Examen de géométrie différentielle

2 février 2005, durée 4h

Documents autorisés

A. Souvenirs d'exposés

1. Dans l'exposé de Panagiotis, la courbure scalaire, trace de la courbure de Ricci R_{ik}, est définie par la formule $\sum_{i,k} g^{ik}R_{ik}$. Qu'est ce que g^{ik} ? Pourquoi ces coefficients sont ils nécessaires ?

2. Ilias a donné un exemple de variété compacte modelée sur $\widetilde{PSl(2,\mathbf{R})}$. Il s'agit de l'espace quotient $\Gamma \setminus PSl(2,\mathbf{R})$, où Γ est le groupe fondamental d'une surface compacte à courbure -1. Pourquoi cet espace est-il compact ?

3. Benoît a utilisé le fait que, si m est un point d'une variété riemannienne, il existe $r > 0$ tel que les boules de rayon r centrées aux points de l'image réciproque de m dans le revêtement universel soient deux à deux disjointes. Pourquoi est-ce vrai ?

B. La foire aux questions

Répondre par une formule ou une courte phrase à chacune des questions suivantes.

1. Soit ξ un fibré vectoriel réel muni d'une connexion ∇ et d'une structure euclidienne g. A quelle condition la connexion ∇ est-elle métrique ?

2. Pourquoi la matrice de la connexion projetée sur le fibré tautologique $\gamma^n(\mathbf{R}^{n+k})$ sur la grassmannienne $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$, telle qu'elle apparaît dans l'exemple 1.13 du chapitre 6 du cours, n'est-elle pas antisymétrique ?

3. Soit Γ une matrice de 1-formes sur $\mathbf{R}^n$. Existe-t'il une matrice inversible P de fonctions telle que $dP + \Gamma P = 0$?

4. Soit ξ un fibré vectoriel complexe. Soient ∇^1 et ∇^2 deux connexions localement triviales sur ξ. La connexion $\frac{1}{2}(\nabla^1 + \nabla^2)$ est-elle localement triviale ?

5. Soit ξ une fibré vectoriel complexe. On suppose que ξ admet une connexion localement triviale. Que peut-on en déduire au sujet des classes de Chern de ξ ?

C. Exercice

Soit $G = Sl(2,\mathbf{Z})$, agissant par homographies sur le demi-plan supérieur H (noter que cette action n'est pas libre). On étudie l'espace quotient $G \setminus H$ muni de la métrique induite par la métrique hyperbolique $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. On note $M = \{z \in H \,|\, |z| \geq 1\,, |\Re e(z)| \leq 1/2\}$. On admet que M est un domaine fondamental pour g dans H. On admet que les boules pour la métrique hyperbolique sont des disques euclidiens.

1. Calculer l'aire de $G \setminus H$ de deux manières différentes,

- par intégration directe de l'élément d'aire ;
- au moyen de la formule de Gauss-Bonnet.

2. En raisonnant par symétrie, montrer que toute demi-droite verticale est une géodésique de H. En donner une paramétrisation à vitesse constante.

3. Etant donné un disque euclidien de centre euclidien z_e et de rayon euclidien r_e, soit z_h son centre hyperbolique et r_h son rayon hyperbolique. Montrer que $\Re e(z_h) = \Re e(z_e)$. En utilisant une demi-droite verticale, calculer r_h et z_h en fonction de r_e et z_e.

4. On note G' le sous-groupe de G engendré par la translation $z \mapsto z+1$. Soit $z \in H$. Soit $[z]$ le point correspondant de $G' \setminus H$. Calculer le rayon d'injectivité de $G' \setminus H$ en $[z]$ en fonction de $\Im m(z)$.

5. Pour une surface singulière comme $G \setminus H$, on considère qu'une géodésique cesse d'être définie lorsqu'elle rencontre un point singulier. Par conséquent, le rayon d'injectivité en un point p est le plus grand r tel que la boule $B(p,r)$ ne contienne pas de point singulier et soit l'image injective de la boule de rayon r du plan tangent par l'exponentielle. Soit $z \in M$ tel que $\Re e(z) = 0$. Soit $[z]$ le point correspondant de $G \setminus H$. Calculer le rayon d'injectivité de $G \setminus H$ en $[z]$ en fonction de $\Im m(z)$.

D. Exercice

On s'intéresse au problème du *stigmatisme* en optique. On modélise un système optique par une variété riemannienne complète (M,g). On dit que le système est *parfaitement stigmatique* entre des ouverts U et V de M s'il existe une application différentiable et surjective $f : U \to V$ telle que si $m \in U$, toutes les géodésiques issues de m passent par $f(m)$. En 1858, le physicien Maxwell a remarqué que f est nécessairement une isométrie. C'est ce qu'on va démontrer.

On suppose M parfaitement stigmatique, et on suppose de plus que la fonction $\ell : T_1U \to \mathbf{R}_+$ telle que $\exp_m(\ell(m,v)v) = f(m)$ est différentiable.

1. Montrer que la fonction ℓ ne dépend pas du vecteur unitaire v, seulement de m.

2. Soit γ une géodésique. Montrer que $f(\gamma \cap U) \subset \gamma \cap V$. Calculer la dérivée de f le long de γ. Montrer que, pour $v \in T_mM$ unitaire,

$$\| d_m f(v) \| = 1 + d_m\ell(v).$$

3. La restriction d'une norme euclidienne à la sphère unité peut elle coïncider avec une fonction affine ? Conclure que f est une isométrie de U sur V.

4. On dit que M est *localement stigmatique* s'il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset TM$ tel que pour $(m,v) \in \mathcal{U}$, la géodésique issue de m dans la direction v passe par $f(m)$. Le théorème de Maxwell s'étend-il au cas localement stigmatique ?

E. Problème

On construit des exemples de variétés riemanniennes dont toutes les géodésiques sont fermées et de même longueur.

I

Soit $h :]-1,1[\to]-1,1[$ une fonction lisse. On étudie la métrique riemannienne

$$g = (1 + h(\cos u))^2 \, du^2 + (\sin u)^2 \, dv^2$$

sur $]0, \pi[\times \mathbf{R}$.

1. Trouver deux intégrales premières de l'équation des géodésiques.

2. Dans cette question, on suppose que $h \equiv 0$. Montrer que $(]0, \pi[\times \mathbf{R}, g)$ est un revêtement isométrique du complémentaire des pôles dans la sphère unité. Montrer que, à l'exception des méridiens et de l'équateur, chaque géodésique paramétrée par son abscisse curviligne est contenue dans une bande de la forme $\{i \leq u \leq \pi - i\}$, que la fonction $t \mapsto u(t)$ est périodique de période 2π et que sa dérivée $\dot{u}$ change de signe à chaque fois que u prend l'une des valeurs i et $\pi - i$.

3. On revient au cas général. Soit $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ une géodésique paramétrée par son abscisse curviligne. On suppose que ni u ni v ne sont constantes. Montrer que u est à valeurs dans un intervalle de la forme $[i, \pi - i]$, où $i \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\dot{u}$ change de signe lorsque u prend l'une des valeurs i et $\pi - i$, et que

$$\frac{1 + h(\cos u)}{\sqrt{1 - \frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}} \dot{u} = \pm 1.$$

4. En déduire que les fonctions u et $\dot{v}$ sont périodiques de période égale à

$$T = 2 \int_i^{\pi - i} \frac{1 + h(\cos u)}{\sqrt{1 - \frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}} \, du.$$

5. En utilisant la question 2, réécrire la période sous la forme

$$T = 2\pi + 2 \int_i^{\pi - i} \frac{h(\cos u)}{\sqrt{1 - \frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}} \, du.$$

6. Montrer que la variation de v sur une période vaut

$$|v(t+T) - v(t)| = 2 \int_i^{\pi - i} \frac{(\sin i)(1 + h(\cos u))}{(\sin u)^2 \sqrt{1 - \frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}} \, du = 2\pi + 2 \int_i^{\pi - i} \frac{(\sin i) h(\cos u)}{(\sin u)^2 \sqrt{1 - \frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}} \, du.$$

7. Désormais, on suppose la fonction h *impaire*. Soit $A =]0, \pi[\times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, muni de la métrique induite par g, par passage au quotient. Montrer que toutes les géodésiques de A, à l'exception des méridiens (courbes à v constant), sont périodiques de période 2π. Calculer l'aire de A.

8. On suppose de plus que h est lisse et identiquement nulle au voisinage de -1 et de 1. Montrer qu'il existe une métrique riemannienne lisse g' sur la 2-sphère S^2 et deux points P et P' de S^2

telle que $S^2 \setminus \{P, P'\}$ est isométrique à A. Conclure que toutes les géodésiques de (S^2, g') sont périodiques de période 2π.

II

On étudie plus en détail la complétion d'un anneau de révolution en une métrique lisse sur la 2-sphère. Soit h une fonction lisse sur $]-1,1[$, à valeurs dans $]-1,1[$. On note à nouveau $A =]0,\pi[\times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ muni de la métrique $(1+h(\cos u))^2\, du^2 + (\sin u)^2\, dv^2$. On aura besoin du lemme suivant, qui sera admis.

Lemme 1 *Soit f une fonction lisse sur un voisinage I de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$, telle que $f(1) = f(-1) = 0$. Il existe une fonction lisse ℓ sur I telle que $f(x) = \ell(x)(1-x^2)$ sur I.*

1. Soit $c > 0$. Soit σ une courbe fermée, de longueur $2\pi/c$, paramétrée par son abscisse curviligne, tracée sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$. On paramètre le cône C de sommet l'origine O, de base σ, par $X(u,v) = c(\sin u)\, \sigma(v/c)$, où $u \in [0,\pi[$, $v \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Calculer la première forme fondamentale de C. Quelle est la longueur du cercle géodésique de centre O et de rayon R, lieu des points de C situés à distance R de O (bien que la métrique soit singulière, le distance à O est bien définie) ?

2. En utilisant un champ de Jacobi, montrer que la courbure de Gauss de A est donnée par la formule

$$K(u,v) = \frac{1 + h(\cos u) - \cos u\, h'(\cos u)}{(1+h(\cos u))^3}.$$

Quelles sont les fonctions h pour lesquelles la courbure est nulle ?

3. Montrer que dans ce cas, A est isométrique au cône sur une courbe tracée sur la sphère unité. Quelle fonction h rend A isométrique à un disque euclidien privé de son centre ?

4. Dans cette question, on suppose que h se prolonge par continuïté à $[-1,1]$, et que la complétion de A est une variété riemannienne lisse, dans laquelle A est le complémentaire de deux points P et P'. Que vaut la distance de (u,v) à $P = \{u = 0\}$? En donner un équivalent simple. Donner un équivalent de la longueur du cercle géodésique de centre P. En déduire que $h(1) = h(-1) = 0$.

5. Dans cette question et la suivante, on suppose que h se prolonge en une fonction lisse au voisinage de $[1,-1]$, de sorte que $h(1) = h(-1) = 0$. En utilisant le lemme 1, montrer qu'il existe une fonction lisse ℓ définie sur un voisinage de $[-1,1]$ telle que

$$g = du^2 + (\sin u)^2 dv^2 + \ell(\cos u)(\sin u)^2 du^2.$$

6. On utilise les coordonnées $(u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$ sur la sphère unité privée des pôles. Montrer que la fonction $\cos u$ et la métrique $du^2 + (\sin u)^2 dv^2$ sont les restrictions d'une fonction et d'une métrique lisses sur la sphère unité. En déduire que la métrique g se prolonge en une métrique lisse sur la sphère.

Corrigé de l'examen de géométrie différentielle

2 février 2005, durée 4h

A. Souvenirs d'exposés

1. Panagiotis calcule dans un repère associé à un système de coordonnées normales, qui n'est orthonormé qu'à l'origine. La matrice $G = (g_{ik})$ n'est pas l'identité. Les g^{ik} sont les coefficients de la matrice inverse G^{-1}. La trace d'un endomorphisme e_i^k est $\sum_i e_i^i$ dans n'importe qu'elle base, mais la trace d'une forme bilinéaire comme la courbure de Ricci R_{ik} ne vaut $\sum_i R_{ii}$ que dans une base orthonormée. Lorsque la base n'est pas orthonormée, la formule correcte est $\sum_{i,k} g^{ik} R_{ik}$.

2. Soit x un point du plan hyperbolique H^2 et $v \in T_x H^2$ un vecteur tangent unitaire. L'application $PSl(2, \mathbf{R}) \to UH^2$, $g \mapsto (gx, gv)$ est un difféomorphisme sur l'ensemble des vecteurs unitaires tangents. Si Γ est le groupe fondamental d'une surface compacte Σ à courbure -1, alors $\Gamma \backslash PSl(2, \mathbf{R}) = \Gamma \setminus UH^2 = U\Sigma$ s'identifie au fibré unitaire tangent de Σ, il est donc compact.

3. Il faut supposer M complète. Soient m', m'' deux points de l'image réciproque de m dans le revêtement universel $\tilde{M}$. Si les boules $B(m', r)$ et $B(m'', r)$ se coupent, alors $d(m', m'') < 2r$, donc il existe une géodésique de m' à m'' de longueur $< 2r$. Son image dans M est un lacet géodésique de même longueur. Par conséquent, $inj(m) < r$. Benoît a donc simplement utilisé le fait que le rayon d'injectivité en un point est non nul.

B. La foire aux questions

1. Cela s'écrit, pour deux sections locales s et s' de ξ, et v un vecteur tangent, $v.g(s, s') = g(\nabla_v s, s') + g(s, \nabla_v s')$. Autre façon de le dire : la matrice de ∇ dans un repère local orthonormé est antisymétrique.

2. Par ce que le repère local choisi n'est pas orthonormé.

3. Si $n = 1$, la réponse est oui. Si $n > 1$, la réponse est en général non. Cette équation exprime que la connexion $d + \Gamma$ est triviale. Si la courbure $d\Gamma + \Gamma\Gamma$ est non nulle, ce n'est certainement pas vrai.

4. En rang un, la réponse est oui, car la condition de trivialité locale est l'annulation de la courbure, qui dépend linéairement de la connexion. En rang > 1, la réponse est en général non.

5. Elle sont nulles, d'après le théorème de Chern-Weil.

C. Exercice

1. Il suffit de calculer l'aire de M. Au point $z = x + iy$, une base orthonormée directe du plan tangent est $((y, 0), (0, y))$. Par conséquent, la 2-forme $y^{-2}\, dx \wedge dy$, qui vaut 1 sur cette base, est l'élément d'aire. Il vient

$$\begin{aligned}
aire(M) &= \int_M y^{-2} dx\, dy \\
&= \int_1^{+\infty}\int_{-1/2}^{1/2} y^{-2}\, dx\, dy + \int_{-1/2}^{1/2}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} y^{-2}\, dy\, dx \\
&= \int_1^{+\infty} y^{-2}\, dy + \int_{-1/2}^{1/2} [-\frac{1}{y}]_{\sqrt{1-x^2}}^{1}\, dx \\
&= [-\frac{1}{y}]_1^{+\infty} + \int_{-1/2}^{1/2} (-1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\, dx \\
&= 1 - 1 + [\mathrm{Arcsin} x]_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la formule de Gauss-Bonnet. En effet, M est un triangle géodésique dont les angles intérieurs valent respectivement $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ et 0. Les angles extérieurs valent donc $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π. Comme la courbure vaut -1, la formule s'écrit

$$\begin{aligned}
2\pi &= \int_M K + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \pi \\
&= -aire(M) + \frac{7\pi}{3},
\end{aligned}$$

d'où $aire(M) = \frac{\pi}{3}$.

2. La demi-droite $D = \{\Re e(z) = x,\ \Im(z) > 0\}$ est le lieu des points fixes de l'anti-homographie $s : z \mapsto 2x - \bar{z}$, qui correspond à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbf{R})$. Comme s est une isométrie, si $p, q \in D$, s fixe point par point la géodésique (unique) passant par p et q, donc celle-ci est contenue dans D. On conclut que D est une géodésique.

On cherche une fonction $t \mapsto y(t)$ telle que la vitesse de $t \mapsto x + iy(t)$ soit constante égale à 1. Cela conduit à l'équation $y(t)^{-1}|\dot{y}(t)| = 1$, soit $y(t) = e^{\pm t} y(0)$.

3. Soit $z_e = x_e + iy_e$. La symétrie $s = s_{x_e}$ fixe z_e et le cercle de centre z_e et de rayon r_e, donc fixe la boule hyperbolique, donc elle fixe son centre z_h. Par conséquent, $\Re e(z_h) = \Re e(z_e)$.

La courbe $t \mapsto x_e + ie^t y_e$ est géodésique, de vitesse 1. Elle coupe le disque de rayon euclidien r_e aux points $x_e + i(y_e - r_e)$ et $x_e + i(y_e + r_e)$, correspondant aux paramètres $t_1 = \log(\frac{y_e - r_e}{y_e})$ et $t_2 = \log(\frac{y_e + r_e}{y_e})$. Par conséquent,

$$r_h = \frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}\log(\frac{y_e + r_e}{y_e - r_e}), \quad z_h = x + ie^{(t_1+t_2)/2} y_e,$$

d'où $y_h = \sqrt{y_e^2 - r_e^2}$.

4. Soit C un disque de centre hyperbolique z_h et de rayon hyperbolique r_h. Si $r_e > 1/2$, C contient deux points de la même orbite, donc l'application exponentielle d'origine z_h, composition de l'application exponentielle de H et de la projection, n'est pas injective jusqu'à la distance r_h, donc $inj([z_h]) \leq r_h$.

Inversement, si $r_e < 1/2$, la projection envoie C injectivement dans $G' \setminus H$, donc $inj([z_h]) \geq r_h$. En effet, l'application exponentielle de H est toujours injective.

On conclut que le rayon d'injectivité de $G' \setminus H$ en $[z]$ est le rayon hyperbolique du cercle euclidien de rayon 1/2 dont le centre hyperbolique est z. Si $z = x + iy$, comme $r_e = 1/2$,

$y_e = \sqrt{y_h^2 + 1/4} = \sqrt{y^2 + 1/4}$ d'où

$$inj([x+iy]) = \frac{1}{2}\log(\frac{\sqrt{y^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}{\sqrt{y^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}).$$

5. On remarque que le point $[i]$ est un point singulier de $G \setminus H$. En effet, le groupe G contient la rotation $r : z \mapsto -1/z$ correspondant à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui fixe le point i.

Soit C un disque centré sur l'axe imaginaire, de centre hyperbolique z_h et de rayon hyperbolique r_h.

Si $C \subset M$, la projection envoie C injectivement dans $G \setminus H$, donc $inj([z_h]) \geq r_h$. En effet, l'application exponentielle de $G \setminus H$ est la composition de l'application exponentielle de H, qui est injective, et de la projection, qui est injective jusqu'à la distance r_h.

Inversement, si C n'est pas contenu dans M, alors ou bien $r_e > /21$ (dans ce cas, C contient deux points de la même orbite) ou bien C contient i. Par conséquent, $inj([z_h]) \leq r_h$. On conclut que $inj(z_h)$ est le rayon hyperbolique du plus grand cercle de centre hyperbolique z_h contenu dans M.

Si $\Im m(z_e) = y_e \geq 3/2$, le plus grand cercle a pour rayon $r_e = 1/2$, donc

$$r_h = \frac{1}{2}\log(\frac{y_e+\frac{1}{2}}{y_e-\frac{1}{2}}).$$

Si $r_e = 1/2$, alors $y_e = \sqrt{y_h^2 + 1/4}$. Par conséquent, si $y \geq \sqrt{2}$,

$$inj([iy]) = \frac{1}{2}\log(\frac{\sqrt{y^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}{\sqrt{y^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}).$$

Si $\Im m(z_e) = y_e < 3/2$, le plus grand cercle est celui qui touche i, il a pour rayon hyperbolique la distance hyperbolique de i à z_h, i.e. la longueur hyperbolique du segment de droite de i à z_h, soit $\log y_h$. Par conséquent, si $y < \sqrt{2}$,

$$inj([iy]) = \log y.$$

C. Exercice

1. Soit $m \in U$, soit $s \mapsto v_s$ une courbe dans $T_m M$. Soit γ_s la géodésique issue de m, de vitesse initiale v_s, de longueur $\ell(m, v_s)$. Comme les extrémités de γ_s sont m et $f(m)$, la formule de la variation première donne

$$0 = \frac{d}{ds}Long(\gamma_s)_{|s=0} = \frac{d}{ds}\ell(m, v_s)_{|s=0}.$$

Ceci prouve que la différentielle de la fonction $\ell_m : T_m M \to \mathbf{R}$ est nulle, donc ℓ_m est constante.

2. Soit γ une géodésique et $m \in \gamma \cap U$. Par l'hypothèse de stigmatisme, γ passe par $f(m) \in V$. Par conséquent $f(\gamma \cap U) \subset \gamma \cap V$.

Soit v un vecteur unitaire tangent à γ en m. Posons $m_s = \exp_m(sv)$ et notons $v_s = \frac{dm_s}{ds}$. La géodésique γ passe par $f(m_s)$ au bout d'un temps $\ell(m_s)$, donc

$$f(m_s) = \exp_{m_s} \ell(m_s)v_s = \exp_m((s + \ell(m_s)v).$$

En dérivant par rapport à s en $s = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} d_m f(v) &= \frac{d}{ds} \exp_m((s + \ell(m_s)v)_{|s=0} \\ &= d_{\ell(m)v} \exp_m(\frac{d}{ds}(s + \ell(m_s)v)_{|s=0}) \\ &= d_{\ell(m)v} \exp_m((1 + d_m\ell(v))v) \\ &= (1 + d_m\ell(v))v_{\ell(m)}. \end{aligned}$$

Comme $\| v_s \|= 1$ pour tout s,

$$\| d_m f(v) \|= 1 + d_m\ell(v).$$

3. En remplaçant v par $-v$, il vient

$$1 + d_m\ell(v) =\| d_m f(v) \|=\| d_m f(-v) \|= 1 + d_m\ell(-v) = 1 - d_m\ell(v),$$

d'où $d_m\ell(v) = 0$. Ceci prouve que la fonction ℓ est localement constante, et que $\| d_m f(v) \|= 1$ pour tout vecteur unitaire $v \in TU$. Par conséquent, f est une isométrie de U sur V.

4. Dans le cas localement stigmatique, l'argument de la question 1 donne que la fonction ℓ est localement constante sur $\mathcal{U} \cap T_m M$ pour tout m, cela suffit pour la suite. Celui de la question 2 ne s'applique qu'aux vecteurs de $\mathcal{U}$. Celui de la question 3 ne s'applique plus directement, puisque $(m, -v) \notin \mathcal{U}$ en général. Néanmoins, l'identité

$$\| d_m f(v) \|^2 -(1 + d_m\ell(v))^2 = 0,$$

vraie sur un ouvert de la sphère unité de $T_m M$, s'étend à toute la sphère par prolongement analytique. On peut donc changer v et $-v$ et conclure que $d_m\ell = 0$ et que $d_m f$ envoie un ouvert de la sphère unité dans la sphère unité. Cela suffit pour conclure que $d_m f$ est une isométrie, et donc que f est une isométrie.

Le stigmatisme parfait et global ($U = V = M$) ne se produit sur la sphère que pour les métriques à courbure constante, voir M. Berger, Appendice D in A.L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed,*. Ergebnisse der Math. **93**. Springer-Verlag, Berlin (1978).

Il existe des métriques localement stigmatiques sur la 2-sphère, dont la courbure n'est pas constante sur les domaines de stigmatisme, voir A. Deschamps, *Variétés riemanniennes stigmatiques.* J. Math. Pures et Appl. **4**, 381 – 400 (1982).

E. Problème

I

1. La métrique g possède un groupe à un paramètre d'isométries, engendré par le champ de vecteurs constant $W(u, v) = \frac{\partial}{\partial v}$. Les isométries préservent le lagrangien $L(q, \dot{q}) = g_q(\dot{q})$. D'après le théorème de Noether, la fonction

$$f_1(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})(W(q)) = \dot{q} \cdot_g W(q) = \dot{v}(\sin u)^2$$

est constante le long des extrémales de L, i.e. des géodésiques.

La conservation de la vitesse donne une seconde intégrale première

$$f_2(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = g_q(\dot{q}) = (1 + h(\cos u))^2\, \dot{u}^2 + (\sin u)^2 \dot{v}^2.$$

2. Soit $P = (0,0,1)$ un point de la sphère unité S. Etant donné $v \in \mathbf{R}$, on note (abusivement) $e^{iv} = (\cos v, \sin v, 0)$ le vecteur unitaire du plan tangent en P à la sphère qui fait un angle v avec l'axe Ox. L'application $v \mapsto e^{iv}$ est un revêtement du cercle. Soient $\Phi :]0,\pi[\times\mathbf{R}$, $(u,v) \mapsto \exp_P(ue^{iv})$ les coordonnées polaires d'origine P. Il s'agit d'un revêtement de la sphère privée des points P et $P' = (0,0,-1)$. Comme la courbure de la sphère vaut 1, la métrique induite s'écrit $\Phi^* g_S = du^2 + (\sin u)^2 dv^2$. Autrement dit, Φ réalise un revêtement isométrique. La coordonnée u s'interprète comme la distance intrinsèque au point P.

Soit γ une géodésique de la sphère paramétrée par son abscisse curviligne. Il s'agit d'un grand cercle. Si ce n'est ni un méridien, ni l'équateur, la distance d'un point de γ à P (resp. à P') atteint son minimum $i \in]0, \frac{\pi}{2}]$ en un point Q (resp. Q'). Comme, pour tout point de la sphère, la somme des distances à P et P' vaut π, le maximum de la distance à P sur γ vaut $\pi - i$, il est atteint en Q'. Par conséquent, le long de γ, u varie de i à $\pi - i$.

Le grand cercle étant périodique de longueur 2π, la fonction u est périodique de période 2π. Elle est croissante le long d'un des arcs délimités par Q et Q', et décroissante le long de l'autre. Par conséquent, la dérivée $\dot{u}$ change de signe à chaque fois que u prend l'une des valeurs i et $\pi - i$.

3. Comme γ est paramétrée par son abscisse curviligne, sa vitesse $f_2 = (1 + h(\cos u))^2\, \dot{u}^2 + (\sin u)^2 \dot{v}^2$ vaut 1. Par conséquent,

$$(\sin u)^2 \dot{v}^2 \leq 1.$$

Comme $\dot{v}(\sin u)^2 = f_1$ est constant, $(\sin u)^2 \geq f_1^2$. Il existe un unique $i \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $(\sin i)^2 = f_1^2$, et l'inégalité $(\sin u)^2 \geq f_1^2$ se traduit par $i \leq u \leq \pi - i$.

Si $i = 0$, $f_1 = 0$ d'où $\dot{v} \equiv 0$, v est constante. Si $i = \frac{\pi}{2}$, $u \equiv \frac{\pi}{2}$. On peut donc supposer dans la suite que $i \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

De la relation

$$1 = (1 + h(\cos u))^2\, \dot{u}^2 + (\sin u)^2 \dot{v}^2 = (1 + h(\cos u))^2\, \dot{u}^2 + \frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2},$$

on déduit que $\dot{u}(t) = 0$ si et seulement si $u(t) = i$ ou $\pi - i$. Si $u(t) = i$, u atteint un minimum local, donc $\dot{u}(t) = 0$, $\dot{u} \leq 0$ avant et $\dot{u} \geq 0$ après t. En fait, $\dot{u} < 0$ avant et $\dot{u} > 0$ après t, jusqu'au prochain moment où u vaut $\pi - i$. Enfin,

$$\frac{1 + h(\cos u)}{\sqrt{1 - \frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}}\dot{u} = \mathrm{signe}(\dot{u}) = \pm 1. \tag{1}$$

4. Soit t_0 tel que $\dot{u}(t_0) > 0$. Soit F la primitive de la fonction $u \mapsto \frac{1+h(\cos u)}{\sqrt{1-\frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}}$ sur l'intervalle $]i, \pi - i[$, qui vaut t_0 en $u(t_0)$. Comme cette fonction est intégrable, F possède des limites finies t_1 en i et t_2 en $\pi - i$. Alors F est un difféomorphisme de $]i, \pi - i[$ sur $]t_1, t_2[$, et $F^{-1} :]t_1, t_2[\to]i, \pi - i[$ est une solution de l'équation (1) avec le signe $+$. Elle tend vers $\pi - i$ et sa dérivée tend vers 0 en t_2. La fonction $t \mapsto F^{-1}(2t_2 - t)$ est une solution de l'équation (1) avec le signe $-$, sur l'intervalle $]t_2, 2t_2 - t_1[$, qui se raccorde C^1 avec la précédente en t_2. De même, on prolonge la solution par périodicité de période

$$T = 2(t_2 - t_1) = 2\int_i^{\pi - i} \frac{1 + h(\cos u)}{\sqrt{1 - \frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}}\, du.$$

On sait que $\dot{v} = \pm\frac{\sin i}{(\sin u)^2}$. Comme le second membre ne s'annule jamais, $\dot{v}$ a un signe constant, c'est une fonction de u, donc elle a même période que u.

5. D'après la question 2, lorsque $h \equiv 0$, toutes les géodésiques sont périodiques de période 2π. Par conséquent

$$\int_i^{\pi-i} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}} = 2\pi,$$

d'où

$$T = 2\pi + 2\int_i^{\pi-i} \frac{h(\cos u)}{\sqrt{1-\frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}}\, du.$$

6. Supposons par exemple v croissante. Dans ce cas, $\dot{v} = \frac{\sin i}{(\sin u)^2}$. Sa variation sur une demi-période vaut

$$v(t+\frac{T}{2}) - v(t) = \int_i^{\pi-i} \frac{\sin i}{(\sin u)^2}\, dt = \int_i^{\pi-i} \frac{\sin i}{\dot{u}(\sin u)^2}\, du = \int_i^{\pi-i} \frac{(\sin i)(1+h(\cos u))}{(\sin u)^2\sqrt{1-\frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}}\, du,$$

et la variation sur une période vaut le double.

De nouveau, lorsque $h \equiv 0$, on est sur la sphère, les grands cercles autres que les méridiens font une fois le tour des pôles, donc la variation de v vaut 2π. Par conséquent,

$$\int_i^{\pi-i} \frac{\sin i}{(\sin u)^2\sqrt{1-\frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}}\, du = \pi,$$

d'où

$$v(t+T) - v(t) = 2\pi + 2\int_i^{\pi-i} \frac{\sin i\, h(\cos u)}{(\sin u)^2\sqrt{1-\frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}}\, du.$$

7. Si h est impaire, les intégrales

$$\int_i^{\pi-i} \frac{h(\cos u)}{\sqrt{1-\frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}}\, du \quad \text{et} \quad \int_i^{\pi-i} \frac{\sin i\, h(\cos u)}{(\sin u)^2\sqrt{1-\frac{(\sin i)^2}{(\sin u)^2}}}\, du$$

sont nulles, donc $T = \Delta v = 2\pi$. Autrement dit, dans le quotient $A =]0,\pi[\times\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, la courbe $t \mapsto (u(t), v(t) \bmod 2\pi)$ est périodique de période 2π. Comme $h(0) = 0$, l'unique géodésique à u constant, l'équateur $\{u = \frac{\pi}{2}\}$, est de longueur 2π, toutes les géodésiques de A, à l'exception des méridiens sont périodiques de période 2π.

La base $((1+h(\cos u))\frac{\partial}{\partial u}, \sin u \frac{\partial}{\partial v}$ étant orthonormée directe pour la métrique g, l'élément d'aire vaut $(1+h(\cos u))\sin u\, du \wedge dv$. L'aire de A vaut donc

$$\begin{aligned} aire(A) &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (1+h(\cos u))\sin u\, du\, dv \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin u\, du\, dv \end{aligned}$$

par imparité. C'est l'aire obtenue lorsque $h \equiv 0$ i.e. pour la sphère unité, soit 4π.

8. Si h est identiquement nulle sur $]\cos\epsilon, 1[$, le difféomorphisme $\Phi_{\pi-\epsilon}$ induit par $\Phi : A_{\pi-\epsilon} =]\pi-\epsilon, \pi[\times\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to S$ est une isométrie sur le complémentaire de P dans la boule $B_{\pi-\epsilon}$ de rayon ϵ et de centre P' dans la sphère unité S. De même, si h est identiquement nulle sur $]-1, -\cos\epsilon[$, le difféomorphisme Φ_ϵ induit par $\Phi : A_\epsilon =]0, \epsilon[\times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to S$ est une isométrie sur le complémentaire de P dans la boule B_ϵ de rayon ϵ et de centre P dans S. Les trois cartes $B_\epsilon, A, B_{\pi-\epsilon}$ et les deux changements de cartes $\Phi_{\pi-\epsilon}$ et Φ_ϵ définissent une variété riemannienne lisse difféomorphe à S^2. Quand on lui retire P et P', on trouve A. Un autre argument est proposé en II.6.

Ses géodésiques comprennent les méridiens qui sont maintenant périodiques de longueur 2π. On conclut que toutes les géodésiques de la variété obtenue sont périodiques de période 2π.

Ces variétés, connues depuis 1903, s'appellent les *surfaces de Zoll*, voir chapitre 4 de A.L. Besse, *ibid.*

II

1. Posons $X(u, v) = c \sin u\sigma(v/c)$. On calcule la première forme fondamentale

$$E = c^2(\cos u)^2, \quad F = 0, \quad G = (\sin u)^2,$$

d'où la métrique induite $c^2(\cos u)^2 du^2 + (\sin u)^2 dv^2$.

Soit Q un point de σ. La distance intrinsèque du point rQ à O vaut exactement r, puisque le segment $[O, rQ]$ est contenu dans C. Le cercle géodésique de centre O et de rayon r est l'intersection de C avec la sphère de rayon r. Sa longueur est $2\pi r/c$.

2. Les méridiens étant géodésiques, le champ de vecteurs $W = \frac{\partial}{\partial v}$ restreint à un méridien est un champ de Jacobi. Or W est colinéaire au champ unitaire parallèle $V(u, v) = (\sin u)^{-1}W(u, v)$, le champ de vecteurs unitaire tangent au méridien est

$$T(u, v) = (1 + h(\cos u))^{-1} \frac{\partial}{\partial u},$$

donc l'équation de Jacobi $\nabla_T\nabla_T W + R_{W,T}T = 0$ se traduit par $TT(\sin u) + K(\sin u) = 0$. Cela conduit à la formule

$$K = \frac{1 + h(\cos u) - \cos u\, h'(\cos u)}{(1 + h(\cos u))^3}$$

pour la courbure de Gauss K.

La courbure s'annule identiquement si et seulement si pour tout $x \in]-1, 1[$, $1+h(x)-xh'(x) = 0$. On trouve les fonctions de la forme $h(x) = cx - 1$, où c est une constante.

3. Lorsque $h(x) = cx - 1$, g coïncide avec la première forme fondamentale de la paramétrisation X du cône C. Autrement dit, l'application $X : A \to C$ est un difféomorphisme isométrique.

Si la complétion de C est isométrique à un disque euclidien, alors la longueur de tout cercle géodésique de rayon r vaut $2\pi r$, donc $c = 1$ et $h(x) = x - 1$. Réciproquement, si $c = 1$, on prend pour σ un grand cercle, et $X : A \to C$ est une isométrie sur un disque plan.

4. Notons $R(u) = \int_0^u (1 + h(\cos t))\, dt$, et (abus de notation) $R(u, v) = R(u)$. C'est une fonction lisse sur A. De l'inégalité

$$dR^2 \leq g,$$

on tire que toute courbe reliant P au point (u, v) a une longueur au moins égale à $R(u, v)$, avec égalité pour le méridien. Par conséquent, la distance riemannienne de P à (u, v) vaut $R(u)$. On a l'équivalent $R(u) \sim (1 + h(1))u$.

Le cercle géodésique de rayon r est le parallèle $\{u = u_0\}$ où $R(u_0) = r$. Sa longueur est $2\pi \sin(u_0) \sim 2\pi u_0 \sim \frac{2\pi r}{1+h(1)}$. Pour une variété riemannienne lisse, la longueur du cercle géodésique de rayon r est équivalente à $2\pi r$. Par conséquent $h(1) = 0$. Le même raisonnement au voisinage de P' donne $h(-1) = 0$.

5. On écrit

$$g - (du^2 + (\sin u)^2 dv^2) = (2h(\cos u) + h(\cos u)^2)\, du^2.$$

On applique le lemme 1 à la fonction $2h + h^2$, qui s'annule en 1 et en -1. Il existe une fonction lisse ℓ telle que

$$2h(x) + h(x)^2 = \ell(x)(1 - x^2).$$

Alors

$$g - (du^2 + (\sin u)^2 dv^2) = \ell(\cos u)(\sin u)^2 du^2.$$

6. Soit z la troisième coordonnées cartésienne de $\mathbf{R}^3$. Sa restriction à la sphère est une fonction lisse sur la sphère, donc la fonction $\cos u$ est lisse. Quant à $du^2 + (\sin u)^2 dv^2$, c'est la métrique g_1 induite par celle de $\mathbf{R}^3$, donc elle est lisse.

Par conséquent, $g = g_1 + \ell(z)\, dz^2$ est la restriction à A d'une métrique lisse sur la sphère.