Chapitre 3. Connexion de Levi-Civita

Pierre Pansu

July 12, 2005

1 Motivation

Développer un outil de calcul pour l'étude des propriétés intrinsèques des surfaces et, plus généralement, des variétés riemanniennes. Accessoirement, détecter rapidement le fait que deux surfaces ne sont pas isométriques.

1.1 Variétés riemanniennes

Une variété riemannienne, c'est la donnée d'une variété différentiable M et d'un produit scalaire sur chaque espace tangent. La métrique riemannienne est de classe C^k si, au voisinage de chaque point, dans des coordonnées locales, elle s'écrit

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x_1, \ldots, x_n) dx_i \, dx_j$$

où les fonctions $g_{i,j}$ sont de classe C^k.

Remarque 1.1 *Si $f : M \to N$ est une immersion entre variétés, et si g_N est une métrique riemannienne sur N, alors $f^* g_N$ est une métrique riemannienne sur M appelée* métrique induite.

Exemple 1.2 *Une surface de classe C^k de $\mathbf{R}^3$ hérite ainsi d'une métrique de classe C^{k-1}. En coordonnées locales, c'est la première forme fondamentale.*

Exemple 1.3 *Notons $\mathbf{R}^{2,1}$ l'espace $\mathbf{R}^3$ muni de la forme quadratique*

$$dX^2 + dY^2 - dZ^2.$$

La surface d'équation $\{(X, Y, Z) \,|\, X^2 + Y^2 - Z^2 = -1\}$ (hyperboloïde à deux nappes) possède deux composantes connexes. Celle où $Z > 0$ est appelée pseudosphère *et notée ΨS. Elle hérite d'une métrique induite qui est riemannienne.*

En effet, le plan tangent en $v = (X, Y, Z)$ à la pseudosphère est le plan orthogonal à v. Comme la droite de vecteur directeur v est définie négative, le plan orthogonal est défini positif.

On peut paramétrer entièrement la pseudosphère par un disque. Il suffit d'utiliser la *projection stéréographique*, définie sur un disque du plan tangent à la pseudosphère au pôle $N = (0, 0, 1)$.

Exercice 1 *On appelle* projection stéréographique *l'application qui à un point* (x, y) *du disque de rayon 2 associe le point d'intersection de la droite passant par les points* $S = (0, 0, -1)$ *et* $(x, y, 1)$ *avec la pseudosphère. Calculer la première forme fondamentale dans ces coordonnées. On l'appelle traditionnellement* métrique de Poincaré dans le disque de rayon 2*.*

Exercice 2 *Soit* $H = \{\Im m(z) > 0\}$ *le demi-plan,* $D = \{|z| < 2\}$ *le disque de rayon 2. On pose*

$$\Phi : H \to D, \quad \Phi(z) = 2\frac{z - i}{z + i}.$$

Vérifier que Φ *est un difféomorphisme de* H *sur* D *et que c'est une isométrie pour les métriques de Poincaré de respectives du demi-plan et du disque.*

Exercice 3 *Soit* $M_{l,L}$ *le quotient du plan euclidien par le groupe* G *engendré par les deux translations* $(x, y) \mapsto (x + l, y)$ *et* $(x, y) \mapsto (x, y + L)$*. Montrer que la distance quotient*

$$d(\overline{P}, \overline{Q}) = \min\{|P - Q| \mid P, Q \in \mathbf{R}^2, \; P \in \overline{P}, Q \in \overline{Q}\}$$

est riemannienne. Pour chaque point $\overline{P}$ *de* M*, donner une carte locale de l'espace quotient et écrire la métrique dans cette carte.*

Remarque 1.4 *Une variété différentiable possède une métrique riemannienne si et seulement si elle est paracompacte, voir Bourbaki.*

1.2 Approche intuitive

Dans ce paragraphe, on raisonne sur des surfaces. Dans le suivant, on introduira des concepts généraux.

Définition 1.5 *Soit* X *une surface riemannienne,* γ *une géodésique,* v *un vecteur tangent à* X *en* $\gamma(0)$*. Le* transport parallèle *de* v *le long de* γ *est le champ de vecteurs (défini seulement en chaque point de* γ*)* $t \mapsto V(t)$ *qui a une longueur constante et fait un angle constant avec la vitesse* $\gamma'(t)$*.*

Par extension, on parle de transport parallèle le long d'une courbe géodésique par morceaux.

Enfin, on appelle holonomie *le long d'un lacet* γ *d'origine* P *l'isométrie du plan tangent en* P *réalisée par le transport parallèle des vecteurs tangents en* P *le long de* γ*.*

Exemple 1.6 *Dans le plan euclidien, un champ de vecteurs constant est parallèle le long de tout segment de droite. Par conséquent, l'holonomie le long de toute ligne brisée est l'identité.*

Exemple 1.7 *Soit* γ *la courbe tracée sur la sphère qui consiste à suivre un quart de méridien du pôle nord à l'équateur, de se déplacer de* α *radians le long de l'équateur et à remonter au pôle nord. Alors le transport parallèle d'un vecteur le long de* γ *a pour effet de le faire tourner d'un angle* α*. Autrement dit, l'holonomie de ce lacet est une rotation d'angle* α*.*

Corollaire 1.8 *Une hémisphère n'est pas isométrique à une partie du plan.*

Proposition 1.9 *Sur une surface orientable, l'holonomie d'un lacet géodésique par morceaux* γ *est une rotation d'angle égal à la somme des angles* intérieurs *moins* π*,*

$$Hol = \sum_{sommets} (\beta - \pi). \tag{1}$$

Preuve. Au passage d'un sommet, le vecteur vitesse tourne de l'angle $\pi - \beta$. Par conséquent, l'angle entre le vecteur vitesse et un champ de vecteurs parallèle augmente de $\beta - \pi$. ∎

1.3 Roulement sans glissement ni pivotement

Etant donnée une courbe paramétrée lisse γ tracée sur la sphère, il y a une unique façon de faire rouler la sphère sur un plan de sorte que le point de contact décrive sur la sphère la courbe γ. C'est clair si la courbe est géodésique par morceaux.

Proposition 1.10 *Soit* γ *une géodésique par morceaux sur la sphère. Soit* v *un vecteur tangent en* $\gamma(0)$*, soit* $t \mapsto V(t)$ *son transport parallèle le long de* γ*. Lors du roulement sans glissement ni pivotement, le point de contact décrit une ligne brisée* σ *sur le plan. Le vecteur* $V(t)$ *s'imprime en un vecteur* $W(t)$ *du plan. Alors le champ de vecteurs* W *est parallèle (et donc constant) le long de* σ*.*

Corollaire 1.11 *On devrait pouvoir parler de transport parallèle le long d'une courbe lisse quelconque sur une surface lisse.*

Remarque 1.12

On constate que le transport parallèle le long d'une courbe fermée tend vers l'identité lorsque la longueur de la courbe tend vers 0.

1.4 Cas des surfaces polyédrales

Une surface polyédrale est une surface faite de polygones plans qu'on assemble en collant isométriquement des arêtes deux par deux. Exemple : bord des polyèdres convexes.

A l'exception des sommets, tout point possède un voisinage dans la surface isométrique à un ouvert du plan. On peut donc parler de transport parallèle le long d'une courbe ne passant par aucun sommet. Tant que la courbe reste dans une face, le transport parallèle produit un champ constant. Quand on tourne autour d'un sommet P, le transport parallèle a pour effet de tourner les vecteurs d'un angle égal à 2π moins la somme des angles en P des faces traversées. Le transport parallèle peut donc être loin de l'identité pour des courbes arbitrairement courtes.

1.5 Dériver des champs de vecteurs

Sur une surface riemannienne lisse M, le transport parallèle permet de définir des champs de repères orthonormés canoniques au voisinage de chaque point. En effet, étant donné P et une base orthonormée (e_1, e_2) de T_PM, il existe, pour Q voisin de P, une unique géodésique minimisante de P à Q (cela résulte du fait que l'équation des géodésiques est une équation différentielle du second ordre résolue par rapport aux dérivées secondes, voir chapitre 1). On transporte e_1 et e_2 parallèlement le long de cette géodésique pour obtenir un repère orthonormé en Q.

Si V est un champ de vecteurs sur M, il s'écrit $V = v_1e_1 + v_2e_2$ au voisinage de P. On peut le dériver en P, en posant, pour $w \in T_PM$,

$$\nabla_w V = (w.v_1)e_1 + (w.v_2)e_2.$$

Changer de base orthonormée en P ne fait que tourner le champ de repères d'un angle constant. Cela ne change pas le vecteur $\nabla_w V$. On sait donc dériver un champ de vecteurs sur M, de telle sorte que V est parallèle le long d'une géodésique γ si et seulement si $\nabla_{\dot\gamma(t)}V = 0$ pour tout t. En particulier, le transport parallèle apparaît comme la résolution d'une équation différentielle.

2 Existence et unicité de la connexion de Levi-Civita

2.1 Notion de connexion

Comment dériver des champs de vecteurs sur une variété de dimension quelconque ? On vient de voir que si on choisit un champ de repères, on sait faire. Soient $e_1, \ldots, e_n$ des champs de vecteurs sur une variété de dimension n qui constituent une base de l'espace tangent. Ecrivons tout champ de vecteurs V sous la forme

$$v = \sum v_i e_i. \tag{2}$$

On note, pour w vecteur tangent,

$$\nabla^0_w V = \sum w.v_i e_i = \sum dv_i(w) e_i. \tag{3}$$

Si f est une fonction sur M, on constate que

$$\nabla^0_w fV = f \nabla^0_w V + df(V) w. \tag{4}$$

Changeons de repère. Notons ∇'^0 la dérivation dans le nouveau repère. Par définition, si

$$V = v'_1 e'_1 + \cdots + v'_n e'_n,$$

alors

$$\nabla'^0_w V = \sum (w.v'_i) e'_i.$$

Or la formule (4) donne

$$\nabla^0_w V = \sum (w.v'_i) e'_i + v'_i \nabla^0_w e'_i.$$

Autrement dit, deux champs de repères distincts ne définissent la même opération de dérivation que si les $\nabla^0_w e'_i$ sont nuls, ce qui entraîne que les composantes des e'_i dans la base (e_j) sont constantes.

On doit donc manipuler des opérateurs de dérivation différents, appelés *connexions.*

Définition 2.1 *Une* connexion `(connection)` ∇ *sur* M *(plus précisément, sur le fibré tangent à* M*) est un opérateur* ∇ *qui prend un champ de vecteurs* V*, et lui associe un champ d'endomorphismes du fibré tangent* ∇V *(si* w *est un vecteur tangent en* x*, on note* $\nabla V(x,w) = (\nabla_w V)(x)$*), et tel que, pour toute fonction* f*,*

$$\nabla_w fV = f \nabla_w V + df(w) V. \tag{5}$$

Remarque 2.2 *Deux connexions* ∇ *et* ∇' *diffèrent par un tenseur de type* $(1,2)$ *(un champ de formes bilinéaires à valeurs dans l'espace tangent). Par conséquent, étant donné un repère local* $(e_1, \ldots, e_n)$*, toute connexion diffère de la connexion* ∇^0 *"naïve" du repère par un tenseur de type* $(1,2)$*,*

$$\nabla_w V = {\nabla^0}_w V + \Gamma(w) V. \tag{6}$$

Les composantes

$$\Gamma(e_i, e_j) = \sum_k \Gamma^k_{i,j} e_k \tag{7}$$

s'appellent les symboles de Christoffel `(Christoffel symbols)` *de la connexion* ∇ *dans le repère* (e_i)

En effet,

$$(\nabla' - \nabla)_w(fV) = f(\nabla' - \nabla)_w V \tag{8}$$

car les termes en df s'éliminent. Autrement dit, $(\nabla' - \nabla)_w(V)$ au point x ne dépend pas des dérivées de V, seulement de sa valeur en x, c'est un tenseur.

Inversement, toute expression $\nabla = \nabla^0 + \Gamma$ dans un repère (e_i) définit une connexion.

Remarque 2.3 *Il faut penser à Γ comme à une matrice dont les coefficients sont des formes différentielles de degré 1.*

En effet, écrivons $\nabla_w e_j = \sum_j \alpha_{ij}(w)e_i$. Alors α_{ij} dépend d'un point P de M et linéairement d'un vecteur $w \in T_P M$, donc c'est une 1-forme différentielle.

Exercice 4 *Soit ∇ une connexion qui, dans un repère $(e_1, \ldots, e_n)$, s'écrit $\nabla = \nabla^0 + \Gamma$. On change de repère. On note P la matrice de passage (contenant les composantes des vecteurs e'_j du nouveau repère dans l'ancien). Montrer que $\nabla = \nabla'^0 + \Gamma'$ où*

$$\Gamma' = P^{-1}dP + P^{-1}\Gamma P.$$

Définition 2.4 *Soit ∇ une connexion sur le fibré tangent de M. Soit γ une courbe paramétrée dans M. Etant donné un vecteur tangent $v \in T_{\gamma(0)}M$, on appelle* transport parallèle de v le long de γ *(`parallel translation along` γ) le champ de vecteurs $t \mapsto V(t)$ le long de γ solution de l'équation différentielle*

$$\nabla_{\gamma'(t)} V(t) = 0, \tag{9}$$

tel que $V(0) = v$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue en V'. Il y a donc une unique solution $t \mapsto V(t)$. Lorsque la courbe γ est un lacet d'origine x, le transport parallèle définit un endomorphisme de l'espace tangent en x, appelé holonomie *(`holonomy`) de γ.*

En effet, choisissons un champ de repères local $(e_1, \ldots, e_n)$, et posons

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i. \tag{10}$$

Alors

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'(t)} V(t) &= \nabla^0_{\gamma'(t)} V(t) + \Gamma(\gamma'(t), V(t)) && (11)\\ &= \sum_{i=1}^{n} v'^i(t) e_i + \sum_j v^j \Gamma(\gamma'(t), e_j), && (12) \end{aligned}$$

donc l'équation $\nabla_{\gamma'(t)} V(t) = 0$ s'écrit matriciellement

$$v' = -\Gamma_{\gamma'} v. \tag{13}$$

2.2 Torsion

Rappel 2.5 *Soient V et W deux champs de vecteurs sur M. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées local sur M. Si $V = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $W = \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors*

$$[V, W] = \sum_{i,j} (v^i \frac{\partial w^j}{\partial x_i} - w^i \frac{\partial v^j}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{14}$$

ne dépend pas du choix de coordonnées. C'est le crochet de Lie `(Lie bracket)` *de V et W.*

Comme une connexion, ça sert à dériver, logiquement, le crochet de Lie doit s'exprimer au moyen d'une connexion quelconque. Si ∇^0 est la connexion naïve du champ de repères $(\frac{\partial}{\partial x_i})$, on constate que

$$[V, W] = \nabla^0_V W - \nabla^0_W V.$$

Si ∇ est une autre connexion,

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= \sum_{i,j} v^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (w^j \frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \sum_{i,j} v^i dw^j (\frac{\partial}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j} v^i w^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

d'où

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W] + \sum_{i,j} (v^i w^j - w^i v^j) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Définition 2.6 *Le terme résiduel*

$$\begin{aligned} T(v, w) &= \nabla_V W - \nabla_W V - [V, W] && (15) \\ &= \sum_{i,j} (v^i w^j - w^i v^j) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} && (16) \end{aligned}$$

est un tenseur de type $(1, 2)$, antisymétrique, appelé la torsion `(torsion)` *de la connexion ∇.*

C'est une quantité qui ne dépend pas des dérivées de ∇ (i.e. des dérivées des symboles de Christoffel). La non nullité de la torsion est une obstruction à ce que ∇ coïncide avec la connexion naïve d'un système de coordonnées, c'est la première obstruction qu'on rencontre, à l'ordre 0.

Exercice 5 Torsion d'une connexion naïve.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un champ de repères, et ∇^0 la connexion naïve associée. Vérifier que la torsion de ∇^0 est identiquement nulle si et seulement si il existe des systèmes de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$.

2.3 Dériver des tenseurs

Une fois qu'on sait, à l'aide d'une connexion, dériver des champs de vecteurs, on s'empresse de dériver toutes sortes d'objets tensoriels.

Définition 2.7 *Soit ξ un champ de formes k-linéaires sur M. On définit sa* dérivée covariante ***(covariant derivative)*** $\nabla\xi$ *par*

$$
\begin{aligned}
(\nabla_w \xi)(V_1, \ldots, V_k) \quad &= \quad w \cdot \xi(V_1, \ldots, V_k) - \xi(\nabla_w V_1, V_2, \ldots, V_k) \qquad (17)\\
-\xi(V_1, \nabla_w V_2, \ldots, V_k) - \cdots \quad & \quad \cdots - \xi(V_1, V_2, \ldots, \nabla_w V_k). \qquad (18)
\end{aligned}
$$

On vérifie aisément qu'en vertu de la règle de Leibnitz, cette expression ne dépend pas des dérivées des champs de vecteurs $V_1, \ldots, V_n$, et définit donc un champ de formes $k+1$-linéaires sur M. Cela illustre un principe : l'espace des formes k-linéaires

$$E^* \otimes \cdots \otimes E^*$$

sur un espace vectoriel E s'obtient par une construction naturelle à partir de E. Par conséquent une connexion sur le fibré tangent d'une variété s'étend automatiquement en une connexion sur le fibré associé $T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M$. Cela s'étend donc aux tenseurs de type (k, l). Lorsqu'on peut combiner naturellement des tenseurs T_1 et T_2 de façon bilinéaire (par exemple, évaluer des formes différentielles sur des vecteurs, composer des endomorphismes, prendre une trace...), la règle de Leibnitz

$$\nabla T_2 \circ T_1 = \nabla T_2 \circ T_1 + T_2 \circ \nabla T_1 \qquad (19)$$

s'applique, avec la convention que, pour une fonction à valeurs réelles, $\nabla_V f = df(V)$.

Définition 2.8 *Etant donnée une connexion sur M, on dit qu'un champ de tenseurs T sur M est* parallèle *si $\nabla T = 0$.*

Exemple 2.9 *Un produit scalaire $\cdot$ est parallèle pour une connexion ∇ si et seulement si, pour tous champs de vecteurs V, W et Z,*

$$
\begin{aligned}
\nabla_V (W \cdot Z) \quad &:= \quad d(W \cdot Z)(V) \qquad (20)\\
&= \quad \nabla_V W \cdot Z + W \cdot \nabla_V Z. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Exercice 6 *Soit M une variété munie d'une connexion ∇. Soit T un champ d'endomorphismes du fibré tangent. Soient V, W, Z des champs de vecteurs sur M. Que vaut $(\nabla_V T)(W)$? Est-ce que la valeur de $(\nabla_V T)(W)$ en un point x dépend des dérivées de V, de W ou seulement de leur valeur en x ? Que vaut trace$(\nabla_V T)$? Cas particulier où $T = f\, Id$ où f est une fonction sur M ?*

2.4 Connexion de Levi-Civita

Définition 2.10 *Soit M une variété riemannienne. Il existe une unique connexion ∇ sur le fibré tangent telle que*

- *la torsion de ∇ s'annule ;*
- *la métrique riemannienne est parallèle.*

On l'appelle la connexion de Levi-Civita ***(Levi-Civita connection)*** *de M.*

Interprétation. L'existence, parmi les connexions *métriques* (i.e. telles que la métrique soit parallèle) d'une connexion *sans torsion* (i.e. dont la torsion est identiquement nulle), signifie qu'une métrique riemannienne est euclidienne à l'ordre 1 et pas seulement à l'ordre 0 en chaque point.

Preuve. Soient V, W, Z trois champs de vecteurs. Si la métrique est parallèle pour la connexion ∇, alors

$$d(W \cdot Z)(V) = (\nabla_V W) \cdot Z + W \cdot (\nabla_V Z).$$

Si la torsion de la connexion ∇ est nulle,

$$(\nabla_V W) \cdot Z - (\nabla_W Z) \cdot Z = [V, W] \cdot Z.$$

Si les crochets de Lie $[V, W]$, $[W, Z]$ et $[Z, W]$ sont nuls et si les produits scalaires $V \cdot W$, $W \cdot Z$ et $Z \cdot X$ sont constants, la quantité $\nabla_V W \cdot Z$, symétrique en V et W et antisymétrique en W et Z, est forcément nulle. Cela indique qu'en général, $\nabla_V W \cdot Z$ s'exprime en fonction des crochets et des dérivées des produits scalaires.

On trouve en effet que

$$\begin{aligned} 2\nabla_V W \cdot Z &= d(W \cdot Z)(V) + d(V \cdot Z)(W) - d(V \cdot W)(Z) && (22) \\ &+ [V, W] \cdot Z - [V, Z] \cdot W - [W, Z] \cdot V. && (23) \end{aligned}$$

Ceci prouve l'unicité de la connexion métrique et sans torsion.

Réciproquement, la formule obtenue définit une connexion métrique et sans torsion. ∎

Exemple 2.11 Connexion de Levi-Civita d'une surface en coordonnées polaires. *On munit $\mathbf{R}^2$ d'une métrique riemannienne de la forme*

$$dr^2 + f(r, \theta)^2 d\theta^2.$$

(On verra plus loin que toute métrique riemannienne en dimension 2 s'écrit localement comme cela). On note

$$e_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{f(r, \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

le repère orthonormé "tournant". Alors

$$\nabla_{e_r} e_r = 0, \quad \nabla_{e_\theta} e_r = f^{-1}\frac{\partial f}{\partial r} e_\theta, \quad \nabla_{e_r} e_\theta = 0, \nabla_{e_\theta} e_\theta = -f^{-1}\frac{\partial f}{\partial r} e_r. \tag{24}$$

Autrement dit, la matrice de la connexion de Levi-Civita dans le repère (e_r, e_θ) *est*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial r}\, d\theta \\ \frac{\partial f}{\partial r}\, d\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, comme la connexion est métrique et $|e_\theta| = 1$, ∇e_θ est colinéaire à e_r. De même, ∇e_r est colinéaire à e_θ. D'autre part,

$$[e_r, f(r,\theta)e_\theta] = [\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}] = 0$$

donc

$$[e_r, e_\theta] = -\frac{f'}{f} e_\theta$$

où on a noté $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$. Comme la connexion est sans torsion,

$$\nabla_{e_r} e_\theta - \nabla_{e_\theta} e_r = -\frac{f'}{f} e_\theta,$$

d'où

$$(\nabla_{e_r} e_\theta) \cdot e_r - (\nabla_{e_\theta} e_r) \cdot e_r = 0,$$

ce qui entraîne que $\nabla_{e_r} e_\theta = 0$, puis que $\nabla_{e_\theta} e_r = \frac{f'}{f} e_\theta$.

Notons J la rotation de $\pi/2$ dans le plan tangent. C'est un endomorphisme du plan tangent défini uniquement à partir de la métrique (et d'un choix d'orientation). Comme la métrique est parallèle, J est aussi parallèle, $\nabla J = 0$. Il vient

$$\nabla_{e_r} e_r = \nabla_{e_r}(-Je_\theta) = -J\nabla_{e_r} e_\theta = 0$$

et

$$\nabla_{e_\theta} e_\theta = \nabla_{e_\theta} J e_r = J\nabla_{e_\theta} e_r = J\frac{f'}{f} e_\theta = -\frac{f'}{f} e_r.$$

La matrice de la connexion de Levi-Civita s'écrit donc

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -f^{-1}\frac{\partial f}{\partial r} e_\theta^* \\ f^{-1}\frac{\partial f}{\partial r} e_\theta^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial r}\, d\theta \\ \frac{\partial f}{\partial r}\, d\theta & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Exercice 7 *Soient g et g' deux métriques* conformes (`conformal`)*, i.e. telles que $g' = e^{2f} g$ où f est une fonction lisse. Montrer que la connexion de Levi-Civita ∇' de g' s'exprime au moyen de f et de la connexion de Levi-Civita ∇ de g par la fomule*

$$\nabla'_V W = \nabla_V W + df(V)W + df(W)V - (V \cdot W)\nabla f, \tag{25}$$

où le produit scalaire $V \cdot W$ et le gradient ∇f sont calculés relativement à la métrique g.

3 L'équation des géodésiques

Notation 3.1 *On note* $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma'(t)\cdot\gamma'(t)\,dt$ *l'énergie d'une courbe* γ*, et* $\mathrm{Long}(\gamma) = \int_a^b (\gamma'(t)\cdot\gamma'(t))^{1/2}\,dt$ *sa longueur.*

3.1 Formule de la variation première

Proposition 3.2 *Soit* $s \mapsto \gamma_s$ *une famille de courbes dans une variété riemannienne, paramétrées par l'intervalle* $[a,b]$*. On note*

$$T = \gamma_s'$$

la vitesse et

$$V = \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s}$$

la variation par rapport à s *de la famille. Alors*

$$\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} E(\gamma_s) = V\cdot T(b) - V\cdot T(a) - \int_a^b V\cdot \nabla_T T\,dt \tag{26}$$

On suppose de plus que γ_0 *est parcourue à vitesse constante 1. Alors*

$$\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} \mathrm{Long}(\gamma_s) = V\cdot T(b) - V\cdot T(a) - \int_a^b V\cdot \nabla_T T\,dt \tag{27}$$

Preuve. En dérivant

$$E(\gamma_s) = \frac{1}{2}\int_a^b (T\cdot T)\,dt \quad \text{et} \quad \mathrm{Long}(\gamma_s) = \int_a^b (T\cdot T)^{1/2}\,dt,$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}E(\gamma_s) &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}(T\cdot T)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b d(T\cdot T)(V)\,dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\mathrm{Long}(\gamma_s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}(T\cdot T)^{1/2}\,dt \\ &= \int_a^b d(T\cdot T)^{1/2}(V)\,dt \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} d(T\cdot T)(V) &= \nabla_V(T\cdot T) && (28) \\ &= 2\nabla_V T\cdot T && (29) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} d(T\cdot T)^{1/2}(V) &= (T\cdot T)^{-1/2}\nabla_V T\cdot T \\ &= \nabla_V T\cdot T \end{aligned}$$

lorsque $s=0$, car par hypothèse γ_0' est de norme 1.

Si l'application $(s,t)\mapsto\gamma_s(t)$ était la restriction à $\mathbf{R}^2$ d'un difféomorphisme local $\gamma:\mathbf{R}^n\to M$, les champs de vecteurs V et T seraient définis sur un ouvert de M et satisferaient

$$\begin{aligned} \nabla_V T-\nabla_T V &= [V,T] && (30) \\ &= \gamma_*[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t}]=0. && (31) \end{aligned}$$

Cette identité est vraie en général. Il suffit d'interpréter ∇ dans $\nabla_V T$ comme une connexion sur le fibré induit γ^*TM sur une partie de $\mathbf{R}^2$, dont les champs de vecteurs le long de γ constituent par définition les sections. Les équations 28 (resp. 30) expriment des propriétés de la connexion induite, qui résulte du fait que ∇ est métrique (resp. sans torsion). On peut donc écrire, lorsque $s=0$,

$$\begin{aligned} d(T\cdot T)^{1/2}(V) &= \nabla_T V\cdot T \\ &= d(V\cdot T)(T)-V\cdot\nabla_T T \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(V\cdot T)-V\cdot\nabla_T T, \end{aligned}$$

d'où, en intégrant, les formules annoncées. ∎

3.2 Géodésiques

Définition 3.3 *Une courbe γ dans M est une* géodésique (`geodesic`) *si*

$$\nabla_{\gamma'}\gamma'=0.$$

Exercice 8 *Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ un système de coordonnées locales sur M dans lequel la connexion de Levi-Civita s'écrit*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_k\Gamma^k_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Montrer qu'une courbe $t\mapsto\gamma(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ est géodésique si et seulement si pour tout k,

$$x_k''+\sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}x_i'x_j'=0. \qquad (32)$$

Exercice 9 *En utilisant l'exercice 7, montrer que les droites passant par l'origine sont des géodésiques de la métrique de Poincaré du disque*

Proposition 3.4 *Une géodésique est parcourue à vitesse constante. C'est un point critique de la longueur ou de l'énergie, à extrémités fixées. Réciproquement, tout point critique de l'énergie à extrémités fixées est une géodésique. Toute courbe parcourue à vitesse constante qui est un point critique de la longueur à extrémités fixées est une géodésique.*

Preuve. L'équation

$$\nabla_{\gamma'}(\gamma' \cdot \gamma') = 2(\nabla_{\gamma'}\gamma') \cdot \gamma' = 0$$

entraîne que la norme de la vitesse est constante.

La formule de la variation première montre clairement que les géodésiques sont des points critiques de l'énergie et de la longueur à extrémités fixées.

Réciproquement, soit γ une courbe parcourue à vitesse 1 qui est point critique de l'énergie ou de la longueur à extrémités fixées. Tout champ de vecteurs V le long de γ s'intègre en une famille de courbes. Pour une portion assez courte, il suffit de savoir le faire dans $\mathbf{R}^n$. Pour le cas général, on utilise l'exponentielle (voir plus loin). Si V s'annule aux extrémités, toutes les courbes de la famille ont les mêmes extrémités. La formule de la variation première donne que

$$\int_a^b -V \cdot \nabla_T T \, dt = 0$$

pour tout champ s'annulant aux extrémités. Cela entraîne que $\nabla_T T = 0$. ∎

Exercice 10 *Soient N et N' deux sous-variétés de M et γ une courbe reliant N à N' et de longueur minimale (parmi les courbes reliant N à N'). Montrer que γ est une géodésique orthogonale à N et à N' aux extrémités.*

Exercice 11 *Soit $r \mapsto g_r$ une famille de métriques riemanniennes sur $\mathbf{R}^{n-1}$. On munit $\mathbf{R}^n$ de la métrique $g = dr^2 + g_r$. Montrer au moyen de la connexion de Levi-Civita que les courbes $t \mapsto (x, t)$ sont des géodésiques. Vérifier directement qu'elles sont* uniquement minimisantes*, i.e. elles sont les seules à réaliser la distance entre leurs extrémités.*

Exercice 12 *Soient M et M' deux variétés riemanniennes. Leur* produit riemannien *est la variété produit $M \times M'$ munie de la métrique $g + g'$. Montrer que les géodésiques de $M \times M'$ sont les courbes dont les projections sur M et M' sont géodésiques.*

3.3 L'application exponentielle

L'équation des géodésiques $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ est une équation du second ordre résolue par rapport aux dérivées secondes. Pour tout point $P \in M$ et tout vecteur tangent $v \in T_P M$, il existe donc une unique géodésique d'origine P et de vitesse initiale v, définie sur un intervalle ouvert de valeurs de t dépendant de P et de v. On remarque que si γ est une géodésique et $\lambda \in \mathbf{R}$, $t \mapsto \gamma(\lambda t)$ est encore une géodésique d'origine P, et sa vitesse initiale est λv. Cela justifie la notation suivante.

Notation 3.5 *Soit M une variété riemannienne, P un point de M, $v \in T_P M$ un vecteur tangent en P. On note*

$$t \mapsto \exp_P(tv)$$

la géodésique d'origine P et de vitesse initiale v.

L'application exp est lisse, son domaine de définition est un ouvert de l'espace total du fibré tangent TM. On l'appelle l'*application exponentielle* (`exponential map`).

Exercice 13 *Décrire l'application exponentielle de la sphère de dimension 2, au pôle nord.*

3.4 Coordonnées normales

Par construction, pour tout P, la différentielle de $\exp_P$ en 0 est l'identité de $T_P M$. Par conséquent, $\exp_P$ est un difféomorphisme d'un ouvert de $T_P M$ sur un ouvert de M.

Définition 3.6 *On appelle* rayon d'injectivité (`injectivity radius`) *de M en P, noté* inj_P*, la borne supérieure des $r > 0$ tel que* $\exp_P$ *soit un difféomorphisme de la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans $T_P M$ sur son image.*

Le rayon d'injectivité de M est la borne inférieure des inj_P.

Définition 3.7 *Les* coordonnées normales (`normal coordinates`)*, définies sur la boule ouverte $B(P, \mathrm{inj}_P)$, s'obtiennent en composant $(\exp_P)^{-1}$ avec des coordonnées cartésiennes sur l'espace tangent $T_P M$. Elles sont donc définies uniquement à une isométrie linéaire près.*

Exercice 14 *Soit $M = S^1 \times \mathbf{R}$ le produit riemannien d'un cercle de longueur L et d'une droite. Quel est son rayon d'injectivité ? Décrire des coordonnées normales.*

Exercice 15 *Soit $M_{l,L}$ le quotient riemannien du plan euclidien par le groupe engendré par les deux translations $(x, y) \mapsto (x + l, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, y + L)$. Quel est son rayon d'injectivité ?*

Proposition 3.8 *En coordonnées normales, la connexion de Levi-Civita coïncide à l'origine avec la connexion naïve, i.e. les symboles de Christoffel s'annulent à l'origine.*

Preuve. Pour tout champ de vecteurs constant V sur $T_P M$, V est tangent à la droite $t \mapsto tV$ dans $T_P M$, donc le champ $(\exp_P)_* V$ est tangent à la géodésique $t \mapsto \exp_P(tV)$. On a donc $\nabla_V V = 0$ le long de cette géodésique. En particulier, $\nabla_V V = 0$ en P. Comme les champs constants commutent, $V \mapsto \nabla_V V$ est symétrique. Par conséquent, pour tous champs constant V et W, $\nabla_V W = 0$ à l'origine. Les champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i}$ des coordonnées normales sont des champs constants, donc

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$$

à l'origine. ∎

Remarque 3.9 *On donnera plus loin un développement limité de la métrique et de la connexion de Levi-Civita en coordonnées normales. Comme les coordonnées normales sont attachées canoniquement (à rotation près) à la métrique, cela fait apparaître des invariants intrinsèques de la métrique.*

3.5 Lemme de Gauss

Théorème 1 (Lemme de Gauss). *Les images par* $\exp_P$ *des sphères centrées à l'origine dans l'espace tangent* $T_P M$ *sont orthogonales aux géodésiques issues de* P*. Par conséquent, la métrique* $\exp^* g_M$ *induite sur l'espace tangent s'écrit*

$$\exp^* g_M = dr^2 + g_r$$

où g^r *est une famille de métriques sur la sphère unité qui, une fois divisée par* r^2*, converge vers la métrique standard (celle de la sphère unité de* $\mathbf{R}^n$*) lorsque* r *tend vers 0.*

Preuve. Soit $s \mapsto c(s)$ une courbe tracée dans une sphère de rayon r centrée à l'origine dans l'espace tangent $T_P M$. Posons $\gamma_s(t) = \exp_P(tc(s))$. Alors γ_s est une géodésique de longueur r indépendante de s. La formule de la variation première 3.2 donne

$$\begin{aligned} 0 &= (V \cdot T)(r) - (V \cdot T)(0) + \int_0^r 0 \\ &= (V \cdot T)(r) \\ &= d\exp_P(c'(0)) \cdot T \end{aligned}$$

donc le vecteur $c'(0)$ tangent à la sphère est envoyé sur un vecteur orthogonal au vecteur vitesse T de la géodésique γ_0.

Utilisons le difféomorphisme $]0, +\infty[\times S \to T_P M \setminus \{0\}$, $(t, \theta) \mapsto t\theta$ (ici, S désigne la sphère unité de l'espace tangent $T_P M$). Toute métrique g sur $]0, +\infty[\times S$ s'ecrit

$$g = dr^2 + g_r + dr \odot \alpha_r$$

où α_r est une 1-forme sur la sphère de rayon r. De plus, pour v tangent à la sphère de rayon r, $\alpha_r(v) = v \cdot \frac{\partial}{\partial r}$. Pour la métrique $\exp^* g_M$, le produit scalaire est nul, donc il ne reste que $dr^2 + g_r$.

La métrique euclidienne de l'espace tangent s'écrit $g_P = dr^2 + r^2 g_{can}$. Comme la différentielle de $\exp_P$ à l'origine est l'identité, pour tout vecteur v tangent à la sphère de rayon r dans $T_P M$,

$$\frac{g_r(v)}{r^2 g_{can}(v)} = \frac{|d\exp_P(v)|^2}{|v|^2}$$

tend vers 1 lorsque r tend vers 0, donc $r^{-2} g_r$ tend vers g_{can}. ■

Corollaire 3.10 *Soit $P \in M$ et $r < \mathrm{inj}_P$. Notons S_r l'image par $\exp_P$ de la sphère de rayon r centrée à l'origine dans $T_P M$. Les courbes de longueur r reliant P à S_r sont exactement (à reparamétrisation près) les géodésiques issues de P. Par conséquent S_r est le lieu des points à distance r de P.*

Preuve. Soit γ une courbe de longueur r reliant P à S_r. Soit $r' < r$. En coupant (ce qui raccourcit strictement), on obtient une courbe $\gamma_{r'}$ reliant $S_{r'}$ à S_r et contenue dans l'image par $\exp_P$ de la région de $T_P M$ définie par les inégalités $r' < |\cdot| < r$. L'exercice 11 montre que la longueur de $\gamma_{r'}$ est au moins égale à $r - r'$, et l'égalité entraîne que $\gamma_{r'}$ est radiale. En faisant tendre r' vers 0, on trouve que toute courbe reliant P à S_r est de longueur au moins r. On en déduit que $\gamma_{r'}$ est de longueur au plus $r - r'$, donc égale à $r - r'$. $\gamma_{r'}$ est donc contenue dans une géodésique issue de P, il en est de même de γ.

Si S_r sépare P de $Q \in M$, alors tout chemin de P à Q coupe S_r donc sa longueur est $\geq r$. Par conséquent, $d(P,Q) \geq r$. En cas d'égalité, on trouve un chemin de longueur $< r$ reliant P à S_r, contradiction. On conclut que $d(P,Q) > r$. Ceci prouve que tout point situé à distance r de P est dans S_r. ■

Corollaire 3.11 *Si P, $Q \in M$ et $d(P,Q) < \mathrm{inj}(M)$, alors il existe une et une seule courbe de longueur minimum reliant P à Q, c'est une géodésique. Si γ est une géodésique, et si $t < \mathrm{inj}(M)$, alors γ est l'unique courbe de longueur minimum reliant $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$.*

3.6 Champs de Killing et intégrales premières

Définition 3.12 *Soit M une variété riemannienne. Un champ de vecteurs V sur M est appelé* champ de Killing *si le groupe à un paramètre de difféomorphismes qu'il engendre est formé d'isométries.*

Proposition 3.13 *Soit V un champ de Killing et γ une géodésique. Le produit scalaire $V \cdot \gamma'$ est constant le long de γ. Autrement dit, la fonction $V \cdot \gamma'$ est une intégrale première de l'équation des géodésiques.*

Preuve. Soit ϕ_s le flot de V. Comme les courbes $\gamma_s = \phi_s(\gamma)$ ont une longueur constante et γ_0 est géodésique, la formule de la variation première donne $V(b)\cdot\gamma'(b) = V(a) \cdot \gamma'(a)$. ■

Remarque 3.14 *Dans l'espace euclidien de dimension 3, un champ de vecteurs V qui possède la propriété de la proposition 3.13, i.e. qui, aux deux extrémités d'un segment a la même projection sur le segment, s'appelle un* torseur*.*

Les torseurs sont les champs de Killing de l'espace euclidien de dimension 3. Ils forment une famille à 6 paramètres. Un torseur possède une résultante (un champ constant). Un torseur de résultante nulle s'appelle un *couple*, il s'annule le long d'une droite affine. Les champs constants engendrent les groupes à un paramètre de translations. Les couples engendrent les groupes à un paramètre de rotations autour d'un axe. La décomposition torseur=résultante+couple reflète le fait que le groupe des déplacements euclidiens est un produit semi-direct de son sous-groupe des translations par le groupe orthogonal.

Il est utile d'écrire l'équation différentielle qui caractérise les champs de Killing.

Proposition 3.15 *Un champ de vecteurs V est un champ de Killing si et seulement si ∇V est antisymétrique, i.e. pour tout point P et tous vecteurs tangents w et z en P,*

$$(\nabla_w V)\cdot z + w\cdot(\nabla_z V) = 0.$$

Notons ϕ_t le flot de V. Il est défini au moins localement en espace et en temps. Par définition,

$$\frac{d}{dt}\phi_t^* g_{|t=0} = \mathcal{L}_V g$$

est la dérivée de Lie de la métrique g par rapport au champ V. Si V est un champ de Killing, alors $\phi_t^* g = g$ pour tout t, donc $\mathcal{L}_V g = 0$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{L}_V g = 0$. La dérivée en un temps t quelconque de la courbe de métriques $s \mapsto \phi_s^* g$ est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\phi_{t+x}^* g_{|x=0} &= \frac{\partial}{\partial x}\phi_t^*\phi_x^* g_{|x=0} \\
&= \phi_t^* \frac{\partial}{\partial x}\phi_x^* g_{|x=0} \\
&= \phi_t^* \mathcal{L}_V g \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $\phi_t^* g = 0$ pour tout t, donc V est un champ de Killing.

Il reste à relier dérivée de Lie et dérivée covariante. Comme la dérivée covariante, la dérivée de Lie commute avec les opérations naturelles sur les tenseurs. Par conséquent, pour tous champs de vecteurs V, W et Z,

$$\begin{aligned}
d(W\cdot Z)(V) &= \mathcal{L}_V g(W,Z) + (\mathcal{L}_V W)\cdot Z + W\cdot(\mathcal{L}_V Z) \\
&= \mathcal{L}_V g(W,Z) + [V,W]\cdot Z + W\cdot[V,Z].
\end{aligned}$$

Par définition de la connexion de Levi-Civita,

$$d(W\cdot Z)(V) = (\nabla_V W)\cdot Z + W\cdot(\nabla_V Z).$$

En soustrayant, il vient

$$\mathcal{L}_V g(W,Z) = (\nabla_W V)\cdot Z + W\cdot(\nabla_Z V). \blacksquare$$

Exercice 16 *Soit V un champ de Killing et γ une géodésique. Vérifier que le produit scalaire $V\cdot\gamma'$ est constant le long de γ. Retrouver ainsi un cas particulier du théorème de Noether : A chaque symétrie infinitésimale correspond une intégrale première du mouvement.*

4 Sous-variétés, variation du volume

A titre d'illustration de la commodité calculatoire de la dérivation covariante, on prouve la formule donnée sans démonstration pour la variation première de l'aire d'une surface. On se place dans le cadre général des sous-variétés de variétés riemanniennes. On commence par généraliser la notion de seconde forme fondamentale.

4.1 Connexion de Levi-Civita et seconde forme fondamentale d'une sous-variété

Théorème 2 *Soit M une variété riemannienne, $N\subset M$ une sous-variété munie de la métrique induite. La connexion de Levi-Civita ∇^N s'obtient à partir de ∇^M en projetant orthogonalement sur l'espace tangent à N. Autrement dit, soient V et W des champs de vecteurs sur M tangents à N. Décomposons $\nabla^M_V W$ en composante tangente à N et en composante normale*

$$\nabla^M_V W = (\nabla^M_V W)^{//} + (\nabla^M_V W)^{\perp}.$$

Alors

$$\nabla^N_V W = (\nabla^M_V W)^{//}.$$

Preuve. Clairement, $(\nabla^M)^{//}$ est métrique et sans torsion. $\blacksquare$

Exemple 4.1 *Cas des surfaces de $\mathbf{R}^3$. Un champ de vecteurs $t\mapsto V(t)$ le long d'une courbe γ tracé sur une surface X est parallèle si et seulement si $V'(t)$ est orthogonal au plan tangent $T_{\gamma(t)}X$. Une courbe γ tracée sur X est géodésique si et seulement si son accélération $\gamma''(t)$ est orthogonale au plan tangent $T_{\gamma(t)}X$.*

Définition 4.2 *Soit M une variété riemannienne, $N\subset M$ une sous-variété munie de la métrique induite.*

$$II(V,W) = (\nabla^M_V W)^{\perp}$$

est un champ d'applications bilinéaires symétriques sur N à valeurs dans le fibré normal à N, appelé seconde forme fondamentale *de N.*

Exemple 4.3 *Cas des surfaces de* $\mathbf{R}^3$*. Pour retrouver la seconde forme fondamentale au sens usuel, il suffit de faire le produit scalaire avec un champ de vecteurs unitaire normal. L'accélération d'une courbe tracée sur une surface se décompose donc en une composante normale, qui est la seconde forme fondamentale évaluée sur la vitesse, et une composante tangentielle, qu'on interprète comme l'accélération intrinsèque de la courbe. Lorsque la courbe est parcourue à vitesse 1, son accélération est la* courbure géodésique.

Exercice 17 *Vérifier que les méridiens d'une surface de révolution (resp. d'un tube) sont des géodésiques.*

4.2 Volume

Définition 4.4 *Soit* M *une variété riemannienne orientée de dimension* n*. En chaque point, il existe une unique* n*-forme différentielle* vol *de norme* 1 *définissant l'orientation donnée, c'est le déterminant dans une base orthonormée directe. On l'appelle* élément de volume *de* M*. Le volume total de* M *est alors* $\mathrm{Vol}(M) = \int_M vol$*.*

Proposition 4.5 *En coordonnées,*

$$vol = \sqrt{det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Preuve. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée directe, $(f_1, \ldots, f_n)$ une base quelconque, x_i les coordonnées dans la base (f_i), $g_{ij} = f_i \cdot f_j$, G la matrice dont les coefficients sont les g_{ij}, P la matrice de passage de (e_i) dans (f_i). Alors $G = P^T P$. La forme différentielle $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ est le déterminant dans la base (f_i). L'élément de volume est le déterminant dans la base (e_i). Par conséquent

$$vol = det(P)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sqrt{det(G)}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \blacksquare$$

Exercice 18 *Soit* $M_{l,L}$ *le quotient riemannien du plan euclidien par le groupe engendré par les deux translations* $(x, y) \mapsto (x + l, y)$ *et* $(x, y) \mapsto (x, y + L)$*. Quel est son aire ?*

Exercice 19 *Quelle est l'aire de la pseudosphère ?*

Remarque 4.6 *Le volume* $|vol|$ *en tant que mesure est bien défini indépendamment d'un choix d'orientation.*

4.3 Volume d'une sous-variété

L'élément de volume induit sur une sous-variété peut se décrire différemment, d'une façon qui généralise l'expression $|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}| du \wedge dv$.

Rappelons qu'un *k-vecteur* sur un espace vectoriel E est un élément du dual de l'espace des formes k-linéaires alternées. Etant données deux métriques riemanniennes g et g' sur une variété N de dimension k, il suffit de se donner un champ de k-vecteurs non nul ξ pour connaître le rapport des éléments de volumes, car

$$\frac{vol_{g'}}{vol_g} = \frac{vol_{g'}(\xi)}{vol_g(\xi)} = \frac{|\xi|_{g'}}{|\xi|_g}.$$

Sur une variété riemannienne orientée de dimension k, il y a un champ de k-vecteurs canonique ξ_g, c'est celui tel que $|\xi_g|_g = vol_g(\xi_g) = 1$. Si $e_1, \dots, e_k$ est un champ de repères orthonormés local, alors

$$\xi_g = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k.$$

Si g' est une autre métrique sur N, on a

$$\mathrm{Vol}(N, g') = \int_N |\xi_g|_{g'} vol_g.$$

En particulier,

Proposition 4.7 *Si $f : N \to M$ est une immersion,*

$$\mathrm{Vol}(f(N)) = \int_N |\xi_N|_{f^* g_M} vol_N$$

Exemple 4.8 *Cas d'une surface paramétrée. Ici, N est un ouvert du plan euclidien muni de coordonnées cartésiennes, son élément d'aire est $vol_N = du \wedge dv$, son 2-vecteur est $\xi_N = \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial u}$. Si $X : N \to \mathbf{R}^3$ est une paramétrisation d'une surface, alors*

$$X_*(\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}) = \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$$

s'interprète comme un vecteur de $\mathbf{R}^3$, c'est le produit vectoriel des vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u} = X_*(\frac{\partial}{\partial u})$ et $\frac{\partial X}{\partial v} = X_*(\frac{\partial}{\partial v})$. En effet, pour un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3, l'isomorphisme $\Lambda_2 E \to E$ envoie le produit extérieur sur le produit vectoriel. Enfin,

$$|X_*(\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v})| = |\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}|_{X^* g_{\mathbf{R}^3}}.$$

4.4 Produit scalaire induit sur les k-vecteurs

On a vu apparaître dans le paragraphe précédent la norme d'un k-vecteur ou d'une k-forme. De quoi s'agit il ?

Définition 4.9 *Soit E un espace vectoriel euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors les produits extérieurs $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ (où $(i_1, \dots, i_k)$ décrit les suites strictement croissantes de k entiers compris entre 1 et n) forment une base de l'espace $\Lambda_k E$ des k-vecteurs. Par définition, c'est une base orthonormée de $\Lambda_k E$.*

Lemme 4.10 *Soit g_t une famille de produits scalaires sur un espace vectoriel E. Notons $\dot{g} = \frac{\partial g_t}{\partial t}_{|t=0}$. Soit ξ un k-vecteur sur E. Ecrivons $\xi = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ où les e_i sont orthonormés pour g_0. Alors*

$$\frac{\partial}{\partial t}|\xi|^2_{t\,|t=0} = |e_1|^2_{\dot{g}} + \cdots + |e_k|^2_{\dot{g}}.$$

Preuve. Comme tout se passe dans le sous-espace vectoriel engendré par les e_i, on peut supposer que $k = n = dim(E)$. D'après la proposition 4.5,

$$|\xi|^2_t = det(G_t).$$

où G_t est la matrice dont les coefficients sont les $g_{ij,t} = e_i \cdot_t e_j$. Par hypothèse, G_0 est la matrice unité, donc

$$\frac{d}{dt}(|\xi|^2_t)_{|t=0} = trace(\dot{G}). \blacksquare$$

4.5 Variation de l'aire

Théorème 3 *Soit $N \subset M$ une sous-variété orientée. Soit V un champ de vecteurs à support compact sur M. Soit ϕ_t le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M engendré par V. Alors*

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\phi_t(N))_{|t=0} = -\int_N H \cdot V. \tag{33}$$

où H est le vecteur courbure moyenne *de N,*

$$H = trace(II) = \sum_i II(e_i, e_i).$$

On suppose X fermée bordant un ouvert borné U. Soit Γ la normale sortante. Alors

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\phi_t(U))_{|t=0} = \int_X \Gamma \cdot V. \tag{34}$$

Preuve.

Soit ξ le champ de k-vecteurs unitaire associé à l'orientation de N. Alors

$$\mathrm{Vol}(\phi_t(N)) = \int_N |\xi|_{\phi_t^* g_M} vol_N.$$

Or

$$\frac{d}{dt}|\xi|_{\phi_t^* g_M} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\xi|^2_{\phi_t^* g_M}$$

où $g_t = \phi_t^* g_M$ et $\frac{d}{dt}g_t = \mathcal{L}_V g_M$ est la dérivée de Lie de la métrique de M dans la direction du champ de vecteurs V. Comme la dérivée covariante, la dérivée de Lie respecte les opérations naturelles entre tenseurs. Ainsi, étant donnés des champs de vecteurs W et Z,

$$d(W \cdot Z)(V) = \mathcal{L}_V g_M(W, Z) + (\mathcal{L}_V W) \cdot Z + W \cdot (\mathcal{L}_V Z).$$

Par définition de la connexion de Levi-Civita,

$$d(W \cdot Z)(V) = (\nabla_V W) \cdot Z + W \cdot (\nabla_V Z).$$

En soustrayant, il vient

$$\mathcal{L}_V g_M(W, Z) = A(W) \cdot Z + W \cdot A(Z)$$

où

$$\begin{aligned} A(W) &= \nabla_V W - \mathcal{L}_V W \\ &= \nabla_V W - [V, W] \\ &= \nabla_W V. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.10, si $(e_1, \cdots, e_k)$ est un repère orthonormé direct de l'espace tangent à N,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\xi|^2_{g_t} &= 2e_1 \cdot A(e_1) + \cdots + 2e_k \cdot A(e_k) \\ &= 2\delta V \end{aligned}$$

où δ est l'opérateur différentiel qui à un champ de vecteurs le long de N (non nécessairement tangent à N) associe la fonction sur N définie, dans un champ de repères orthonormés local de N, par

$$\delta V = \sum_{i=1}^{k} e_i \cdot \nabla_{e_i} V.$$

On a donc prouvé la formule

$$\frac{d}{dt} vol(\phi_t(N))_{|t=0} = \int_N \delta V \, vol_N.$$

Le long de N, décomposons V en sa composante tangentielle et sa composante normale à N,

$$V = V^{//} + V^{\perp}.$$

Le flot de $V^{//}$ envoie N dans elle-même, donc ne change pas le volume. Par conséquent

$$\int_N \delta V^{//} \, vol_N = 0.$$

D'autre part, si W et Z sont des champs de vecteurs sur M qui sont tangents à N le long de N,

$$Z \cdot \nabla_W V^\perp + (\nabla_W Z) \cdot V^\perp = d(Z \cdot V^\perp)(W) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} Z \cdot \nabla_W V^\perp &= -(\nabla_W Z) \cdot V^\perp \\ &= -II(W, Z) \cdot V^\perp, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta V^\perp &= -(\sum_{i=1}^{k} II(e_i, e_i)) \cdot V^\perp \\ &= -H \cdot V^\perp \\ &= -H \cdot V. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 4.11 *De nouveau, comme le volume sans signe $|vol|$ est toujours défini, le théorème 3 est vrai même si N n'est pas orientable.*

5 Complétude

Sur une variété riemannienne, la distance $d(P, Q)$ est définie comme la borne inférieure des longueurs des courbes reliant P à Q. Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

5.1 Théorème de Hopf-Rinow

Définition 5.1 *On dit qu'une connexion sur le fibré tangent est* complète *si toute géodésique est définie sur* $\mathbf{R}$ *entier.*

Si on retire un point P à la variété, elle n'est certainement plus complète car les géodésiques issues de P ne sont plus définies que sur une demi-droite, au mieux. La complétude protège au moins contre ce genre d'aberrations.

Théorème 4 (Hopf-Rinow). *Soit M une variété riemannienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *M est un espace métrique complet.*
2. *Les boules fermées de M sont compactes.*
3. *Il existe un point $P \in M$ tel que $\exp_P$ soit définie sur tout l'espace tangent $T_P M$.*
4. $\exp$ *est définie sur tout le fibré tangent.*

5. *La connexion de Levi-Civita de M est complète.*

   Toutes ces conditions entraînent que

6. *la distance entre deux points quelconques est réalisée par un arc de géodésique.*

Corollaire 5.2 *Sur une variété riemannienne compacte,* exp *est définie globalement, et deux points quelconques sont reliés par au moins un segment géodésique minimisant.*

Preuve. Supposons M complète et montrons que toute géodésique peut être prolongée indéfiniment. Sinon, il existe une géodésique γ dont le temps d'existence est fini. Si t_i tend vers le temps d'existence t_{max}, la suite $\gamma(t_i)$ est une suite de Cauchy, donc converge vers un point P. Par compacité, au voisinage de P, le temps d'existence des géodésiques est borné inférieurement, donc γ existe au-delà de t_{max}, contradiction. Ceci montre que $1 \Rightarrow 5$.

Supposons que $\exp_P$ est définie sur T_PM et montrons que tout point Q est relié à P par une géodésique minimisante. Soit $r < \mathrm{inj}_P$, de sorte que $\partial B(P,r) = \exp_P(S(r))$ est compacte. Soit Q' le point de $\partial B(P,r)$ le plus proche de Q'. Alors $r + d(Q',Q) = d(P,Q)$. Soit γ la géodésique d'origine P telle que $\gamma(r) = Q'$. Montrons que pour tout $t \leq d(P,Q)$,

$$d(P,\gamma(t)) = t \quad \text{et} \quad d(P,\gamma(t)) + d(\gamma(t),Q) = d(P,Q).$$

C'est vrai pour $t \leq r$. Soit t_0 le dernier t pour lequel l'égalité a lieu. Supposons que $t_0 < d(P,Q)$. Soit $r' < \mathrm{inj}_{\gamma(t_0)}$, soit $Q'' \in \partial B(\gamma(t_0),r')$ le point le plus proche de Q. Alors

$$d(\gamma(t_0),Q'') + d(Q'',Q) = d(\gamma(t_0),Q).$$

Or

$$\begin{aligned}
d(P,Q'') + d(Q'',Q) &\leq d(P,\gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0),Q'') + d(Q'',Q) \\
&= d(P,\gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0),Q) \\
&= d(P,Q) \\
&\leq d(P,Q'') + d(Q'',Q).
\end{aligned}$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité intermédiaire

$$d(P,Q'') = d(P,\gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0),Q'').$$

Cela prouve que la courbe obtenue en mettant bout à bout $\gamma([0,t_0])$ et le segment géodésique minimisant de $\gamma(t_0)$ à Q'' est un arc d'une seule géodésique, donc que $Q'' = \gamma(t_0 + r')$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
d(P,Q'') &= d(P,\gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0),Q'') \\
&= t_0 + r'.
\end{aligned}$$

Ceci contredit la définition de t_0. On conclut que $t_0 = d(P, Q)$, ce qui entraîne que $Q = \gamma(d(P, Q))$.

On a donc montré que 4 ou 5 $\Rightarrow$ 6. On a aussi montré que 3 $\Rightarrow$ 2 car toute boule centrée en P est contenue dans l'image par $\exp_P$ d'une boule de l'espace tangent, donc est relativement compacte. Clairement, 2 $\Rightarrow$ 1. ∎

Exercice 20 *Soit M une variété riemannienne complète, et $N \subset M$ une sous-variété. Montrer que N est complète si et seulement si N est un sous-ensemble fermé de M.*

Exercice 21 *Soit M le disque muni de sa métrique de Poincaré, et P le centre du disque. En utilisant le résultat de l'exercice 9, montrer que* $\exp_P$ *est définie globalement. En déduire que la pseudosphère est complète. Que vaut l'aire de la boule de centre P et de rayon δ ?*

5.2 Géodésiques et groupe fondamental

Rappel 5.3 *Soit M une variété et $P \in M$. Le* groupe fondamental $\pi_1(M, P)$ *est l'ensemble des classes d'homotopie de lacets d'origine P, muni de la loi de composition (mise bout à bout) des lacets.*

Proposition 5.4 *Soit M une variété riemannienne complète, $P \in M$. Toute classe d'homotopie non triviale de $\pi_1(M, P)$ contient au moins un lacet géodésique d'origine P. L'ensemble des longueurs minimales des classes d'homotopie de $\pi_1(M, P)$ est discret. Si M est compacte, toute classe d'homotopie libre de courbes périodiques non triviale contient au moins une géodésique périodique.*

Preuve. Comme les boules de centre P sont compactes, l'ensemble des lacets lipschitziens d'origine P paramétrés à vitesse constante sur $[0, 1]$ et de longueur $\leq L$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme (Ascoli-Arzela). La longueur étant semi-continue inférieurement (prendre la définition comme borne supérieure de longueurs d'approximations polygonales), il existe dans chaque classe d'homotopie un lacet lipschitzien de longueur minimum. D'après le corollaire 3.10, comme il réalise la distance entre deux points assez proches, une fois reparamétré par son abscisse curviligne, c'est une géodésique.

Si l'ensemble des longueurs minimales possédait un point d'accumulation ℓ, il existerait une suite de courbes 2 à 2 non homotopes dont les longueurs convergeraient vers ℓ. Par compacité, on pourrait extraire une sous-suite uniformément convergente. Mais deux lacets suffisamment proches sont homotopes, contradiction.

Si M est compacte, le même raisonnement s'applique aux classes d'homotopie libres. Elles contiennent donc des courbes de longueur minimale. Ce sont des géodésiques périodiques. ∎

5.3 Revêtements riemanniens

Rappel 5.5 *Une application $f : N \to M$ entre variétés est un* revêtement *si pour tout $P \in M$, il existe un voisinage U de P tel que $f^{-1}(U)$ soit une réunion disjointe d'ouverts V_j tels que $f_{|V_j} : V_j \to U$ soit un homéomorphisme.*

Proposition 5.6 *Soient M et N deux variétés riemanniennes complètes. Soit $f : N \to M$ une application localement isométrique. Alors f est un revêtement.*

Inversement, si $f : N \to M$ est un revêtement, et M est équipée d'une métrique complète g_M, la métrique induite $f^* g_M$ sur N est complète.

Preuve. Supposons f localement isométrique. Soit $P \in M$. Deux points distincts de $f^{-1}(P)$ sont à distance au moins égale à $2\mathrm{inj}_P$. En effet, l'image par f d'un segment géodésique minimisant entre ces points (qui existe par complétude) est un lacet géodésique d'origine P. Par conséquent les boules de rayon $r = \mathrm{inj}_P$ centrées aux points Q de $f^{-1}(P)$ sont deux à deux disjointes. Clairement, f diminue les distances donc envoie $B(Q, r)$ dans $B(P, r)$. Inversement, f commute avec les applications exponentielles (qui sont définies sur les boules de rayon r par complétude), donc est un homéomorphisme de $B(Q, r)$ sur $B(P, r)$.

Soit f un revêtement. Alors on peut relever les géodésiques de M. On obtient des géodésiques complètes pour $(N, f^* g_M)$. Comme il y en a en tout point et dans toutes les directions, on obtient ainsi toutes les géodésiques de N. ∎

Exercice 22 *Soit M une variété riemannienne complète. Soit G un groupe d'isométries de M agissant sans points fixes sur M. On munit G de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, et on suppose G discret. Montrer que l'espace des orbites $N = G \setminus M$, muni de la distance quotient (voir exercice 3), est une variété riemannienne complète. Exprimer son rayon d'injectivité en un point P en fonction du rayon d'injectivité de M aux points de l'orbite et des distances mutuelles entre points de l'orbite.*