

## Géométrie Riemannienne : exercices du chapitre 3

**Exercice 1** Soit  $M$  une variété munie d'une connexion  $\nabla$ ,  $V$  et  $W$  des champs de vecteurs,  $f$  une fonction sur  $M$ . Montrer que  $\nabla_{V,W}^2 f - \nabla_{W,V}^2 f = -\nabla_{T(V,W)} f$ .

**Solution de l'exercice 1.** *Commutation des dérivées secondes des fonctions.*

$$\begin{aligned}\nabla_{V,W}^2 f - \nabla_{W,V}^2 f &= \nabla_V \nabla_W f - \nabla_W \nabla_V f - \nabla_{\nabla_V W - \nabla_W V} f \\ &= \nabla_{[V,W] - \nabla_V W + \nabla_W V} f \\ &= -\nabla_{T(V,W)} f\end{aligned}$$

par définition de la torsion.

**Exercice 2** Démontrer la première identité de Bianchi  $R_{v,w}z + R_{w,z}v + R_{z,v}w = 0$ .

**Solution de l'exercice 2.** *Preuve de la première identité de Bianchi.*

Soient  $V, W, Z$  trois champs de vecteurs. On suppose la connexion sans torsion. Alors

$$\begin{aligned}R_{V,W}Z + R_{W,Z}V + R_{Z,V}W &= \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_{[V,W]}Z \\ &\quad + \nabla_W \nabla_Z V - \nabla_Z \nabla_W V - \nabla_{[W,Z]}V \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_V W - \nabla_V \nabla_Z W - \nabla_{[Z,V]}W \\ &= \nabla_V(\nabla_W Z - \nabla_Z W) + \nabla_W(\nabla_Z V - \nabla_V Z) \\ &\quad + \nabla_Z(\nabla_V W - \nabla_W V) \\ &\quad - \nabla_{[V,W]}Z - \nabla_{[W,Z]}V - \nabla_{[Z,V]}W \\ &= \nabla_V[W, Z] - \nabla_{[W,Z]}V + \nabla_W[Z, V] - \nabla_{[Z,V]}W \\ &\quad + \nabla_Z[V, W] - \nabla_{[V,W]}Z \\ &= [V, [W, Z]] + [W, [Z, V]] + [Z, [V, W]] \\ &= 0\end{aligned}$$

d'après l'identité de Jacobi pour le crochet de Lie.

**Exercice 3** Vérifier que la courbure de Gauss d'une métrique écrite en coordonnées polaires  $dr^2 + f(r, \theta)^2 d\theta^2$  vaut  $K = -f^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ .

**Solution de l'exercice 3.** *Courbure d'une métrique en coordonnées polaires.*

On note  $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$ ,  $f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$  et on calcule

$$\begin{aligned}
(R_{e_r, e_\theta} e_r) \cdot e_\theta &= \nabla_{e_r} \nabla_{e_\theta} e_r \cdot e_\theta - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_r} e_r \cdot e_\theta - \nabla_{[e_r, e_\theta]} e_r \cdot e_\theta \\
&= \nabla_{e_r} \left( \frac{f'}{f} e_\theta \right) \cdot e_\theta - 0 - \nabla_{-\frac{f'}{f} e_\theta} e_r \cdot e_\theta \\
&= \frac{f f'' - f'^2}{f^2} + \frac{f'}{f} \nabla_{e_r} e_\theta \cdot e_\theta + \frac{f'}{f} \nabla_{e_\theta} e_r \cdot e_\theta \\
&= \frac{f f'' - f'^2}{f^2} + \frac{f'^2}{f^2} e_\theta \cdot e_\theta \\
&= \frac{f''}{f}.
\end{aligned}$$

d'où  $K = -\frac{f''}{f}$ .

**Exercice 4** Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité de  $\mathbf{R}^3$ .

**Solution de l'exercice 4.** Courbure de la 2-sphère.

En coordonnées polaires (colatitude, longitude), la métrique de la sphère unité s'écrit  $dr^2 + \sin(r)^2 d\phi^2$ . Le résultat de l'exercice 3 donne

$$K = -\frac{\sin''}{\sin} = 1. \quad (1)$$

**Exercice 5** Vérifier que si deux métriques riemanniennes  $g' = \lambda^2 g$  en dimension 2 sont proportionnelles, alors leurs courbures de Gauss sont reliées par  $K' = \lambda^{-2} K$ .

**Solution de l'exercice 5.** Courbure de métriques homothétiques.

Il résulte de la définition que  $g$  et  $g'$  ont même connexion de Levi-Civita. Elles ont donc même tenseur de courbure  $R' = R$ .

$$\frac{K'}{K} = \frac{(R'_{v,w} z) \cdot u \operatorname{vol}(v, w) \operatorname{vol}(z, u)}{(R_{v,w} z) \cdot u \operatorname{vol}'(v, w) \operatorname{vol}'(v, w)} \quad (2)$$

$$= \lambda^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\lambda^2} \quad (3)$$

$$= \lambda^{-2}. \quad (4)$$

**Exercice 6** Vérifier que si deux métriques riemanniennes  $g' = e^{2f} g$  en dimension 2 sont conformes, alors leurs courbures de Gauss sont reliées par  $K' = e^{-2f} (K + \Delta f)$ .

**Solution de l'exercice 6.** Courbure de deux métriques conformes en dimension 2.

Soit  $(V, W)$  une base orthonormée du plan tangent pour la métrique  $g$ . On a

$$|\nabla f|^2 = (\nabla_V f)^2 + (\nabla_W f)^2$$

et

$$-\nabla_{V,V}^2 f - \nabla_{W,W}^2 f = -\text{trace}(\nabla^2 f)$$

est le laplacien de  $f$ . Comme  $V' = e^{-f}V$  et  $W' = e^{-f}W$  forment une base orthonormée pour  $g'$ , la formule du cours pour la courbure de deux métriques conformes donne

$$\begin{aligned} K' &= R'_{V',W'} W' \cdot W' \\ &= e^{-4f} R'_{V,W} W \cdot W \\ &= e^{-2f} (K + \Delta f). \blacksquare \end{aligned}$$

**Exercice 7** Vérifier que la courbure de Gauss de la métrique de Poincaré  $\frac{16(dx^2+dy^2)}{(4-x^2-y^2)^2}$  du disque de rayon 2 vaut  $K = -1$ .

**Solution de l'exercice 7.** Courbure de Gauss de la métrique de Poincaré.

La métrique de Poincaré s'écrit  $g = e^{2f}g_0$  où  $g_0$  est la métrique euclidienne du disque de rayon 2 et  $f = -\log((4-x^2-y^2)/4)$ . On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{4-x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2}{4-x^2-y^2} - \frac{-4x^2}{(4-x^2-y^2)^2} = \frac{8+2x^2-2y^2}{(4-x^2-y^2)^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= -\frac{16}{(4-x^2-y^2)^2} \\ &= -e^{2f}. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de l'exercice 6, il vient

$$K = e^{2f}(K_0 + \Delta f) = -1.$$

**Exercice 8** Démontrer le Theorema Egregium de Gauss, i.e. le fait que le produit des courbures principales d'une surface de  $\mathbf{R}^3$  est égal à la courbure de Gauss intrinsèque, i.e. définie uniquement à partir de la première forme fondamentale.

**Solution de l'exercice 8.** Le Theorema Egregium de Gauss.

Soit  $N$  une surface de  $M = \mathbf{R}^3$  euclidien, soit  $P \in M$ , soit  $(v, w)$  une base orthonormée de  $T_P M$  formée de directions principales. Soit  $\Gamma = v \wedge w$  la normale unitaire. Alors

$$II(v, w) = 0, \quad II(v, v) = k_1 \Gamma, \quad II(w, w) = k_2 \Gamma$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont les courbures principales. La courbure de Gauss intrinsèque est

$$\begin{aligned} K &= (R_{v,w}^N w) \cdot v \\ &= 0 + II(w, w) \cdot (v, v) - II(v, w) \cdot II(v, w) \\ &= k_1 k_2. \end{aligned}$$

**Exercice 9** Soit  $M$  une variété riemannienne de dimension 2. On écrit sa métrique en coordonnées polaires, i.e. sous la forme  $dr^2 + f(r, \theta)^2 d\theta^2$ . En utilisant l'équation de Jacobi, montrer que la courbure vaut  $K = -f^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ .

**Solution de l'exercice 9.** Courbure d'une métrique en coordonnées polaires.

Le champ de vecteurs  $W(r) = \frac{\partial}{\partial \theta}$  est un champ de Jacobi le long de chaque droite passant par l'origine. En effet, c'est la variation de la famille de géodésiques  $\gamma_\theta(r) = (r, \theta)$ . De plus, il s'écrit  $W(r) = f(r, \theta)e_\theta$  où  $e_\theta$  est parallèle. L'équation de Jacobi se traduit donc par  $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + Kf = 0$ .

**Exercice 10** Soit  $M$  une variété riemannienne de dimension 2,  $P \in M$ ,  $C_r$  le lieu des points de  $M$  dont la distance à  $P$  est égale à  $r$ . Montrer que

$$\text{Long}(C_r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3} K(P) r^3 + o(r^3)$$

où  $K(P)$  est la courbure de Gauss en  $P$ .

**Solution de l'exercice 10.** Développement limité de l'aire des disques géodésiques.

Si  $r < \text{inj}_P$ ,  $C_r$  est exactement l'image par l'exponentielle du cercle de rayon  $r$  dans le plan tangent, i.e. le niveau  $r$  en coordonnées polaires. Or en coordonnées polaires, la métrique s'écrit  $dr^2 + f(r, \theta)^2 d\theta^2$ , où

$$f(r, \theta)^2 = r^2 - \frac{1}{3} K(P) r^4 + o(r^4).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Long}(C_r) &= \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta \\ &= 2\pi r \left(1 - \frac{1}{6} K(P) r^2 + o(r^2)\right). \end{aligned}$$

**Exercice 11** Soit  $M$  une variété riemannienne,  $P$  un point de  $M$ ,  $\pi$  un plan vectoriel contenu dans  $T_P M$ . Notons  $N_\pi = \exp_P(\pi)$  la surface balayée par les géodésiques tangentes à  $\pi$ . Vérifier que la courbure sectionnelle  $K(\pi)$  est égale à la courbure de Gauss de  $N_\pi$ .

**Solution de l'exercice 11.** *Interprétation de la courbure sectionnelle.*

Montrons que la seconde forme fondamentale de  $N_\pi$  au point  $P$  est nulle. Pour tout  $v \in T_P\pi = \pi$ , la courbe  $t \mapsto \exp_P(tv)$  est géodésique dans  $M$  et dans  $N_\pi$  (car cette propriété ne dépend que de la première forme fondamentale). Notons  $T$  sa vitesse. Alors

$$II(v, v) = II(T, T) = \nabla_T^M T - \nabla_T^N T = 0.$$

Soit  $(v, w)$  une base orthonormée de  $\pi$ . L'équation de Gauss donne alors

$$K^N = (R_{v,w}^N w) \cdot v = (R_{v,w}^M w) \cdot v = K^M(\pi).$$

**Exercice 12** Soit  $M$  une variété munie de deux métriques riemanniennes conformes  $g$  et  $g' = e^{2f}g$ . Soit  $P$  un point de  $M$ ,  $\pi$  un plan vectoriel contenu dans  $T_P M$ . Vérifier que les courbures sectionnelles  $K'(\pi)$  et  $K(\pi)$  sont reliées par la formule

$$K'(\pi) = e^{-2f}(K(\pi) + \Delta_\pi f - |\nabla_{\pi^\perp} f|^2)$$

où  $\Delta_\pi f$  est l'opposé de la trace de la hessienne  $\nabla^2 f$  restreinte à  $\pi$  et  $\nabla_{\pi^\perp} f$  la projection du gradient de  $f$  sur l'orthogonal de  $\pi$ .

**Solution de l'exercice 12.** *Courbure sectionnelle d'une métrique conforme.*

Soit  $\pi$  un plan tangent à  $M$ , soit  $(v, w)$  une base orthonormée de  $\pi$  pour la métrique  $g$ . Alors  $v' = e^f v$  et  $w' = e^f w$  forment une base orthonormée de  $\pi$  pour  $g'$ . D'après la formule du cours pour la courbure de deux métriques conformes, les courbures de  $g$  et de  $g'$  sont reliées par

$$\begin{aligned} e^{-2f} R'_{v,w} w \cdot v &= R_{v,w} w \cdot v - \nabla_{v,v}^2 f - \nabla_{w,w}^2 f \\ &\quad - |\nabla f|^2 + (\nabla_v f)^2 + (\nabla_w f)^2. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} K'(\pi) &= R'_{v',w'} w' \cdot v' \\ &= e^{-2f} (R_{v,w} w \cdot v - \nabla_{v,v}^2 f - \nabla_{w,w}^2 f \\ &\quad - |\nabla f|^2 + (\nabla_v f)^2 + (\nabla_w f)^2) \\ &= e^{-2f} (K(\pi) + \Delta_\pi f - |\nabla_{\pi^\perp} f|^2). \end{aligned}$$

**Exercice 13** Montrer que toute isométrie de la 2-sphère préservant l'orientation possède un point fixe. En déduire une classification des surfaces à courbure 1.

**Solution de l'exercice 13.** *Classification des surfaces à courbure 1.*

Une isométrie de la 2-sphère  $S^2$  est une matrice orthogonale  $\in O(3)$ . Elle préserve l'orientation si et seulement si son déterminant vaut 1. C'est alors une rotation, et une rotation possède un axe. Soit  $M$  une surface à courbure 1. Alors  $M = G \setminus S^2$

où  $G$  est un sous-groupe discret (donc fini) de  $O(3)$  agissant sans point fixe. Le sous-groupe des éléments de  $G$  qui préservent l'orientation est d'indice 2 dans  $G$ . Il est réduit à l'identité, donc  $G$  a au plus 2 éléments. Une involution a pour valeurs propres 1 ou  $-1$ . Comme il ne faut pas de points fixes sur la sphère,  $-1$  est la seule valeur propre, donc l'élément non trivial de  $G$  est nécessairement l'antipodie  $-id$ . Le quotient de la 2 sphère par l'antipodie s'appelle le *plan projectif réel*. On conclut qu'il y a exactement 2 surfaces à courbure 1, à isométrie près, la 2-sphère et le plan projectif.