbure négative sur le groupe résoluble $S = N \times_\alpha \mathbb{R}$ s'écrit

$$g = \exp(t\alpha)^* g_N \oplus dt^2$$

où g_N est une métrique invariante à gauche sur le groupe N qui rend orthogonaux les espaces propres

$$V^\nu = \bigoplus_{\Re(\lambda)=\nu} \ker(\alpha - \lambda)$$

de α , et telle que $\alpha - \text{diag}(\lambda_i)$ soit antisymétrique.

Les orbites de N sont des horosphères concentriques, et les orbites de $\mathbb{R}$ des géodésiques convergent (lorsque t tend vers $-\infty$) vers un même point à l'infini, appelé point spécial et noté ∞ . La sphère à l'infini de S s'identifie à $N \cup \{\infty\}$, voir [13] page 86.

L'élément de volume sur S est

$$e^{\text{tr}(\alpha)^t} \text{vol}(g_N) dt$$

alors que, si v est une fonction sur N et $v(x, t) = v(x)$ est son prolongement "hororadial" à S , on a

$$|du| \leq e^{-t\lambda_1} |dv|.$$

On conclut que $H_{p,p}^1(S) \neq 0$ pour tout $p > \text{tr}(\alpha)/\lambda_1$.

Dans certains cas, on peut construire des fonctions hororadiales u telles que $|du| \leq e^{-t\nu}$ pour $p \leq \text{tr}(\alpha)/\lambda_1$.

4.2 EXEMPLE – Considérons l'espace homogène $M = \mathbb{R}^{n-1} \times_\alpha \mathbb{R}$ où α est une matrice diagonale

$$\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix},$$

Si u est une fonction lisse sur $\mathbb{R}^{n-1}$, ses prolongements constants en $x_1, \dots, x_t$ et t ont leur gradient dans $L^p(K \times \mathbb{R}_+)$ pour tout $p > \text{tr}(\alpha)/\lambda_{t-1}$ et tout compact K de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $\underline{H}_p \neq 0$ pour $p > \text{tr}(\alpha)/\lambda_{n-1}$. Noter que $|du|$ n'est jamais dans $L^p(S)$.

Pour généraliser cette construction, il faut une fonction v sur le groupe nilpotent N dont la différentielle en chaque point soit nulle sur un sous-espace α -invariant V de l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$. Or ceci entraîne que v est nulle sur la sous-algèbre de Lie $\mathcal{G}$ engendrée par V .

4.3 PROPOSITION – Soit $S = N \times_\alpha \mathbb{R}$ un espace homogène avec α semi-simple. Soit V un sous-espace α -invariant de $\mathcal{N}$, soit $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de Lie qu'il engendre, et soit W un supplémentaire α -invariant de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{N}$. Notons $\lambda(V)$, et $\mu(V)$ la plus grande partie réelle d'une valeur propre de $\alpha|_V$, et $\mu(V)$ la plus petite partie réelle d'une valeur propre de $\alpha|_V$.

Pour $p \leq \text{tr}(\alpha)/\lambda(V)$, l'espace $\underline{H}_p(\partial S \setminus \{\infty\})$ est formé de fonctions invariantes par le sous-groupe $G = \exp(\mathcal{G})$.

Pour $p > \text{tr}(\alpha)/\lambda(V)$, l'espace $\underline{H}_p(\partial S \setminus \{\infty\})$ contient $C^1(N/G)$.

On note x la variable dans G et y la variable dans $\exp(W)$. Sur S , dans le système de coordonnées globales.

$$(x, y, t) \mapsto (x \exp(y), t),$$

l'élément de volume s'écrit

$$e^{\text{tr}(\alpha)t} dx dy dt.$$

La métrique sur S satisfait

$$g = dt^2 \oplus \exp(t\alpha)^* g_N = dt^2 \oplus \exp(t\alpha)^* (g_G \oplus g_W).$$

Si $w \in C^1(N/G)$, $u(x, y, t) = w(y)$, alors du est nul sur $\mathcal{G}$ et

$$|du| \leq e^{-t\mu(V)} |dw|_{N/G}$$

donc $du \in L^p(K \times \mathbb{R})$ pour tout compact K de N et tout $p > \text{tr}(\alpha)/\mu(V)$.

Si v est une fonction lisse sur le groupe G à valeurs dans un Banach E , on note $h_v(x)$ la forme linéaire sur V (à valeurs dans E) obtenu en translatant à gauche la différentielle de v en x et en la restreignant à $V \subset \mathcal{G}$.

Soit u une fonction sur S . Pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in G$, on note

$$u_t(x, y) = u(x \exp(y), t),$$

c'est une fonction sur N , et

$$u_t(x) = u(x, \cdot, t) \in E := L^p(\exp(W)),$$

c'est une fonction sur G à valeurs dans $E := L^p(\exp(W))$. Comme

$$\exp(t\alpha)^* g_V \leq e^{2t\lambda(V)},$$

on a

$$|du|_S \geq e^{-t\lambda(V)} \|h_{u_t}\|_V$$

d'où

$$\begin{aligned} \|du\|_p^p &= \int_S |du|^p e^{\text{tr}(\alpha)t} dt dx dy \\ &\geq \int_R e^{(\text{tr}(\alpha) - \lambda(V))t} dt \int_N \|h_{u_t}\|_V^p dx dy \\ &= \int_R e^{(\text{tr}(\alpha) - \lambda(V))t} \|h_{u_t}\|_E^p dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, dès que $p \leq \text{tr}(\alpha)/\lambda(V)$, il existe des t_k tels que $\|h_{u_{t_k}}\|_p$ tende vers 0. Comme $L^p(\exp W)$ est réflexif, il y a semi-continuité, et on conclut que $h_{u_\infty} = 0$. Comme V engendre $\mathcal{G}$, cela entraîne que u_∞ est constante, i.e., que u_∞ est invariante par les translations de G . ■

4.4 COROLLAIRE – Soit $S = N \times_\alpha \mathbb{R}$ un espace homogène avec α semi-simple. Pour $\lambda > 0$, notons $\mathcal{G}_\lambda$ la sous-algèbre de $\mathcal{N}$ engendrée par

$$\bigoplus_{\Re e(\mu) \leq \lambda} \ker(\alpha - \mu).$$

L'espace $\underline{H}_p(\partial S \setminus \{\infty\})$ change de nature chaque fois que $\mathcal{G}_{\text{tr}(\alpha)/p}$ change de dimension. En particulier, le faisceau $\underline{H}_p$ s'annule si et seulement si $p \leq \text{tr}(\alpha)/\lambda_m$ où

$$\lambda_m = \max\{\lambda | \mathcal{G}_\lambda \neq \mathcal{N}\}.$$

Ceci achève la preuve du théorème 4 dans le cas où $\lambda_n = \lambda_1$, i.e., V^1 engendre l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$. Ce cas contient les espaces symétriques de rang un, pour lesquels N est abélien ou un groupe de Heisenberg, et $\alpha = 1$ sur V^1 .

Dans le cas général, les faisceaux de cohomologie L^p reflètent la filtration de la sphère à l'infini par les sous-groupes G_λ . Pour terminer la preuve, il reste à montrer que le faisceau $\underline{H}_p$ n'a pas de sections globales. Or on vient de voir que ces fonctions sont invariantes sous un groupe non compact, elles ne peuvent donc pas être dans un espace (type Besov) défini par une norme locale.

5. Espaces de Besov

Reprenons les notations du paragraphe 1. Soit ψ un noyau sur M qui ne dépend que de la distance entre deux points, soit $p > 1$, et notons, pour simplifier, $N = N_{p,\psi}$.

Soit u une fonction telle que $du \in L^p$. Soit v la fonction sur M , constante sur les géodésiques issues d'un même point à l'infini, qui a même valeur au bord que u . On remarque que la preuve du théorème 3 ne fait intervenir que la dérivée radiale $\frac{\partial u}{\partial r}$, donc on peut l'appliquer à la fonction $u - v$, il vient

$$\|u - v\|_p \leq \text{const.} \|du\|_p.$$

Comme on a, pour toute fonction w , $N(dw) \leq 2\|w\|_p$, il vient

$$N(dw) \leq C\|du\|_p.$$

Projetons tout sur une horosphère H :

$$N(dw)^p = \int_{H \times H} \phi(x, y) |u_\infty(x) - u_\infty(y)|^p dx dy$$

où

$$\phi(x, y) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \psi(\exp_x(t\nu(x)), \exp_y(s\nu(y))) \Theta(x, t) \Theta(y, s) dt ds.$$

Dans cette expression, ν est la normale à H et Θ la densité de l'élément de volume en coordonnées exponentielles, normales à H .

Dans le cas homogène, $M = N \times_\alpha \mathbb{R}$, et l'horosphère H s'identifie au groupe nilpotent N . L'invariance de la norme N sous les isométries de M entraîne que le noyau $\phi(x, y) = \phi(x^{-1}y)$ est invariant à gauche, et homogène de degré $-2\text{tr}\alpha$ sous le groupe à un paramètre engendré par la dérivation α .

Lorsque la courbure est constante, $N = \mathbb{R}^{n-1}$, $\alpha = \text{id}$, et il existe une constante telle que

$$C^{-1}\phi(z) \leq |z|^{-2(n-1)} \leq C\phi(z),$$

d'où

$$C^{-1}N(v) \leq \|u_\infty\|_{B_{n-1,p}^{p,p}} \leq CN(v).$$

Autrement dit, $H_{p,p}^1(N^n)$ s'identifie à l'espace de Besov $B_{n-1,p}^{p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$.

On est donc conduit à la

5.1 DÉFINITION – Soit N un groupe de Lie nilpotent, et α une dérivation dont les valeurs propres ont des parties réelles $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ positives. L'espace de Besov généralisé $B_{\alpha,\beta}^{p,p}(N)$ est le sous-espace de $L^p(N)$ défini par l'une des normes équivalentes

$$\|u\|_{\alpha,\beta,p,q} = \left(\int_N \psi(z) \|u_z - u\|_p^q dz \right)^{1/q}$$

où $u_z(x) = u(xz)$ et ψ est une fonction positive sur N , homogène de degré $-\sum_i \lambda_i + \lambda_1 \beta p$ sous le groupe à un paramètre engendré par α .

5.2 THÉORÈME – Pour un espace homogène à courbure négative $M = N \times_\alpha \mathbb{R}$, avec α semi-simple, $H_{p,p}^1(M)$ s'identifie à l'espace de Besov généralisé $B_{\alpha,\beta}^{p,p}(N)$, où

$$\beta = \frac{\sum_i \lambda_i}{\lambda_1 p}.$$

On peut aussi identifier le faisceau H_p à l'espace de Besov local $B_{\alpha,\beta,loc}^{p,p}$, $\beta = \text{tr}(\alpha)/\lambda_1 p$; pour un ouvert $U \subset N$, $B_{\alpha,\beta}^{p,p}(U)$ est défini par la famille de semi-normes suivante, où V décrit les voisinages de l'élément neutre dans N et K les compacts de U tels que $VK \subset U$,

$$\|u\|_{\alpha,\beta,p,q,V,K} = \left(\int_V \psi(z) \|u_z - u\|_{K,p}^q dz \right)^{1/q},$$

où ψ est une fonction positive sur N , homogène de degré $-(\sum_i \lambda_i + \lambda_1 \beta p)$ sous le groupe à un paramètre engendré par α .

Un phénomène curieux est que l'espace de Besov généralisé local $B_{\alpha,\beta,loc}^{p,p}$ peut être non nul pour certains $\beta > 1$, comme on l'a vu en 4.2. En revanche, ce n'est jamais vrai pour l'espace global, et ceci achève la preuve du théorème 4:

5.3 LEMME – Soit N un groupe nilpotent, et α une dérivation semi-simple à valeurs propres de partie réelle positives. Alors

$$B_{\alpha,\beta}^{p,p}(N) = 0 \text{ pour tout } p > 1 \text{ et tout } \beta > 1.$$

On a montré en 4.3, que, si $p \leq \sum \lambda_i / \lambda_1$, les fonctions de $B_{\alpha,\beta}^{p,p}$ sont invariantes par translation le long du sous-groupe N^1 engendré par V^1 . Soit τ une translation à gauche de N^1 . Soient V un voisinage de l'origine dans N et $K \subset N$ tels que les $V\tau^i(K)$ soient deux à deux disjoints. Alors, pour toute fonction $u \in L^p(N)$,

$$\|u\|_{\alpha,\beta,p,p} \geq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|u\|_{\alpha,\beta,p,p,V,\tau^i K} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|u \circ \tau^i\|_{\alpha,\beta,p,p,V,K}.$$

Si la fonction u est τ -invariante et non-nulle, on voit donc que $\|u\|_{\alpha,\beta,p,p} = +\infty$ nécessairement. ■

5.4 Retour sur l'invariance sous quasiisométrie. – On a vu au paragraphe 1 qu'une quasiisométrie agit sur la cohomologie L^p . Au paragraphe 3, on a identifié la cohomologie L^p à un espace de fonctions sur la sphère à l'infini. Or, en courbure strictement négative, une quasiisométrie agit sur la sphère à l'infini, car les quasiisométries préservent les tubes autour des géodésiques. Avec le lemme 3.1, on conclut

$$(u \circ f)_\infty = u_\infty \circ f_\infty.$$

5.5 PROPOSITION – Sous les mêmes hypothèses, si $f : M \rightarrow N$ est une quasiisométrie, et f_∞ son prolongement à la sphère à l'infini, et u est une fonction sur N dont le gradient est dans L^p , on a

En particulier, on voit que le faisceau de cohomologie H_p est invariant sous quasiisométrie, lorsque la courbure sectionnelle est strictement négative. Ce n'est sans doute plus vrai en courbure négative ou nulle.

Comme toute transformation quasiconforme définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ s'étend en une quasiisométrie définie dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ = H^n \cup \partial H^n$, l'invariance sous quasiisométrie du faisceau H_p a pour conséquence l'invariance quasiconforme de l'espace de Besov local $B_{n-1/p}^{p,p}$.

RÉFÉRENCES

- [1] R. BISHOP, R. CRITTENDEN, *Geometry of manifolds*, Academic Press (1964).
- [2] CH. CROKE, *Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **13**, (1980), 419-535.
- [3] H. DONNELLY, *The differential form spectrum of hyperbolic space*, Manuscripta Math. **33**, (1981), 365-385.
- [4] H. DONNELLY, CH. FEEFERMAN, *L^2 -cohomology and index theorem for the Bergman metric*, Annals of Math. **118**, (1983), 593-618.
- [5] H. DONNELLY, F. XAVIER, *On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **106**, (1984), 169-185.
- [6] P. EBERLEIN, B. O'NEILL, *Visibility manifolds*, Pacific Math. J. **46**, 45-109 (1973).
- [7] S. GILBARC, N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren No 224, Springer, Berlin ... (1977).
- [8] M. GROMOV, *Infinite groups as geometric objects*, Proc. I.C.M., Warsaw, Vol. 1, (1984), 385-391.
- [9] M. GROMOV, *Hyperbolic groups*, "Essays in Group Theory", S. Gersten ed., pages 75-264, M.S.R.I. Publications Vol. 8, Springer Verlag (1987).
- [10] E. HEINTZE, *On homogeneous manifolds of negative curvature*, Math. Annalen **211**, (1974), 23-24.
- [11] M. KANAI, *Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **37**, (1985), 391-413.
- [12] M. KANAI, *Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **38**, (1986), 227-238.
- [13] P. PANSU, *Thèse*, Université Paris 7 (1987).
- [14] R. STRICHARTZ, *Analysis of the Laplacian on a complete Riemannian manifold*, J. Funct. Anal. **52**, (1983), 48-79.