

Géométrie

Pierre Pansu, d'après des notes de Laurent Clozel

2 juillet 2007

Chapitre 1

GEOMETRIE PROJECTIVE

1.1 Géométrie affine

1.1.1 Points et vecteurs

Dans \mathbb{R}^n rapporté au repère $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, un point p est représenté par la colonne de ses coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

qui sont les composantes du vecteur \vec{op} . Si p et q sont des points, \vec{v} un vecteur de composantes V , a un réel, on note $q - p = \vec{pq}$, $r = p + \vec{v}$ le point tel que $\vec{pr} = \vec{v}$, $ap + (1 - a)q$ le barycentre de (p, a) et $(q, (1 - a))$. La notation est justifiée par les calculs en coordonnées : si X (resp. Y , resp. V) est la colonne des coordonnées de p (resp. q , resp. des composantes de \vec{v}) dans un repère, alors la colonne des coordonnées de \vec{pq} est $Y - X$, celle de r est $X + V$, celle de $ap + (1 - a)q$ est $aX + (1 - a)Y$. Le résultat ne dépend pas du choix d'origine o .

Autrement dit, la différence de deux points est un vecteur, le barycentre de deux points est un point, on peut ajouter un vecteur et un point. Attention, on n'ajoute pas deux points. Plus généralement une combinaison $\sum_i m_i p_i$ est un point (barycentre des points p_i affectés des masses m_i) si $\sum_i m_i = 1$, un vecteur si $\sum_i m_i = 0$.

1.1.2 Applications affines

Définition 1.1.1 Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est affine s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que pour tous points p, q de \mathbb{R}^n ,

$$f(q) = f(p) + L(\vec{pq}).$$

L'endomorphisme L s'appelle la partie linéaire de f , ou l'application linéaire tangente à f .

Exemples 1.1.2 1. Applications linéaires.

2. Translations (ce sont les applications affines dont la partie linéaire est l'identité).
3. Homothéties.
4. Symétries orthogonales par rapport à des droites affines du plan (exercice).
5. Rotations autour de points du plan (exercice).

Proposition 1.1.3 Toute application affine $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ possède une unique écriture matricielle, compatible avec la composition. Soit $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère de \mathbb{R}^n . La matrice de f dans ce repère est

$$M_f = \begin{pmatrix} M_L & of(\vec{o}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où M_L désigne la matrice de L dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Remarque 1.1.4 1. Une application affine est bijective si et seulement si sa partie linéaire l'est.

2. Le groupe affine est un produit semi-direct.

3. Le lieu des points fixes d'une application affine est un sous-espace affine, cas où il est non vide, dimension, lien avec la multiplicité de 1 comme valeur propre de la partie linéaire.

Proposition 1.1.5 Soient (e, e_1, \dots, e_n) et (o', e'_1, \dots, e'_n) deux repères affines de \mathbb{R}^n . Soit f une transformation affine de matrices M et M' dans ces repères. Notons V la colonne des coordonnées du point o' dans le repère (o, e_1, \dots, e_n) . Posons

$$P_a = \begin{pmatrix} P & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de passage de la base (e_1, \dots, e_n) dans la base (e'_1, \dots, e'_n) , i.e. les colonnes de P sont les composantes des vecteurs e'_j dans la base (e_1, \dots, e_n) . Alors

$$M' = P_a^{-1} M P_a.$$

Fin du cours n°1

1.2 Perspective

1.2.1 Vues

Une *vue* d'une scène 3D est déterminée par les données suivantes.

– La position de la caméra : un point c de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

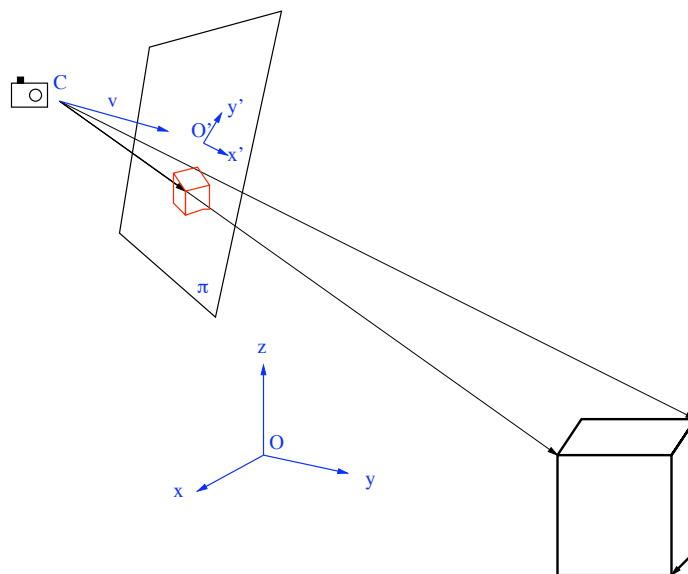
– Une direction de visée : un vecteur unitaire \vec{v} de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

– Un *écran*, i.e. un plan Π perpendiculaire à la direction de visée : il est déterminé par sa distance à C , un réel positif d .

– Un repère orthonormé $(o', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ du plan Π .

Une *vue* de la scène est une application $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, qui aux coordonnées d'un point dans le repère du monde $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ associe les coordonnées de sa projection sur l'écran Π , dans le repère de l'image $(o', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$.

Définition 1.2.1 La vue en perspective depuis c sur l'écran Π consiste à projeter un point p sur p' , point d'intersection de la droite cp avec Π .



Remarque 1.2.2 La projection n'est pas définie si p est dans le plan passant par C et parallèle à Π . C'est normal : on n'arrive pas à voir dans les directions situées à 90° de sa direction de vision.

Définition 1.2.3 Prise de vue à distance infinie. Soit D une droite, appelée axe de visée, et Π un plan orthogonal à D . La prise de vue à distance infinie dans la direction D consiste à projeter orthogonalement sur Π .

C'est ce qu'on obtient à la limite, lorsque, Π et o' étant fixés, C tend vers l'infini le long de la droite $D = (o', \vec{u})$.

1.2.2 Calcul de la vue en perspective

Voici un moyen systématique de construire le repère (o', e'_1, e'_2) . Il suffit de choisir une fois pour toute un vecteur unitaire \vec{v} non colinéaire à \vec{v} . On prend pour o' la projection orthogonale de C sur Π , soit $o' = C + d\vec{v}$. On prend

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{v} \wedge \vec{v}}{|\vec{v} \wedge \vec{v}|} \quad \text{et} \quad \vec{e}'_2 = \vec{v} \wedge \vec{e}'_1.$$

Proposition 1.2.4 On choisit $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de p' sont données, en fonction des

coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de p , par les formules

$$x' = \frac{-cd(x - x_0) + ad(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0))},$$

$$y' = \frac{abd(x - x_0) - d(a^2 + c^2)(y - y_0) + bcd(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0))}.$$

On constate que la vue en perspective s'exprime par des fractions rationnelles. Complétons le repère de l'image en un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 en posant $e'_3 = \vec{v}$. La troisième coordonnée de p' est évidemment $z' = 0$.

On ramène ces expressions rationnelles à des expressions linéaires en adoptant la convention suivante : Un point p de \mathbb{R}^3 peut être représenté, non seulement par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$, mais par n'importe quel vecteur de \mathbb{R}^4 qui lui est proportionnel. En particulier, un point p' du plan Π peut être représenté par n'importe quel vecteur de \mathbb{R}^3 proportionnel à $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec cette convention, on peut choisir pour représentant de la vue en perspective p' d'un point p le vecteur

$$\begin{pmatrix} -cd(x - x_0) + ad(z - z_0) \\ abd(x - x_0) - d(a^2 + c^2)(y - y_0) + bcd(z - z_0) \\ 0 \\ \sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)) \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ par l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 de matrice

$$\begin{pmatrix} -cd & 0 & ad & cdx_0 - adz_0 \\ abd & -d(a^2 + c^2) & bcd & -abdx_0 + d(a^2 + c^2)y_0 - bcdz_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a\sqrt{a^2 + c^2} & b\sqrt{a^2 + c^2} & c\sqrt{a^2 + c^2} & \sqrt{a^2 + c^2}(-ax_0 - by_0 - cz_0) \end{pmatrix}$$

C'est quand même plus sympathique (et commode à implémenter informatiquement) de passer par une matrice pour représenter la vue en perspective.

Définition 1.2.5 Soit $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de \mathbb{R}^3 . On appelle coordonnées homogènes de p tout quadruplet (u, v, w, t) proportionnel à $(x, y, z, 1)$. On note $p = [x; y; z; t]$.

1.2.3 Applications projectives

Définition 1.2.6 Application projective $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m =$ donnée "en coordonnées homogènes" par une matrice $(m + 1) \times (n + 1)$ non nulle.

Exemples 1.2.7 1. Applications affines.

2. Vue en perspective d'une droite.

3. Vue en perspective d'un plan.

1.2.4 Vues en perspective d'objets

Exemple 1.2.8 La vue d'un plan est affine si et seulement si le plan est orthogonal à la droite de visée. Dans ce cas, la vue est homothétique.

Exercice 1 Vérifier que, vue en perspective, une droite reste en général une droite. Quelles sont les exceptions? Montrer que, vues en perspectives, les droites parallèles à une droite D sont en général concourantes en un point appelé point de fuite de D . Quelles sont les exceptions? Où se trouvent les points de fuites des droites contenues dans un même plan?

Remarque 1.2.9 Dans une ville, les immeubles sont souvent des parallélépipèdes aux arêtes parallèles à trois directions fixées. Vues en perspective, ces trois familles d'arêtes sont portées par des droites concourantes en trois points. Si la direction de visée est horizontale, les arêtes verticales restent parallèles, et il ne reste plus que deux points de concours nettement visibles sur l'image : on parle de perspective à deux points de fuite.

Exercice 2 Soit D_+ une demi-droite, S un segment de droite. Qu'est ce qu'ils donnent, vus en perspective ? Attention, il y a de multiples cas de figure.

Remarque 1.2.10 On a décrit une vue comme la projection sur l'écran de tout l'espace. En réalité, une vue ne montre que ce qui se trouve devant l'écran. La vue en perspective réelle d'une droite est donc la projection d'une demi-droite ne coupant pas le plan parallèle à l'écran passant par la caméra : on voit un segment dont les extrémités sont le point de fuite et l'intersection de la droite avec l'écran.

Exercice 3 A quoi ressemble un cercle vu en perspective ? Tenir compte de la remarque précédente.

Exercice 4 A quoi ressemble une sphère vue en perspective ?

Fin du cours n^02

1.3 L'espace projectif

1.3.1 Définition

Soit k un corps commutatif (le plus souvent, $k = \mathbb{R}$, parfois $k = \mathbb{C}$).

Définition 1.3.1 $\mathbb{P}(V)$ est l'ensemble des droites de V . L'espace projectif de dimension n est $\mathbb{P}^n(k) := \mathbb{P}(k^{n+1})$.

Définition 1.3.2 Coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n(k)$. $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / \sim$ où on identifie deux vecteurs s'ils sont colinéaires. $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / k^*$.

Exemples 1.3.3 1. $\mathbb{P}(k^0) = \emptyset$. Par convention, sa dimension vaut -1 .

2. $\mathbb{P}(k^1) = \{pt\}$.

3. $\mathbb{P}(k^2)$ s'appelle la droite projective sur k . Un point de $\mathbb{P}^1(k)$, c'est une pente, éventuellement infinie.

4. $\mathbb{P}(k^3)$ s'appelle le plan projectif sur k .

1.3.2 Topologie

Lorsque $k = \mathbb{R}$, on souhaite raisonner par continuité, comme le faisait déjà Euclide. Même lorsque $k = \mathbb{C}$, la topologie de l'espace projectif est utile. Comme il s'agit d'espaces quotients, la notion de topologie abstraite, en l'absence de toute métrique, est commode.

Définition 1.3.4 Une topologie sur un ensemble X , c'est la donnée d'une collection \mathcal{O} de parties de X appelées ouverts, qui est stable par réunion quelconque et intersection finie. On appelle fermé une partie dont le complémentaire est ouvert. Une application $f : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (X', \mathcal{O}')$ entre espaces topologiques est continue si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte.

Exemples 1.3.5 1. Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle qu'une partie $Y \subset X$ est ouverte si pour tout $x \in Y$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x, r) \subset Y$. On obtient ainsi une topologie sur X . La notion de continuité généralise bien celle du cas métrique.

2. Soit $X = \{0, 1\}$ l'ensemble à 2 éléments. On décide que le seul ouvert de X est X (topologie grossière). C'est bien une topologie sur X .

Définition 1.3.6 Soit X un espace topologique, Y un ensemble, $f : X \rightarrow Y$ une application. La topologie induite sur Y est celle dont les ouverts sont les parties $Z \subset Y$ telles que $f^{-1}(Z)$ est un ouvert de X .

Exemple 1.3.7 Soit X un espace topologique, \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X . L'ensemble X/\mathcal{R} des classes d'équivalences vient avec une surjection canonique $X \rightarrow X/\mathcal{R}$. La topologie induite sur l'espace quotient s'appelle la topologie quotient.

On peut parler de suites convergentes dans un espace topologique. Une suite $\bar{x}_n \in X/\mathcal{R}$ converge si et seulement si il existe des représentants $x_n \in \bar{x}_n$ qui forment une suite convergente.

Définition 1.3.8 Une topologie sur X est dite séparée si pour tous $x \neq x' \in X$, il existe des ouverts disjoints O et O' tels que $x \in O$ et $x' \in O'$.

- Exemples 1.3.9** 1. Un espace métrique est automatiquement séparé.
2. Un ensemble ayant au moins 2 éléments, muni de la topologie grossière n'est pas séparé.

1.3.3 Sous-variétés linéaires

Définition 1.3.10 Une sous-variété linéaire de dimension m de $\mathbb{P}(V)$, c'est l'image d'un sous-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension $m + 1$. D'où des points, droites, des plans, des hyperplans. La codimension de $Q \subset \mathbb{P}^d$, c'est $d - \dim(Q)$.

Théorème 1 Dans \mathbb{P}^2 , deux droites distinctes se coupent en un point exactement. Plus généralement, dans \mathbb{P}^d , l'intersection de deux sous-variétés linéaires de codimensions c et c' est une sous-variété linéaire de codimension $\leq c + c'$.

Remarque 1.3.11 r points d'un espace projectif sont toujours contenus dans une plus petite sous-variété linéaire. On dit qu'ils l'engendrent. Sa dimension est $\leq r - 1$.

Définition 1.3.12 r points d'un espace projectif sont projectivement indépendants (ou forment un système projectivement libre) s'ils ne sont contenus dans aucune sous-variété linéaire de dimension $< r - 1$.

Exemple 1.3.13 Deux points sont projectivement indépendants si et seulement si ils sont distincts. Trois points sont projectivement indépendants si et seulement si ils ne sont pas alignés.

Plus généralement, des points en position générale sont projectivement indépendants, au sens suivant : être en position non générale signifie satisfaire une relation linéaire.

1.3.4 Repères projectifs

Choisir une base de V donne dans $\mathbb{P}(V)$ des coordonnées homogènes. Une autre base, même si elle se projette sur les mêmes points de $\mathbb{P}(V)$, ne donne pas les mêmes coordonnées homogènes. Il faut donc se donner un point de plus pour fabriquer des coordonnées homogènes uniques.

Définition 1.3.14 Soit V un espace vectoriel de dimension $n + 1$. $n + 2$ points de $\mathbb{P}(V)$ forment un repère projectif si tout sous-ensemble de $n + 1$ points est projectivement libre.

Exemple 1.3.15 Dans une droite projective, trois points forment un repère projectif si et seulement si ils sont deux à deux distincts.

Théorème 2 Soit (P_0, \dots, P_{n+1}) un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$.

1. Il existe des vecteurs $e_0 \in p_0, \dots, e_{n+1} \in p_{n+1}$ tels que $e_{n+1} = e_0 + \dots + e_n$. Ils sont uniques à un scalaire commun près.
2. Pour tout $p \in \mathbb{P}(V)$, il existe des coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_n]$ uniques à un scalaire commun près, telles que p soit la droite vectorielle de vecteur directeur $x_0 e_0 + \dots + x_n e_n$.

Exercice 5 Comment les coordonnées homogènes changent-elles quand on permute les points p_i ?

1.3.5 Complétion projective d'un espace affine

Le passage des coordonnées X au vecteur $\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ puis aux coordonnées homogènes plonge un espace affine dans un espace projectif. On peut exprimer cette construction de façon indépendante de tout choix de coordonnées.

Théorème 3 Soit E un espace affine de dimension n , modelé sur un espace vectoriel T . On plonge E comme hyperplan d'équation $\ell(x) = 1$ dans l'espace vectoriel $V = T \times k$, où ℓ est la projection sur le premier facteur, par $x \mapsto (x, 1)$. Puis on compose avec la projection sur $\mathbb{P}(V)$. Le complémentaire de l'image de E est $H = p((T \setminus \{0\}) \times \{0\})$, c'est un hyperplan projectif, naturellement isomorphe à $\mathbb{P}(T)$.

Inversement, étant donné un espace vectoriel V et une forme linéaire non nulle $\ell : V \rightarrow k$, le complémentaire E de l'hyperplan $H = p(\ell^{-1}(0))$ est naturellement un espace affine modelé sur $W = \ell^{-1}(0)$.

Définition 1.3.16 On appelle H l'hyperplan à l'infini de l'espace affine E .

Exemples 1.3.17 1. Si D est une droite affine, son hyperplan à l'infini est réduit à un point, le point à l'infini de D .

2. Si E est un espace affine d'hyperplan à l'infini H , à chaque droite affine $D \subset E$ est associé un point $F_D \subset H$, son point de fuite. Deux droites ont même point de fuite si et seulement si elles sont parallèles.

3. Plus généralement, si $E' \subset E$ est un sous-espace affine, son hyperplan à l'infini s'envoie dans l'hyperplan à l'infini H de E , deux sous-espaces donnent la même sous-variété linéaire de H si et seulement ils sont parallèles.

Remarque 1.3.18 Soit E un plan affine, D et D' deux droites affines. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \subset \mathcal{E}$ les sous-variétés linéaires correspondantes dans la complétion projective de E . Alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est

1. ou bien un point de E , si D et D' sont sécantes,
2. ou bien le point de fuite commun de D et D' , si elles sont parallèles.

 Fin du cours n⁰³

1.3.6 Applications projectives

Définition 1.3.19 Soient V et V' des espaces vectoriels. Toute application linéaire non nulle $M : V \rightarrow V'$ définit une application $f_M : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ définie sur le complémentaire de la sous-variété linéaire $\mathbb{P}(\ker M)$, appelée application projective associée.

Exemple 1.3.20 Toute application affine $E \rightarrow E'$ se prolonge en une application projective entre complétions projectives, unique à translation près. L'action sur les hyperplans à l'infini $\mathbb{P}(T) \rightarrow \mathbb{P}(T')$ est induite par la partie linéaire, qui envoie T dans T' .

Exemple 1.3.21 Soient $A, B \subset \mathbb{P}(V)$ des sous-variétés linéaires disjointes, telles que $\dim A = \text{codim} B - 1$. Si $p \in \mathbb{P}(V) \setminus A$, il existe une unique droite projective passant par p et coupant à la fois A et B , en des points $f(p)$ et $g(p)$. On appelle f la projection sur A de centre B et g la projection sur B de centre A .

Si A est de dimension 0, on retrouve la prise de vue du cours sur la perspective. Si A est contenu dans l'hyperplan à l'infini, la projection sur B de centre A est affine, c'est la projection sur la partie à distance finie de B , parallèlement au sous-espace vectoriel dont la direction est A .

Proposition 1.3.22 Deux applications linéaires définissent la même application projective si et seulement si elles sont proportionnelles.

Corollaire 1.3.23 *Le groupe $PGL(V)$ des bijections projectives de $\mathbb{P}(V)$ est isomorphe au quotient du groupe linéaire $Gl(V)$ par le sous-groupe k^* des multiples de l'identité, $PGL(V) \simeq Gl(V)/k^*$.*

Proposition 1.3.24 *Soit (p_0, \dots, p_{n+1}) un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$. Soient q_0, \dots, q_{n+1} $n + 2$ points de $\mathbb{P}(V')$ qui engendrent une sous-variété linéaire W' de dimension $m' \leq n$. Alors il existe une unique application projective $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ envoyant les p_j sur les q_j . De plus,*

1. *f est définie partout (resp. injective) si et seulement si $m' = n$.*
2. *f est surjective si et seulement si $m' = m$, i.e. les points q_j engendrent $\mathbb{P}(V')$.*
3. *f est bijective si et seulement si $m' = m = n$, i.e. (q_0, \dots, q_{n+1}) est un repère projectif de $\mathbb{P}(V')$.*

Exercice 6 *Cas où $n = 1$. Une application projective non constante d'une droite projective est automatiquement définie partout, et c'est une bijection sur une droite de l'espace d'arrivée. Ce n'est pas le cas pour la vue en perspective d'une droite. Expliquer ce qui se passe.*

Définition 1.3.25 *Une action d'un groupe G sur un ensemble E est transitive s'il n'y a qu'une orbite, i.e. pour tous $x, x' \in E$, il existe $g \in G$ tel que $gx = x'$. Si, de plus, ce g est unique, on dit que l'action est simplement transitive.*

Corollaire 1.3.26 *Le groupe projectif $PGL(V)$ agit simplement transitivement sur les repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.*

1.3.7 Le groupe $PGL(2, k)$

Définition 1.3.27 *On note $PGL(n, k) = PGL(k^n)$.*

Lorsque $n = 2$, $PGL(2, k)$ agit sur la droite projective. Sur la droite affine $p(k \times \{1\}) \subset \mathbb{P}^1(k)$, l'action est par *homographies*

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x \right) \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Le point $x = -\frac{d}{c}$ est envoyé sur le point $\infty = [1 : 0]$. Celui-ci est envoyé sur $\frac{a}{c}$ si $c \neq 0$, sur lui-même sinon.

Au paragraphe précédent, on a démontré le résultat suivant.

Corollaire 1.3.28 *Le groupe $PGL(2, k) = PGL(k^2)$ agit simplement transitivement sur les triplets de points distincts de la droite projective $P^1(k)$.*

Définition 1.3.29 *Soient a, b, c, d 4 points de $\mathbb{P}^1(k)$, avec a, b, c distincts. On note $[a, b, c, d]$ le point de \mathbb{P}^1 , image de d par l'unique homographie h telle que*

$$h : a \mapsto \infty, \quad b \mapsto 0, \quad c \mapsto 1.$$

Proposition 1.3.30 1. $[a, b, c, d] = \frac{(d-b)/(d-a)}{(c-b)/(c-a)}$.

2. $[a, b, c, d]$ est fonction homographique de chacun des arguments séparément.
3. Si h est une homographie, alors $[a, b, c, d] = [h(a), h(b), h(c), h(d)]$.
4. Réciproquement, 4 points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les images de a, b, c, d , par une même homographie si et seulement si $[a, b, c, d] = [\alpha, \beta, \gamma, \delta]$.
5. Si d a pour coordonnées homogènes $[x : 1]$ dans le repère projectif (a, b, c) , alors $x = [a, b, c, d]$.

Exercice 7 *Comment le birapport est-il transformé quand on permute les points a, b, c, d ?*

Définition 1.3.31 Soit D une droite projective. Soient a, b, c, d 4 points de D , avec a, b, c distincts. On note $[a, b, c, d]$ le point de $\mathbb{P}^1(k)$, image de d par l'unique bijection projective $h : D \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ telle que

$$h : a \mapsto \infty, \quad b \mapsto 0, \quad c \mapsto 1.$$

Par définition, le birapport est invariant par bijection projective.

Fin du cours n^04

1.3.8 Sous-groupes de $PGL(n, k)$

Proposition 1.3.32 Soit E un espace affine modelé sur un k -espace vectoriel T , $V = E \oplus k$.

1. Soit A le sous-groupe de $PGL(V)$ qui laisse stable l'hyperplan à l'infini. Alors A est isomorphe au groupe affine de E .
2. Soit H le sous-groupe qui fixe l'hyperplan à l'infini point par point. Alors H est isomorphe au groupe des homothéties-translations de E .
3. On suppose que $k = \mathbb{R}$ et que E est muni d'une structure euclidienne. Alors l'hyperplan à l'infini complexifié $\mathbb{P}(T \otimes \mathbb{C})$ porte une quadrique non dégénérée. Le sous-groupe S de A qui laisse stable cette quadrique est exactement le groupe des similitudes de E .
4. Si $\dim E = 2$, cette quadrique est réduite à deux points appelés points cycliques. En choisir un des deux revient à choisir une orientation de E . Le sous-groupe S^+ de S qui fixe chacun des points cycliques est exactement le groupe des similitudes directes de E .

Exercice 8 Soient D, D' deux droites du plan euclidien, de points de fuite f et f' . Montrer que l'angle θ entre D et D' s'exprime au moyen du birapport des points f, f', c, c' où c et c' sont les points cycliques.

Solution. $e^{-2i\theta} = [f, f', c, c']$.

1.3.9 Dualité

Proposition 1.3.33 L'ensemble des hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(V)$, c'est $\mathbb{P}(V^*)$. Une fois fixé un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$, un hyperplan est donné par une équation linéaire en coordonnées homogènes. Les coefficients de cette équation constituent des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V^*)$.

Exercice 9 Soit Δ une droite d'un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Montrer que l'application $\mathbb{P}(V^*) \rightarrow \Delta$, $D \mapsto D \cap \Delta$ est projective.

Définition 1.3.34 A une droite de $\mathbb{P}(V^*)$ correspond une famille à un paramètre d'hyperplans de $\mathbb{P}(V)$ appelée faisceau d'hyperplans.

Proposition 1.3.35 Un faisceau, c'est l'ensemble des hyperplans qui contiennent une même sous-variété linéaire de codimension 2.

Exemple 1.3.36 Un faisceau de droites dans le plan, c'est l'ensemble des droites passant par un point.

Moralité : en géométrie projective plane, points et droites s'échangent. A chaque énoncé concernant des droites correspond un énoncé dual concernant des points.

Exemple 1.3.37 4 droites concourantes du plan possèdent un birapport. Si, dans un repère, les trois premières ont pour pentes respectives $\infty, 0$ et 1 , alors le birapport est la pente de la quatrième.

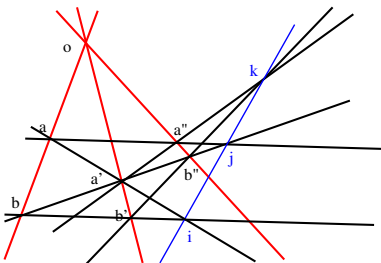
Exercice 10 Montrer que le birapport de 4 droites concourantes est égal au birapport de leurs points d'intersection avec une cinquième droite qui ne leur est pas concourante.

Fin du cours n^05

1.4 Géométrie projective : propriétés linéaires

1.4.1 Le théorème de Desargues

Théorème 4 G. Desargues (1639). *Dans un espace projectif, soient D, D', D'' trois droites distinctes et concourantes en o . On choisit sur chacune deux points distincts a et b (resp. a' et b' , resp. a'' et b'') et distincts de o . Alors les points $i = aa' \cap bb'$, $j = aa'' \cap bb''$ et $k = a'a'' \cap b'b''$ sont alignés.*



Remarque 1.4.1 1. *Les hypothèses garantissent que les droites aa' et bb' sont distinctes, et se coupent donc en un point. De même pour les deux autres paires de droites.*

2. *Tout se passe dans la sous-variété linéaire engendrée par les droites D, D' et D'' , qui est de dimension au plus égale à 3. Il s'agit donc d'un résultat de géométrie dans l'espace (de dimension 3) ou dans le plan. Paradoxalement, la preuve est plus facile dans l'espace que dans le plan.*

Preuve.

1. **Cas où les droites D, D' et D'' engendrent une sous-variété linéaire de dimension 3.**

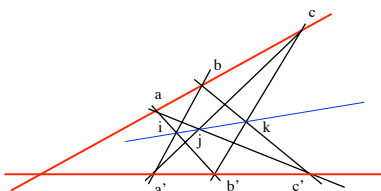
Dans ce cas, les points a, a' et a'' sont projectivement indépendants et engendrent un plan Π . De même, b, b' et b'' engendrent un plan Π' . Ces plans sont distincts. Leur intersection est une droite, qui contient nécessairement les trois points i, j et k .

2. **Cas où les droites D, D' et D'' engendrent une sous-variété linéaire de dimension 2.**

On plonge cette sous-variété P dans un espace projectif de dimension 3. On remplace D'' par une droite Δ'' passant par o mais non contenue dans P . On applique le théorème de Desargues à D, D' et Δ'' , cela donne trois points i, j'' et k'' alignés sur une droite Δ' . On choisit un centre de projection c dans le plan engendré par D'' et Δ'' , mais hors des droites Δ', D'' et Δ'' . La projection de centre o sur le plan P envoie j'' et k'' sur j et k , donc les points i, j et k sont alignés le long de la projection de Δ' . ■

1.4.2 Le théorème de Pappus

Théorème 5 Pappus (4e siècle de notre ère). *Dans un plan projectif, soient D et D' deux droites distinctes et concourantes en o . On choisit sur chacune trois points distincts a, b et c (resp. a', b' et c') et distincts de o . Alors les points $i = ab' \cap ba'$, $j = ac' \cap ca'$ et $k = bc' \cap cb'$ sont alignés.*



Remarque 1.4.2 *Les hypothèses garantissent que les droites ab' et ba' sont distinctes, et se coupent donc en un point. De même pour les deux autres paires de droites.*

Preuve.

1. Cas où les points i , c et c' ne sont pas alignés.

Dans ce cas, c , c' , i et o forment un repère projectif. Soit α (resp. β) la pente de la droite ab' (resp. ba'). Alors

$$c = [1 : 0 : 0], \quad c' = [0 : 1 : 0], \quad i = [0 : 0 : 1], \quad o = [1 : 1 : 1].$$

En coordonnées affines,

$$a = (\alpha^{-1}, 1), \quad b = (\beta^{-1}, 1), \quad a' = (1, \beta), \quad b' = (1, \alpha).$$

Enfin

$$j = ac' \cap ca' = (\alpha, \beta^{-1}), \quad k = bc' \cap cb' = (\beta, \alpha^{-1}).$$

Si le corps de base est commutatif,

$$\beta\alpha^{-1}j = (\beta, \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) = (\beta, \alpha^{-1}) = k,$$

donc les points i , j et k sont sur la droite d'équation $x_0 - \alpha\beta x_1 = 0$.

2. Cas où les points i , c et c' sont alignés.

Choisissons un repère projectif commençant par $c = [1 : 0 : 0]$, $c' = [0 : 1 : 0]$ et $o = [0 : 0 : 1]$. La droite oc (resp. oc') a pour équation $y = 0$ (resp. $x = 0$), donc $a = [\alpha : 0 : 1]$, $b = [\beta : 0 : 1]$, $a' = [0 : \alpha' : 1]$, $b' = [0 : \beta' : 1]$. $i \in cc'$ est sur la droite à l'infini, donc, comme droites affines, ab' et ba' sont parallèles. Par conséquent, $\alpha\alpha' = \beta\beta'$. Alors

$$i = [\alpha : -\beta' : 0], \quad j = [\alpha : \alpha' : 1], \quad k = [\beta : \beta' : 1]$$

sont sur la droite d'équation $\beta'x + \alpha y - \beta'(\alpha + \beta)z = 0$. ■

Remarque 1.4.3 *La deuxième cas ne se produit pas lorsque $k = \mathbb{R}$, mais se produit lorsque $k = \mathbb{C}$.*

1.4.3 Le théorème fondamental de la géométrie projective

Question. Les bijections projectives sont-elles les seules bijections entre espaces projectifs qui préservent l'alignement des points? Pas exactement.

Exemple 1.4.4 *La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ induit une bijection de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui préserve l'alignement.*

En effet, elle se relève en une bijection antilinéaire de \mathbb{C}^{n+1} qui préserve les sous-espaces vectoriels complexes.

Théorème 6 *Soit k un corps, soit $n \geq 2$. Soit $f : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$ une bijection qui envoie les triplets de points alignés sur des triplets de points alignés. Alors il existe un unique automorphisme σ du corps k tel que f se relève en une bijection σ -antilinéaire de k^{n+1} , i.e. un automorphisme F du groupe additif tel que, pour tout $\lambda \in k$,*

$$F(\lambda v) = \sigma(\lambda)F(v).$$

1.4.4 Géométrie d'incidence

Définition 1.4.5 Une géométrie d'incidence, c'est la donnée d'un ensemble \mathbb{P} muni d'une famille non vide de parties non vides appelées droites, sujette aux axiomes suivants.

1. Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.
2. Deux droites distinctes ont un point commun et un seul.
3. \mathbb{P} n'est pas la réunion de deux droites.

Question. Les plans projectifs sont-ils les seules géométries d'incidence? Pas exactement.

Théorème 7 Soit \mathbb{P} une géométrie d'incidence satisfaisant au théorème de Desargues. Alors il existe un corps k tel que \mathbb{P} soit isomorphe à $\mathbb{P}^2(k)$.

Remarque 1.4.6 1. Le corps k n'est pas nécessairement commutatif. Il l'est si et seulement si le théorème de Pappus est vrai dans \mathbb{P} .

2. Il existe des géométries d'incidences non arguésiennes, i.e. qui ne satisfont pas au théorème de Desargues. Par exemple, le plan projectif associé à l'algèbre (non associative) des octonions ou octaves de Cayley.

1.5 Un peu de géométrie quadratique

Dans toute cette section, le corps de base est $k = \mathbb{C}$.

1.5.1 Côniques et quadriques

Définition 1.5.1 Une quadrique de $\mathbb{P}(V)$, c'est la projection du lieu des zéros d'une forme quadratique de V . La quadrique est dite non dégénérée si la forme quadratique l'est. En dimension 2, on parle de cône.

Proposition 1.5.2 Soit \mathcal{Q} la quadrique associée à une forme quadratique non dégénérée q . A multiplication par un scalaire non nul près, q est uniquement déterminée par \mathcal{Q} . On peut donc parler du rang d'une quadrique, $\text{rang}(\mathcal{Q}) = \text{rang}(q)$.

Proposition 1.5.3 En dimension 1, une quadrique dégénérée, c'est un point.

- En dimension 2, une cône dégénérée est
- ou bien la réunion de deux droites (rang 2),
 - ou bien une droite de multiplicité 2 (rang 1).

Proposition 1.5.4 Le groupe $PGL(V)$ agit transitivement sur l'ensemble des quadriques non dégénérées de $\mathbb{P}(V)$.

1.5.2 Plan tangent

Définition 1.5.5 Soit \mathcal{Q} une quadrique non dégénérée. L'hyperplan projectif tangent en p à \mathcal{Q} est $T_p\mathcal{Q} = \mathbb{P}(p^\perp)$. Il satisfait

$$\text{rang}(\mathcal{Q} \cap T_p\mathcal{Q}) = \text{rang}(\mathcal{Q}) - 1.$$

On verra plus tard que cette notion coïncide avec la notion usuelle de tangence.

Preuve. Comme q est non dégénérée, $\ker(q_{p^\perp}) = (p^\perp)^\perp = p$, donc $\text{rang}(q_{p^\perp}) = \text{rang}(q) - 1$. ■

Proposition 1.5.6 Soit \mathcal{Q} une quadrique non dégénérée. L'équation homogène de son hyperplan tangent en p s'écrit

$$\frac{\partial q}{\partial x_0}(p_0, \dots, p_n)X_0 + \dots + \frac{\partial q}{\partial x_n}(p_0, \dots, p_n)X_n = 0.$$

Autrement dit, les coordonnées homogènes du plan tangent $T_p\mathcal{Q} \in \mathbb{P}(V^*)$ sont les dérivées partielles de q en un $v \in p \subset V$.

Preuve. Fixons une base de V . Soit Q la matrice de q , soit $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ la colonne des compo-

santes d'un vecteur directeur p de la droite p . Soit $v \in V$, de composantes $X = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Alors

$q(v) = X^\top QX$, $q(p, v) = p^\top QX$. L'hyperplan tangent est le projectivisé de p^\perp , dont l'équation est $p^\top QX = 0$. Or $d_p q = 2p^\top QdX$. ■

Proposition 1.5.7 *Soit $\mathbb{P}(V)$ un plan projectif, \mathcal{C} une cône non dégénérée. Une droite D est tangente à \mathcal{C} si et seulement si la quadrique $\mathcal{C} \cap D$ de D est dégénérée.*

La tangente $T_p \mathcal{C}$ coupant \mathcal{C} en un seul point, $\mathcal{C} \cap T_p \mathcal{C}$ est dégénérée. Réciproquement, soit $D = \mathbb{P}(P)$. Supposons $q|_P$ dégénérée. Comme $\dim P > \frac{1}{2} \dim V$, P ne peut être totalement isotrope, donc le noyau $p = \ker(q|_P)$ est de dimension 1, et $P = p^\perp$, donc $D = T_p \mathcal{C}$. ■

Fin du cours n⁰6

Exemple 1.5.8 *Considérons la cône affine C d'équation $2x^2 + xy - y^2 + 2x + y - 1$. Ce sont les points à distance finie de la cône projective \mathcal{C} d'équation homogène $2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_0x_1 + x_1x_2 + 2x_2x_0 = 0$. Sa tangente en $p = [x_0 : x_1 : x_2]$ est la droite d'équation homogène $(4x_0 + x_1 + 2x_2)X_0 + (x_0 - 2x_1 + x_2)X_1 + (2x_0 + x_1 - 2x_2)X_2 = 0$. Si $p = [1 : -1 : 1]$, cela donne $5X_0 + 4X_1 - X_2 = 0$. Ses points à distance finie forment la droite affine d'équation $5x + 4y = 1$, qui est bien la tangente à C en $p = (1, -1)$.*

Exemples 1.5.9 1. *En dimension 2, une droite coupe une cône \mathcal{C} non dégénérée en 2 points, sauf si elle lui est tangente.*
2. *En dimension 3, par tout point d'une quadrique non dégénérée \mathcal{Q} passent 2 droites contenues dans \mathcal{Q} .*

Remarque 1.5.10 *L'ensemble des hyperplans tangents à une même quadrique \mathcal{Q} est une quadrique de l'espace projectif dual $\mathbb{P}(V^*)$.*

En effet, c'est l'image de \mathcal{Q} par la bijection projective $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ induite par la différentielle de q , qui est un isomorphisme $V \rightarrow V^*$.

1.5.3 Polarité

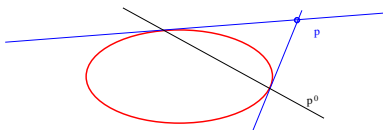
Définition 1.5.11 *Fixons une quadrique non dégénérée $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(V)$. A tout point $p \in \mathbb{P}(V)$ correspond son hyperplan polaire p^0 , projection de l'hyperplan vectoriel $p^\perp \subset V$. De même, à tout hyperplan correspond un point polaire.*

Proposition 1.5.12 *Fixons une cône non dégénérée $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(V)$. Soit p un point de $\mathbb{P}(V)$.*

- Si $p \in \mathcal{C}$, p^0 est la tangente à \mathcal{C} en p .
- Si $p \notin \mathcal{C}$, p^0 coupe \mathcal{C} en deux points qui sont les points de contact des tangentes à \mathcal{C} passant par p .

Preuve. Le cas des points de \mathcal{C} résulte de la définition.

Si $p \notin \mathcal{C}$, $V = \mathbb{C}p \oplus p^\perp$ est une somme orthogonale, la restriction de q à p^\perp est non dégénérée, donc la polaire $p^0 = \mathbb{P}(p^\perp)$ coupe \mathcal{Q} en deux points distincts u et v . Comme $u \subset p^\perp$ et u est isotrope, u est dans le noyau de la restriction de q au plan P engendré par p et u . Celle-ci est dégénérée, donc pu est tangente à \mathcal{Q} . ■



1.5.4 Paramétrisation unicursale des cônes

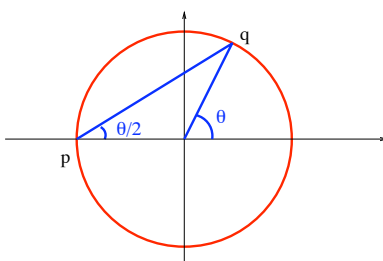
Proposition 1.5.13 Soit C une conique non dégénérée. Soit $p \in C$. Soit \mathcal{F} le faisceau des droites passant par p . L'application $\mathcal{F} \rightarrow C$, $D \mapsto q$ où $D \cap C = \{p, q\}$ est une bijection rationnelle, i.e. donnée en coordonnées homogènes par des fractions rationnelles qui ne s'annulent pas simultanément.

Définition 1.5.14 On l'appelle paramétrisation unicursale de C .

Exemple 1.5.15 Soit C le cercle unité d'équation affine $x^2 + y^2 = 1$ et $p = (-1, 0)$. Une droite passant par p est représentée par la pente t . La paramétrisation obtenue est donnée en coordonnées affines par $t \mapsto (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$, ou bien, en coordonnées homogènes, par

$$[t_0 : t_1] \mapsto [2t_0t_1, t_1^2 - t_0^2, t_1^2 + t_0^2].$$

Dans la formule affine, on reconnaît l'expression de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.



Proposition 1.5.16 Deux paramétrisations unicursales d'une même conique non dégénérée diffèrent par une homographie de la droite projective. Par conséquent, on peut parler du birapport de 4 points d'une conique, ainsi que du birapport de 4 tangentes.

Preuve. Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' les faisceaux des droites passant respectivement par o et $o' \in C$. Il s'agit de déterminer l'application $b : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$, $D \mapsto D' = o'p$ où $D \cap C = \{o, p\}$. Soit $u = T_oC \cap T_{o'}C$, soit v un point de C distinct de o et o' . Dans le repère projectif (u, o', o, v) , l'équation affine de C est $y = x^2$. En effet, comme C coupe la droite à l'infini en un point seulement, les points à distance finie de C forment une parabole, celle-ci est tangente à l'axe ox en $o = (0, 0)$ et passe par $v = (1, 1)$. La droite $D_t \in \mathcal{F}$ de pente t coupe C en o et en $p = (t, t^2)$. La droite $b(D_t) = o'p$ a pour équation $\{x = t\}$. La correspondance b est l'identité dans des paramétrisation homographiques de \mathcal{F} et \mathcal{F}' , c'est donc une homographie.

On peut aussi montrer qu'une bijection rationnelle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est automatiquement une homographie. On donnera au paragraphe suivant une troisième preuve (encore plus abstraite) de ce fait. ■

Exercice 11 Soient a, b, c et d 4 points d'une conique non dégénérée C . Montrer que le birapport des tangentes est égal à celui des points,

$$[T_aC, T_bC, T_cC, T_dC] = [a, b, c, d].$$

Remarque 1.5.17 Lien avec les formules trigo. Lien avec les triangles rectangles à côtés entiers.

1.5.5 Le groupe $PO(3, \mathbb{C})$

Définition 1.5.18 On note $PO(3, \mathbb{C})$ le sous-groupe de $PGL(3, \mathbb{C})$ qui laisse stable la cône non dégénérée d'équation homogène $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Pour en savoir plus sur ce groupe, on va étudier une cône naturelle, c'est l'ensemble des quadriques dégénérées de la droite projective.

Remarque 1.5.19 Soit $\mathbb{P}(V)$ une droite projective. L'espace des quadriques de $\mathbb{P}(V)$ est un plan projectif $\mathbb{P}(S^2V^*)$, et les quadriques dégénérées forment une cône non dégénérée $\mathcal{QD} \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$.

En effet, l'espace S^2V^* des formes bilinéaires symétriques sur V est de dimension 2, le déterminant d'une matrice symétrique 2×2 est une forme quadratique non dégénérée. A une constante près, elle est invariante par chaque élément du groupe linéaire de V .

Corollaire 1.5.20 Le stabilisateur d'une cône non dégénérée \mathcal{C} agit transitivement sur le complémentaire de \mathcal{C} ainsi que sur l'ensemble des droites non tangentes à \mathcal{C} .

Preuve. Pour la cône naturelle \mathcal{QD} , le complémentaire est l'ensemble des quadriques non dégénérées, sur lequel l'image du groupe $PGL(V)$ dans $PGL(S^2V^*)$ agit déjà transitivement. ■

Remarque 1.5.21 Dans une droite projective $\mathbb{P}(V)$, une quadrique dégénérée, c'est un point de $\mathbb{P}(V)$. La bijection obtenue $b : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathcal{QD}$ préserve le birapport.

En fait, b est une paramétrisation unicursale de \mathcal{QD} . Fixons un point $o \in \mathbb{P}(V)$, ainsi qu'un vecteur directeur $z \in o$. Etant donné $v \in V$, la forme linéaire sur S^2V^* définie par $q \mapsto q(z, v)$ dépend linéairement de q . Cela donne une application linéaire injective $V \rightarrow (S^2V^*)^*$, donc une application projective $\iota : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}((S^2V^*)^*)$. Cette application est une paramétrisation projective du faisceau \mathcal{F} des droites de l'espace des quadriques qui passent par le point $b(o)$. En effet, $b(o)$ est représenté par les formes quadratiques q dont le noyau est o , ces formes satisfont $q(z, v) = 0$ pour tout v . Pour la même raison, la droite $\iota(p)$ coupe \mathcal{QD} en $b(p)$.

Calculatoirement, une quadrique affine de la droite, c'est le lieu des zéros d'un trinôme $x \mapsto x^2 + 2bx + c$. A chaque point a de la droite affine correspond la quadrique dégénérée $b(a) : x \mapsto (x - a)^2$. La droite $b(0)b(a)$ (dans l'espace affine des quadriques affines), est paramétrée par $t \mapsto (1 - t)b(0) + tb(a) = x \mapsto x^2 - 2tax + ta^2$, autrement dit, $b = -ta$, $c = ta^2$. Elle est donnée par l'équation affine $c = -ab$, autrement dit, sa pente est $-a$, c'est bien une fonction homographique de a .

Corollaire 1.5.22 Toute bijection d'une cône non dégénérée qui préserve le birapport s'étend de façon unique en une bijection projective du plan projectif.

Preuve. Pour la cône naturelle \mathcal{QD} , une bijection projective est réalisée par un élément de $PGL(V)$, qui agit déjà sur $\mathbb{P}(S^2V^*)$. L'unicité vient du fait que 4 points distincts d'une cône forment un repère projectif. ■

Remarque 1.5.23 Soit $PO(\mathcal{QD})$ le sous-groupe du groupe projectif $PGL(S^2V^*)$ qui laisse stable la quadrique \mathcal{QD} . Alors $PO(\mathcal{QD})$ est isomorphe à $PGL(V)$.

Corollaire 1.5.24 Les groupes $PGL(2, \mathbb{C})$ et $PO(3, \mathbb{C})$ sont isomorphes.

Remarque 1.5.25 Que se passe-t-il si on remplace \mathbb{C} par \mathbb{R} ?

1.5.6 Division harmonique

Définition 1.5.26 On appelle involution une homographie h d'une droite projective telle que $h \circ h = id$ mais $h \neq id$.

Exemple 1.5.27 Une quadrique non dégénérée d'une droite projective, c'est une paire de points distincts $\mathcal{Q} = \{a, b\}$. La polarité $p \mapsto p^0$ par rapport à \mathcal{Q} est une involution. Elle fixe a et b .

Proposition 1.5.28 Toute involution de la droite projective fixe deux points distincts a et b , et coïncide avec la polarité par rapport à la quadrique $\mathcal{Q} = \{a, b\}$.

Preuve. Soit i une involution de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors i se relève en un endomorphisme I de \mathbb{C}^2 tel que I^2 est un multiple de l'identité. Par conséquent, I est diagonalisable. Comme I n'est pas un multiple de l'identité, ses valeurs propres sont distinctes, donc i fixe deux points distincts a et b . Comme $i(i(p)) = p$, $[a, b, p, i(p)] = [a, b, i(p), p]$, donc $[a, b, p, i(p)]^2 = 1$.

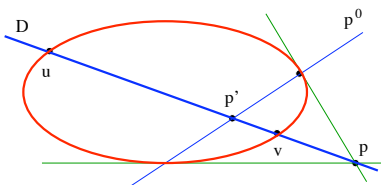
1. Ou bien $[u, v, p, i(p)] = 1$, i.e. $i(p) = p$. Alors i est l'identité, contradiction.
2. Ou bien $[a, b, p, i(p)] = -1$, ce qui détermine i uniquement. ■

Cette preuve suggère la définition suivante.

Définition 1.5.29 On dit que 4 points a, b, c et d d'une droite projective forment une division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$. Dans ce cas, on dit aussi que c et d sont conjugués harmoniques par rapport à la paire $\{a, b\}$.

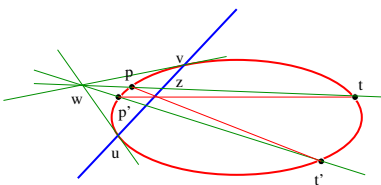
- Remarque 1.5.30**
1. Si (a, b, c, d) forment une division harmonique d'une droite projective, il en est de même de (a, b, d, c) , (b, a, c, d) et (c, d, a, b) .
 2. 4 points (a, b, c, d) d'une droite projective forment une division harmonique si et seulement si d est le polaire de c par rapport à la quadrique $\mathcal{Q} = \{a, b\}$.
 3. Dans la projectivisée d'une droite affine, le conjugué harmonique du point à l'infini par rapport à la paire $\{a, b\}$ est le milieu de $\{a, b\}$.

Exemple 1.5.31 Soit \mathcal{C} une cône non dégénérée du plan. Soit D une droite qui coupe \mathcal{C} en deux points distincts u et v . Pour tout $p \in D$, le conjugué harmonique p' de p par rapport à $\{u, v\}$ le long de D est $D \cap p^0$.



Exercice 12 Soit \mathcal{C} une cône non dégénérée du plan. Soient u et v deux points distincts de \mathcal{C} , soit w le point polaire de la droite uv .

1. Pour tout $p \in \mathcal{C}$, $t = pw \cap \mathcal{C}$ est conjugué harmonique de p par rapport à $\{u, v\}$ le long de \mathcal{C} .
2. Soient $p, p' \in \mathcal{C}$, t, t' leurs conjugués harmoniques par rapport à $\{u, v\}$ le long de \mathcal{C} . Alors les droites tp' et $t'p$ se coupent en un point de la droite uv .



Solution. Soit $z = uv \cap wp$, $t = wp \cap \mathcal{C}$. Alors (w, p, z, t) est une division harmonique de la droite wp . Par conséquent, (vw, vp, vz, vt) est une division harmonique du faisceau des droites passant par v . Ces droites coupent donc la cône \mathcal{C} en une division harmonique (v, p, u, t) . Par conséquent, $t = i(p)$ où i est l'involution homographique qui fixe u et v . Comme toute homographie de \mathcal{C} , i se prolonge en une bijection projective du plan qui préserve \mathcal{C} . Celle-ci fixe chaque point de la droite uv donc $pt' \cap uv = i(pt' \cap uv) = tp' \cap uv$. ■

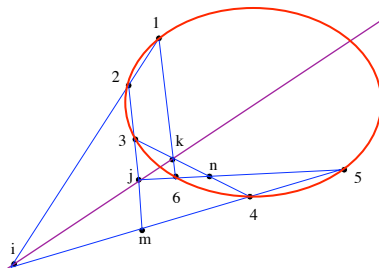
1.5.7 L'hexagramme mystique de Pascal

Remarque 1.5.32 5 points du plan projectif sont en position générale si trois d'entre eux ne sont jamais alignés. Par 5 points en position générale passe une et une seule cône non dégénérée. Et par 6 points ?

Lemme 1.5.33 Soient, sur deux droites distinctes D et D' , sécantes en a , des points distincts b, c et d (resp. b', c' et d'), supposés tous distincts de a . Alors les droites bb', cc' et dd' sont concourantes si et seulement si $[a, b, c, d] = [a, b', c', d']$.

Preuve. Si les droites bb', cc' et dd' sont concourantes en z , la projection de centre z de D sur D' est une bijection projective, donc elle préserve le birapport. Réciproquement, soit $z = bb' \cap cc'$, soit $d'' = D' \cap dz$. Alors $[a, b, c, d] = [a, b', c', d'']$. Si on suppose que $[a, b, c, d] = [a, b', c', d']$, alors $[a', b', c', d''] = [a, b', c', d']$, ce qui entraîne que $d'' = d'$. Autrement dit, bb', cc' et dd' sont concourantes. ■

Théorème 8 B. Pascal (1640). Les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une cône non dégénérée se coupent suivant des points alignés. Autrement dit, si $1, 2, \dots, 5, 6$ sont des points distincts sur la cône, alors les points $i = 12 \cap 45$, $j = 23 \cap 56$ et $k = 34 \cap 61$ sont alignés. Réciproquement, tout hexagone dont les côtés opposés se coupent en des points alignés est inscrit dans une cône non dégénérée.



Preuve. Soient $m = 23 \cap 45$ et $n = 34 \cap 56$. Alors

$$[i, m, 4, 5] = [21, 23, 24, 25] = [1, 3, 4, 5] = [61, 63, 64, 65] = [k, 3, 4, n],$$

où le birapport du milieu est calculé sur la cône. D'après le lemme, cela entraîne que les droites $ik, m3 = 23$ et $5n = 56$ sont concourantes. Autrement dit, le point $j = 23 \cap 56$ appartient à la droite ik .

Réciproquement, soient $1, 2, \dots, 5, 6$ des points du plan projectif en position générale, tels que les points $i = 12 \cap 45$, $j = 23 \cap 56$ et $k = 34 \cap 61$ sont sur une même droite D . Soit \mathcal{C} l'unique cône non dégénérée passant par $1, 2, \dots, 5, 6$. La droite 56 coupe \mathcal{C} en un second point noté 7 . Comme l'hexagone $1, 2, \dots, 5, 7$ est inscrit dans \mathcal{C} , les points i, j et $k' = 34 \cap 71$ sont alignés, donc $k' \in D$, $k' = D \cap 56 = k$, et enfin $6 = 1k \cap 56 = 1k' \cap 56 = 7$ est sur \mathcal{C} . ■

Exercice 13 Quel est l'énoncé dual du théorème de Pascal ?

Exercice 14 Que devient le théorème de Pascal quand la cône dégénère vers une paire de droites distinctes ?

Chapitre 2

GROUPE FONDAMENTAL, REVETEMENTS

2.1 Déterminations de l'angle polaire

2.1.1 Préliminaires

Dans ce chapitre, on va construire à la main des applications continues, et utiliser à plusieurs reprises le fait suivant.

Lemme 2.1.1 *Soient X et Y des espaces topologiques, soient A et B des fermés de X tels que $X = A \cup B$. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application telle que $f|_A$ et $f|_B$ sont continues. Alors f est continue.*

Preuve. Soit $F \subset Y$ un fermé. $f|_A^{-1}(F)$ est un fermé de A , donc un fermé de X . Alors $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = f|_A^{-1}(F) \cup f|_B^{-1}(F)$ est fermé. ■

D'autre part

Lemme 2.1.2 *Soit X un espace métrique compact. Soient $U_i, i \in I$ des ouverts qui recouvrent X . Alors il existe un rayon $r > 0$ (appelé nombre de Lebesgue du recouvrement) tel que toute boule de rayon r dans X soit entièrement contenue dans l'un des U_i .*

Preuve. Par compacité, on peut supposer l'ensemble I fini. Soit, pour $x \in X$, $d(x) = \max\{d(x, X \setminus U_i) \mid i \in I\}$. Alors d est continue, strictement positive, donc elle est bornée inférieurement par un $r > 0$. Si $x \in X$, comme $r \leq d(x)$, il existe $i \in I$ tel que $d(x, X \setminus U_i) \geq r$, ce qui signifie que $B(x, r) \subset U_i$. ■

2.1.2 Motivation

Question 1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $t \mapsto c(t), I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ une courbe continue dans le plan qui évite l'origine. On note $r(t) \in]0, +\infty[$, $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ses coordonnées polaires. Peut-on choisir une fonction continue $t \mapsto \theta(t), I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta(t) \in \bar{\theta}(t)$ pour tout t ?

Question 2. Supposons que $I = \mathbb{R}$ et que c est 2π -périodique. Peut-on choisir la fonction continue $t \mapsto \theta(t)$ 2π -périodique?

Question 3. La fonction holomorphe $z \mapsto 1/z, \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

2.1.3 Rappel : détermination principale du logarithme

Définition 2.1.3 La détermination principale du logarithme est la fonction holomorphe Log définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, qui vaut 0 en 1 et dont la dérivée est $z \mapsto 1/z$.

On la calcule en intégrant $1/z$ le long d'arcs évitant \mathbb{R}_- . On trouve que si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors

$$\text{Log}(z) = \log(r) + i\theta.$$

Le fait que les limites par le haut et par le bas de Log en un point de \mathbb{R}_- sont distinctes entraîne que $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donc la réponse à la question 3 est négative.

2.1.4 Lien entre les 3 questions

Cela entraîne que la réponse à la question 2 est négative elle-aussi.

Exemple 2.1.4 Soit $c(t) = e^{it} \in \mathbb{C}$, qu'on identifie à \mathbb{R}^2 . Alors $r(t) = 1$ pour tout t et il n'existe pas de fonction continue 2π -périodique $t \mapsto \theta(t)$ telle que $c(t) = e^{i\theta(t)}$.

En effet, sinon, la formule $my - \log(re^{it}) = \log(r) + i\theta(t)$ définirait une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $e^{my - \log(z)} = z$. Le théorème d'inversion locale, appliqué à la fonction exponentielle, entraînerait que $my - \log$ est holomorphe, de dérivée $1/z$, contradiction.

2.1.5 Le théorème de relèvement

Théorème 9 On note $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $t_0 \in I$. Soit $t \mapsto u(t)$, $I \rightarrow U$ une application continue. Soit θ_0 un réel tel que $e^{i\theta_0} = u(t_0)$. Il existe une unique fonction continue $t \mapsto \theta(t)$, $I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $e^{i\theta(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$ et $\theta(t_0) = \theta_0$.

Preuve. L'unicité est facile : deux solutions diffèrent d'une fonction continue à valeur dans $2\pi\mathbb{Z}$, nécessairement constante, en fait nulle puisqu'elle s'annule en t_0 .

Supposons d'abord qu'il existe un point $v \in U$ qui n'est pas dans l'image de u . Si $v = -1$, posons $\theta_v(t) = -i\text{Log}(u(t))$. Si $v \neq -1$, posons $\theta_v(t) = -i\text{Log}(-u(t)/v) - i\text{Log}(v) - i\pi$. Dans les deux cas, $e^{i\theta_v(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$. En particulier, $e^{i\theta_v(t_0)} = u(t_0)$, donc il suffit d'ajouter un multiple entier de 2π à θ_v pour que $\theta(t_0) = \theta_0$.

Passons au cas général. Soit $T = \sup\{s \in I \mid \text{il existe une solution définie sur } [t_0, s]\}$ (éventuellement, $T = +\infty$). Supposons que $T \in I$. Soit $v \in U$ un point distinct de $u(T)$. Par continuité de u , il existe $\epsilon > 0$ tel que u ne prenne pas la valeur v sur $]T - \epsilon, T + \epsilon[\cap I$. Par définition de T , il existe un $t > T - \epsilon$ et une solution θ_s définie sur $[t_0, s]$. Alors $e^{i\theta_s(s)} = u(s) = e^{i\theta_v(s)}$, donc il existe un entier n tel que $\theta_s(s) - \theta_v(s) = 2\pi n$. On prolonge θ_s par continuité en posant $\theta(t) = \theta_v(s) + 2\pi n$ pour $t \in [s, T + \epsilon[\cap I$. On obtient une solution définie sur $[t_0, T + \epsilon[\cap I$. Ceci contredit le choix de T . On conclut que $T \notin I$, donc la moitié du contrat est remplie. En faisant le même travail à gauche de t_0 , on construit le relèvement souhaité sur I entier. ■

Moralité. On a utilisé la propriété suivante de la paramétrisation exponentielle $\mathbb{R} \rightarrow U$ du cercle unité : au voisinage de chaque point de U , on dispose d'une famille d'applications réciproques continues dont les images recouvrent l'image réciproque du voisinage. Cette propriété caractérise les *revêtements*, on y reviendra.

2.1.6 Degré

Retour à la question 2. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow U$ une application 2π -périodique. Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relèvement de u . Alors $t \mapsto \theta(t + 2\pi)$ est un autre relèvement de u , donc il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$. L'exemple de la paramétrisation exponentielle elle-même ($\theta(t) = t$) montre que n n'est pas toujours nul.

Définition 2.1.5 Soit $f : U \rightarrow U$ une application continue, soit θ un relèvement de $t \mapsto f(e^{it})$. On appelle degré de f l'entier $n = \deg(f)$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$.

Exemple 2.1.6 Le degré de $z \mapsto z^n$ est n .

Proposition 2.1.7 Si deux applications f et $g : U \rightarrow U$ sont suffisamment voisines, elles ont même degré.

Preuve. Supposons que $|f - g| < 2$. Soient $\theta_f, \theta_g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des relèvements de f et g . On peut les choisir de sorte que $|\theta_f(0) - \theta_g(0)| < \pi$. Supposons que $s = \inf\{t > 0 \mid |\theta_f(t) - \theta_g(t)| \geq \pi\}$ est fini. Alors $|\theta_f(s) - \theta_g(s)| = \pi$, ce qui contredit $|f(s) - g(s)| < 2$. Par conséquent, pour tout $t > 0$, $|\theta_f(t) - \theta_g(t)| < \pi$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2k\pi|\deg(f) - \deg(g)| - |\theta_f(0) - \theta_g(0)| &\leq |\theta_f(0) - \theta_g(0) + 2k\pi(\deg(f) - \deg(g))| \\ &\leq |\theta_f(2k\pi) - \theta_g(2k\pi)| < \pi, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\deg(f) = \deg(g)$. ■

2.1.7 Degré des applications différentiables

Rappel 2.1.8 On dit que $f : U \rightarrow U$ est de classe C^k si $g(t) = f(e^{it})$ définit une application de classe C^k de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

Proposition 2.1.9 Soit $f : U \rightarrow U$ une application de classe C^1 . Posons $g(t) = f(e^{it})$. Alors

$$\deg(f) = \int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{i g(t)} dt.$$

Preuve. Soit θ un relèvement de g , i.e. $g(t) = e^{i\theta(t)}$. Alors θ est dérivable, et $\frac{g'(t)}{g(t)} = i\theta'(t)$, d'où

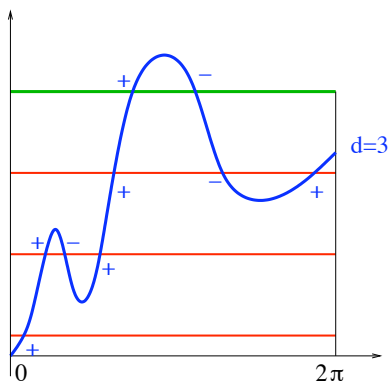
$$\int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{i g(t)} dt = \int_0^{2\pi} \theta'(t) dt = \theta(2\pi) - \theta(0) = \deg(f). \blacksquare$$

Proposition 2.1.10 Soit $f : U \rightarrow U$ une application de classe C^1 . Soit $u \in U$ tel que pour tout $v \in U$ tel que $f(v) = u$, la dérivée de f en v est non nulle. Elle possède un signe, $\epsilon(v) = +1$ si la vitesse va dans le sens trigonométrique, $\epsilon(v) = -1$ sinon. Alors

$$\deg(f) = \sum_{v \in f^{-1}(u)} \epsilon(v).$$

Preuve. La somme est finie, car l'ensemble $f^{-1}(u)$ est discret (chacun de ses points est isolé) donc fini. En effet, soit θ un relèvement de f , $f(e^{it}) = e^{i\theta(t)}$, et soit $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $u = e^{i\theta_0}$. Par hypothèse, pour tout t tel que $\theta(t) = \theta_0 \pmod{2\pi}$, $\theta'(t) \neq 0$, donc t est isolé.

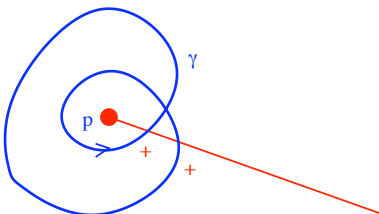
Notons $d = \deg(f)$. Quitte à traduire le temps, on peut supposer que $\theta(0) = 0$ et $\theta_0 \neq 0$. Lorsque t varie de 0 à 2π , la fonction θ croise chacun des niveaux $\theta_0 + 2k\pi$, $k = 0, \dots, d-1$ un nombre fini de fois, avec une dérivée positive ou négative, mais la somme des signes vaut 1. Pour un niveau $\theta_0 + 2k\pi$, où k n'est pas compris entre 0 et $d-1$, la somme des signes vaut 0. Par conséquent, la somme des signes des dérivées à toutes les traversées des niveaux $\theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vaut d . Or cette somme coïncide avec celle de l'énoncé. ■



2.1.8 Indice

Définition 2.1.11 Soit $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe dans le plan qui évite un point p . On appelle indice de γ par rapport à p le degré de l'application $u \mapsto \frac{\gamma(u) - p}{|\gamma(u) - p|}$.

Autrement dit, l'indice de γ par rapport à p , c'est le nombre de tours que γ fait autour de p . On peut le calculer en coupant γ par une demi-droite bien choisie : on compte le nombre de fois que γ coupe la demi-droite dans le sens trigonométrique, moins le nombre de fois que γ coupe la demi-droite dans l'autre sens.



Fin du cours n^o10

2.2 Groupe fondamental

2.2.1 Définition

Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on parle de *lacet*, basé au point $x = \gamma(0) = \gamma(1)$.

Composition

Si $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ sont des chemins tels que $\beta(0) = \alpha(1)$, leur *composition* est le chemin noté $\alpha \cdot \beta$ tel que

$$\begin{cases} \alpha \cdot \beta(t) = \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha \cdot \beta(t) = \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Inverse

L'inverse d'un chemin α , noté α^{-1} , est défini par

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t).$$

Homotopie

Deux chemins sont homotopes si on peut les déformer continûment l'un en l'autre.

Définition 2.2.1 Soient $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ des chemins de mêmes extrémités x_0 et x_1 . On dit que α et β sont homotopes (à extrémités fixées), et on note $\alpha \sim \beta$, s'il existe une application continue $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\begin{aligned} F(0, t) &= \alpha(t), \\ F(1, t) &= \beta(t), \\ F(s, 0) &= x_0, \quad F(s, 1) = x_1. \end{aligned}$$

Lemme 2.2.2 Il s'agit d'une relation d'équivalence.

En effet, soit F (resp. G) une homotopie de α à β (resp. de β à γ). Alors H définie par

$$\begin{cases} H(s, t) = F(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H(s, t) = G(2s - 1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

est une homotopie de α à γ . ■

Théorème 10 Soit $x \in X$. Soit $\pi_1(X, x)$ l'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixées) de lacets basés en x . La composition des lacets induit sur $\pi_1(X, x)$ une structure de groupe.

Définition 2.2.3 On appelle $\pi_1(X, x)$ le groupe fondamental de X .

Preuve.

1. $\alpha \sim \alpha'$ et $\beta \sim \beta'$ entraîne $\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta'$.

En effet, soit F (resp. G) une homotopie de α à α' (resp. de β à β'). Alors H définie par

$$\begin{cases} H(s, t) = F(s, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H(s, t) = G(s, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

est une homotopie de $\alpha \cdot \beta$ à $\alpha' \cdot \beta'$.

2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \sim (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

En effet, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \circ \phi$ où ϕ est une application de $[0, 1]$ dans lui-même, homotope à l'identité (à extrémités fixées).

3. Soit x le lacet constant basé en x . Alors $\alpha \cdot x \sim x \cdot \alpha \sim \alpha$.

Idem.

4. $\alpha \cdot \alpha^{-1} \sim \alpha^{-1} \cdot \alpha \sim x$.

En effet, l'application

$$\begin{cases} H(s, t) = \alpha(2ts) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H(s, t) = \alpha^{-1}(1 - (2 - 2t)s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

est une homotopie du lacet constant à $\alpha \cdot \alpha^{-1}$. ■

2.2.2 Exemples

Proposition 2.2.4 Si X est une partie convexe de \mathbb{R}^n , alors $\pi_1(X, x)$ est trivial.

Preuve. $F(s, t) = sx + (1 - s)\alpha(t)$ est une homotopie du lacet α au lacet constant. ■

Proposition 2.2.5 *Le groupe fondamental du cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est isomorphe au groupe \mathbb{Z} . L'isomorphisme est donné par le degré $\deg : \pi_1(U, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$.*

Preuve. Un lacet α basé en 1 dans U définit une application continue $f : U \rightarrow U$ via $f(e^{2\pi it}) = \alpha(t)$. Un relèvement de α , c'est-à-dire une application $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\alpha(t) = e^{2\pi i\eta(t)}$, donne un relèvement θ de f via $\theta(2\pi t) = 2\pi\eta(t)$. On peut donc parler du degré de α , c'est simplement $\eta(1) - \eta(0)$.

Deux lacets homotopes ont même degré. En effet, si F est une homotopie de α à β , alors, par uniforme continuité, il existe un entier N tel que les lacets $\gamma_j(t) = F(\frac{j}{N}, t)$ satisfassent $|\gamma_j, \gamma_{j+1}| < 2$. Alors $\deg(\gamma_j) = \deg(\gamma_{j+1})$ pour tout j , donc $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$.

Le degré de la composition, c'est la somme des degrés. En effet, soit θ (resp. η) le relèvement de α (resp. β) tel que $\theta(0) = 0$ (resp. $\eta(0) = \theta(1)$). Alors le relèvement de $\alpha \cdot \beta$ est $\eta \cdot \theta$, donc

$$\deg(\alpha \cdot \beta) = \eta(1) = \eta(1) - \eta(0) + \theta(1) - \theta(0) = \deg(\alpha) + \deg(\beta).$$

Deux lacets de même degré sont homotopes. En effet, soit θ (resp. η) le relèvement de α (resp. β) tel que $\theta(0) = \eta(0) = 0$. Posons $F(s, t) = e^{i((1-s)\theta(2\pi t) + s\eta(2\pi t))}$. C'est une homotopie de α à β .

Ceci prouve que l'application $\deg : \pi_1(U, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un homomorphisme bien défini et injectif. Les lacets $z \mapsto z^n$ montrent qu'il est surjectif. ■

Proposition 2.2.6 *Soient X, Y des espaces topologiques, $x \in X, y \in Y$. Alors*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) = \pi_1(X, x) \oplus \pi_1(Y, y).$$

En particulier, le groupe fondamental du tore $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est \mathbb{Z}^n .

Preuve. Un lacet basé en (x, y) dans $X \times Y$, c'est un couple d'un lacet de X basé en x et d'un lacet de Y basé en y . Les homotopies aussi sont des couples d'homotopies, donc les classes d'homotopie sont des couples de classes.

Enfin, $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$. ■

Proposition 2.2.7 *Soit S^n la sphère de dimension n . Si $n \geq 2$, $\pi_1(S^n)$ est trivial.*

Preuve. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n$ un lacet.

1er cas. Supposons que γ évite au moins un point $u \in S^n$. Comme $S^n \setminus \{u\}$ est homéomorphe à \mathbb{R}^n , γ est homotope à une constante dans $S^n \setminus \{u\}$, et *a fortiori* dans S^n .

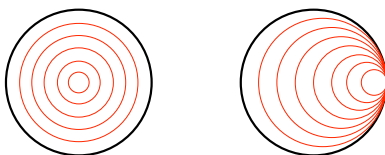
Cas général. Pour se ramener au premier cas, on montre que γ est homotope à un lacet qui évite un point. Notons *pr* la projection radiale $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$. Montrons que γ est homotope à une ligne brisée, i.e. un lacet $\beta = pr \circ \alpha$ où $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est affine par morceaux. Par continuité uniforme, il existe un entier N tel que si $|t' - t| \leq 1/N$, $|\gamma(t') - \gamma(t)| < 1/2$. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'application continue qui coïncide avec γ aux multiples de $1/N$ et est affine entre deux multiples consécutifs. Soit $F(s, t) = (1-s)\gamma(t) + s\alpha(t)$ l'homotopie affine de γ à α . Pour chaque $j = 1, \dots, N$, la boule de rayon $1/2$ centrée en $\gamma(\frac{j}{N})$ contient $\gamma([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]) \cup \alpha([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}])$ donc elle contient aussi $F([0, 1] \times [\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}])$. Autrement dit, l'image de F ne rencontre pas la boule de rayon $1/2$. L'application $G = pr \circ F$ est donc une homotopie de γ à $\beta = pr \circ \alpha$ dans S^n . L'image de β est contenue dans une réunion finie de grands cercles, donc si $n \geq 2$, elle ne recouvre pas la sphère. ■

2.2.3 Applications

Lemme 2.2.8 *Un lacet $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, $\alpha(0) = \alpha(1) = x$, définit une application continue $f : U \rightarrow X$ par $f(e^{2\pi it}) = \alpha(t)$. α est homotope à une constante si et seulement si f se prolonge en une application continue du disque fermé $\bar{D} \rightarrow X$.*

Preuve. Si $F(s, t)$ est une homotopie de α à une constante, on pose $g(re^{2\pi it}) = F(r, t)$. F est continue en vertu du lemme 2.1.1. En effet, on coupe le disque fermé en deux demi-disques fermés $A = \bar{D} \cap \{\Im m(z) \geq 0\}$ et $B = \bar{D} \cap \{\Im m(z) \leq 0\}$. Sur $A \setminus \{0\}$, $g = F \circ H$ où $H(z) = (|z|, \text{Arg}(z)/2\pi)$ où l'argument est pris dans $] -\pi/2, 3\pi/2[$. On vérifie ensuite que g se prolonge par continuité à A . Idem pour B . Enfin, la condition de raccord est vérifiée.

Inversement, soit $g : \bar{D} \rightarrow X$ une application continue, $x = g(1)$ et $\alpha(t) = g(e^{2\pi it})$. Alors α est un lacet basé en x . L'application $F(s, t) = g(se^{2\pi it})$ est une homotopie de α à une constante, ce qui suffit pour bien des usages. Mais cette homotopie ne fixe pas les extrémités. On utilise plutôt $G(s, t) = g(1 - s + se^{2\pi it})$, qui envoie 0 et 1 sur x pour tout s . ■

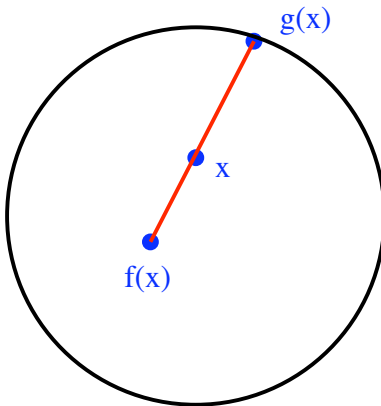


Théorème 11 (L.E.J. Brouwer, 1909). Soit \bar{D} le disque unité fermé du plan. Toute application continue $\bar{D} \rightarrow \bar{D}$ possède un point fixe.

Preuve. Par l'absurde. Supposons qu'il existe une application continue $f : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ sans point fixe. Considérons l'application $g : \bar{D} \rightarrow U$ qui à $x \in \bar{D}$ associe le point d'intersection $g(x)$ de la demi-droite d'origine $f(x)$ passant par x . g est continue. En effet, $g(x)$ est caractérisé par une condition fermée

$$\begin{cases} \det(\overrightarrow{f(x)z}, \overrightarrow{f(x)x}) = 0, \\ f(x)z \cdot f(x)x \geq 0. \end{cases}$$

Si x_j est une suite tendant vers x , toute sous-suite convergente de $g(x_j)$ doit converger vers $g(x)$. Par conséquent, $g(x_j)$ converge vers x .



Posons, pour $s \in [0, 1]$ et $u \in U$, $F(s, u) = g(su)$. Alors $F(0, \cdot) = g(0)$ est constante, et $F(1, \cdot)$ est l'identité. Par conséquent, l'identité $U \rightarrow U$ est homotope à une constante. Or le degré de l'identité vaut 1, alors que celui d'une application constante vaut 0, contradiction. ■

Remarque 2.2.9 Le théorème est vrai en toutes dimensions. Brouwer a traité le cas $n = 3$ en 1919, le cas général est dû à J. Hadamard.

J'ignore l'histoire du cas $n = 2$. Pour généraliser la preuve aux dimensions supérieures, il faut un invariant d'homotopie (groupe d'homotopie ou d'homologie) en chaque dimension, alors que le groupe fondamental ne capture que des propriétés unidimensionnelles.

Corollaire 2.2.10 *Quand on est à Paris et qu'on déplie un plan de Paris, il y a un point du plan qui représente exactement sa position réelle dans Paris.*

Théorème 12 (d'Alembert, Gauss). *Tout polynôme à coefficients complexes, de degré non nul, possède au moins une racine complexe.*

Preuve. Par l'absurde. Supposons qu'il existe un polynôme f de degré d à coefficients complexes, qui ne s'annule pas. Il ne coûte rien de supposer que le coefficient directeur de f vaut 1. Considérons l'application $]0, 1[\rightarrow U$ définie par $g(s, u) = \frac{f(u(1-s/s))}{|f(u(1-s/s))|}$. Lorsque s tend vers 0, $g(s, u)$ tend vers u^d . Lorsque s tend vers 1, $g(s, u)$ tend vers $\frac{f(0)}{|f(0)|}$. Par conséquent, g se prolonge en une application continue $G : [0, 1] \times U \rightarrow U$, qui est une homotopie entre la constante $\frac{f(0)}{|f(0)|}$ et l'application $u \mapsto u^d$. Si $d \neq 0$, c'est incompatible avec l'invariance homotopique du degré. ■

2.3 Type d'homotopie

2.3.1 Equivalences d'homotopie

Définition 2.3.1 *Soient X, Y des espaces topologiques. Deux applications continues f_0 et $f_1 : X \rightarrow Y$ sont homotopes s'il existe une homotopie de f_0 à f_1 , i.e. une application continue $F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ telle que $F(0, \cdot) = f_0$ et $F(1, \cdot) = f_1$. On le note $f_0 \sim f_1$.*

C'est une relation d'équivalence.

Définition 2.3.2 *Une équivalence d'homotopie entre X et Y , c'est une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle qu'il existe une application continue $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes à l'identité. S'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y , on dit que X et Y ont même type d'homotopie.*

C'est une relation d'équivalence.

Exemple 2.3.3 \mathbb{R}^n a même type d'homotopie qu'un espace $*$ réduit à un point (on dit qu'il est contractile).

En effet, soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow *$ l'application constante, et $g : * \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application dont l'image est 0. Alors $g \circ f = id_*$, $f \circ g$ est la fonction nulle, homotope à l'identité par $F(s, x) = sx$. ■

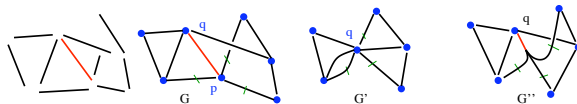
Exemple 2.3.4 *Soient X, Y des espaces topologiques. Si X a même type d'homotopie que X' , alors $X \times Y$ a même type d'homotopie que $X' \times Y$. En particulier, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a même type d'homotopie que le cercle unité U .*

Fin du cours n^{011}

Proposition 2.3.5 *Soit G un graphe fini, i.e. l'espace topologique obtenu à partir d'une réunion disjointe finie de copies de l'intervalle $[0, 1]$ en identifiant des extrémités. Soit a une arête, i.e. un des intervalles constituant G . On suppose que les extrémités de a sont distinctes dans G . Soit G' le graphe obtenu en écrasant a , i.e. en identifiant tous les points de a . Alors G et G' ont même type d'homotopie.*

Preuve. Notons $f : G \rightarrow G'$ le passage au quotient. Pour construire son inverse g , montrons que G peut être vu comme un quotient de G' . Notons p et $q \in G$ les extrémités de l'arête écrasée. Notons $a = pq, a_1, \dots, a_k$ les arêtes dont l'une des extrémités est p . Si une arête a ses deux extrémités égales à p , on la compte deux fois. Paramétrons chacune d'entre elles par $t \mapsto a_i(t), t \in [0, 1]$, de sorte

que p corresponde au paramètre 0. Si une arête a ses deux extrémités égales à p , on la paramètre deux fois, une fois dans chaque sens, i.e. $a_j(t) = a_i(1 - t)$. Pour chaque $t \in [0, 1/3]$, identifions les points $a_1(t), \dots, a_k(t)$. On obtient un espace G'' homéomorphe à G . On note $g : G' \rightarrow G'' \rightarrow G$ le passage au quotient suivi de l'homéomorphisme, qui étire un tiers d'arête (obtenu par identification du premier tiers des a_i) en l'arête a entière. C'est l'inverse homotopique de f .



Considérons l'application $F_s : G \mapsto G$ qui est l'identité en dehors des arêtes contenant p , envoie $a(t)$ en $a(s + (1 - s)t)$, $a_i(t)$ en $a(|2st - s + t|)$ pour $t \leq s/1 + 2s$, $a_i(t)$ en $a_i(|2st - s + t|)$ pour $s/1 + 2s \leq t \leq \frac{1}{2}$, sans rien changer si $t \geq \frac{1}{2}$, sauf pour les arêtes a_i ayant leurs deux extrémités en p , pour lesquelles les points $a_i(t) = a_j(1 - t)$ subissent le traitement prescrit aussi pour $t \geq \frac{1}{2}$. Alors F est une homotopie de l'identité à $g \circ f$.

Considérons l'application $H_s : G' \mapsto G'$ qui est l'identité en dehors des arêtes a_i , envoie $a_i(t)$ en $a_i(0)$ pour $t \leq s/1 + 2s$, $a_i(t)$ en $a_i(|2st - s + t|)$ pour $s/1 + 2s \leq t \leq \frac{1}{2}$, sans rien changer si $t \geq \frac{1}{2}$, sauf pour les arêtes a_i ayant leurs deux extrémités en p , pour lesquelles les points $a_i(t) = a_j(1 - t)$ subissent le traitement prescrit aussi pour $t \geq \frac{1}{2}$. Alors H est une homotopie de l'identité à $f \circ g$. ■

Corollaire 2.3.6 *Tout graphe fini connexe a même type d'homotopie qu'un graphe n'ayant qu'un sommet auquel sont attachées un nombre fini de boucles.*

Preuve. On écrase l'une après l'autre toutes les arêtes dont les extrémités sont distinctes. A la fin, il ne reste que des boucles attachées au même sommet. ■

2.3.2 Naturalité de π_0 et π_1

Notation. Soit X un espace topologique. On note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X , i.e. l'espace quotient de X par la relation d'équivalence définie par $x \sim x'$ s'il existe un chemin reliant x à x' dans X .

Remarque 2.3.7 *Si X est localement connexe par arcs, $\pi_0(X)$ est discret.*

Terminologie. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Alors pour tous $x, x' \in X$, les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, x')$ sont isomorphes. De façon un peu abusive, on note tous ces groupes $\pi_1(X)$. On dit que X est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si $\pi_1(X)$ est trivial.

Preuve. Soit α un chemin de x à x' . Alors l'application $\gamma \mapsto \alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}$ induit un isomorphisme en homotopie (qui dépend que de la classe d'homotopie de α à extrémités fixées). En effet, si β est un lacet basé en x' , $\beta \sim \alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}$ pour $\gamma = \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha$. ■

Proposition 2.3.8 *Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit une application $f_{\#} : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ et un homomorphisme de groupes $f_{\#} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(y))$. Si $f \sim g$, alors $f_{\#} = g_{\#}$.*

Si X et Y ont même type d'homotopie, alors $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$ sont homéomorphes. Si, de plus, X et Y sont connexes par arcs, alors $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ sont isomorphes. En particulier, la simple connexité est un invariant d'homotopie.

Preuve. L'homotopie et la composition des chemins sont conservés par composition des applications. ■

Corollaire 2.3.9 $S^1 = U$ n'a pas même type d'homotopie que S^n ou $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ pour $n \geq 2$.

2.3.3 Rétraction par déformation

Définition 2.3.10 Soit X un espace topologique et $Y \subset X$ un sous-espace. Une rétraction $r : X \rightarrow Y$ est une application continue qui fixe chaque point de Y . Une rétraction par déformation de X sur Y , c'est une rétraction $r : X \rightarrow Y$ qui est homotope à l'identité parmi des applications qui fixent chaque point de Y .

Remarque 2.3.11 Si Y est un rétracte par déformation X , il a même type d'homotopie que X .

Exemple 2.3.12 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se rétracte par déformation sur S^{n-1} .

Preuve. Poser $F(s, x) = \frac{x}{s|x| + 1 - s}$. ■

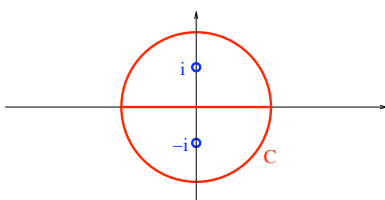
Proposition 2.3.13 Soit $p \in \mathbb{R}^2$. Soit $\ell \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la droite à l'infini. Alors ℓ est un rétracte par déformation de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{p\}$.

Preuve. Soit $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{p\} \rightarrow \ell$ la projection de centre p sur ℓ . Alors π est une rétraction. Chaque fibre $\pi^{-1}(q)$, $q \in \ell$ est une droite projective avec un point marqué (q) et un point retiré (p), elle possède donc une structure canonique de droite vectorielle. On peut donc multiplier un point $r \in \pi^{-1}(q)$ par $s \in \mathbb{R}$. L'application $F(s, r) = sr$ définit une homotopie de π à l'identité à travers des rétractions.

Concrètement, si $p = [0 : 0 : 1]$, $r = [x_0 : x_1 : x_2]$, $\pi(r) = [x_0 : x_1 : 0]$, et on pose $F(s, r) = [x_0 : x_1 : sx_2]$. ■

Corollaire 2.3.14 Le complémentaire d'un disque dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à un disque. En fait, il n'a pas le même type d'homotopie.

Exemple 2.3.15 $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ a même type d'homotopie que la réunion du cercle de rayon 2 centré en 0 et de l'intervalle $[-2, 2]$ de l'axe réel.



En effet, notons $B = \bar{B}(0, 2) \setminus \{-i, i\}$. Alors B est un rétracte par déformation de $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. La rétraction ρ envoie un point z du complémentaire de B sur $2z/|z|$. La déformation ρ_s envoie z sur $(1 - s)z + s\rho(z)$.

Notons $C = [-2, 2] \cup \{|z| = 2\}$. Alors B se rétracte par déformation sur C . Dans chacune des moitiés de B , la rétraction r envoie un point z sur le premier point d'intersection de la demi-droite iz (resp. $(-i)z$) avec C . La déformation r_s envoie z sur $(1 - s)z + sr(z)$.

2.4 Le théorème de Van Kampen

2.4.1 Motivation

Comment calculer $\pi_1(X)$ pour $X = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$? On écrit $X = X_1 \cup X_2$ où $X_1 = \{\Im m(z) > -1, z \neq i\}$ et $X_2 = \bar{X}_2$. On va donner une formule pour $\pi_1(X)$ en fonction de $\pi_1(X_1)$, $\pi_1(X_2)$ et $\pi_1(X_0)$ où $X_0 = X_1 \cap X_2$.

Notations. Dans toute cette section, on suppose que X_1 et X_2 sont ouverts, et que X_0 , X_1 et X_2 sont connexes par arcs. On fixe un point base $x_0 \in X_0$. On note $G_0 = \pi_1(X_0, x_0)$, $G_1 = \pi_1(X_1, x_0)$, $G_2 = \pi_1(X_2, x_0)$ et $G = \pi_1(X, x_0)$.

2.4.2 Un résultat partiel

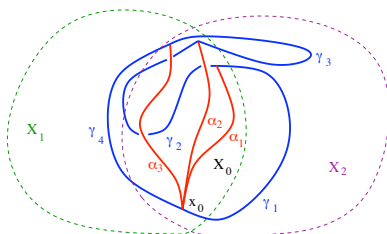
Lemme 2.4.1 G est engendré par les images de G_1 et de G_2 .

Preuve. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un lacet basé en x_0 . Supposons d'abord que $\gamma_1 := \gamma([0, 1/2]) \in X_1$ et $\gamma_2 := \gamma([1/2, 1]) \in X_2$. Alors $\gamma(1/2) \in X_0$. Choisissons un chemin α de x_0 à $\gamma(1/2)$ dans X_0 . Alors $\gamma = \beta_2 \cdot \beta_1$ où $\beta_1 = \alpha^{-1} \cdot \gamma_1 \subset X_1$ et $\beta_2 = \gamma_2 \cdot \alpha \subset X_2$, donc la classe d'homotopie de γ est le produit d'un élément de G_1 et d'un élément de G_2 .

Dans le cas général, on va écrire γ comme un produit de lacets contenus alternativement dans X_1 et X_2 . Soit $F_i = \gamma^{-1}(X \setminus X_i)$. Soit N un entier tel que $1/N$ soit un nombre de Lebesgue pour le recouvrement de $[0, 1]$ par les deux ouverts $f^{-1}(X_i)$ (voir lemme 2.1.2). Alors chaque intervalle $[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]$ est envoyé par γ dans X_1 ou dans X_2 . Parmi les $\frac{j}{N}$, ne conservons que ceux pour lesquels on change d'ouvert. Autrement dit, on extrait des $\frac{j}{N}$ une subdivision $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ telle que

1. $\gamma(t_j) \in X_0$ pour tout $j = 0, \dots, k$,
2. $\gamma_j := \gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset X_{\epsilon(j)}$ où $\epsilon(j)$ vaut alternativement 1 et 2.

Soit α_j un chemin de x_0 à $\gamma(t_j)$ dans X_0 (lorsque $j = 0$ ou k , prendre le chemin constant), soit $\beta_j = \alpha_{j-1} \cdot \gamma_j \cdot \alpha_j^{-1} \subset X_{\sigma(j)}$. Alors la classe d'homotopie de $\gamma = \beta_k \cdot \dots \cdot \beta_1$ est un produit d'éléments appartenant alternativement à G_1 et à G_2 . ■



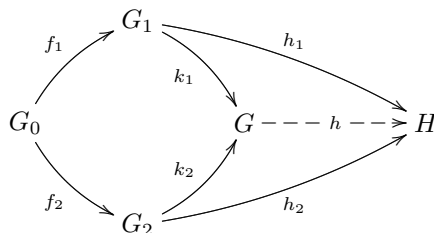
Corollaire 2.4.2 Si X_0 est connexe et X_1, X_2 simplement connexes, X est simplement connexe.

2.4.3 Somme amalgamée de groupes

Voici une construction de théorie des groupes.

Théorème 13 Soient G_1 et G_2 deux groupes. Soit G_0 un troisième groupe, soient $f_1 : G_0 \rightarrow G_1$ et $f_2 : G_0 \rightarrow G_2$ deux homomorphismes. Il existe un groupe G , unique à unique isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes.

1. Il existe des homomorphismes $k_i : G_i \rightarrow G$, $i = 1, 2$ tels que $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$.
2. Inversement, étant donné un groupe H et des homomorphismes $h_i : G_i \rightarrow H$, $i = 1, 2$ tels que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, il existe un homomorphisme unique $h : G \rightarrow H$ tel que $h_1 = h \circ k_1$, $h_2 = h \circ k_2$.



Définition 2.4.3 On appelle le groupe G produit par le théorème précédent la somme amalgamée de G_1 et G_2 au-dessus de G_0 , et on le note $G_1 *_{G_0} G_2$.

Preuve.

Unicité. Soient G, G' deux solutions du problème. On applique la propriété universelle à chacun d'entre eux, cela donne deux homomorphismes $h : G \rightarrow G'$ et $h' : G' \rightarrow G$, puis on constate que $h' \circ h : G \rightarrow G$ est solution du problème universel pour $H = G$, d'où $h' \circ h = id_G$.

Existence. On l'établit d'abord dans un cas particulier, par une construction explicite, au paragraphe suivant, avant de traiter le cas général.

2.4.4 Produit libre de deux groupes

Définition 2.4.4 *Le produit libre de deux groupes G_1 et G_2 , noté $G_1 * G_2$, c'est la somme amalgamée au-dessus du groupe trivial.*

Construction. On considère l'ensemble des suites finies (g_1, \dots, g_k) d'éléments non triviaux pris alternativement dans G_1 et G_2 , sans oublier la suite vide, notée $()$. On multiplie deux suites (g_1, \dots, g_k) et (g'_1, \dots, g'_ℓ) selon la règle définie par récurrence sur la longueur comme suit : si g_k et g'_1 n'appartiennent pas au même groupe,

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (g'_1, \dots, g'_\ell) = (g_1, \dots, g_k, g'_1, \dots, g'_\ell).$$

Sinon, et si de plus $g_k g'_1 \neq 1$,

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (g'_1, \dots, g'_\ell) = (g_1, \dots, g_k g'_1, \dots, g'_\ell).$$

Enfin, si $g_k g'_1 = 1$,

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (g'_1, \dots, g'_\ell) = (g_1, \dots, g_{k-1}) \cdot (g'_2, \dots, g'_\ell),$$

qui est déjà défini, car de longueur inférieure. On vérifie (laborieux) que cette multiplication est associative. Cela donne un groupe G , avec élément neutre $()$, l'inverse de (g_1, \dots, g_k) étant $(g_k^{-1}, \dots, g_1^{-1})$.

Clairement, l'application $k_1 : G_1 \rightarrow G, e \mapsto (), g \mapsto (g)$ est un homomorphisme injectif. De même pour G_2 . Remarquer que $k_1(G_1)$ et $k_2(G_2)$ engendrent G . Si H est un groupe, et si $h_i : G_i \rightarrow H, i = 1, 2$, sont des homomorphismes, l'application $h : G \rightarrow H$, définie par $h(g_1, \dots, g_k) = \prod_j h_{\sigma(j)}(g_j)$, où $\sigma(j)$ est le numéro du groupe auquel g_j appartient, est un homomorphisme, et c'est le seul possible, qui satisfait $h_1 = h \circ k_1, h_2 = h \circ k_2$. On conclut que G est le produit libre de G_1 et de G_2 . ■

Exemple 2.4.5 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ s'appelle le groupe libre à deux générateurs.

Exemple 2.4.6 *En général, $G_1 * (G_2 * G_3) = (G_1 * G_2) * G_3$, qu'on note $G_1 * G_2 * G_3$. On peut donc noter $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ le groupe libre à n générateurs.*

Fin du cours n^o12

2.4.5 Preuve du théorème 13

Soit $N \subset G_1 * G_2$ le plus petit sous-groupe distingué de $G_1 * G_2$ qui contient $f_1(\ker(f_2)), f_2(\ker(f_1))$ ainsi que tous les éléments de la forme $(f_1(g_0), f_2(g_0)^{-1})$ pour $g_0 \in G_0(\ker(f_1) \cup \ker(f_2))$. Soit G le groupe quotient $G_1 * G_2 / N$, avec les homomorphismes $k_1 : G_1 \rightarrow G_1 * G_2 \rightarrow G$ et $k_2 : G_2 \rightarrow G_1 * G_2 \rightarrow G$. Par construction, pour tout $g_0 \in G_0, k_1 \circ f_1(g_0)(k_2 \circ f_2(g_0))^{-1} = f_1(g_0)f_2(g_0)^{-1} = e \text{ mod } N$, donc $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$.

Si H est un groupe, $h_1 : G_1 \rightarrow H$ et $h_2 : G_2 \rightarrow H$ des homomorphismes tels que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, alors l'homomorphisme induit $\bar{h} : G_1 * G_2 \rightarrow H$ est trivial sur N , donc passe au quotient en $h : G \rightarrow H$ qui satisfait $h_1 = h \circ k_1, h_2 = h \circ k_2$. Inversement, tout homomorphisme $h : G \rightarrow H$ tel que $h_1 = h \circ k_1, h_2 = h \circ k_2$ se relève en un homomorphisme $G_1 * G_2 \rightarrow H$ trivial sur N , donc il n'y a aucun choix pour h . On conclut que $G = G_1 *_{G_0} G_2$. ■

Remarque 2.4.7 Lorsque $f_1 : G_0 \rightarrow G_1$ et $f_2 : G_0 \rightarrow G_2$ sont injectives, les homomorphismes naturels $k_1 : G_1 \rightarrow G_1 *_{G_0} G_2$ et $k_2 : G_2 \rightarrow G_1 *_{G_0} G_2$ sont injectifs.

Dans ce cas, on peut penser à G_0 comme à un sous-groupe commun à G_1 et G_2 , et à $G_1 *_{G_0} G_2$ comme le produit libre dans lequel on s'est arrangé pour que chaque élément de G_0 n'apparaisse qu'une seule fois.

2.4.6 Théorème de Van Kampen

Théorème 14 Soit X un espace topologique, soient X_1, X_2 des ouverts connexes par arcs de X tels que $X = X_1 \cup X_2$ et tels que $X_0 = X_1 \cap X_2$ soit connexe par arcs. Notons $G_i = \pi_1(G_i)$, $i = 0, 1, 2$, avec les homomorphismes $f_1 : G_0 \rightarrow G_1$ et $f_2 : G_0 \rightarrow G_2$ induits par les injections $X_0 \rightarrow X_1$ et $X_0 \rightarrow X_2$. Alors l'homomorphisme naturel $G_1 *_{G_0} G_2 \rightarrow \pi_1(X)$ est un isomorphisme.

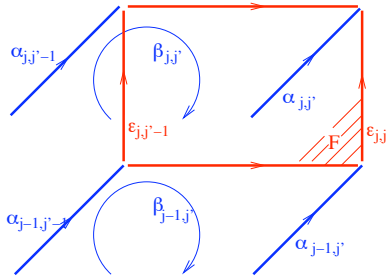
Preuve. Notons $G = \pi_1(X)$. Notons $\bar{h} : G_1 * G_2 \rightarrow G$ l'homomorphisme naturel. Comme les injections $X_0 \subset X_1 \subset X$ et $X_0 \subset X_2 \subset X$ forment un diagramme commutatif, il en est de même au niveau des groupes fondamentaux, donc il y a un homomorphisme naturel $h : G_1 *_{G_0} G_2 \rightarrow G$. Comme les images de G_1 et G_2 dans G engendrent G , h est surjectif. Comme \bar{h} relève h , il est trivial sur le sous-groupe distingué D engendré par les $f_1(g_0)f_2(g_0)^{-1}$, $g_0 \in G_0$. Reste à voir que $\ker(\bar{h}) \subset D$.

Soit $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ un lacet dans X , basé en x_0 , obtenu par composition de lacets $\gamma_j \subset G_{\sigma(j)}$. Supposons γ homotope à une constante (i.e. $[\gamma] \in \ker(\bar{h})$). Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une telle homotopie, dans laquelle $F(0, t)$, $t \in [\frac{j'-1}{k}, \frac{j'}{k}]$ est une paramétrisation de $\gamma_{j'}$. On applique le lemme 2.1.2 au recouvrement du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par les deux ouverts $F^{-1}(X_1)$ et $F^{-1}(X_2)$. On obtient un entier N tel que tout sous-carré de côté $1/N$ soit envoyé entièrement dans X_1 ou dans X_2 . On peut supposer que N est un multiple de k . Pour tout $(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on pose $\sigma(j, j') = 0$ si $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in X_0$, $\sigma(j, j') = 1$ ou 2 sinon, et on relie x_0 à $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N})$ par un chemin $\alpha_{j, j'}$ entièrement contenu dans $X_{\sigma(j, j')}$. Si $j = 1$, $j' = 0$ ou $j' = 1$, $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) = x_0$ et on choisit le chemin constant.

Pour chaque j , $t \mapsto F(\frac{j}{N}, t)$ est un lacet basé en x_0 , noté β_j . On écrit $\beta_j = \beta_{j,1} \cdots \beta_{j,N}$, où

$$\beta_{j, j'} = \alpha_{j, j'-1} \cdot F_{\{[\frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]\}} \cdot \alpha_{j, j'}^{-1} \subset X_{\max\{\sigma(j, j'-1), \sigma(j, j')\}}.$$

Lorsque $\max\{\sigma(j, j'-1), \sigma(j, j')\} = 0$, on décide de voir $\beta_{j, j'}$ comme un lacet de X_1 . Autrement dit, on peut voir β_j comme l'élément $m_j = [\beta_{j,1}] \cdots [\beta_{j,N}]$ du produit libre $G_1 * G_2$.



Montrons que modulo le sous-groupe distingué D , m_j est indépendant de j . Notons $\epsilon_{j, j'} = F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times \{\frac{j'}{N}\})$. Si $F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]) \subset X_1$, alors $\beta_{j, j'}$ est homotope dans X_1 à

$$\beta'_{j, j'} = \alpha_{j, j'-1} \cdot \epsilon_{j-1, j'-1}^{-1} \cdot \alpha_{j-1, j'-1}^{-1} \cdot \beta_{j-1, j'} \cdot \alpha_{j, j'} \cdot \epsilon_{j-1, j'} \cdot \alpha_{j-1, j'}^{-1}.$$

Si $F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}])$ n'est pas entièrement contenu dans X_1 , alors il est contenu dans X_2 . Décider de changer le statut de $\beta_{j, j'}$ de celui de lacet de X_1 à celui de lacet de X_2 n'est nécessaire que si $\beta_{j, j'} \subset X_0$ et revient à multiplier $[\beta_{j, j'}]$ par un élément de D . Donc quitte à multiplier m_j et

m_{j-1} par des éléments de D , on peut décider que tout se passe dans X_2 et dans ce cas l'homotopie de $\beta_{j,j'}$ à $\beta'_{j,j'}$ a lieu à nouveau. Dans l'élément m_j , on trouve, modulo D , le produit

$$\begin{aligned} \beta'_{j,j'} \beta'_{j,j'+1} &= \alpha_{j,j'-1} \cdot \epsilon_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \beta_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \\ &\quad \cdot \beta_{j-1,j'+1} \cdot \alpha_{j,j'+1} \cdot \epsilon_{j-1,j'+1} \cdot \alpha_{j-1,j'+1}^{-1}, \end{aligned}$$

au coeur duquel figure

$$\alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1},$$

qui est trivial si les 6 chemins sont contenus dans le même X_1 ou X_2 . Sinon, c'est qu'ils sont tous contenus dans X_0 . On a donc affaire au produit de deux lacets de X_0 inverses l'un de l'autre, leur produit appartient à D . Modulo D , le facteur qui s'intercale entre $\beta_{j-1,j'}$ et $\beta_{j-1,j'+1}$ dans le produit est trivial. Les termes de bords $\alpha_{j,0} \cdot \epsilon_{j-1,0}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,0}^{-1}$ et $\alpha_{j,N} \cdot \epsilon_{j-1,N} \cdot \alpha_{j-1,N}^{-1}$ sont des lacets constants. On conclut que $m_j = m_{j-1} \bmod D$ dans $G_1 * G_2$. Comme le dernier mot m_N est trivial et le premier égal à γ , on conclut que $\gamma \in D$, i.e. que $\ker(\bar{h}) \subset D$. ■

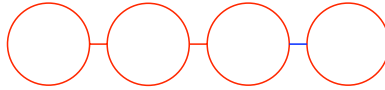
2.4.7 Exemples

Proposition 2.4.8 *Soit G un graphe fini connexe. Alors $\pi_1(G)$ est un groupe libre à κ générateurs, où κ , la connectivité de G , vaut*

$$\kappa = 1 - S + A,$$

où S est le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes de G .

Preuve. Lorsqu'on écrase une arête dont les sommets sont distincts, S et A diminuent d'une unité, donc la connectivité ne change pas. Lorsque toutes les arêtes sont écrasées, sauf les boucles, on se retrouve avec κ boucles attachées à l'unique sommet. On introduit une arête entre deux boucles, pour obtenir la figure suivante, notée L_κ . A nouveau, cela ne change ni la connectivité, ni le groupe fondamental.



On lui applique le théorème de Van Kampen, avec X_1 homéomorphe à un cercle avec une arête qui dépasse, X_2 à un $L_{\kappa-1}$ avec une arête qui dépasse, X_0 une arête sans ses extrémités. Comme $\pi_1(X_0)$ est trivial, $\pi_1(X)$ est un produit libre. Clairement, le cercle avec arête ouverte qui dépasse se rétracte par déformation sur le cercle. De même pour $L_{\kappa-1}$. On trouve que $\pi_1(G)$ est un produit libre de κ copies de \mathbb{Z} . ■

Corollaire 2.4.9 1. *La connectivité est un invariant d'homotopie des graphes.*

2. *Le groupe fondamental de \mathbb{C} privé de 2 points est un groupe libre à 2 générateurs. Il n'est donc pas commutatif.*

2.5 Revêtements

2.5.1 Motivation

Il s'agit d'étendre à d'autres situations la propriété de relèvement mise en évidence pour l'application exponentielle $\mathbb{R} \rightarrow U$.

2.5.2 Définition

Définition 2.5.1 Une application continue $p : E \rightarrow X$ est un revêtement si tout point $x \in X$ a un voisinage U tel que

1. $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i$, $V_i \subset E$, $I \neq \emptyset$, réunion disjointe,
2. pour chaque $i \in I$, $p|_{V_i} = V_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

On appelle X la base et E l'espace total du revêtement. J'appelle U un voisinage trivialisant.

- Remarque 2.5.2**
1. p est un homéomorphisme local, donc les fibres $p^{-1}(y)$ sont discrètes.
 2. On peut faire des produits de revêtements $(p, p') : E \times E' \rightarrow X \times X'$.
 3. Si X est connexe, les fibres $p^{-1}(x)$, $x \in X$, ont toutes le même cardinal (éventuellement infini).
 4. Si $p : E \rightarrow X$ est un revêtement et $Y \subset X$, alors $p|_{p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \rightarrow Y$ est un revêtement.

2.5.3 Exemples

1. Soit S un espace topologique discret. Alors la projection sur le premier facteur $p : X \times S \rightarrow X$ est un revêtement appelé *revêtement trivial* de fibre S .
2. $t \mapsto e^{it}$, $\mathbb{R} \rightarrow U$ est un revêtement.
3. $z \mapsto e^z$, $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un revêtement.
4. Si $n \neq 0$, $z \mapsto z^n$, $U \rightarrow U$, est un revêtement.
5. La restriction de $t \mapsto e^{it}$ à $]0, 3\pi[$ n'est pas un revêtement de $]0, 3\pi[$ sur U .

En effet, soit U le voisinage de -1 dans U formé des $z \in U$ dont l'argument diffère de π (modulo 2π) d'au plus ϵ . Alors $p^{-1}(U)$ est la réunion disjointe de deux intervalles, $V_1 =]\pi - \epsilon, \pi + \epsilon[$ et $V_2 =]3\pi - \epsilon, 3\pi[$. V_1 est l'image d'une section de p au-dessus de U , mais V_2 ne l'est pas. D'ailleurs, le cardinal des fibres n'est pas constant.

Proposition 2.5.3 Soit $p : E \rightarrow X$ un homéomorphisme local, avec E compact. Alors p est un revêtement.

Preuve. Soit $x \in X$. Alors $p^{-1}(x) = \{e_1, \dots, e_n\}$ est fini. Soit W_i un voisinage ouvert de e_i tel que $p|_{W_i}$ soit un homéomorphisme de W_i sur un ouvert U_i contenant x . Quitte à rétrécir, on peut supposer les W_i deux à deux disjoints. Soit $e_j \in E$ une suite telle que $p(e_j)$ tend vers x . Toute sous-suite convergente de (e_j) converge vers un point de $p^{-1}(x)$. Par conséquent, pour j assez grand, $e_j \in \bigcup_i W_i$. On conclut qu'il existe un voisinage ouvert U de x , contenu dans $\bigcap_i U_i$, tel que $p^{-1}(U) \subset \bigcup_i W_i$. Posons $V_i = (p|_{W_i})^{-1}(U)$. Alors pour tout i , $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Par construction, $p^{-1}(U) = \coprod_i V_i$. ■

Exemple 2.5.4 L'application $f : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ qui à un vecteur unitaire de \mathbb{R}^{n+1} associe la droite vectorielle qu'il engendre est un revêtement.

En effet, soit $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \dots : 1]$. Si $q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est proche de p , il admet des coordonnées homogènes de la forme $q = [x_0 : \dots : x_n]$ avec $x_n > 0$. Alors $(x_0^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2}(x_0, \dots, x_n)$ est l'unique vecteur unitaire sur la droite q dont la dernière composante est > 0 . Il dépend continûment de q . Il y a deux telles applications réciproques locales de f , donc f est un revêtement. ■

Proposition 2.5.5 Soit E un espace topologique localement compact (i.e. tout point admet une base de voisinages compacts). Soit G un groupe qui agit sur E

1. librement, i.e. si $x \in E$ et $g \neq 1$, alors $gx \neq x$;
2. proprement, i.e. si $K \subset E$ est compact, l'ensemble des $g \in G$ tels que $gK \cap K \neq \emptyset$ est fini.

Alors $X = G \backslash E$ est séparé, et la projection $p : E \rightarrow G \backslash E$ est un revêtement.

Preuve. Séparation : voir TD. Soit $e \in E$. Soit V un voisinage compact de e . Comme E est séparé, et comme l'intersection de V et de l'orbite de e est un ensemble fini, les points de $Ge \cap V = \{e = g_0e, g_1e, \dots, g_ne\}$ admettent des voisinages U_i deux à deux disjoints dans V . Soit $U = \bigcap_i g_i^{-1}(U_i)$. C'est un voisinage de e dont les translatés par des éléments de G sont deux à deux disjoints. La restriction de p à chaque gU est un homéomorphisme sur le voisinage $[U]$ de la classe $[p] \in G \backslash E$. ■

Fin du cours n°13

Exemple 2.5.6 L'application $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est le revêtement associé à l'action du groupe à 2 éléments sur la sphère par $x \mapsto -x$.

Exemple 2.5.7 Soit $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ le groupe cyclique à n éléments, agissant par multiplication sur U . Alors le revêtement associé n'est autre que $z \mapsto z^n, U \rightarrow U$.

Exemple 2.5.8 Soit $G \subset \mathbb{R}$ le groupe engendré par la translation de 2π . Alors G agit librement et proprement sur \mathbb{R} . Le revêtement associé coïncide avec le revêtement exponentiel $\mathbb{R} \rightarrow U$.

2.5.4 Morphismes

On précise le sens de "coïncide".

Définition 2.5.9 Soient $p : E \rightarrow X$ et $p' : E' \rightarrow X$ deux revêtements. On appelle morphisme de E vers E' une application continue $m : E \rightarrow E'$ telle que $p' \circ m = p$. Si f est une bijection, on parle d'isomorphisme.

Remarquer que si E' est connexe, un morphisme injectif est automatiquement un isomorphisme, lequel est automatiquement un homéomorphisme.

Exemple 2.5.10 Dans la situation de la proposition 2.8.2, le groupe G agit sur E par automorphismes du revêtement $E \rightarrow G \backslash E$.

Définition 2.5.11 On dit qu'un revêtement est trivial s'il est isomorphe à un revêtement trivial $X \times S$.

Noter que si S a plus d'un élément, $X \times S$ n'est jamais connexe. Par conséquent, un revêtement $p : E \rightarrow X$ avec E connexe n'est trivial que si c'est un homéomorphisme.

Exemple 2.5.12 Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ le groupe engendré par n translations linéairement indépendantes. Le revêtement associé est isomorphe au produit de n copies du revêtement exponentiel $\mathbb{R} \rightarrow U$.

En effet, à changement linéaire de coordonnées près, on peut supposer que $G = \mathbb{Z}^n$ est l'ensemble des translations par les vecteurs à coordonnées entières.

2.5.5 Sections

Définition 2.5.13 Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Une section de p est une application continue $s : X \rightarrow E$ telle que $p \circ s = id_X$. Une section au-dessus de $Y \subset X$, c'est une section de $p|_{p^{-1}(Y)}$, i.e. définie seulement au-dessus de Y . Une section locale en x est une section définie sur un voisinage de x .

Remarquer qu'une section s au-dessus de Y est automatiquement un homéomorphisme de Y sur $s(Y)$. Par définition même, un revêtement possède des sections locales en tout point x , exactement autant que d'images réciproques de x . Si X est connexe, deux sections qui coïncident en un point sont égales.

2.6 Relèvement des homotopies

2.6.1 Relèvements

Définition 2.6.1 Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue. Un relèvement de f à E , c'est une application $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$. Si on se donne en plus des points bases $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$, et un relèvement $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ dans E , on parle de relèvement d'origine \tilde{x}_0 .

Lemme 2.6.2 Lorsque Y est connexe, quand f admet un relèvement d'origine \tilde{x}_0 , il est unique.

Preuve. Soient \tilde{f} et \tilde{f}' deux relèvements d'origine \tilde{x}_0 . Alors $\{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$ est ouvert. En effet, au voisinage de $\tilde{f}(y)$, p est un homéomorphisme, donc pour z proche de y , l'équation $p(\tilde{x}) = f(z)$ admet une unique solution voisine de $\tilde{f}(y)$, c'est $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(y)$. Comme cet ensemble est non vide et fermé, c'est Y , donc $\tilde{f} = \tilde{f}'$. ■

2.6.2 Relèvement des chemins

La proposition suivante généralise le théorème de relèvement du revêtement exponentiel. On organise la preuve différemment.

Proposition 2.6.3 Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ admet des relèvements. Si on fixe $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de x_0 , il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ d'origine \tilde{x}_0 .

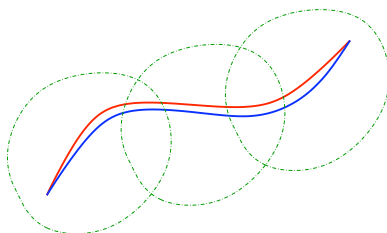
Preuve. Soit $T = \sup\{t \leq 1 \mid \exists \tilde{\gamma} : [0, t] \rightarrow E \text{ relèvement de } \gamma \text{ d'origine } \tilde{x}_0\}$. Par unicité, le relèvement sur $[0, t']$, $t' > t$, prolonge celui sur $[0, t]$. Par conséquent, le relèvement existe sur $[0, T[$. Soit $U \subset X$ un voisinage ouvert trivialisant de $\gamma(T)$, i.e. il existe des sections s_i au-dessus de U telles que $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} s_i(U)$. Pour un $t_0 < T$ assez proche de T , $\tilde{\gamma}(t_0) \in p^{-1}(U)$, donc il existe $i \in I$ tel que $\tilde{\gamma}(t_0) \in s_i(U)$. Alors la formule $\tilde{\gamma}'(t) = s_i(\gamma(t))$ définit un relèvement de γ sur un voisinage de T , qui coïncide avec $\tilde{\gamma}$ en t_0 , donc $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}$, i.e. $\tilde{\gamma}$ est défini au-delà de T (contradiction si $T < 1$), donc $T = 1$ et $\tilde{\gamma}$ est continu sur $[0, 1]$. ■

2.6.3 Relèvement des homotopies

La proposition suivante généralise l'invariance du degré par homotopie.

Proposition 2.6.4 Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Soit Y un espace topologique. Fixons des points bases $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de x_0 . Soit $F : [0, 1] \times Y \rightarrow X$ une homotopie entre deux applications f_0 et $f_1 : Y \rightarrow X$ envoyant y_0 sur x_0 . Si f_0 possède un relèvement d'origine \tilde{x}_0 , il en est de même de F , et par conséquent de f_1 .

Preuve. D'après la proposition précédente, pour chaque $y \in Y$, le chemin $\gamma_y : s \mapsto F(s, y)$ possède un unique relèvement $\tilde{\gamma}_y$ d'origine $\tilde{f}_0(y)$. On pose $\tilde{F}(s, y) = \tilde{\gamma}_y(s)$. Pour montrer que \tilde{F} est continue, il suffit de vérifier que le procédé de relèvement est continu, i.e. que deux chemins voisins se relèvent en deux chemins voisins. Or relever un chemin γ_y , c'est faire appel à un nombre fini de sections locales s_j (définies sur les ouverts trivialisants recouvrant le compact $\gamma([0, 1])$). Les mêmes sections locales permettent de relever γ_z pour z proche de y . ■



Corollaire 2.6.5 Soient α, β deux chemins dans X de mêmes extrémités x_0 et x_1 . Soit $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . Soient $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ les relèvements de α et β d'origine \tilde{x}_0 . Si α et β sont homotopes à extrémités fixées, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. En particulier, si α est un lacet homotope à une constante, $\tilde{\alpha}$ est un lacet.

Preuve. Par l'hypothèse, l'homotopie F de α à β satisfait $F(s, 1) = x_1$ pour tout s . Son relèvement \tilde{F} satisfait $\tilde{F}(s, 1) \in p^{-1}(x_1)$ pour tout s . Comme $p^{-1}(x_1)$ est discret, $\tilde{F}(s, 1)$ ne dépend pas de s , donc $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(0, 1) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{\beta}(1)$. ■

Corollaire 2.6.6 Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement, soit $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . Soit Y un espace connexe par arcs et simplement connexe, avec point base y_0 . Toute application continue $f : Y \rightarrow X$ envoyant y_0 en x_0 possède un (unique) relèvement à E d'origine \tilde{x}_0 .

Preuve. Etant donné $y \in Y$, il existe un chemin α de y_0 à y . Soit $\tilde{\gamma}$ le relèvement d'origine \tilde{x}_0 du chemin $\gamma = f \circ \alpha$. On pose $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}(1)$. Comme Y est simplement connexe, un autre choix de chemin α' donne le même point $\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Par continuité du relèvement des chemins, \tilde{f} est continue. Par construction, $p \circ \tilde{f} = f$. ■

Remarque 2.6.7 Supposons E connexe par arcs. La réciproque du corollaire 2.6.5 est vraie si et seulement si E est simplement connexe.

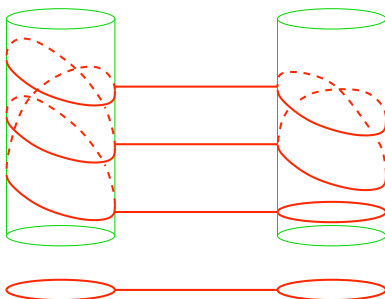
Lemme 2.6.8 Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Supposons E connexe par arcs. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

1. Pour tout lacet α , $\tilde{\alpha}$ est un lacet $\Rightarrow \alpha$ est homotope à une constante.
2. E est simplement connexe.

Preuve. Si E est simplement connexe, un relèvement $\tilde{\alpha}$ qui est un lacet est homotope à une constante, donc $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ l'est aussi. Réciproquement, soit $\tilde{\gamma}$ un lacet dans E basé en \tilde{x}_0 . C'est un relèvement du lacet $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Par hypothèse, γ est homotope à une constante dans X . Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie du lacet constant 1_{x_0} à γ . Comme 1_{x_0} se relève en le lacet constant $1_{\tilde{x}_0}$, F se relève en \tilde{F} , qui est une homotopie de $1_{\tilde{x}_0}$ à $\tilde{\gamma}$. ■

Fin du cours n^o14

Exercice 15 La figure suivante représente un revêtement à 3 feuillets. Soit x_0 le sommet de droite de X . Déterminer les relèvements de divers lacets basés en x_0 , pour diverses origines \tilde{x}_0 . En déduire que certains lacets ne sont pas homotopes à une constante.



2.7 Revêtement universel

On s'oriente vers la classification des revêtements d'un espace X . On va voir que X admet presque toujours un revêtement connexe plus grand que tous les autres (les autres en sont des quotients), c'est celui qui est simplement connexe.

Réglons d'abord le sort des revêtements non connexes.

2.7.1 Revêtements non connexes

Définition 2.7.1 *Un espace topologique X est dit localement connexe (resp. par arcs) si tout point possède une base de voisinages connexes (resp. par arcs).*

Proposition 2.7.2 *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Supposons X localement connexe par arcs. Soit E' une composante connexe de E . Alors $p|_{E'} : E' \rightarrow X$ est un revêtement.*

Autrement dit, un revêtement non connexe est une union disjointe de revêtements connexes.

Preuve. Soit $x \in X$, soit U un voisinage trivialisant de x , i.e. il existe des sections s_i au-dessus de U telles que $p^{-1}(U) = \coprod_i s_i(U)$. Quitte à rétrécir U , on peut le supposer connexe. Alors les $s_i(U)$ sont connexes, donc chacun est ou bien contenu dans ou bien disjoint de E' . Par conséquent,

$$p|_{E'}^{-1}(U) = p^{-1}(U) \cap E' = \coprod_{\{i \mid s_i(U) \subset E'\}} s_i(U). \blacksquare$$

2.7.2 Revêtements du cercle

Proposition 2.7.3 *Tout revêtement connexe du cercle est isomorphe ou bien au revêtement exponentiel $\mathbb{R} \rightarrow U$, ou bien à l'un (et un seul) des revêtements $z \mapsto z^n$, $n \geq 1$.*

Preuve. Soit $p : E \rightarrow U$ un revêtement. L'application exponentielle $t \mapsto e^{it}$, $\mathbb{R} \rightarrow U$ admet un relèvement $f : \mathbb{R} \rightarrow E$. Alors f est un morphisme de revêtements.

Si f est injective, f est un isomorphisme, c'est fini.

Supposons f non injective. Si $t < t' \in \mathbb{R}$ et $f(t) = f(t')$, alors $e^{it} = e^{it'}$ donc $t' - t$ est un multiple entier strictement positif de 2π . Soit $2\pi n$ le plus petit multiple rencontré, i.e. il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0 + 2\pi n) = f(t_0)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, notons $\gamma_s = p \circ f|_{[s, s+2\pi n]}$. C'est un lacet dans U . Comme tous les γ_s sont homotopes et γ_{t_0} admet un relèvement à E , il en est de même de γ_s . Comme le relèvement $\tilde{\gamma}_{t_0}$ est un lacet, il en est de même de $\tilde{\gamma}_s$. Autrement dit, $f(s + 2\pi n) = f(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Par conséquent, f passe au quotient en $g : \mathbb{R}/2\pi n\mathbb{Z} \rightarrow E$ qui est un morphisme de revêtements injectif, donc un isomorphisme.

Le degré permet de distinguer les revêtements $z \mapsto z^n$ entre eux. En effet, si $p : U \rightarrow U$ et $p' : U \rightarrow U$ sont des revêtements, et $m : U \rightarrow U$ un homéomorphisme tel que $p' \circ m = p$, alors $\deg(p) = \deg(m)\deg(p') = \pm \deg(p')$. ■

2.7.3 Construction d'un revêtement simplement connexe

Supposons que X admette un revêtement $p : E \rightarrow X$ simplement connexe. Soit $U \subset X$ un ouvert trivialisant. Alors tout lacet γ contenu dans U se relève en un lacet $\tilde{\gamma}$ de E . Comme $\tilde{\gamma}$ est homotope à une constante, il en est de même de $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Cela motive la définition suivante.

Définition 2.7.4 *Un espace connexe par arcs X est dit semi-localement simplement connexe si tout point x admet un voisinage U tel que tout lacet basé en x , contenu dans U soit homotope à une constante dans X .*

Théorème 15 *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors X possède un revêtement E connexe et simplement connexe.*

Preuve. Fixons $x_0 \in X$. Soit C_{x_0} l'espace des chemins d'origine x_0 dans X , muni de la topologie de la convergence uniforme. C'est un espace topologique contractile (poser $\gamma_s(t) = \gamma(st)$ définit une rétraction par déformation jusqu'au chemin constant 1_{x_0}). On note $\tilde{p} : C_{x_0} \rightarrow X$, $\gamma \mapsto \gamma(1)$. On note $E = C_{x_0}/\sim$ l'espace quotient de C_{x_0} par la relation d'homotopie à extrémités fixées. Il est connexe par arcs. L'application \tilde{p} passe au quotient en une application continue $p : E \rightarrow X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$.

p est un revêtement. En effet, soit $x \in X$, soit U le voisinage de x donné par l'hypothèse de simple connexité semi-locale. Quitte à le rétrécir, on peut supposer U connexe par arcs. Notons

I l'ensemble des classes d'homotopie à extrémités fixées de chemins reliant x_0 à x . Fixons un représentant γ_i de chaque classe. Pour chaque $x' \in U$, fixons un chemin $\delta_{x'}$ reliant x à x' dans U . Posons $s_i(x') = [\gamma_i \cdot \delta_{x'}]$. Etant donné un voisinage V de x' dans U , il existe un voisinage connexe par arcs $V' \subset V$. Pour chaque $x'' \in V'$, fixons un chemin $\delta_{x',x''}$ reliant x' à x'' dans V' . Comme le lacet $\delta_{x'} \cdot \delta_{x',x''} \cdot \delta_{x',x''}^{-1}$, entièrement contenu dans U , est homotope à une constante dans X $s(x'') = [\gamma_i \cdot \delta_{x'']}] = [\gamma_i \cdot \delta_{x'} \cdot \delta_{x',x''}]$. A condition de paramétrer le produit de façon que le troisième facteur, $\delta_{x',x''}$, soit paramétré par un petit voisinage de 1, on réalise ainsi les $s_i(x'')$, $x'' \in V'$, par des chemins uniformément proches de $\gamma_i \cdot \delta_{x'}$ qui réalise $s_i(x')$. Cela prouve que s_i est continue en x' . Pour tout chemin γ de x_0 à un point x' de U , $\gamma \cdot \delta_{x'}^{-1}$ est homotope à l'un des γ_i , donc $\gamma = s_i(x')$. On conclut que $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} s_i(U)$.

E est simplement connexe. On utilise la remarque 2.6.8. Il suffit de montrer que si un lacet α se relève en un lacet σ de E , alors α est homotope à une constante. Pour chaque $t \in [0, 1]$, $\sigma(t)$ est un chemin de x_0 à $\alpha(t)$. Pour t petit, le lacet $\sigma(t)^{-1} \alpha|_{[0,t]}$ est homotope à une constante. Par continuité (à homotopie près), cette propriété persiste pour tout t . Par conséquent, le lacet $\sigma(1)$ est homotope à α . Autrement dit, si σ est un lacet, α est homotope à une constante. ■

2.7.4 Propriété universelle des revêtements simplement connexes

Proposition 2.7.5 *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe par arcs et simplement connexe de X . Soit $p' : E' \rightarrow X$ un autre revêtement. Soient $\tilde{x}_0 \in E$ et \tilde{x}'_0 des relèvements d'un même point base $x_0 \in X$. Alors il existe un unique morphisme $m : E \rightarrow E'$ envoyant \tilde{x}_0 en \tilde{x}'_0 .*

Preuve. D'après le Corollaire 2.6.6, l'application $p : E \rightarrow X$ possède un relèvement $\tilde{p} : E \rightarrow E'$, tel que $p = p' \circ \tilde{p}$ et $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$. C'est un morphisme de revêtements. Inversement, si $m : E \rightarrow E'$ est un morphisme de revêtements, alors $p = p' \circ m$, donc m est un relèvement de p . D'après le Corollaire 2.6.6, la condition sur les points bases le rend unique. ■

Remarque 2.7.6 *Lorsque E' est connexe, $m : E \rightarrow E'$ est un revêtement. On peut donc penser au revêtement E' comme à un revêtement intermédiaire entre X et E .*

Exemple 2.7.7 *Les revêtements finis du cercle $z \mapsto z^n$, $U \rightarrow U$, sont eux mêmes revêtus par le revêtement exponentiel.*

2.7.5 Unicité du revêtement simplement connexe

Théorème 16 *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $x_0 \in X$ un point base. Soient $p : E \rightarrow X$ et $p' : E' \rightarrow X$ deux revêtements connexes et simplement connexes de X . Soient $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0 \in E'$ des relèvements de x_0 . Il existe un unique isomorphisme de revêtements $f : E \rightarrow E'$ envoyant \tilde{x}_0 en \tilde{x}'_0 .*

Preuve. Résulte de la propriété universelle. ■

Autrement dit, une fois fixés des points bases, le revêtement connexe et simplement connexe de X est canoniquement défini, i.e. unique à unique isomorphisme près.

Terminologie. On appelle le revêtement simplement connexe *revêtement universel*.

Exercice 16 *Soit X le graphe de l'exercice 15. Déterminer le revêtement universel de X (c'est un arbre infini de valence 3, comment s'enroule-t'il autour de X ?*

2.8 Revêtements et groupe fondamental

2.8.1 Automorphismes du revêtement universel

Notation. On note $Aut(E/X)$ le groupe des automorphismes d'un revêtement $p : E \rightarrow X$.

Théorème 17 *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement simplement connexe de X .*

1. Pour tout $x_0 \in X$, $Aut(E/X)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x_0)$.
2. A chaque choix de relèvement \tilde{x}_0 de x_0 correspond un unique isomorphisme de $\pi_1(X, x_0) \simeq Aut(E/X)$.

Preuve.

1. Cela résulte du théorème 16 : étant donnés deux relèvements \tilde{x}_0 et \tilde{x}'_0 de x_0 , il existe un unique isomorphisme du revêtement $f : E \rightarrow E$ envoyant \tilde{x}_0 en \tilde{x}'_0 .
2. Le groupe fondamental agit simplement transitivement à droite sur la fibre $p^{-1}(x_0)$ comme suit : si $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ et si α est un lacet basé en x_0 , son relèvement d'origine \tilde{x} se termine en un autre relèvement $\tilde{x}' = \tilde{x} \cdot \alpha$. L'action est transitive, car un chemin de \tilde{x} à \tilde{x}' est le relèvement de son image dans X . Comme E est simplement connexe, l'action est simplement transitive en vertu du lemme 2.6.8. Cette action, qui ne fait pas intervenir de choix d'origine dans E , commute avec l'action à gauche de $Aut(E/X)$. Fixons un relèvement \tilde{x}_0 . L'application, évidemment bijective, $\pi_1(X, x_0) \rightarrow Aut(E/X)$ qui à $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ associe l'unique $f \in Aut(E/X)$ tel que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$ est un isomorphisme de groupes. ■

Exemple 2.8.1 *Pour le revêtement exponentiel, les automorphismes du revêtement sont les translations d'un multiple de 2π .*

2.8.2 Construction de revêtements intermédiaires

On a vu que le revêtement $z \mapsto z^n$ du cercle unité U pouvait s'obtenir en quotientant le revêtement universel $t \mapsto e^{it}$ par le sous-groupe $2\pi n\mathbb{Z}$ du groupe de ses automorphismes. Cette construction est générale.

Proposition 2.8.2 *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement simplement connexe. Soit $H \subset Aut(E/X)$ un sous-groupe. Alors l'espace quotient $E' = H \backslash E$ est séparé, la projection p passe au quotient en un revêtement $p' : E' \rightarrow X$. Le groupe fondamental de E' est isomorphe à H , l'isomorphisme est obtenu en composant $p'_\# : \pi_1(E', \tilde{x}'_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ et l'isomorphisme $\pi_1(X, x_0) \rightarrow Aut(E/X)$ du théorème 17.*

Preuve. Soient \tilde{x}, \tilde{y} deux points de E qui ne sont pas dans la même orbite de H .

Premier cas : $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$. Notons $x = p(\tilde{x})$. Soit U un voisinage ouvert trivialisant de x dans X , i.e. il existe des sections locales s_j au-dessus de U , indexées par les éléments de $J = p^{-1}(x)$, telles que $p^{-1}(U) = \coprod_{j \in p^{-1}(x)} s_j(U)$. Le groupe $Aut(E/X)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x)$.

Alors $V_{\tilde{x}} = \coprod_{j \in H\tilde{x}} s_j(U)$ et $V_{\tilde{y}} = \coprod_{j \in H\tilde{y}} s_j(U)$ sont des ouverts saturés de E contenant respectivement les orbites de \tilde{x} et \tilde{y} . Il leur correspond des voisinages disjoints dans l'espace quotient $E' = H \backslash E$.

Deuxième cas : $p(\tilde{x}) \neq p(\tilde{y})$. Alors c'est encore plus simple. Soient U_x et U_y des voisinages trivialisants disjoints de $x = p(\tilde{x})$ et $y = p(\tilde{y})$ dans X . Alors $p^{-1}(U_x)$ et $p^{-1}(U_y)$ sont des voisinages saturés de E contenant respectivement les orbites de \tilde{x} et \tilde{y} . Il leur correspond des voisinages disjoints dans l'espace quotient $E' = H \backslash E$. Ceci prouve que E' est séparé.

L'application p passe au quotient par définition même des automorphismes de revêtement. Si $x \in X$, soit $J \subset p^{-1}(x)$ un sous-ensemble qui contient exactement un représentant de chaque orbite de H , soit U un voisinage trivialisant de x dans X . Alors l'ouvert $V_j = \coprod_{h \in H} s_{hj}(U)$ coupe chaque orbite de H en un seul point, cela définit une section $s'_j : U \rightarrow E'$ de p' au-dessus de U ,

et $p'^{-1}(U) = \coprod_{i \in J} V_j$, donc p' est un revêtement, et la projection $m : E \rightarrow E'$ un morphisme de revêtements.

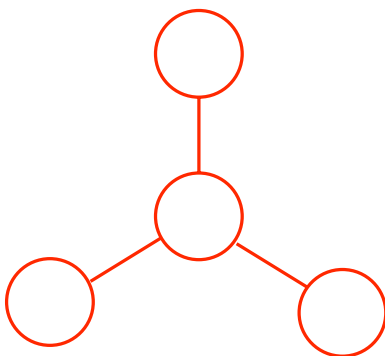
Soit \tilde{x}_0 un point base dans E . Soit $h \in H$, soit γ un chemin de \tilde{x}_0 à $h\tilde{x}_0$ dans E . Son image dans E' est un lacet γ' basé en $\tilde{x}'_0 = m(\tilde{x}_0)$. Notons $\alpha = p' \circ \gamma' = p \circ \gamma$. C'est un lacet dans X basé en $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, et représentant la classe $p_{\#}([\gamma']) \in \pi_1(X, x_0)$. D'après le théorème 17, il lui correspond la transformation de revêtement $g \in \text{Aut}(E/X)$ telle que $g(\tilde{x}_0)$ soit l'extrémité de l'unique relèvement de α d'origine \tilde{x}_0 dans E . Or ce relèvement, c'est γ , donc $g = h$. Inversement, si α' est un lacet dans E' basé en \tilde{x}'_0 , il possède un relèvement γ d'origine \tilde{x}_0 dans E , d'extrémité $g(\tilde{x}_0)$. Comme $m(g(\tilde{x}_0)) = m(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$, $g \in H$, donc $\simeq \circ p_{\#}([\alpha']) \in H$.

On a donc montré que l'image de $\simeq \circ p_{\#} : \pi_1(E', \tilde{x}'_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(E/X)$ est exactement le sous-groupe H . L'injectivité de cet homomorphisme résulte du lemme suivant. ■

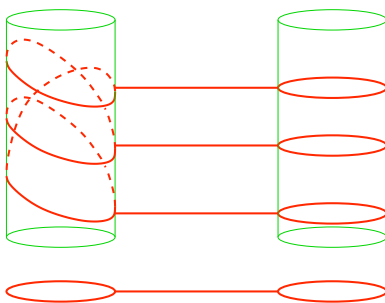
Lemme 2.8.3 *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . La projection p induit un homomorphisme injectif $p_{\#} : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.*

Preuve. En effet, soit $\gamma \in E$ un lacet basé en \tilde{x}_0 . Supposons $\alpha = p \circ \gamma$ homotope à une constante. Alors l'homotopie F de α au lacet constant $1_{\tilde{x}_0}$ se relève en une homotopie de γ à un lacet contenu dans un fibre, donc constant. On conclut que γ est trivial dans $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$, donc que $p_{\#}$ est injective. ■

Exercice 17 *Soit E le graphe de la figure suivante. Vérifier que l'action du groupe H des rotations d'ordre 3 sur E définit un revêtement $E \mapsto H \backslash E = X$, et le représenter graphiquement dans le style de la figure de l'exercice 15.*



Solution.



2.8.3 Action du groupe fondamental sur les fibres

Pour un revêtement quelconque, ce qui subsiste du théorème 17, c'est l'action à droite transitive du groupe fondamental. Comme on l'a vu en 2.6.8, cette action est simplement transitive si et seulement si E est simplement connexe. En général, il y a des stabilisateurs.

Proposition 2.8.4 *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$. Le relèvement des lacets définit une action à droite du groupe $\pi_1(X, x_0)$ sur la fibre $p^{-1}(x_0)$. Elle est transitive. Le stabilisateur de \tilde{x}_0 est le sous-groupe $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$.*

Preuve. Un élément de $\pi_1(X, x_0)$ qui fixe \tilde{x}_0 , c'est la classe d'homotopie d'un lacet α dont le relèvement $\tilde{\alpha}$ d'origine \tilde{x}_0 est un lacet. Alors $\alpha = p_{\#}(\tilde{\alpha})$ appartient à l'image de $p_{\#}$.

Réciproquement, si α est un lacet dans X basé en x_0 qui est homotope à un lacet de la forme $p \circ \beta$ où β est un lacet dans E basé en \tilde{x}_0 , alors $(p \circ \beta^{-1}) \cdot \alpha$ est homotope au lacet constant 1_{x_0} , donc se relève en un lacet d'origine \tilde{x}_0 . Mais l'unique relèvement est nécessairement $\beta^{-1} \cdot \tilde{\alpha}$, donc $\tilde{\alpha}$ est un lacet basé en \tilde{x}_0 , i.e. il fixe l'élément \tilde{x}_0 de la fibre. ■

Corollaire 2.8.5 *Si \tilde{x} et \tilde{x}' sont deux éléments de la fibre $p^{-1}(x_0)$, les sous-groupes $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}))$ et $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'))$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$. Tous les sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ conjugués à $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}))$ sont de la forme $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'))$ pour un choix de \tilde{x}' .*

Preuve. C'est une propriété générale pour les actions transitives. ■

Exemple 2.8.6 *Soit $p : U \rightarrow U, z \mapsto z^n$. Alors $p_{\#}(\pi_1(U))$ est le sous-groupe $2\pi n\mathbb{Z} \subset 2\pi\mathbb{Z}$.*

2.8.4 Critère de relevabilité

Théorème 18 *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0 . Soit Y un espace connexe et localement connexe par arcs, soit $y_0 \in Y$ un point base. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue qui envoie y_0 en x_0 . Alors f possède un relèvement d'origine \tilde{x}_0 si et seulement si*

$$f_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)).$$

Le relèvement est alors unique.

Preuve. Supposons que f possède un relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow E$. Alors $f_{\#} = p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#}$ donc son image est contenue dans celle de $p_{\#}$.

Réciproquement, supposons que l'image de $f_{\#}$ est contenue dans celle de $p_{\#}$. Soit $y \in Y$ et γ un chemin de y_0 à y . Le chemin $\alpha = f \circ \gamma$ de x_0 à $f(y)$ possède un relèvement $\tilde{\alpha}$ d'origine \tilde{x}_0 . Posons $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$. Si γ' est un autre lacet de y_0 à y , alors le lacet $\alpha' \cdot \alpha^{-1} = f_{\#}(\gamma' \cdot \gamma^{-1})$ dans X est homotope à un lacet de la forme $p_{\#}(\beta)$ où β est un lacet dans E basé en x_0 . Autrement dit, les chemins $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ et α' sont homotopes à extrémités fixées dans X . Ils se relèvent donc en des chemins de même extrémités. Or l'unique relèvement d'origine \tilde{x}_0 de $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ est $\beta \cdot \tilde{\alpha}$. On conclut que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$, donc que le point $\tilde{f}(y) \in E$ ne dépend pas du choix du chemin γ . A nouveau, la continuité de \tilde{f} résulte de la continuité du procédé de relèvement des chemins. ■

Exemple 2.8.7 *Une application $f : U \rightarrow U$ se relève à travers le revêtement $z \mapsto z^n$ si et seulement si elle représente une classe d'homotopie divisible par n . Autrement dit, si et seulement si son degré est divisible par n .*

Exercice 18 *Soit $p : X \rightarrow E$ le revêtement de l'exercice 15. Vérifier, pour quelques exemples, que les lacets de X qui se relèvent en des lacets de E sont bien dans l'image du groupe fondamental $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$ (cela dépend de \tilde{x}_0) ?*

2.8.5 Classification des revêtements connexes

On va établir une bijection entre classes d'isomorphismes de revêtements connexes $p : E \rightarrow X$ et classes de conjugaison de sous-groupes $H \subset \pi_1(X, x_0)$.

Proposition 2.8.8 *Soient $p : E \rightarrow X$ et $p' : E' \rightarrow X$ des revêtements connexes, $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0 \in E'$ des relèvements de x_0 .*

1. *Il existe un morphisme de revêtements $m : E \rightarrow E'$ envoyant \tilde{x}_0 en \tilde{x}'_0 si et seulement si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset p'_{\#}(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$.*

2. Il existe un morphisme de revêtements $m : E \rightarrow E'$ si et seulement si il existe un conjugué de $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ dans $\pi_1(X, x_0)$ qui est contenu dans $p_{\#}(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$.
3. Les revêtements E et E' sont isomorphes si et seulement si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ et $p_{\#}(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$.

Preuve. Un morphisme de revêtements $m : E \rightarrow E'$, c'est la même chose qu'un relèvement de $p : E \rightarrow X$ à E' . ■

Corollaire 2.8.9 *Supposons X connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. L'application qui à un revêtement $p : E \rightarrow X$ associe le sous-groupe $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ induit une bijection entre classes d'isomorphisme de revêtements et classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$. La bijection réciproque consiste à quotienter le revêtement universel de X par un sous-groupe de son groupe d'automorphismes.*

Preuve. Résulte des propositions 2.8.2 et 2.8.8. ■

Exemple 2.8.10 *Il y a autant de revêtements du cercle, à isomorphisme près, que de sous-groupes dans \mathbb{Z} .*

Comme \mathbb{Z} est commutatif, il n'y a pas lieu de parler de conjugaison.

Remarque 2.8.11 *Dans cette correspondance entre revêtements connexes pointés et sous-groupes du groupe fondamental, il y a aussi une correspondance entre morphismes et injections de sous-groupes. On parle d'équivalence de catégories.*

2.8.6 Revêtements galoisiens

On se demande si, en dehors du revêtement universel, il existe des revêtements qui possèdent beaucoup d'automorphismes.

Exemple 2.8.12 *Le revêtement à 3 feuillets de l'exercice 15 ne possède aucun automorphisme autre que l'identité.*

En effet, le graphe E contient un sommet uniquement caractérisé par la propriété suivante : les deux extrémités d'une même arête s'y confondent. Tout homéomorphisme (et *a fortiori* tout automorphisme) doit fixer ce point. Or un automorphisme qui fixe un point est l'identité. Autrement dit, étant donné un point de E , il n'est pas possible de choisir continûment un point parmi les deux autres points de sa fibre.

Sachant qu'un automorphisme est uniquement déterminé par son action sur une fibre, ce qu'on peut demander de plus, c'est la transitivité sur une fibre.

Définition 2.8.13 *Un revêtement $p : E \rightarrow X$ est dit galoisien si son groupe d'automorphismes $\text{Aut}(E/X)$ agit transitivement sur les fibres.*

Remarque 2.8.14 *Si X est connexe, il suffit que ce soit vrai pour une fibre.*

En effet, l'ensemble des $x \in X$ tels que $\text{Aut}(E/X)$ agisse transitivement sur $p^{-1}(x)$ est une réunion d'ouverts trivialisants, donc est ouvert et fermé.

Exemple 2.8.15 *Les revêtements triviaux, le revêtement universel sont galoisiens.*

Proposition 2.8.16 *On suppose X localement connexe par arcs. Un revêtement connexe $p : E \rightarrow X$ est galoisien si et seulement si le sous-groupe $p_{\#}(\pi_1(E)) \subset \pi_1(X)$ est distingué. Dans ce cas, $\text{Aut}(E/X) \simeq \pi_1(X)/p_{\#}(\pi_1(E))$ (isomorphisme qui dépend du choix d'un point base).*

Preuve. Un morphisme de revêtement, c'est un relèvement de p . D'après le critère de relevabilité, il existe un morphisme de revêtement envoyant \tilde{x}_0 sur \tilde{x}'_0 si et seulement si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'_0))$, et un automorphisme si et seulement si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'_0))$. Donc, avec le corollaire 2.8.5, si $Aut(E/X)$ est transitif, tous les conjugués de $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ coïncident, donc ce sous-groupe est distingué. Et réciproquement.

Si $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ est distingué, il agit trivialement (à droite) sur la fibre de x_0 . Par conséquent, le groupe quotient $G = \pi_1(X, x_0)/p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ agit à droite sur la fibre, simplement transitivement d'après la proposition 2.8.4. De son côté, le groupe $Aut(E/X)$ agit à gauche simplement transitivement sur la fibre, les deux actions commutent, ce qui donne un isomorphisme entre les deux groupes. ■

Exemple 2.8.17 Existe-t-il des revêtements non galoisiens à deux feuillets ?

Plus généralement,

Proposition 2.8.18 On suppose X localement connexe par arcs. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe, soient \tilde{x}_0 et x_0 des points bases. Notons $G = \pi_1(X, x_0)$ et $H = p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$. Soit $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G , i.e. l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $g^{-1}Hg \subset H$. Alors $Aut(E/X) \simeq N_G(H)/H$ (isomorphisme qui dépend du choix d'un point base).

Preuve. Soit $g \in G$. Alors $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot g)) = g^{-1}p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))g = g^{-1}Hg$. D'après le critère de relevabilité, il existe $h \in Aut(E/X)$ tel que $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot g$ si et seulement si $g^{-1}Hg \subset H$. Autrement dit, l'orbite à gauche de \tilde{x}_0 sous $Aut(E/X)$ coïncide avec l'orbite à droite de \tilde{x}_0 sous $N_G(H)$. Sur cette orbite, $Aut(E/X)$ agit à gauche simplement transitivement. D'après la proposition 2.8.4, le stabilisateur de \tilde{x}_0 est H . Or H est distingué dans $N_G(H)$, donc H fixe chaque point de l'orbite. Autrement dit, le groupe quotient $N_G(H)/H$ agit à droite simplement transitivement sur l'orbite. Les deux actions commutent, ce qui donne un isomorphisme entre les deux groupes. ■

Exemple 2.8.19 Cas du revêtement non galoisien à 3 feuillets de l'exercice 15.

Prenons le sommet spécial de E comme point base \tilde{x}_0 , et x_0 son image. Le graphe X a une connectivité égale à 4, donc son groupe fondamental est un groupe libre à 2 générateurs a et b , où a est représenté par la boucle de sommet x_0 et b par un lacet qui va faire le tour de l'autre boucle sans repasser par x_0 . Pour spécifier uniquement a et b , il suffit d'orienter chacune des boucles. Ces orientations se relèvent à E .

Le graphe E a une connectivité égale à 4, donc son groupe fondamental est un groupe libre à 4 générateurs c, d, e et f , où

- c est représenté par la boucle de sommet \tilde{x}_0 parcourue dans le sens positif, de sorte que $p_{\#}(c) = a$,
- d par un lacet qui ne recoupe pas la fibre de x_0 , parcouru dans le sens positif, de sorte que $p_{\#}(d) = b^3$,
- e par un lacet obtenu comme suit : on traverse de x_0 au sommet du bas à gauche, on monte positivement d'un tour le long de c , on traverse de gauche à droite au niveau 2, on suit positivement la boucle qui entoure deux fois le second cylindre jusqu'au niveau 3, on retransverse de droite à gauche, on redescend positivement le long de c , et on rejoint x_0 , de sorte que $p_{\#}(e) = bab$,
- f obtenu comme suit : on traverse de x_0 au sommet du bas à gauche, on monte positivement d'un tour le long de c , on traverse de gauche à droite au niveau 2, on fait positivement le tour complet de la boucle qui entoure deux fois le second cylindre, ce qui ramène au niveau 2, on retransverse de droite à gauche, on redescend négativement le long de c , et on rejoint x_0 , de sorte que $p_{\#}(f) = ba^2b^{-1}$.

Il résulte de la proposition 2.8.18 que le normalisateur dans $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ du sous-groupe engendré par a, b^3, bab et ba^2b^{-1} est réduit à ce sous-groupe. Il résulte de la proposition 2.8.4 que le sous-groupe de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ engendré par a, b^3, bab et ba^2b^{-1} est d'indice 3. Ce n'est pas facile à montrer directement.

C'est une illustration du fait que la théorie des revêtements est réellement utile pour démêler des questions combinatoires sur les groupes. Voici une autre illustration.

Fin du cours n^016

Théorème 19 Nielsen-Schreier. *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Preuve. Puisqu'on n'a parlé que de graphes finis et de groupes libres de type fini, seul le cas des sous-groupes d'indice fini d'un groupe libre de type fini est à notre portée. Voici tout de même l'argument général. Tout groupe libre est le groupe fondamental d'un graphe. Tout sous-groupe est le groupe fondamental d'un revêtement de ce graphe (proposition 2.8.2). Comme un revêtement d'un graphe est un graphe, et comme le groupe fondamental d'un graphe est libre (proposition 2.4.8, dans le cas des graphes finis), le sous-groupe est libre. ■

2.8.7 Revêtements du tore

Exercice 19 *Classifier les revêtements connexes du tore $T^2 = \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$.*

Solution.

D'après la proposition 2.8.2, La projection $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$ est un revêtement. Comme \mathbb{R}^2 est simplement connexe, il s'agit du revêtement universel. En particulier, T^2 est connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Le groupe d'automorphismes de ce revêtement est le groupe \mathbb{Z}^2 agissant par translations sur \mathbb{R}^2 .

D'après le corollaire 2.8.9, il y a exactement autant de revêtements de T^2 que de sous-groupes du groupe \mathbb{Z}^2 , le revêtement associé à un sous-groupe H est le quotient de \mathbb{R}^2 par H agissant par translations sur \mathbb{R}^2 . Comme \mathbb{Z}^2 est commutatif, le revêtement est automatiquement galoisien, son groupe d'automorphisme, isomorphe à \mathbb{Z}^2/H , agit simplement transitivement sur chaque fibre, en particulier sur la fibre de $0 \in T^2$, qui est constituée des "points à coordonnées entières" de E .

Un groupe abélien de type fini possède un rang, nombre de générateurs minimal de sa partie libre. Dans le cas d'un sous-groupe de \mathbb{Z}^2 , le rang est inférieur ou égal à 2.

Lorsque le rang vaut 0, $H = \{0\}$, $E = \mathbb{R}^2$ est le revêtement universel.

Lorsque le rang vaut 1, H est engendré par un vecteur entier v . E est homéomorphe à un cylindre. Si v est primitif (i.e. ses composantes sont des entiers premiers entre eux), le groupe quotient \mathbb{Z}^2/H est isomorphe à \mathbb{Z} . Dans ce cas, chaque orbite de ce groupe (qui s'identifie à une fibre de la projection $E \rightarrow T^2$ car le revêtement est galoisien) est une spirale qui passe par tous les points entiers du cylindre. Si d est le pgcd des composantes de v , le groupe quotient \mathbb{Z}^2/H est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$. Un élément (le générateur v/d de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$) agit par rotation pure autour de l'âme du cylindre. Les points entiers du cylindre se regroupent en d spirales disjointes permutées circulairement par v/d .

Lorsque le rang vaut 2, il existe une base (a, b) de \mathbb{Z}^2 et deux entiers d et d' (d' multiple de d) telle que H ait pour base da et $d'b$. Alors le groupe d'automorphismes du revêtement est isomorphe à $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/d'\mathbb{Z})$, il est fini. L'espace E est un tore, ses points entiers se regroupent de deux manières en spirales qui se referment, à d points et d' points respectivement. Lorsque $d = d' = 1$, et seulement dans ce cas, le revêtement est trivial.

2.8.8 A retenir

Soit X un espace connexe, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe.

1. Tout revêtement connexe de X est un quotient $H \backslash \tilde{X}$ du revêtement universel \tilde{X} par un sous-groupe H de $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \simeq \pi_1(X)$.
2. Deux revêtements de ce type sont isomorphes si et seulement si les sous-groupes sont conjugués.
3. Le revêtement $E = H \backslash \tilde{X}$ est galoisien si et seulement si H est distingué, et dans ce cas $\text{Aut}(E/X) \simeq \pi_1(X)/H$.

Chapitre 3

VARIETES

3.1 Sous-variétés

3.1.1 Motivation

Vérifier d'une quadrique affine non dégénérée est lisse, déterminer son hyperplan tangent.

3.1.2 Définitions

Définition 3.1.1 Soit $k \geq 1$. Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n . Un C^r -difféomorphisme de U sur V , c'est une bijection $f : U \rightarrow V$ qui est de classe C^r ainsi que sa réciproque.

Si un C^1 -difféomorphisme f est de classe C^r , alors f^{-1} est de classe C^r .

Définition 3.1.2 Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . X est une sous-variété de dimension d si pour tout point $x \in X$ il existe des ouverts U et V de \mathbb{R}^n et un C^r -difféomorphisme de U sur V qui envoie x sur 0 et envoie $U \cap X$ sur $V \cap \mathbb{R}^d$. On appelle $n - d$ la codimension de X .

Exemples 3.1.3 La réunion de deux droites sécantes n'est pas une sous-variété du plan. La réunion de deux droites parallèles l'est. Le graphe d'une fonction de classe C^r de \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R} est une sous-variété de dimension $n - 1$ de \mathbb{R}^n .

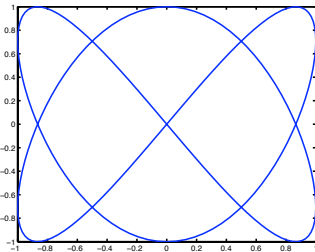
3.1.3 Immersions et submersions

Définition 3.1.4 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^r est une immersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est injective (i.e. si sa matrice jacobienne est de rang n). f est une submersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est surjective (i.e. si sa matrice jacobienne est de rang p). f est une submersion au dessus de $y \in \mathbb{R}^p$ si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$.

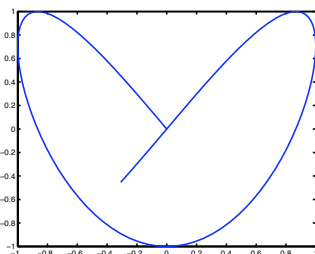
Théorème 20 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^r .

1. Si f est une immersion en $x \in U$, alors il existe un ouvert $x \in U' \subset U$ tel que $f(U')$ est une sous-variété de classe C^r et de dimension n de \mathbb{R}^p .
2. Si f est une submersion au dessus de $y \in \mathbb{R}^p$, alors $f^{-1}(y)$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété de classe C^r et de dimension $n - p$ de \mathbb{R}^n .

Exemples 3.1.5 1. L'application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ est une immersion en tout point mais son image n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 .



2. L'application $\eta :]-\pi/10, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ est une immersion en tout point, elle est injective, mais son image n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 .



3. La fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ est une submersion au-dessus de tout réel non nul. Les sphères de rayon non nul sont donc des sous-variétés de dimension $n - 1$ (i.e. de codimension 1).

Exercice 20 Vérifier que la projection stéréographique est une immersion du plan dans \mathbb{R}^3 .

3.1.4 Espace tangent

Définition 3.1.6 Soit X une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n , et $x \in X$. Les vecteurs vitesse en x des courbes contenues dans X et passant par x forment un sous-espace vectoriel appelé espace tangent à X en x et noté $T_x X$.

En effet, si $\phi : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme qui redresse X sur \mathbb{R}^d au voisinage de x , alors $T_x X = (d_x \phi)^{-1}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.1.7 Soit X une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n .

1. Si $X = f(U)$ est l'image d'une immersion, alors $T_{f(x)} X = \text{imd}_x f$.
2. Si $X = f^{-1}(y)$ est une fibre d'une submersion, alors $T_x X = \text{ker} d_x f$.

Corollaire 3.1.8 Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension d si et seulement si au voisinage de tout point $x \in X$, X s'écrit comme le graphe d'une application f de $T_x X$ dans $(T_x X)^\perp$ telle que $f(0) = 0$ et $d_0 f = 0$. En particulier, si $y \in X$ est voisin de $x \in X$, la distance de y à $T_x X$ est un $o(|y - x|)$. De même, si $v \in T_x X$ est assez petit, la distance de $x + v$ à X est un $o(|v|)$.

Preuve. Notons pr la projection orthogonale sur $T_x X$. Soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion qui paramètre X au voisinage de x . Alors $pr \circ g$ est une immersion de \mathbb{R}^d dans $T_x X$ en 0 donc un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage U de 0 dans $T_x X$. Notons $h : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ le difféomorphisme réciproque. Alors $f = pr^\perp \circ h : U \rightarrow (T_x X)^\perp$ est différentiable, sa différentielle en 0 est nulle, et son graphe coïncide avec X au voisinage de x . Si $v \in U$, $x + v + f(v) \in X$ donc $x + v$ est proche (en $o(|v|)$) de X .

L'application $y \mapsto y - f \circ pr(y - x)$ est différentiable, sa différentielle en x est l'identité, c'est un difféomorphisme local qui redresse X sur le plan affine $x + T_x X$. Il déplace le point y d'une distance en $o(|y - x|)$, donc si $y \in X$, y est proche du plan tangent. ■

Fin du cours n°17

3.1.5 Cas des quadriques affines

Proposition 3.1.9 *Soit q une forme quadratique non dégénérée en $n + 1$ variables, de matrice S . Soit Q la quadrique affine de \mathbb{R}^n définie par l'équation affine $q(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$. Alors Q est une sous-variété de classe C^∞ , et son hyperplan tangent en $x = (x_1, \dots, x_n, 1)$ est défini par l'équation linéaire en v ,*

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n S_{i,j} x_i v_j + \sum_{j=1}^n S_{n+1,j} v_j = 0.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note $p = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de composantes $(x_1, \dots, x_n, 1)$.

L'équation de Q est $f(x) = q(p) = p^\top S p = 0$. Alors, pour $v \in \mathbb{R}^n$, $d_x f(v) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}^\top S p + p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 2p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$. Supposons que $x \in Q$. Notons $S p = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$. Alors $f(x) = w x + z = 0$. Comme S est inversible et p non nul, $S p$ est non nul, donc $w \neq 0$ et $z \neq 0$. Alors la forme linéaire $d_x f : v \mapsto 2p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 2w^\top v$ est surjective. Autrement dit, f est une submersion au dessus de 0. En particulier, $Q = f^{-1}(0)$ est une sous-variété d'espace tangent $\ker d_p f$. ■

3.2 Variétés

3.2.1 Motivation

On voudrait traiter le cas des quadriques projectives. Pour cela, il faut définir la notion de sous-variété de l'espace projectif.

3.2.2 Structure différentielle sur un espace topologique

Définition 3.2.1 *Soit X un espace topologique. Un atlas de classe C^r pour X est la donnée*

- d'un recouvrement de X par des ouverts U_i ;
- pour tout i, j , d'un homéomorphisme $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ ouvert de \mathbb{R}^n ,

tels que, pour tous i et j , $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ est un C^r -difféomorphisme.

On appelle les ϕ_i les, *cartes* de l'atlas, et les U_i les *domaines de cartes*.

Définition 3.2.2 *Deux atlas (U_i, ϕ_i) et (W_α, ψ_α) sont compatibles si les applications $\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1}$ sont des C^r -difféomorphismes. Une structure différentielle sur X est une classe d'atlas compatibles.*

On peut alors prendre l'atlas formé de toutes les cartes compatibles avec un choix de (U_i, ϕ_i) . On appelle *variété* un espace topologique muni d'une structure différentielle.

Exemple 3.2.3 *Sur \mathbb{R} considérons les deux atlas à une carte $(U = \mathbb{R}, \phi : x \mapsto x)$ et $(W = \mathbb{R}, \psi : x \mapsto x^3)$. Ces deux atlas ne sont pas compatibles.*

En effet, $x \mapsto x^3$ n'est pas un difféomorphisme. Il y a donc plein de structures différentielles différentes sur \mathbb{R} . On verra qu'elle sont toutes difféomorphes.

Exemple 3.2.4 Sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} considérons l'atlas à deux cartes $U_1 =]0, 1[\text{ mod } 1$, $\phi_1(x \text{ mod } 1) = x$ et $U_2 =]-1/2, 1/2[$, $\phi_2(x \text{ mod } 1) = x$. Cela définit une structure différentielle sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

En effet, $U_1 \cap U_2 =]0, 1/2[\cup]1/2, 1[\text{ mod } 1$, $\phi_1(U_1 \cap U_2) =]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$, $\phi_2(U_1 \cap U_2) =]0, 1/2[$ et pour $y \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$, deux cas,

- si $y \in]0, 1/2[$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = y$;
- si $y \in]1/2, 1[$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = y - 1$.

Dans les deux moitiés, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est un C^∞ -difféomorphisme.

3.2.3 Objets différentiables

Toute propriété *locale* invariante par C^r -difféomorphisme a un sens évident sur une variété différentielle. Par exemple,

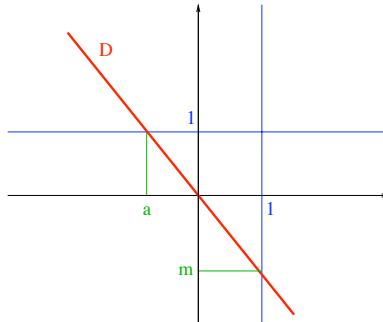
Définition 3.2.5 - Une application $f : X \rightarrow Y$ entre variétés est de classe C^r si, pour toutes cartes (U_i, ϕ_i) de X et (W_α, ψ_α) de Y , $\psi_\alpha \circ f \circ \phi_i^{-1}$ est de classe C^r .

- Une application $f : X \rightarrow Y$ entre variétés est une immersion, submersion, difféomorphisme local, si pour toutes cartes (U_i, ϕ_i) de X et (W_α, ψ_α) de Y , $\psi_\alpha \circ f \circ \phi_i^{-1}$ l'est.
- Une application $f : X \rightarrow Y$ entre variétés est un difféomorphisme si c'est un difféomorphisme local bijectif.
- Un sous-ensemble $Y \subset X$ est une sous-variété si et seulement si pour toutes cartes (U_i, ϕ_i) de X , $\phi_i(U_i \cap Y)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n .
- Deux sous-variétés $Z \subset X$ et $Y \subset X$ sont tangentes en x si et seulement si pour une (toute) carte (U_i, ϕ_i) de X définie en x , $\phi_i(Z)$ et $\phi_i(Y)$ sont tangentes en $\phi_i(x)$.

Terminologie. Dans la suite, *différentiable* signifie de classe C^r , où r est déterminé par le contexte.

3.2.4 Structure différentielle sur la droite projective

Une droite vectorielle D non verticale de \mathbb{R}^2 est représentée par une pente $m = \phi_1(D)$, c'est le réel tel que $(1, m) \in D$. Si D n'est pas horizontale, elle possède une antipente $a = \phi_2(D)$, c'est le réel a tel que $(a, 1) \in D$. Les deux applications pente et antipente constituent des cartes, et le changement de carte $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : m \mapsto a = 1/m$ est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cet atlas définit une structure différentielle sur la droite projective.



3.2.5 Structure différentielle sur l'espace projectif

Définition 3.2.6 On appelle ouvert affine U_i de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'ensemble des points dont la i -ème coordonnée homogène est non nulle. On appelle carte affine l'application réciproque de l'homéomorphisme $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$.

Alors $\phi_i(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{j'} \neq 0\}$, où $j' = j$ si $j < i$, $j' = j - 1$ si $j > i$. Comme

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_{j'}}, \dots, \frac{1}{x_{j'}}, \dots, 1, \dots, \frac{x_1}{x_{j'}} \right)$$

est un C^∞ -difféomorphisme, on obtient ainsi une structure différentielle sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Définition 3.2.7 *Dela même façon, on définit une structure différentielle de dimension $2n$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.*

Exemple 3.2.8 *Une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) est une sous-variété.*

En effet, dans toute carte affine, une sous-variété linéaire est envoyée sur un sous-espace affine.

Fin du cours n^018

Lemme 3.2.9 1. *Soit X une variété de classe C^r . Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ une application de classe C^r . Alors l'application induite $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est de classe C^r .*

2. *Soit Y une variété de classe C^r . Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow Y$ une application de classe C^r telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et tout $\lambda \neq 0$, $f(\lambda v) = f(v)$. Alors l'application induite $\bar{f} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow Y$ est de classe C^r .*

Preuve. 1. Ecrivons $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$. Soit $x_0 \in X$, $w = f(x_0)$. Pour simplifier les notations, supposons que $w_{n+1} = f_{n+1}(x_0) \neq 0$. Alors, au voisinage de $\mathbb{P}(w)$, on peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} , et

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} \circ \bar{f}(x) &= \phi_{n+1}[f_1(x) : f_2(x) : \dots : f_{n+1}(x)] \\ &= \left(\frac{f_1(x)}{f_{n+1}(x)}, \dots, \frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} \right). \end{aligned}$$

C'est bien une application de classe C^r d'un ouvert de X dans \mathbb{R}^n , donc \bar{f} est de classe C^r .

2. Soit $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v \neq 0$. Pour simplifier les notations, supposons que $v_{n+1} \neq 0$. Alors, au voisinage de $\mathbb{P}(v)$, on peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} , et

$$\begin{aligned} \bar{f} \circ \phi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= \bar{f}[1 : x_1 : \dots : x_n] \\ &= f(1, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

C'est bien une application de classe C^r d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans Y , donc \bar{f} est de classe C^r . ■

Exemple 3.2.10 *Une application projective est de classe C^∞ là où elle est définie.*

En effet, on applique successivement les énoncés 1 et 2 du lemme.

3.2.6 Cas des quadriques projectives

Proposition 3.2.11 *Soit q une forme quadratique non dégénérée en $n + 1$ variables, de matrice S . Soit \mathcal{Q} la quadrique projective de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ définie par q . Alors \mathcal{Q} est une sous-variété de classe C^∞ . Soit $p \in \mathcal{Q}$. Alors l'hyperplan polaire de p est tangent à \mathcal{Q} en p . Cet énoncé reste vrai sans changement si on remplace \mathbb{R} par \mathbb{C} .*

Preuve. On peut supposer que la dernière coordonnée homogène de p est non nulle. On utilise la carte affine $\phi_{n+1} : U_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors $\phi_{n+1}(U_{n+1} \cap \mathcal{Q}) = Q$ est la quadrique affine d'équation $q(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$, qui est une sous-variété. Cela prouve que \mathcal{Q} est une sous-variété. $\phi_{n+1}(U_{n+1} \cap \mathbb{P}(p^\perp))$ est un hyperplan affine, parallèle à l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, i.e. à l'hyperplan tangent à Q en $\phi_{n+1}(p)$. On conclut que H est tangent à \mathcal{Q} en p . ■

Exercice 21 *A quelle condition l'intersection de deux quadriques projectives non dégénérées est-elle une sous-variété de l'espace projectif ?*

3.2.7 Revêtements et structures différentielles

Proposition 3.2.12 *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Etant donnée une structure différentielle sur X , il existe une unique structure différentielle sur E qui rend p différentiable. Inversement, si E est une variété et si pour toute section locale s de p , $s \circ p$ est un difféomorphisme, alors il existe une unique structure différentielle sur X qui rend p différentiable*

Preuve. Si X est une variété, on recouvre X par des ouverts U_i qui sont à la fois contenus dans des ouverts de cartes $\phi_i|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ et trivialisants pour le revêtement, i.e. $p^{-1}(U_i) = \coprod_j s_j(U_i)$. Les cartes $\phi \circ p|_{s_j(U_i)} : s_j(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un atlas pour E .

Inversement, supposons que E est une variété. On recouvre E par des ouverts U_i qui sont à la fois contenus dans des ouverts de cartes $\phi_i|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ et tels que $p(U_i)$ soit trivialisant, i.e. $p^{-1}(p(U_i)) = \coprod_j s_j(p(U_i))$. Les cartes $\phi_i \circ s_j : s_j(p(U_i)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un atlas pour X . En effet, deux choix j et j' différents donnent un changement de carte $\phi_i \circ s_{j'} \circ (\phi_i \circ s_j)^{-1} = \phi_i \circ s_{j'} \circ p \circ (\phi_i)^{-1}$ qui est un difféomorphisme. ■

Exemple 3.2.13 *Soit G un groupe discret qui agit librement et proprement par difféomorphismes d'une variété E . Alors l'espace quotient $X = G \backslash E$ hérite d'une structure différentielle qui rend le revêtement $p : E \rightarrow X$ différentiable.*

En effet, si s est une section locale de p , $s \circ p$ est la restriction à un ouvert d'un élément de G , donc $s \circ p$ est un difféomorphisme.

3.3 Partitions de l'unité

3.3.1 Motivation

Comment fabriquer des objets différentiables, ne serait-ce qu'une fonction non constante, sur une variété? En combinant des morceaux donnés dans des cartes.

3.3.2 Construction

Définition 3.3.1 *Soit X un espace topologique. Soit u une fonction continue sur X . Le support de u est le plus petit fermé en dehors duquel u est nulle.*

Rappel 3.3.2 *Il existe une fonction paire χ sur \mathbb{R} , de classe C^∞ , à support dans $] -1, 1[$, qui vaut 1 sur un voisinage de 0.*

Lemme 3.3.3 *Soit X une variété séparée de classe C^r , soit $x \in X$, soit U_x un ouvert contenant x . Il existe un voisinage ouvert V_x de x et une fonction χ_x de classe C^r sur X , à support dans U_x , qui vaut 1 sur V_x .*

Preuve. La structure différentielle fournit une carte $\phi : U \rightarrow V$. Supposons que V contient une boule de rayon ϵ . Pour $y \in U$, on pose $\chi_x(y) = \chi(\phi(y)/\epsilon)$, où χ est la fonction modèle sur \mathbb{R} , à support dans $] -1, 1[$. Alors le support de χ_x est un compact K de U . Comme X est séparé, c'est un fermé de X . Tout point $z \notin U$ possède un voisinage disjoint de K . On peut donc prolonger χ_x par 0 en dehors de U , elle reste de classe C^r . ■

Définition 3.3.4 *Soit X un espace topologique. Soient W_α des ouverts qui recouvrent X . On appelle partition de l'unité subordonnée à (W_α) la donnée, pour chaque α , d'une fonction positive ou nulle χ_α sur X , à support compact dans W_α , de sorte que*

1. Pour tout $x \in X$, seuls un nombre fini parmi les nombres $\chi_\alpha(x)$ sont non nuls.
2. $\sum_\alpha \chi_\alpha \equiv 1$.

Théorème 21 Soit X une variété compacte de classe C^r . Soient W_α des ouverts en nombre fini qui recouvrent X . Alors X possède une partition de l'unité de classe C^r subordonnée à (W_α) .

Preuve. Pour chaque $x \in X$, on applique le lemme 3.3.3 à l'intersection U_x des W_α qui contiennent x . On obtient une fonction χ_x qui vaut 1 sur un ouvert V_x . Les V_x forment un recouvrement ouvert de X . Comme X est compacte, on peut choisir un sous-recouvrement fini, i.e. une partie finie $F \subset X$ telle que la somme $\sum_{x \in F} \chi_x > 0$ partout. On note $\eta_\alpha = \sum_{x \in F \cap W_\alpha} \chi_x$. C'est une fonction à support compact contenu dans W_α . Comme $\sum_\alpha \eta_\alpha \geq \sum_{x \in F} \chi_x > 0$, on peut poser

$$\chi_\alpha = \frac{\eta_\alpha}{\sum_\alpha \eta_\alpha}.$$

Par construction, c'est une fonction de classe C^r à support dans W_α et $\sum_\alpha \chi_\alpha \equiv 1$. ■

3.3.3 Plongement

Théorème 22 H. Whitney (1936). Toute variété compacte est difféomorphe à une sous-variété de \mathbb{R}^n .

Preuve. Soit X une variété compacte de dimension n . Soit $(U_i, \phi_i)_{i=1, \dots, N}$ un atlas fini pour la structure différentielle de X . Pour chaque $x \in X$, on applique le lemme 3.3.3 à l'intersection U_x des U_i qui contiennent x . On obtient un ouvert V_x et une fonction χ_x . On applique à nouveau le lemme 3.3.3 à V_x , on obtient une nouvelle fonction χ'_x et un ouvert V'_x . Les V'_x forment un recouvrement ouvert de X . Comme X est compacte, on peut choisir un sous-recouvrement fini, i.e. une partie finie $F \subset X$ telle que les $V'_z, z \in F$, suffisent à recouvrir X . On note N le nombre d'éléments de F .

Pour chaque $z \in F$, on choisit une des cartes définies au voisinage de z , et on note ϕ_z (resp. ϕ'_z) deux copies de cette carte, vues comme des applications à valeurs dans des facteurs tous distincts du produit $\mathbb{R}^{2nN} = \prod_{z \in F} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On définit une application différentiable $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{2nN}$ par $f(x) = (\dots, \chi_z(x)\phi_z(x), \chi'_z(x)\phi'_z(x), \dots)_{z \in F}$. f est bien définie, car lorsque $x \notin U_z, \chi_z(x) = 0$ donc on n'a pas besoin de connaître $\phi_z(x)$.

Alors f est une immersion. En effet, au voisinage de x , l'une des fonctions χ_z vaut 1, donc la différentielle en x de la z -ème composante $\chi_z\phi_z$ est de rang n . *A fortiori*, $d_x f$ est de rang n .

f est injective. En effet, si $f(x) = f(y)$, il existe z telle que $\chi'_z(x) > 0$ et $\chi'_z(y) > 0$, d'où $x \in V'_z, y \in V'_z, \chi_z(x) = \chi_z(y) = 1$ donc $\phi_z(x) = \phi_z(y)$. Comme ϕ_z est injective, on conclut que $x = y$.

f est un homéomorphisme sur son image, par compacité.

$f(X)$ est une sous-variété. En effet, pour tout $w \in f(X), w = f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U)$ soit une sous-variété. Comme $f(U)$ est un voisinage de w dans $f(X)$, cela prouve que $f(X)$ est une sous-variété.

f est un difféomorphisme, car f est un difféomorphisme local bijectif. ■

Remarque 3.3.5 Le théorème de H. Whitney contient davantage d'information.

1. Il s'applique aussi à des variétés non compactes (voir ci-dessous).
2. Il donne une meilleure borne sur la dimension de l'espace d'arrivée : Whitney plonge une variété de dimension n dans \mathbb{R}^{2n} .
3. Whitney montre que pour certaines valeurs de n , cette borne ne peut pas être améliorée.

Remarque 3.3.6 Partitions de l'unité pour des espaces topologiques non compacts.

Il faut préalablement pouvoir extraire d'un recouvrement un recouvrement de multiplicité finie (i.e. chaque point est contenu dans un nombre fini d'ouverts). On appelle cette propriété la *paracompacité*. Etre localement compact ne suffit pas. Un espace localement compact séparé X est paracompact si et seulement si c'est une réunion disjointe de sous-espaces X_j tels que chaque X_j soit une réunion dénombrable de compacts. Il existe des variétés séparées non paracompactes.

3.3.4 Cas de l'espace projectif

Dans le cas de l'espace projectif, il y a des plongements explicites.

Exercice 22 Soit $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ l'application qui à une droite p associe le projecteur orthogonal sur p . Vérifier que f est un difféomorphisme sur son image.

Solution. Soit p une droite, soit w un vecteur directeur de p . Le projecteur orthogonal sur p est donné par la formule

$$f(p)(u) = \frac{w^\perp u}{w^\perp w} w = \frac{1}{w^\perp w} w w^\perp u,$$

donc sa matrice est $\frac{1}{w^\perp w} w w^\perp$. C'est une fonction de classe C^∞ de w , donc f est de classe C^∞ .

L'image de f est l'ensemble \mathcal{P} des projecteurs orthogonaux de rang un. L'application réciproque associe à un projecteur son image. Cela montre que f est un homéomorphisme de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sur \mathcal{P} .

Soit $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \dots : 0 : 1]$. On peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} au voisinage de p . Dans cette carte,

$$g = f \circ \phi_{n+1}^{-1}(x) = \frac{1}{1 + |x|^2} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\perp & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + |x|^2} \begin{pmatrix} x x^\perp & x^\perp \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

La différentielle de g en $x = 0$ est

$$v \mapsto \begin{pmatrix} v x^\perp + x v^\perp & v^\perp \\ v & 0 \end{pmatrix},$$

qui est injective, puisque le troisième bloc l'est. Cela prouve que f est une immersion en p . Comme on l'a vu lors de la preuve du théorème de Whitney, une immersion qui est un homéomorphisme sur son image est un difféomorphisme sur une sous-variété. ■

3.4 Espace tangent

3.4.1 Espace tangent

L'espace tangent est l'endroit où vivent les vecteurs vitesse des courbes. Cela suggère la définition suivante.

Définition 3.4.1 Soit X une variété et $x \in X$. Décidons que deux courbes γ et η telles que $\gamma(0) = \eta(0) = x$ ont même vitesse en $t = 0$ si, dans une carte ϕ définie au voisinage de x , les images $\phi \circ \gamma$ et $\phi \circ \eta$ ont même vitesse en $t = 0$. L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle l'espace tangent de X en x , noté $T_x X$.

Clairement, la carte $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ identifie $T_x X$ à l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Une autre carte $\psi : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ donne une identification qui diffère de la première par l'isomorphisme $d_{\phi(x)}(\psi \circ \phi^{-1})$. Par conséquent, $T_x X$ possède une structure d'espace vectoriel.

Définition 3.4.2 Une application différentiable $f : X \rightarrow Y$ entre variétés induit une application linéaire $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ appelée sa différentielle. En particulier, pour une sous-variété $Y \subset X$, $T_y Y$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $T_y X$.

Une application f est une immersion (resp. submersion) en x si et seulement si sa différentielle est injective (resp. surjective). Deux sous-variétés sont tangentes en x si et seulement si elles ont même espace tangent en x .

Exemple 3.4.3 Soit V un espace vectoriel. Soit $f \in \text{Gl}(V)$. La différentielle de f en p se calcule comme suit. On identifie $T_p \mathbb{P}(V)$ à $\text{Hom}(p, V/p)$ et $T_{f(p)} \mathbb{P}(V)$ à $\text{Hom}(f(p), V/f(p))$. Alors $d_p f$ est l'isomorphisme de $\text{Hom}(p, V/p)$ sur $\text{Hom}(f(p), V/f(p))$ induit par f .

En utilisant une carte affine, on vérifie que tout vecteur tangent w à $\mathbb{P}(V)$ en p est la vitesse en 0 d'une droite $t \mapsto \gamma(t) = \mathbb{P}(u + tv)$, u vecteur directeur de p . Montrons qu'une autre droite $t \mapsto \mathbb{P}(u' + tv')$ définit le même vecteur tangent w si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $u' = \lambda u, v' = \lambda v + \mu u$. Choisissons une base de V telle que $p = [0 : \dots : 0 : 1]$, avec $u = (0, \dots, 0, 1)$, $u' = (0, \dots, 0, \lambda)$. Alors

$$\phi_{n+1}(\mathbb{P}(u + tv)) = \left(\frac{tv_1}{1 + tv_{n+1}}, \dots, \frac{tv_n}{1 + tv_{n+1}} \right), \quad \phi_{n+1}(\mathbb{P}(u' + tv')) = \left(\frac{tv'_1}{\lambda + tv'_{n+1}}, \dots, \frac{tv'_n}{\lambda + tv'_{n+1}} \right),$$

dont les dérivées en $t = 0$ valent respectivement (v_1, \dots, v_n) et $(v'_1, \dots, v'_n)/\lambda$. Les deux droites ont même vitesse si et seulement si $v' - \lambda v$ est un multiple de u .

Par conséquent, l'homomorphisme $p \rightarrow V/p$ qui envoie u sur $v \bmod p$ ne dépend que du vecteur tangent w et non du choix de vecteur directeur u . Alors $f \circ \gamma(t) = f(u) + tf(v)$, donc le vecteur tangent $d_p f(w)$ correspond à l'homomorphisme $f(p) \rightarrow V/f(p)$ qui envoie $f(u)$ sur $f(v)$.

3.4.2 Champs de vecteurs

Définition 3.4.4 *Un champ de vecteurs sur une variété X , c'est une application qui à chaque point x associe un vecteur tangent $\xi(x) \in T_x X$, de sorte que, dans une carte ϕ , l'application $x \mapsto d_x \phi(\xi(x))$ soit différentiable.*

Remarquer que lorsque X est de classe C^r , on peut parler de champs de vecteurs de classe C^{r-1} , mais pas mieux.

Remarque 3.4.5 *Lorsque $X \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété, un champ de vecteurs est aussi une application différentiable $\xi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il revient au même de dire que cette application est de classe C^{r-1} .*

Remarque 3.4.6 *Si $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme, et ξ un champ de vecteurs sur X , le champ de vecteurs transporté par f sur Y est noté $f_* \xi$. On a $(f_* \xi)(y) = (d_{f^{-1}(y)} f)(\xi(f^{-1}(y)))$.*

Exemple 3.4.7 *Soit V un espace vectoriel, soit $L \in \text{End}(V)$. Alors L détermine un champ de vecteurs sur $\mathbb{P}(V)$.*

En effet, l'homomorphisme $L|_p : p \rightarrow V/p$ définit un vecteur tangent en p , vitesse de la droite $\mathbb{P}(u + tL(u))$, $u \in p$.

3.4.3 Flots

Définition 3.4.8 *Soit ξ un champ de vecteurs sur une variété X . Une ligne intégrale de ξ est la donnée d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et d'une courbe différentiable $\gamma : I \rightarrow X$ solution de l'équation différentielle $\gamma'(t) = \xi(\gamma(t))$, $t \in I$.*

Théorème 23 *Soit X une variété de classe C^r , $r \geq 2$, soit ξ un champ de vecteurs de classe C^k , $1 \leq k \leq r - 1$.*

1. Existence locale. *Pour tout point $x \in X$, il existe $\epsilon > 0$ et une ligne intégrale de ξ définie sur $] - \epsilon, \epsilon[$ et passant par x en $t = 0$.*
2. Unicité locale. *Si $\gamma_1 : I_1 \rightarrow X$ et $\gamma_2 : I_2 \rightarrow X$ sont deux lignes intégrales de ξ de même condition initiale x , alors $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$.*
3. Solution maximale. *Pour tout point $x \in X$, il existe une unique solution maximale $\gamma_x : I_x \rightarrow X$ de condition initiale x . Si K est un compact de X et si, pour tout $t \in I_x$, $t \geq 0$, $\gamma_x(t) \in K$, alors $\sup I_x = +\infty$.*

4. Dépendance par rapport à la condition initiale. Soit

$$W = \bigcup_{x \in X} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times X.$$

Alors W est un ouvert, et l'application $\Phi : W \rightarrow X$ définie par $\Phi(t, x) = \gamma_x(t)$ est de classe C^k .

5. Flot. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $W_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$. Alors, pour $t \geq 0$, l'application $\phi_t : W_t \rightarrow W_{-t}$ est un C^k -difféomorphisme, et, lorsque tout est défini, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Corollaire 3.4.9 Si ξ est à support compact, $W = \mathbb{R} \times X$, et l'application $t \mapsto \phi_t$ est un homomorphisme de groupes de \mathbb{R} dans $\text{Diff}(X)$.

Définition 3.4.10 On appelle $t \mapsto \phi_t$ le groupe à un paramètre engendré par ξ , ou plus brièvement le flot de ξ .

Remarque 3.4.11 Soit $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme, et ξ un champ de vecteurs sur X , $t \mapsto \phi_t$ le flot de ξ . Alors le flot de $f_*\xi$ est $t \mapsto f \circ \phi_t \circ f^{-1}$.

Exemple 3.4.12 Soit V un espace vectoriel de dimension finie, soit $L \in \text{End}(V)$, soit ξ le champ de vecteurs correspondant. Alors le flot ϕ_t de ξ est formé des bijections projectives associées aux bijections linéaires e^{tL} .

En effet, si $p \in \mathbb{P}(V)$ et u est un vecteur directeur de p , la courbe $s \mapsto e^{sL}(p)$ est tangente en $s = t$ à la droite $s \mapsto e^{tL}u + (s - t)L e^{tL}u$ dont la vitesse en $s = t$ est $L|_{e^{tL}p} : e^{tL}p \rightarrow V/e^{tL}p$, c'est une ligne intégrale du champ ξ .

Exercice 23 Soit X une variété séparée et connexe. On note $\text{Diff}_c(X)$ le groupe des difféomorphismes de X qui valent l'identité hors d'un compact. Montrer que $\text{Diff}_c(X)$ agit transitivement sur X , i.e. pour tous $x, x' \in X$, il existe un difféomorphisme à support compact ϕ tel que $\phi(x) = x'$.

Solution. Soit $x \in X$. Soit $\phi_x : U_x \rightarrow V_x$ une carte au voisinage de x . Soit χ une fonction à support compact sur V_x qui vaut 1 sur un voisinage W_x de $0 = \phi(x)$.

Soit $z \in W_x$. Construisons un difféomorphisme à support dans V_x qui envoie 0 sur z . Soit ζ le champ de vecteurs constant sur \mathbb{R}^n qui vaut z . Soit η le champ de vecteurs à support compact sur \mathbb{R}^n défini par $\eta = \chi\zeta$. Le segment de droite $t \mapsto tz$, $t \in [-1, 1]$, est une ligne intégrale de η de condition initiale 0. Par conséquent, le flot $t \mapsto \psi_t$ de η satisfait $\psi_1(0) = z$.

Comme ψ_1 est à support dans V_x , le difféomorphisme $\phi^{-1} \circ \psi_1 \circ \phi$ de U_x , à support compact dans U_x , se prolonge en un difféomorphisme f de X tel que $f(x) = \phi^{-1}(z)$. Cela montre que l'orbite de x sous $\text{Diff}_c(X)$ contient un voisinage de x . En fait, on en déduit que les orbites du groupe $\text{Diff}_c(X)$ sont ouvertes. Comme X est connexe, elle ne peut être partitionnée en ouverts. On conclut qu'il n'y a qu'une orbite. ■

3.4.4 Intersection de sous-variétés

Soient Y et Y' deux sous-variétés de X . A quelle condition $Y \cap Y'$ est elle une sous-variété? Si $f : X \rightarrow Z$ et $f' : X \rightarrow Z'$ sont des submersions et $Y = f^{-1}(z)$, $Y' = f'^{-1}(z')$, il suffit que $(f, f') : X \rightarrow Z \times Z'$ soit une submersion.

Lemme 3.4.13 Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors l'application naturelle $E \rightarrow E/F \times E/F'$ est surjective si et seulement si $E = F + F'$.

Preuve. Le noyau de l'application naturelle $L : E \rightarrow E/F \times E/F'$ est $F \cap F'$. Comme

$$\dim(F \cap F') + \dim(F + F') = \dim(F) + \dim(F') \quad \text{et} \quad \dim(\ker L) + \dim(\text{im} L) = \dim(E),$$

$$\begin{aligned}
 \text{codim}(\text{im}L) &= \dim(E/F \times E/F') - \dim(\text{im}L) \\
 &= \dim(E/F) + \dim(E/F') - \dim(E) + \dim(F \cap F') \\
 &= \dim(E) - \dim(F) - \dim(F') + \dim(F) + \dim(F') - \dim(F + F') \\
 &= \text{codim}(F + F'),
 \end{aligned}$$

donc L est surjective si et seulement si $E = F + F'$.

Autre argument. Remarquons que le dual de E/F s'identifie au sous-espace de E^* polaire F^0 de F , i.e. constitué des formes linéaires qui s'annulent sur F . Alors $(E/F)^* \times (E/F')^* = F^0 \times F'^0$. L'adjoint de L s'écrit $L^* : F^0 \times F'^0 \rightarrow E^*$, $(f, f') \mapsto f + f'$. Son noyau est l'ensemble des couples (f, f') tels que $f' = -f \in F^0 \cap F'^0$. Il s'identifie à $(F + F')^0$. Par conséquent, L^* est injective si et seulement si $E = F + F'$. ■

Définition 3.4.14 *On dit que deux sous-espaces vectoriels F et F' d'un espace vectoriel E sont transverses si $E = F + F'$. On dit que deux sous-variétés Y et Y' de X sont transverses si leurs espaces tangents sont transverses en tout point de l'intersection $Y \cap Y'$.*

Exemple 3.4.15 *Deux plans de \mathbb{R}^3 sont transverses dès qu'ils sont distincts. Une droite D et un plan P de \mathbb{R}^3 sont transverses si et seulement si D n'est pas contenue dans P . Deux droites vectorielles de \mathbb{R}^3 , en tant que sous-espaces vectoriels, ne sont jamais transverses. Deux droites affines de \mathbb{R}^3 , en tant que sous-variétés, elles sont transverses si et seulement si elles sont disjointes.*

Remarque 3.4.16 *L'ensemble des couples (f, f') d'applications linéaires dont les images sont transverses est un ouvert de $\text{Hom}(F, E) \times \text{Hom}(F', E)$. Cet ouvert est non vide si et seulement si $\dim(F) + \dim(F') \geq \dim(E)$. Il est alors dense.*

Autrement dit, lorsque la condition sur les dimensions est satisfaite, deux sous-espaces en position générale sont transverses.

Proposition 3.4.17 *Si deux sous-variétés Y et Y' de X sont transverses, alors $Y \cap Y'$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété de codimension*

$$\text{codim}(Y \cap Y') = \text{codim}(Y) + \text{codim}(Y').$$

Preuve. Il s'agit d'une propriété locale. Localement, Y et Y' sont définies par des submersions f et f' . D'après le lemme 3.4.13, (f, f') est une submersion, donc $Y \cap Y'$ est une sous-variété. ■

Fin du cours n^020

Exercice 24 *Etudier l'intersection d'un tore de révolution avec une famille de plans parallèles.*

3.5 Orientation

3.5.1 Rappel : orientation d'un espace vectoriel

Certaines opérations de la géométrie euclidienne, comme le produit mixte et le produit vectoriel, nécessitent le choix d'une orientation. Par exemple, la définition du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace ambiant nécessite la convention des 3 doigts de la main droite.

En effet, le produit mixte de n vecteurs de \mathbb{R}^n euclidien, c'est, au signe près, le déterminant dans une base orthonormée. Mais deux bases orthonormées diffèrent d'une isométrie dont le déterminant peut valoir 1 ou -1 , d'où une ambiguïté sur le signe, qu'on lève en fixant une fois pour toute une classe d'équivalence de bases de même signe.

Bien qu'on l'ait motivée par des considérations euclidiennes, et qu'on y pense souvent en termes euclidiens (une base du plan est directe si et seulement si les vecteurs forment un angle compris entre 0 et π , elle est indirecte si et seulement si les vecteurs forment un angle compris entre π et 2π), la notion d'orientation ne nécessite pas de structure euclidienne. Toute bijection linéaire entre espaces vectoriels transporte les orientations de l'un sur l'autre.

3.5.2 Orientation d'une variété

Définition 3.5.1 Soit X une variété. Orienter X , c'est choisir une orientation de chaque espace tangent de façon continue, i.e., si $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ est une carte, les orientations transportées par les différentielles $d_x\phi : T_xX \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont toutes les mêmes.

Remarque 3.5.2 Définition équivalente. Orienter X , c'est choisir un atlas formé de cartes à valeurs dans des espaces vectoriels orientés, telles que les changements de cartes préservent l'orientation.

En effet, un tel atlas permet d'orienter de façon continue les espaces tangents. Réciproquement, une fois les espaces tangents orientés, l'atlas des cartes préservant l'orientation convient.

3.5.3 Orientabilité

Définition 3.5.3 Une variété est orientable si elle possède une orientation.

Exemple 3.5.4 La sphère est orientable.

En effet, on peut définir sa structure différentielle au moyen de 2 cartes seulement, donc un seul changement de cartes, qu'on peut supposer direct. Autre procédé : fixer une orientation sur \mathbb{R}^{n+1} , munir $T_vS^n = v^\perp$ de la classe des bases (v_1, \dots, v_n) telles que (v_1, \dots, v_n, v) est une base directe de \mathbb{R}^n .

Proposition 3.5.5 Soit G un groupe discret qui agit librement et proprement par difféomorphismes d'une variété V . Alors la variété quotient $X = GV$ est orientable si et seulement si V est orientable et G préserve l'orientation.

Preuve. Si X est orienté, on peut tirer en arrière l'orientation de X par le revêtement $p : V \rightarrow X$, en une orientation de V qui est préservée par les transformations de revêtements. Réciproquement, si G préserve l'orientation, celle-ci passe au quotient sans ambiguïté. ■

Corollaire 3.5.6 L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair.

Preuve. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = G \backslash S^n$ est engendré par l'antipodie $a : v \mapsto -v$. a préserve (resp. change) l'orientation de \mathbb{R}^{n+1} si et seulement si n est impair (resp. pair), et a préserve la normale sortante, donc a préserve (resp. change) l'orientation de S^n si et seulement si n est impair (resp. pair). ■

Proposition 3.5.7 Toute variété X possède un revêtement à deux feuillets $p : X^{or} \rightarrow X$, appelé revêtement d'orientation, qui a la propriété suivante : X^{or} est trivial si et seulement si X est orientable. De plus, X^{or} est une variété orientable, et X est le quotient de X^{or} par une action du groupe à deux éléments.

Preuve. Soit X^{or} l'ensemble des couples (x, o_x) où o_x est une orientation de T_xX . On note $p : X^{or} \rightarrow X, (x, o_x) \mapsto x$. Si $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte, et si \mathbb{R}^n est muni d'une orientation o , on définit une section $s_{U,\phi,o}$ de p au-dessus de U par $s_{U,\phi,o}(x) = (x, (d_x\phi)^{-1}(o))$. Les ensembles $s_{U,\phi,o}(U)$ forment la base d'une topologie sur X^{or} , qui rend p et les $s_{U,\phi,o}$ continues. Comme $p^{-1}(U) = s_{U,\phi,o}(U) \amalg s_{U,\phi,-o}(U)$, p est un revêtement. Comme il n'a que 2 feuillets, il est automatiquement galoisien.

Par définition, une orientation d'un ouvert V de X correspond à une section continue de p au-dessus de V . Par conséquent, X est orientable si et seulement si p possède une section globale. Pour un revêtement galoisien, cela équivaut à être trivial.

Sur l'image $s_{U,\phi,o}(U)$, $\phi \circ p$ est un homéomorphisme sur un ouvert de \mathbb{R}^n . On obtient ainsi une structure différentielle sur X^{or} qui fait de p un difféomorphisme local (cf. proposition 3.2.12). Cet atlas définit une orientation. En effet, étant données deux cartes $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi' : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ et des orientations o et o' sur \mathbb{R}^n telles que $s_{U,\phi,o}(U) \cap s_{U',\phi',o'}(U') \neq \emptyset$, nécessairement $(d_x\phi)^{-1}(o) = (d_x\phi')^{-1}(o')$ aux points de $U \cap U'$, donc le changement de cartes $\phi' \circ p \circ (\phi \circ p)^{-1} = \phi' \circ \phi^{-1}$ préserve l'orientation. Cela prouve que X^{or} est orientable. ■

Corollaire 3.5.8 *Toute variété simplement connexe est orientable.*

Exemples 3.5.9 1. Si $X = G \setminus E$ n'est pas orientable, et si E est orientable, alors $X^{or} = G^+ \setminus E$, où G^+ est le sous-groupe de G formé des difféomorphismes qui préservent l'orientation.

2. La bande de Möbius est le quotient d'une bande infinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1\}$ par le groupe engendré par le difféomorphisme $g : (x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. Elle n'est pas orientable. Son revêtement des orientations est difféomorphe à la bande ordinaire. Remarquer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ contient une bande de Möbius.
3. La bijection affine g ci-dessus normalise le groupe des translations entières (i.e. si $\tau \in \mathbb{Z}^2$ est une translation entière, alors $g \circ \tau \circ g^{-1}$ est encore une translation entière). Par conséquent, elle induit un difféomorphisme \bar{g} du tore $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, qui engendre un groupe \bar{G} à 2 éléments. La bouteille de Klein est le quotient du tore par \bar{G} . Son revêtement des orientations est le tore.

3.6 Eléments de topologie différentielle

Désormais, on va donner quelques résultats de *topologie différentielle*, i.e. qui tournent autour du problème de classification des variétés. Les démonstrations ne seront pas toujours complètes.

3.6.1 Régularité

Du point de vue de la topologie différentielle, il n'y a aucune différence entre C^1 , C^r , $r \geq 2$, C^∞ (ou même C^ω , mais cela demande davantage de travail). On va montrer que toute structure différentielle de classe C^2 possède un atlas compatible de classe C^∞ .

Lemme 3.6.1 *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété compacte de classe C^r , $r \geq 2$. Alors il existe un voisinage U de X dans \mathbb{R}^n et une rétraction de classe $C^{r-1} : U \rightarrow X$.*

Remarque 3.6.2 *On appelle U un voisinage tubulaire de X dans \mathbb{R}^n .*

Preuve. Pour $x \in X$, on note $\pi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x X$ le projecteur orthogonal (il dépend C^{r-1} de x), $\nu_x = \ker \pi_x$ et $\nu X = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n \mid v \in \nu_x\}$.

Montrons que νX est une sous-variété de classe C^{r-1} . Pour x voisin de x_0 , la restriction de π_{x_0} à $T_x X$ est bijective. Autrement dit, $\ker(\pi_{x_0} \circ \pi_x) = \ker \pi_x = \nu_x$. Par conséquent, au voisinage de $\{x_0\} \times \nu_{x_0}$, νX est défini par l'équation $g(x, v) = 0$ où $g : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_{x_0} X$ est définie par $g(x, v) = \pi_{x_0} \circ \pi_x(v)$. g est une submersion en tout point de $\{x_0\} \times \nu_{x_0}$, donc νX est une sous-variété.

L'application $\phi : \nu X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, v) \mapsto x + v$ est une immersion en tout point de $X \times \{0\}$. Montrons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que ϕ est injective sur l'ouvert $V = \{(x, v) \in \nu X \mid |v| < \epsilon\}$. Sinon, il existe des suites (x_j, v_j) et $(y_j, w_j) \in \nu X$, avec $|v_j|$ et $|w_j|$ tendant vers 0, telles que $\phi(x_j, v_j) = \phi(y_j, w_j)$. Par compacité, on peut supposer que x_j tend vers x et y_j vers y . Nécessairement,

$$x = \phi(x, 0) = \lim \phi(x_j, v_j) = \lim \phi(y_j, w_j) = \phi(y, 0) = y.$$

Or, comme ϕ est une immersion en $(x, 0)$, il existe un voisinage de $(x, 0)$ sur lequel ϕ est injective, contradiction.

$U = \phi(V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n . L'application ϕ^{-1} composée avec la projection $X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$ est la rétraction cherchée. ■

Définition 3.6.3 *Soit X un espace topologique compact. Sur l'ensemble \mathcal{A}_r des atlas de classe C^r de X , on met la topologie dont une base de voisinages est obtenue comme suit. Soit $(\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n)$ un atlas. Soient $K_i \subset U_i$ des compacts. Soit $\epsilon > 0$. On considère les atlas $(\phi'_i : U'_i \rightarrow \mathbb{R}^n)$ tels que $K_i \subset U'_i$, et $|\phi'_i \circ \phi_i^{-1} - \text{id}|_{C^r(\phi_i(K_i))} < \epsilon$.*

Proposition 3.6.4 *Pour tout $r \geq 1$, \mathcal{A}_∞ est dense dans \mathcal{A}_r . De plus, deux atlas de \mathcal{A}_r suffisamment voisins définissent des structures différentielles difféomorphes sur X .*

Preuve. On peut lisser un C^1 -difféomorphisme par convolution. Sur l'intérieur d'un compact contenu dans le domaine, une application C^1 proche d'un difféomorphisme est à nouveau un difféomorphisme. Cela montre la densité.

Supposons $r \geq 2$. Soit (ϕ_i) un atlas. Le théorème de plongement de Whitney fournit un plongement $f_{(\phi_i)} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si (ψ_i) est un atlas suffisamment proche de (ϕ_i) , le plongement $f_{(\psi_i)}$ est C^0 -proche de $f_{(\phi_i)}$. En particulier, son image est contenue dans un voisinage tubulaire de $f_{(\phi_i)}$. En composant $f_{(\psi_i)}$ avec la rétraction, on obtient un difféomorphisme de $(X, (\psi_i))$ sur $(X, (\phi_i))$. Le cas $r = 1$ demande davantage de travail. ■

Remarque 3.6.5 *La proposition 3.6.4 montre que la classification des variétés compactes à difféomorphisme près doit s'exprimer au moyen d'invariants discrets, par exemple, à valeurs entières, et non continues.*

En fait, elle montre que l'ensemble des classes de difféomorphisme de variétés compactes est dénombrable.

3.6.2 Classification des variétés de dimension 1

Théorème 24 *Toute variété compacte connexe de dimension 1 est difféomorphe à \mathbb{R}/\mathbb{Z} .*

Preuve. On commence par supposer la variété de classe C^r avec $r \geq 2$.

1. Cas orientable. Soit $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ un atlas fini définissant une orientation de X . Notons ζ un champ de vecteurs constant sur \mathbb{R} . Soit (χ_i) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i) . Posons $\xi = \sum_i \chi_i (\phi_i^{-1})_* \zeta$. Alors ξ est un champ de vecteurs différentiable sur X , qui ne s'annule jamais. En effet, pour tous indices i et j , $(\phi_j \phi_i^{-1})_* \zeta = \lambda_{i,j} \zeta$ où la fonction $\lambda_{i,j}$ est strictement positive. Alors

$$(\phi_j)_* \xi = \left(\sum_i \chi_i \lambda_{i,j} \right) \zeta,$$

et $\sum_i \chi_i \lambda_{i,j} > 0$ partout. Pour $x \in X$, notons $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow X$ la ligne intégrale de condition initiale x . Alors le vecteur vitesse $\gamma'_x(t) = \xi(\gamma_x(t))$ ne s'annule pas, donc γ_x est une immersion, et son image, l'orbite de x , est un ouvert de X . Comme les orbites partitionnent X , et X est connexe, il y a une seule orbite, donc γ_x est surjective. Si γ_x était injective, alors γ_x serait un homéomorphisme, ce qui est impossible, car \mathbb{R} n'est pas compact. On conclut qu'il existe $s, s' \in \mathbb{R}$, $s \neq s'$, tels que $\gamma_x(s) = \gamma_x(s')$. Alors $t \mapsto \gamma_x(t+s)$ et $t \mapsto \gamma_x(t+s')$ sont des lignes intégrales de ξ de même condition initiale, donc $\gamma_x(t+s) = \gamma_x(t+s')$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, γ_x est $|s' - s|$ -périodique. Soit T la plus petite période de γ_x . Alors γ_x passe au quotient en un difféomorphisme $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow X$ préservant l'orientation.

2. Cas non orientable. Soit X^{or} le revêtement des orientations de X . Alors X^{or} est orientable, donc X^{or} est difféomorphe à \mathbb{R}/\mathbb{Z} , et $X = G \backslash X^{or}$ où G est un groupe à deux éléments engendré par un difféomorphisme a de X^{or} renversant l'orientation. Alors a se relève en un automorphisme \tilde{a} du revêtement universel $\tilde{X} = \widetilde{X^{or}} = \mathbb{R}$, qui renverse l'orientation. Autrement dit, \tilde{a} est une fonction dont la dérivée est partout strictement négative. Elle tend vers $\mp\infty$ en $\pm\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\tilde{a}(t) = t$ possède une solution, ce qui est impossible pour un automorphisme d'un revêtement. On conclut que X est forcément orientable.

3. Cas des variétés de classe C^1 . Il suffit de remarquer qu'intégrer un champ de vecteurs en dimension 1, ce n'est rien d'autre qu'intégrer une fonction, donc un champ de vecteurs de classe C^0 seulement possède des lignes intégrales. ■

Remarque 3.6.6 *Pour peu qu'on sache construire des partitions de l'unité, le même argument montre que toute variété séparée, paracompacte, non compacte, connexe de dimension 1 est difféomorphe à \mathbb{R} .*

3.7 Caractéristique d'Euler-Poincaré

3.7.1 Décompositions cellulaires convexes

Une *décomposition cellulaire convexe* d'un compact K du plan, c'est une collection finie segments de droites (appelés *arêtes*) contenus dans K telle que

1. deux arêtes distinctes sont disjointes ou partagent une extrémité;
2. la frontière de K est une réunion d'arêtes;
3. chaque composante connexe du complémentaire de la réunion des arêtes est convexe.

On appelle les adhérences de ces composantes les *faces* de la décomposition cellulaire. On appelle *sommets*) les extrémités des arêtes.

- Exemples 3.7.1**
1. Si K est un polygone convexe, il admet une décomposition cellulaire à une seule face, dont les arêtes sont les côtés de K .
 2. Si K est une ligne polygonale sans auto-intersection, il admet une décomposition cellulaire naturelle.

Définition 3.7.2 Soit \mathcal{C} une décomposition cellulaire convexe d'un compact du plan. On note S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces. On appelle caractéristique d'Euler-Poincaré de \mathcal{C} le nombre $\chi(\mathcal{C}) = S - A + F$.

- Exemples 3.7.3**
1. Pour la décomposition cellulaire à 1 face d'un polygone convexe, $\chi = 1$.
 2. Si K est une ligne polygonale ouverte (i.e. ses extrémités sont distinctes), alors $\chi = 1$. Si K est une ligne polygonale fermée, $\chi = 0$.

Proposition 3.7.4 Soit \mathcal{C} une décomposition cellulaire convexe d'un polygone convexe du plan. Alors $\chi(\mathcal{C}) = 1$.

Preuve. Si s est un sommet et f une face qui lui est adjacente (i.e. $s \in \bar{f}$), notons $int(s, f) \in]0, \pi]$ l'angle intérieur de f en s , et $ext(s, f) = \pi - int(s, f)$ l'angle extérieur de f en s .

Notons $ext(f)$ la somme des angles extérieurs de f en tous ses sommets. Alors $ext(f) = 2\pi$. En effet, lorsqu'on parcourt le bord de la face f , à chaque sommet s la direction suivie tourne de $ext(s, f)$, et lorsque le tour est fini, la direction a fait un tour complet.

Notons $int(s)$ la somme des angles intérieurs en s des faces de \mathcal{C} adjacentes à s . Alors $int(s) = 2\pi$ si s est à l'intérieur de K . Sinon, $int(s) = int(s, K)$ est l'angle intérieur de K en s . On note S_{int} le nombre de sommet intérieurs et $S_{\partial K}$ le nombre de sommets du bord, de sorte que $S = S_{int} + S_{\partial K}$.

On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} ext(s, f) &= \sum_f \sum_{s \text{ sommet de } f} ext(s, f) \\ &= \sum_f ext(f) \\ &= 2\pi F. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} int(s, f) &= \sum_s \sum_{f \text{ adjacente à } s} int(s, f) \\ &= \sum_s int(s) \\ &= 2\pi S_{int} + \sum_{s \in \partial K} int(s, K) \\ &= 2\pi S_{int} + \sum_{s \in \partial K} (\pi - ext(s, K)) \\ &= 2\pi S_{int} + \pi S_{\partial K} - 2\pi. \end{aligned}$$

Si a est une arête orientée de \mathcal{C} , qui n'est pas contenue dans le bord de K , il lui correspond un couple (s, f) tels que s est un sommet de f : s est l'origine de a et f la face dont un côté est a , située à gauche de a . Si a est une arête de ∂K , il y a exactement une des deux orientations pour laquelle la face située à gauche existe. Réciproquement, étant donné un couple (s, f) tels que s est un sommet de f , il lui correspond une arête orientée, celle telle que, lorsqu'on la parcourt, on a la face f à sa gauche. Par conséquent, le nombre de couples (s, f) tels que s est un sommet de f est égal au nombre d'arêtes intérieures orientées plus le nombre d'arêtes du bord, sans orientation. Si on note A_{int} le nombre d'arêtes intérieures et $A_{\partial K}$ le nombre d'arêtes du bord, de sorte que $A = A_{int} + A_{\partial K}$, il vient

$$\sum_{(s,f)} 1 = 2A_{int} + A_{\partial K}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} int(s, f) + \sum_{(s,f)} ext(s, f) &= \sum_{(s,f)} \pi \\ &= \pi(2A_{int} + A_{\partial K}), \end{aligned}$$

d'où

$$2\pi F + 2\pi S_{int} + \pi S_{\partial K} - 2\pi = 2\pi A_{int} + \pi A_{\partial K},$$

ce qui peut s'écrire

$$S_{int} - A_{int} + F = 1 - \frac{1}{2}(S_{\partial K} - A_{\partial K}),$$

ou

$$\chi(\mathcal{C}) = 1 + \frac{1}{2}\chi(\partial K).$$

Comme le bord de K est une ligne polygonale fermée, $\chi(\partial K) = 0$, donc $\chi(\mathcal{C}) = 1$. ■

3.7.2 Invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré

Lemme 3.7.5 *Si $K = K_1 \cup K_2$ et \mathcal{C} est une décomposition cellulaire convexe de K qui induit des décompositions cellulaires \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_0 sur K_1 , K_2 et $K_0 = K_1 \cap K_2$, alors*

$$\chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{C}_1) + \chi(\mathcal{C}_2) - \chi(\mathcal{C}_0).$$

Preuve. Chaque sommet (resp. arête, resp. face) de \mathcal{C}_0 est aussi un sommet (resp. arête, resp. face) de \mathcal{C}_1 et de \mathcal{C}_2 simultanément, donc $S = S_1 + S_2 - S_0$, $A = A_1 + A_2 - A_0$, $F = F_1 + F_2 - F_0$. ■

Proposition 3.7.6 *Soit K un polygone du plan. Deux décompositions cellulaires convexes de K donnent la même caractéristique d'Euler-Poincaré.*

Preuve. Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux décompositions cellulaires convexes de K .

1. Réduction au cas où \mathcal{C}' est plus fine que \mathcal{C} .

Comme l'intersection de deux polygones convexes est un polygone convexe, il y a une décomposition cellulaire convexe de K dont les faces sont les intersections de faces de \mathcal{C}' et de faces de \mathcal{C} . Il suffit de montrer que cette décomposition, raffinement de \mathcal{C}' et de \mathcal{C} , a même caractéristique d'Euler-Poincaré que \mathcal{C} .

2. Cas où \mathcal{C} n'a aucune face.

Dans ce cas, \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont deux graphes homéomorphes. Il ont donc les mêmes composantes connexes, qui ont mêmes connectivités $A - S + 1$ (voir cours sur le groupe fondamental), donc même

caractéristique d'Euler-Poincaré. On peut aussi remarquer que subdiviser les arêtes ne change pas $S - A$.

3. Récurrence sur le nombre de faces de \mathcal{C} .

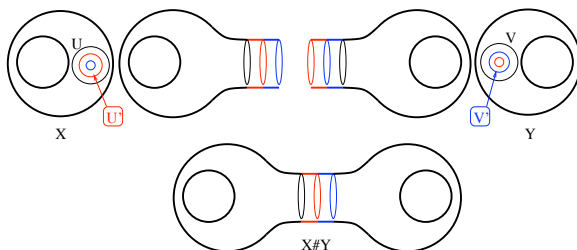
On retire l'intérieur de toutes ses faces à \mathcal{C} , on obtient un graphe K_0 muni de deux décompositions \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}'_0 . Puis on ajoute l'intérieur d'une face de \mathcal{C} , cela donne un polygone K_1 muni de deux décompositions \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}'_1 plus fine, etc... Supposons que $\chi(\mathcal{C}_k) = \chi(\mathcal{C}'_k)$. Par définition, $\chi(\mathcal{C}_{k+1}) = \chi(\mathcal{C}_k) + 1$. Remarquer que $K_{k+1} = K_k \cup f$ où f est une seule face de \mathcal{C} , mais est décomposée en plusieurs faces au sens de \mathcal{C}' . D'après le lemme 3.7.5, $\chi(\mathcal{C}'_{k+1}) = \chi(\mathcal{C}'_k) + \chi(f) - \chi(K_k \cap f) = \chi(\mathcal{C}'_k) + 1$, car $K_k \cap f$ est une ligne polygonale fermée sans point double. Cela montre que $\chi(\mathcal{C}'_{k+1}) = \chi(\mathcal{C}_{k+1})$, et donc que $\chi(\mathcal{C}') = \chi(\mathcal{C})$, par récurrence sur k . ■

3.8 Variétés compactes de dimension 2

On commence par construire des exemples.

3.8.1 Somme connexe

Soient X et Y deux variétés de même dimension n . Notons B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2 dans \mathbb{R}^n , B' la boule unité ouverte. Soient U un ouvert de X , V un ouvert de Y , ϕ un difféomorphisme de U sur B et ψ un difféomorphisme de V sur B . On note $U' = \phi^{-1}(B')$ et $V' = \psi^{-1}(B')$. On considère l'espace topologique $X \# Y$ obtenu recollant $X \setminus U'$ et $Y \setminus V'$ le long de leur bord, au moyen de l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \phi|_{\partial U'}$. Noter que $X \# Y$ dépend des choix de ϕ et ψ .



On munit $X \# Y$ d'une structure différentielle comme suit. L'atlas contient toutes les cartes de X et de Y dont le domaine ne rencontre pas U' ou V' . Il contient aussi une carte Φ dont le domaine est $(U \setminus U') \cup (V \setminus V')$ (vu comme un ouvert de $X \# Y$), et définie par

$$\begin{cases} \Phi(x) = \phi(x) & \text{si } x \in U \setminus U', \\ \Phi(y) = \frac{\psi(y)}{|\psi(y)|^2} & \text{si } y \in V \setminus V'. \end{cases}$$

Définition 3.8.1 On appelle somme connexe de X et Y suivant ϕ et ψ la variété ainsi obtenue.

Exemple 3.8.2 Si $Y = S^n$ est la sphère de dimension n , et $\psi : V \rightarrow B$ est donné par la projection stéréographique, alors $X \#_\psi Y$ est difféomorphe à X .

En effet, l'inversion $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ se prolonge en un difféomorphisme global i de S^n . On définit un difféomorphisme Ψ de $X \# S^n$ sur X en posant,

$$\begin{cases} \Psi(x) = x & \text{si } x \in X \setminus U', \\ \Psi(y) = \phi^{-1} \circ i(y) & \text{si } y \in S^n \setminus V'. \end{cases} \blacksquare$$

Remarque 3.8.3 Si $n \geq 3$, $\pi_1(X \# Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ est un produit libre. Si $n = 2$, $\pi_1(X \# Y) = \pi_1(X \setminus U') *_{\mathbb{Z}} \pi_1(Y \setminus V')$ est une somme amalgamée au-dessus de \mathbb{Z} .

Cela permet de voir qu'en général $X \# Y$ n'est difféomorphe ni à X ni à Y .

3.8.2 Dépendance par rapport aux choix

Proposition 3.8.4 *Soient X et Y des variétés connexes. A difféomorphisme près, la variété $X \# Y$ ne dépend que de l'orientation de ϕ et de ψ . Précisément,*

1. si X ou Y n'est pas orientable, $X \# Y$ est indépendante des choix;
2. si X (ou Y) est orientable et admet un difféomorphisme renversant l'orientation, $X \# Y$ est indépendante des choix;
3. si X et Y sont orientables, on peut obtenir au plus deux variétés $X \# Y$, suivant que $\psi^{-1} \circ \phi$ préserve ou non l'orientation.

Preuve. Soient U_1 et U_2 deux ouverts contenant un point x de X , soient $\phi_1 : U_1 \rightarrow B$ et $\phi_2 : U_2 \rightarrow B$ deux difféomorphismes sur la boule B de rayon 2, envoyant x en 0, et ayant même différentielle en x . Posons $U_{i,\epsilon} = \phi_i^{-1}(B(0, 2\epsilon))$, $\phi_{i,\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}(\phi_i)|_{U_{i,\epsilon}} : U_{i,\epsilon} \rightarrow B$. D'après le lemme 3.6.4, la structure différentielle sur $X \#_{\phi_i,\epsilon} Y$ ne dépend pas de ϵ . Lorsque ϵ tend vers 0, $\phi_{1,\epsilon}^{-1} \circ \phi_{2,\epsilon}$ converge vers l'identité, donc pour ϵ assez petit, $X \#_{\phi_1,\epsilon} Y$ et $X \#_{\phi_2,\epsilon} Y$ sont difféomorphes. On conclut que ϕ_1 et ϕ_2 définissent la même somme connexe. Celle-ci ne dépend donc que de la donnée de points $x \in X$ et $y \in Y$, ainsi que d'isomorphismes linéaires de \mathbb{R}^n sur $T_x X$ et $T_y Y$ respectivement. Comme X et Y sont connexes par arcs, le choix des points est sans importance. De même, seule compte la composante connexe de $Isom(T_x X, \mathbb{R}^n)$ à laquelle $d_x \phi$ appartient, i.e. le fait que ϕ préserve ou non l'orientation.

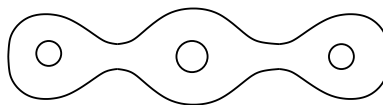
Si X n'est pas orientable, il existe un lacet dans X basé en x dont le relèvement dans le revêtement des orientations X^{or} n'est pas un lacet. On peut donc déformer continûment ϕ en un difféomorphisme ϕ' d'un voisinage de x sur la boule B tel que $\phi^{-1} \circ \phi'$ renverse l'orientation. Cela signifie que $X \#_{\phi} Y = X \#_{\phi'} Y$ ne dépend pas de la composante connexe de $Isom(T_x X, \mathbb{R}^n)$ à laquelle $d_x \phi$ appartient.

Si X possède un difféomorphisme global Φ qui renverse l'orientation, celui-ci induit un difféomorphisme de $X \#_{\phi} Y$ sur $X \#_{\Phi \circ \phi} Y$, et de nouveau $X \#_{\phi} Y$ ne dépend pas de la composante connexe de $Isom(T_x X, \mathbb{R}^n)$ à laquelle $d_x \phi$ appartient. ■

Terminologie. Dans la suite, lorsque X et Y sont orientables, on notera $X \# Y$ celle des sommes connexes qui est orientable (obtenue à l'aide d'une carte orientée de X et d'une carte de Y renversant l'orientation).

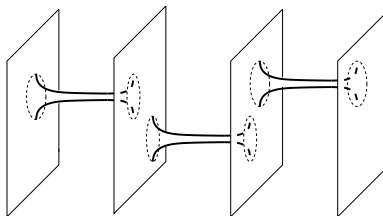
3.8.3 Exemples de variétés de dimension 2

Définition 3.8.5 *Soit $g \in \mathbb{N}$ un entier. On appelle surface orientable de genre g , et on note Σ_g , la variété obtenue à partir de la sphère en effectuant g sommes connexes avec un tore.*



Surface orientable de genre 3

Définition 3.8.6 *Soit $g \in \mathbb{N}$ un entier. On appelle surface non orientable de genre g , et on note U_g , la variété obtenue à partir du plan projectif en effectuant g sommes connexes avec un plan projectif.*



La surface non orientable de genre 3

3.8.4 Décompositions cellulaires lisses

Voici une généralisation, invariante par difféomorphisme, de la notion de décomposition en cellulaire convexe.

Définition 3.8.7 Soit X une variété de dimension 2, et $K \subset X$ un compact. Une décomposition cellulaire lisse de K , c'est la donnée d'une famille finie d'arcs de classe C^1 plongés dans K appelés arêtes tels que

- deux arêtes sont disjointes ou partagent une extrémité ;
- pour chaque composante connexe D du complémentaire dans K de la réunion des arêtes, il existe un voisinage de l'adhérence de D qui est l'image par un difféomorphisme Φ d'un ouvert U du plan, tel que $\Phi^{-1}(D)$ soit un polygone convexe.

Dans ce cas, on appelle *sommets* de la décomposition les extrémités des arêtes et *faces* de la décomposition les composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes. Si toutes les faces sont des triangles, on parle de *triangulation lisse*. De nouveau, on appelle $\chi(\mathcal{C}) = S - A + F$ la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la décomposition cellulaire.

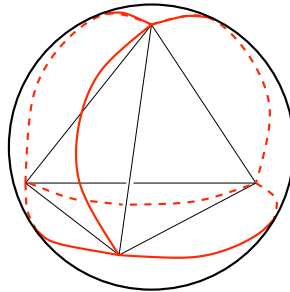
Le lemme 3.7.5 s'étend aux décompositions cellulaires lisses, avec la même preuve.

Lemme 3.8.8 Si $K = K_1 \cup K_2$ et \mathcal{C} est une décomposition cellulaire lisse de K qui induit des décompositions cellulaires $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_0 sur K_1, K_2 et $K_0 = K_1 \cap K_2$, alors

$$\chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{C}_1) + \chi(\mathcal{C}_2) - \chi(\mathcal{C}_0).$$

3.8.5 Exemples de décompositions cellulaires lisses

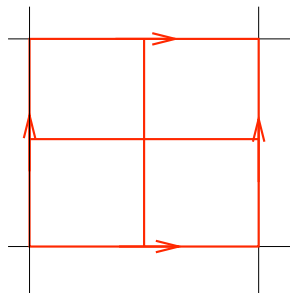
Exemple 3.8.9 La sphère S^2 possède une décomposition cellulaire lisse, obtenue en projetant radialement un tétraèdre régulier.



Il y a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 2.

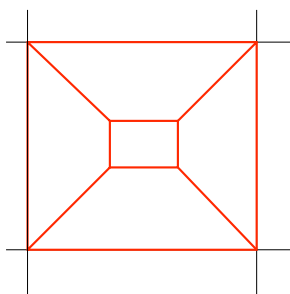
En particulier, le disque possède une décomposition lisse avec 4 sommets, 6 arêtes et 3 faces, donc sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 1.

Exemple 3.8.10 Le tore T^2 possède une décomposition cellulaire lisse.



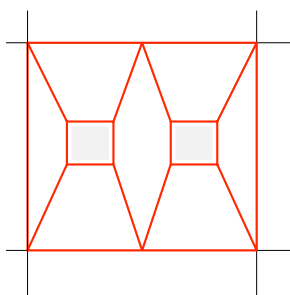
Il y a 2 sommets, 6 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0.

Exemple 3.8.11 *Le tore troué $T^2 \setminus D$ possède une décomposition cellulaire lisse.*



Il y a 5 sommets, 10 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -1 .

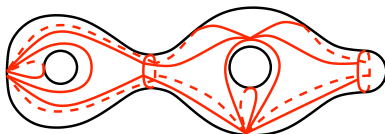
Exemple 3.8.12 *Le tore troué deux fois $T^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ possède une décomposition cellulaire lisse.*



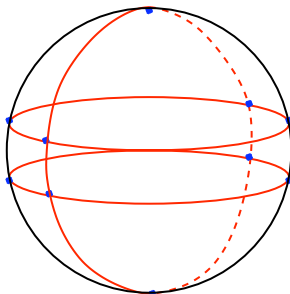
Il y a 10 sommets, 19 arêtes et 7 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -2 .

Exemple 3.8.13 *La surface orientable Σ_g de genre g possède une décomposition cellulaire, compatible avec une décomposition en un tore troué, $g - 1$ tores troués deux fois et un disque.*

La caractéristique d'Euler-Poincaré de cette décomposition vaut $2 - 2g$.



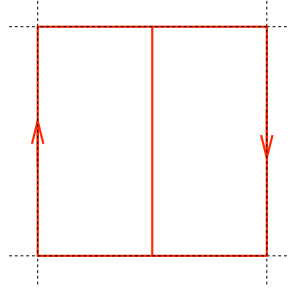
Exemple 3.8.14 *La sphère S^2 possède une décomposition cellulaire lisse, invariante par l'antipodie. En quotientant par l'antipodie, on obtient une décomposition cellulaire lisse du plan projectif.*



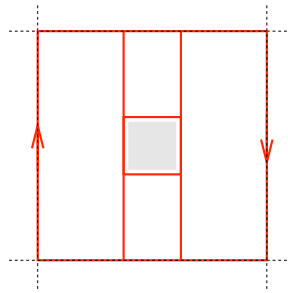
Pour le plan projectif, il y a 5 sommets, 10 arêtes et 6 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 1.

En particulier, le plan projectif privé d'un disque (aussi appelé *bande de Möbius*) possède une décomposition cellulaire lisse avec 4 sommets, 6 arêtes et 2 faces, donc sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0.

On peut aussi voir la *bande de Möbius* comme le quotient de la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ par le groupe engendré par $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. La décomposition cellulaire apparaît comme suit.

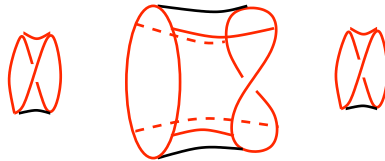


Exemple 3.8.15 *La bande de Möbius trouée admet une décomposition cellulaire lisse.*



Il y a 10 sommets, 15 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -1 .

Exemple 3.8.16 *La surface non orientable U_g possède une décomposition cellulaire lisse compatible avec la décomposition en une bande de Möbius, $g - 1$ bandes de Möbius trouées, et une bande de Möbius. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré égale à $1 - g$.*



3.8.6 Décompositions, revêtements et sommes connexes

Proposition 3.8.17 *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Soit \mathcal{C} une décomposition cellulaire lisse de X . Il existe une unique décomposition cellulaire lisse $\tilde{\mathcal{C}}$ de E dont chaque face est envoyée bijectivement sur une face de X . Si le revêtement a d feuillets, alors $\chi(\tilde{\mathcal{C}}) = d\chi(\mathcal{C})$.*

Preuve. Comme chaque face f est simplement connexe, le revêtement $p|_{p^{-1}(f)} : p^{-1}(f) \rightarrow f$ est trivial, i.e. $p^{-1}(f) = \coprod_j s_j(f)$ où les s_j sont des sections de p au-dessus de f . La collection des $s_j(f)$ forme la décomposition $\tilde{\mathcal{C}}$.

Chaque sommet, arête, face de \mathcal{C} donne naissance à d sommets, arêtes, faces distincts de $\tilde{\mathcal{C}}$, donc $\tilde{S} = dS$, $\tilde{A} = dA$, $\tilde{F} = dF$. ■

Proposition 3.8.18 *Soient X et Y deux variétés compactes de dimension 2. Alors*

$$\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

Preuve. D'après la règle d'addition, $\chi(X) = \chi(X \setminus U) + \chi(U) - \chi(\partial U) = \chi(X \setminus U) + 1$. De plus

$$\chi(X \# Y) = \chi(X \setminus U) + \chi(Y \setminus V) - \chi(\partial U) = \chi(X) + \chi(Y) - 2. \blacksquare$$

3.8.7 Classification des variétés compactes de dimension 2

On admettra les trois théorèmes suivants.

Théorème 25 *Toute variété de dimension 2 compacte admet une triangulation lisse.*

Théorème 26 *Soit X une variété de dimension 2 compacte. Les décompositions cellulaires lisses de X ont toutes même caractéristique d'Euler-Poincaré, notée $\chi(X)$.*

Exercice 25 *A l'aide de ce théorème, et des propositions 3.8.17 et 3.8.18, retrouver de façon plus directe les résultats numériques du paragraphe précédent.*

Théorème 27 *Les variétés compactes connexes orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier pair ≤ 2 . Les variétés compactes connexes sans bord non orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier ≤ 1 .*

Autrement dit, toute variété compacte connexe orientable de dimension 2 est difféomorphe à une et une seule des surfaces Σ_g , où, par convention, Σ_0 est la sphère. Toute variété compacte connexe orientable de dimension 2 est difféomorphe à une et une seule des surfaces U_g , $g \geq 0$, où, par convention, U_0 est le plan projectif.

Exercice 26 *Déduire de la classification que toute surface orientable possède un difféomorphisme renversant l'orientation et sans points fixes.*

3.9 1-formes différentielles

3.9.1 Rappels

Définition 3.9.1 *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une 1-forme différentielle sur U est une application qui à chaque $x \in U$ associe une forme linéaire $\omega(x)$ sur \mathbb{R}^n . Si la matrice de $\omega(x)$ est $(a_1(x) \cdots a_n(x))$, on note $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$. Si les fonctions a_i , au lieu d'être à valeurs réelles, sont à valeurs complexes, on parle de 1-forme différentielle complexe sur U .*

Exemple 3.9.2 *Si u est une fonction différentiable sur U , sa différentielle $du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$ est une 1-forme différentielle sur U (réelle ou complexe suivant que u est à valeurs réelles ou complexes).*

Définition 3.9.3 *Soit V un ouvert de \mathbb{R}^q . Soit $f : V \rightarrow U$ une application différentiable, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Alors f tire en arrière les formes différentielles de U vers V ,*

$$f^*\omega(y) = \omega(f(y)) \circ d_y f = \sum_{i=1}^n a_i \circ f df_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i \circ f \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dy_j.$$

Proposition 3.9.4 *Si u est une fonction sur U , on note $f^*u = u \circ f$. Alors*

1. $d(f^*u) = f^*du$,
2. $f^*u\omega = f^*u f^*\omega$.

Cela rend le calcul de $f^*\omega$ entièrement mécanique.

Exemple 3.9.5 *Soit $\omega = x dy - y dx$ sur \mathbb{R}^2 . Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées polaires, $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Alors $f^*\omega = r^2 d\theta$.*

En effet, $f^*x = r \cos \theta$, $f^*dx = d(f^*x) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$, $f^*y = r \sin \theta$, $f^*dy = d(f^*y) = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$, d'où

$$\begin{aligned} f^*\omega &= r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ &= r^2 d\theta. \blacksquare \end{aligned}$$

Dans \mathbb{C}^n , il y a des notations commodes.

Notation. Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n . On note z_j les coordonnées complexes sur U , $x_j = \Re(z_j)$ et $y_j = \Im(z_j)$. On note $dz_j = dx_j + idy_j$ et $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$. Toute 1-forme différentielle à valeurs complexes s'écrit donc uniquement $\sum_{j=1}^n a_j dz_j + a_{\bar{j}} d\bar{z}_j$.

Définition 3.9.6 Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n . Une 1-forme différentielle complexe sur U est dite holomorphe si elle s'écrit $\sum_{j=1}^n a_j dz_j$, où les fonctions a_j sont holomorphes.

Exemple 3.9.7 Si f est une fonction holomorphe sur U , alors $df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$ est une 1-forme holomorphe.

Remarque 3.9.8 Si $f : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, est une application holomorphe, et ω une 1-forme holomorphe, alors

$$f^*\omega = \sum_{i=1}^n a_i \circ f df_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i \circ f \frac{\partial f_i}{\partial z_j} dz_j$$

est une 1-forme holomorphe.

Définition 3.9.9 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit qu'une 1-forme différentielle ω sur U est exacte s'il existe une fonction u sur X telle que $\omega = du$. Une condition nécessaire est que ω soit fermée, i.e. que $d\omega = 0$, où, si $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$,

$$d\omega = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i.$$

Ces deux notions sont préservées lorsqu'on tire les formes en arrière.

Définition 3.9.10 1. Soit $\omega = a(t) dt$ une 1-forme différentielle sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . L'intégrale de ω sur $[a, b]$ est

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b a(t) dt.$$

2. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une courbe différentiable. L'intégrale de ω sur γ est par définition

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \gamma^* \omega.$$

Définition 3.9.11 Comme on sait transporter les 1-formes différentielles par les difféomorphismes, on peut parler de 1-formes différentielles sur les variétés, de formes exactes, fermées, d'intégrales curvilignes. Dans le cas des variété complexes, on peut même parler de 1-formes holomorphes.

3.9.2 Motivation

Comment calculer une primitive de la fonction $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$? Il s'agit d'intégrer la 1-forme différentielle dx/y le long d'arcs de la courbe d'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$. Cette courbe C est une cône affine non dégénérée. On utilise un paramétrage unicursal de cette cône. C'est une application $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow C$ dont les composantes sont des fonctions rationnelles, donc $f^* \frac{dx}{y} = R(t) dt$ où R est une fraction rationnelle. Par conséquent, la primitive se calcule (décomposition en éléments simples). Le résultat s'exprime rationnellement en fonction de t et de $\log(t)$ si les pôles de R sont réels (sinon il faut ajouter $\arctan(t)$), donc c'est une expression rationnelle en x et en \log d'une fraction rationnelle en x et en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Exemple 3.9.12 *Intégration de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Dans ce cas, C est le cercle unité. Le paramétrage unicursal d'origine $A = (-1, 0)$ est $f : t \mapsto (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$. Inversement, comme t est la pente de la droite passant par A et (x, y) , $t = \frac{y}{x+1}$. Alors

$$f^* \frac{dx}{y} = \frac{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2}{1+t^2} dt = d(2 \arctan(t)) = d(2 \arctan(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1})).$$

Remarque 3.9.13 *La méthode s'étend à toute fonction rationnelle en x et en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.*

Comment intégrer $\frac{1}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}}$?

La courbe T d'équation $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'est pas une cône. On va voir qu'elle ne possède pas de paramétrage rationnel par la droite projective. Si c'était le cas, l'ensemble des solutions complexes de l'équation (une courbe algébrique complexe) serait paramétrable par la droite projective complexe. Or on va voir que T est difféomorphe à un tore.

3.9.3 Courbes algébriques planes projectives

Comme pour les cônes, les courbes algébriques affines sont les points à distance finie de courbes algébriques projectives.

Définition 3.9.14 *Une courbe algébrique plane projective est $\mathcal{T} = \mathbb{P}(Z)$ où Z est le lieu des zéros d'un polynôme homogène en 3 variables.*

La complétion projective d'une courbe algébrique affine s'obtient en rendant homogène l'équation. Pour la courbe affine T d'équation affine $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, l'équation homogène est $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - y^2z = 0$. Les points à l'infini de T sont les points de coordonnées homogènes $[x : y : 0]$ tels que $ax^3 = 0$, il y a donc un seul point, $i = [0 : 1 : 0]$, le point de fuite de l'axe des y .

Exercice 27 *Si le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'a que des racines simples, la cubique projective \mathcal{T} d'équation $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - y^2z = 0$ est une sous-variété complexe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.*

Solution. Dans la carte affine ϕ_3 , il s'agit d'étudier l'équation affine, dont la différentielle est $(3ax^2 + 2bx + c) dx - 2y dy$. Celle-ci s'annule aux zéros communs du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ et de sa dérivée, i.e. aux racines multiples de ce polynôme.

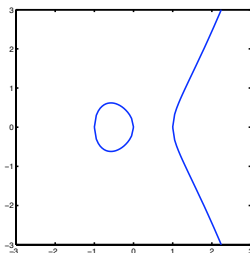
Pour étudier l'unique point à l'infini $i = [0 : 1 : 0]$ de \mathcal{T} , on utilise la carte affine ϕ_2 . Dans cette carte, l'équation affine de $\phi_2(\mathcal{T})$ devient $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - z = 0$, dont la différentielle est $(3ax^2 + 2bxz + cz^2) dx + (bx^2 + 2cxz + 3dz^2 - 1) dz$. Au point $\phi_2([0 : 1 : 0]) = (0, 0)$, la différentielle est $-dz$, elle est non nulle. On conclut que \mathcal{T} est une sous-variété complexe. ■

Convention. On suppose désormais que le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'a que des racines simples.

3.9.4 Connexité

Exercice 28 Tracer la courbe d'équation $y^2 = x(x - 1)(x + 1)$.

Solution.



On constate qu'elle n'est pas connexe. En revanche, les solutions complexes de l'équation forment un ensemble connexe. C'est un fait général. Donnons d'abord une preuve sophistiquée, qui repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.9.15 Principe du maximum. *Soit X une variété complexe, soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non localement constante. Alors la fonction $|f| : x \mapsto |f(x)|$ n'admet pas de maximum local.*

Preuve. C'est un énoncé local, donc on peut supposer que X est un ouvert de \mathbb{C}^n .

Supposons d'abord $n = 1$. Si f n'est pas constante au voisinage de 0, f possède un développement limité de la forme $f(x) = a_k x^k + o(x^k)$ avec $a_k \neq 0$. Il existe alors une fonction holomorphe ϕ définie au voisinage de 0 telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \neq 0$, telle que $f(x) = \phi(x)^k$ au voisinage de 0. Autrement dit, quitte à changer de coordonnée, $f(x) = x^k$. On constate que $x \mapsto |x|^k$ n'admet pas un maximum local en 0.

Dans le cas général, on raisonne par l'absurde. Supposons que $|f|$ admette un maximum local en 0. Alors la restriction de f à toute droite complexe passant par l'origine est constante, donc f est constante au voisinage de 0. ■

Proposition 3.9.16 \mathcal{T} est connexe.

Preuve. Par l'absurde. Supposons que \mathcal{T} n'est pas connexe. Comme \mathcal{T} est localement connexe, les composantes connexes de \mathcal{T} sont ouvertes. Le complémentaire d'une composante, réunion de composantes connexes, est ouvert. Donc les composantes connexes de \mathcal{T} sont des variétés complexes compactes de dimension 1. Soit Y une composante connexe de \mathcal{T} qui ne contient pas i . Alors la projection sur le premier facteur, $(x, y) \mapsto x$ en coordonnées affines, est une fonction holomorphe sur Y , et $|x|$ atteint son maximum sur Y , donc x est constante sur Y . Autrement dit, Y est contenue dans une droite verticale. Or l'intersection de \mathcal{T} avec toute droite verticale a au plus deux points, contradiction. ■

On peut bâtir une preuve plus élémentaire en remarquant que \mathcal{T} coupe toute droite verticale, et que les points d'intersection varient continûment. Si les points d'intersection restaient distincts, cela consisterait à dire que la projection $(x, y) \mapsto x$ est un revêtement. Ce n'est pas tout à fait vrai, ce qui complique la preuve. Néanmoins, le fait que cette application est presque un revêtement va être utile dans le paragraphe suivant.

3.9.5 Revêtement ramifié

On va calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré de \mathcal{T} . Si \mathcal{T} était un revêtement de degré d de la droite projective, on pourrait utiliser la formule $\chi(\mathcal{T}) = d\chi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Un tel revêtement n'existe pas. A la place, on utilise la projection de centre $i = [0 : 1 : 0]$, de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sur la droite projective

\mathcal{D} d'équation $y = 0$, dont on note ∞ le point de fuite. En coordonnées homogènes, elle s'écrit $[x : y : z] \mapsto [x : 0 : z]$ (sa restriction au plan affine est simplement la projection sur l'axe des x , $(x, y) \mapsto x$). Cette application est un revêtement sauf en quelques points, dits *de ramification*, qui nécessiteront un traitement spécial.

Exercice 29 *La restriction à $\mathcal{T} \setminus \{i\}$ de la projection de centre i sur \mathcal{D} se prolonge en une application holomorphe $p : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$. C'est une submersion au-dessus de \mathcal{D} privée de ses 3 points d'intersection r, r', r'' avec \mathcal{T} et du point de fuite. La restriction de p à $\mathcal{T} \setminus \{r, r', r'', i\}$ est un revêtement à 2 feuillets.*

Solution. Au voisinage de i , on peut paramétrer \mathcal{T} par $x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$, où ζ est holomorphe au voisinage de 0, $\zeta(0) = 0$, d'où $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n = x\eta(x)$ où η est holomorphe au voisinage de 0. On utilise la carte $\phi_2 : [x : y : z] \mapsto (\bar{x}/y, z/y)$. Au voisinage de ∞ dans \mathcal{D} , on utilise la carte $\psi_2 : [x : z] \mapsto z/x$. Dans ces cartes, la projection centrale s'écrit $(x, z) \mapsto [x : 1 : z] \mapsto [x : 0 : z] \mapsto z/x$, donc la restriction de cette projection à la courbe, dans le paramétrage choisi, s'écrit $x \mapsto \zeta(x)/x = \eta(x)$, qui est holomorphe. De l'équation $\zeta = ax^3 + bx^2\zeta + cx\zeta^2 + d\zeta^3$, on tire $x\eta = ax^3 + bx^3\eta + cx^3\eta^2 + dx^3\eta^3$, puis $\eta = x^2(a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3)$, qui montre que $\eta'(0) = 0$, i.e. p n'est pas une submersion en i .

Si $q = (x, y) \in \mathcal{T}$ est à distance finie, p n'est pas une submersion en q lorsque la tangente à \mathcal{T} en q est verticale, i.e. quand la différentielle de l'équation affine de \mathcal{T} est proportionnelle à dx . Cela se produit lorsque $y = 0$, i.e. aux trois points r, r' et r'' de \mathcal{T} dont les abscisses sont les racines du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Soit $q = (x, y) \in \mathcal{T}$ un point où p est une submersion. Alors il existe des voisinages U de q dans \mathcal{T} et V de $x = p(q)$ dans \mathcal{D} tels que $p|_U : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme, d'application réciproque s . Alors $p^{-1}(V) = s(V) \cup \sigma \circ s(V)$, où $\sigma(x, y) = (x, -y)$. Ceci montre que p est un revêtement en dehors des quatre points r, r', r'' et ∞ . ■

Lemme 3.9.17 *Il existe des voisinages disjoints V_1, \dots, V_4 des quatre points r, r', r'' et ∞ de \mathcal{D} et des cartes $\phi_i : p^{-1}(V_i) \rightarrow \mathbb{C}$ et $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout $q \in p^{-1}(V_i)$, $\psi_i \circ p(q) = \phi_i(q)^2$. Autrement dit, à changement de coordonnées holomorphe près, p se confond avec l'application $z \mapsto z^2$ au voisinage des points de ramification.*

Preuve. Au voisinage du point i , on utilise le paramétrage $x \mapsto (x, x\eta(x))$. On peut écrire $p = \eta(x) = \phi(x)^2$ où $\phi = \sqrt{a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3}$ est holomorphe au voisinage de 0, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \neq 0$, donc ϕ est une carte.

Au voisinage de $(r, 0)$, on peut paramétrer \mathcal{T} par $y \mapsto (r + \xi(y), y)$, où ξ est holomorphe au voisinage de 0 et satisfait $\xi(0) = 0$. De l'équation $y^2 = a(r + \xi)^3 + b(r + \xi)^2 + c(r + \xi) + d$, on tire $y^2 = a(3r^2\xi + 3r\xi^2 + \xi^3) + b(2r\xi + \xi^2) + c\xi$, soit $(3ar^2 + 2br + c)\xi = y^2 - 3ar\xi^2 - a\xi^3 - b\xi^2$. Cela montre que $\xi'(0) = 0$, donc on peut écrire $\xi(y) = y^2\chi(y)$, où χ est holomorphe au voisinage de 0. Alors $\chi(y) = \frac{1}{3ar^2 + 2br + c}(1 - (3ar + b)y^2\chi(y)^2 - ay^4\chi(y)^3)$, donc $p(x, y) = x = \xi(y)$ peut s'écrire $\phi(y)^2$ où ϕ est holomorphe au voisinage de 0, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \neq 0$. Il en est de même au voisinage de r' et r'' . ■

3.9.6 Calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré

- Soit C une décomposition cellulaire lisse de \mathcal{D} telle que
- les points r, r', r'' et ∞ sont des sommets de C ;
 - toutes les faces de C contenant l'un de ces points sont contenues dans la réunion des ouverts V_i .

Chaque élément (sommet, arête, face) de C qui ne contient pas les points de ramification se relève en 2 éléments analogues, disjoints, dans \mathcal{T} . En contemplant le comportement de l'application $z \mapsto z^2$, on voit que chaque arête ou face contenant un point de ramification se relève en 2 éléments qui se touchent en un sommet. Les points de ramification eux-mêmes se relèvent en un seul sommet. On obtient une décomposition cellulaire lisse \hat{C} de \mathcal{T} , telle que

$$\hat{S} = 2S - 4, \quad \hat{A} = 2A, \quad \hat{F} = 2F,$$

donc $\chi(\mathcal{T}) = 2\chi(\mathcal{D}) - 4 = 4 - 4 = 0$, ce qui prouve que \mathcal{T} est un tore.

On a illustré sur un exemple un fait général. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ entre variétés réelles de dimension 2 est un *revêtement ramifié* si, pour tout point $x \in X$, il existe des cartes $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ au voisinage de x et $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ au voisinage de $f(x)$ et un entier $k(x)$ tels que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^{k(x)}$. Bien sûr, $k = 1$ sauf pour un ensemble discret de points de X appelés *points de ramification*. L'entier $k(x)$ est la *multiplicité de x* . Si X et Y sont compactes, le *degré d* de f , nombre de points d'une fibre non ramifiée, est constant. La *formule de Riemann-Hurwitz* donne $\chi(X) = d\chi(Y) - \sum_{x \in X} k(x) - 1$.

3.9.7 Différentiabilité de dx/y

Exercice 30 Vérifier que la 1-forme différentielle $\frac{dx}{y}$ se prolonge en une 1-forme différentielle holomorphe sur \mathcal{T} .

Solution. Au voisinage de r , on utilise le paramétrage $f : y \mapsto [r + \xi(y) : y : 1]$, où $\xi(y) = y^2\chi(y)$. Alors $f^*\frac{dx}{y} = \frac{\xi'(y)}{y} dy = (2\chi + y\chi'(y)) dy$ est holomorphe au voisinage de 0, ce qui prouve que $\frac{dx}{y}$ est holomorphe au voisinage de r . C'est pareil en r' ou r'' .

Au voisinage de i , on utilise le paramétrage $g : x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$, où $\zeta(x) = x\eta(x)$. Alors $g^*\frac{dx}{y} = dx$ est holomorphe au voisinage de 0, ce qui prouve que $\frac{dx}{y}$ est holomorphe au voisinage de i . ■

3.9.8 1-formes fermées et primitives

Que signifie calculer une primitive d'une 1-forme différentielle comme dx/y sur un tore ?

Remarque 3.9.18 Il n'existe pas de fonction f sur \mathcal{T} telle que $df = dx/y$.

En effet, comme df est holomorphe, f est une fonction holomorphe. Comme \mathcal{T} est compacte, $|f|$ atteint son maximum. D'après le principe du maximum (lemme 3.9.15), f est constante, $df = 0$, contradiction. ■

Pourtant, dx/y admet des primitives localement. Par exemple, au voisinage de i , la carte g^{-1} , réciproque du paramétrage $g : x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$, satisfait $d(g^{-1}) = \frac{dx}{y}$. L'obstacle pour étendre une primitive locale en une primitive globale est lié au groupe fondamental.

Proposition 3.9.19 Soit X une variété connexe. Soit ω une 1-forme différentielle fermée sur X , réelle ou complexe. Il existe un plus petit revêtement connexe $p : X^\omega \rightarrow X$ tel que $p^*\omega$ soit exacte. Ce revêtement est galoisien. Son groupe d'automorphismes est commutatif et libre. Si X est compacte, il est isomorphe à \mathbb{Z}^N , pour un $N \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soit $x_0 \in X$ un point base. On considère l'ensemble des chemins différentiables d'origine x_0 . On note $f(\gamma) = \int_\gamma \omega := \int_0^1 \gamma^*\omega$. On introduit la relation d'équivalence qui identifie deux chemins γ et γ' s'ils ont même extrémité et si de plus $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$. Comme lors de la construction du revêtement universel, on vérifie que l'espace quotient X^ω est une variété, et que la projection $p : X^\omega \rightarrow X$ qui à une classe de chemins associe leur extrémité commune est un revêtement. La fonction f passe au quotient en une fonction différentiable sur X^ω , et, par construction, $df = p^*\omega$. Le point essentiel est que deux lacets différentiables de mêmes extrémités et homotopes sont équivalents.

Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie de γ à γ' . Comme ω est fermée, elle admet des primitives locales. Recouvrons $F([0, 1] \times [0, 1])$ par un nombre fini d'ouverts connexes U_i telle que $\alpha|_{U_i} = df_i$. Soit $\delta > 0$ un nombre de Lebesgue du recouvrement $F^{-1}(U_i)$ (i.e. tout sous-carré de côté δ est entièrement contenue dans l'un des $F^{-1}(U_i)$). Découpons $[0, 1] \times [0, 1]$ en N^2 sous-carrés égaux, de côté $\leq \delta/2$. Soit α un chemin dans cette grille, passant successivement par les intersections z_0, \dots, z_k . Pour chaque $j = 1, \dots, k$, choisissons un indice i_j tel que les carrés

contenant le côté $[z_{k-1}, z_k]$ soient contenus dans $F^{-1}(U_{i_j})$. Baptisons “intégrale” de ω sur α la somme $\sum_{j=1}^k f_{i_j}(z_k) - f_{i_j}(z_{k-1})$. Clairement, l’“intégrale” de ω sur tout carré de la grille vaut zéro, donc, en additionnant, l’“intégrale” de ω sur le bord de $[0, 1] \times [0, 1]$ vaut 0. Or c’est la différence entre les intégrales ordinaires de ω sur γ et γ' . Celles-ci sont donc égales.

Comme toute classe d’homotopie contient un lacet lisse, on obtient une application $h^\omega : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . C’est un homomorphisme de groupes. Soit H son noyau. Alors $X^\omega = H \backslash \tilde{X}$ où \tilde{X} est le revêtement universel de X . Comme H est un noyau, il est distingué, et le quotient $\pi_1(X, x_0)/H$ est isomorphe à l’image de h^ω , un sous-groupe de \mathbb{R} ou \mathbb{C} . En particulier, le revêtement est galoisien, et son groupe d’automorphismes est isomorphe à un sous-groupe de \mathbb{R} ou \mathbb{C} , il est donc commutatif et libre. Si X est compacte, $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par un nombre fini d’éléments. Un groupe commutatif libre de type fini, c’est \mathbb{Z}^N . ■

Exemple 3.9.20 Dans le cas où $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\omega = \frac{dz}{z}$, $X^\omega = \tilde{X}$ coïncide avec le revêtement universel, donné par l’exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En effet, X se rétracte par déformation sur le cercle unité, $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ est engendré par le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique, le long duquel l’intégrale de dz/z est non nulle, donc l’homomorphisme $h^{dz/z} : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ est injectif. La primitive de $\exp^* \frac{dz}{z} = dw$ est la coordonnée w sur \mathbb{C} .

3.9.9 Application d’Abel-Jacobi

On montre que la forme $\frac{dx}{y}$ possède des primitives, qu’il faut voir comme des applications à valeurs dans un quotient de \mathbb{C} .

Proposition 3.9.21 Soit $X = \mathcal{T}$ et $\omega = \frac{dx}{y}$. Soient γ et γ' deux générateurs de $\pi_1(\mathcal{T})$. Alors les nombres complexes $\tau = \int_\gamma \omega$ et $\tau' = \int_{\gamma'} \omega$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} . En particulier, $X^\omega = \tilde{X}$ coïncide avec le revêtement universel.

Preuve. Par l’absurde. Supposons que $\tau' = \lambda\tau$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons la 1-forme réelle fermée $a = \Im m(\tau^{-1}\omega)$. Alors $\int_\gamma a = \int_{\gamma'} a = 0$, donc le revêtement \mathcal{T}^a est trivial. Autrement dit, $a = dg$ est exacte sur \mathcal{T} . Soit $x \in \mathcal{T}$ un point où g atteint son maximum M . Soit f la primitive locale de $\tau^{-1}\omega$ qui vaut M en x . Alors $e^g = |e^{-if}|$ au voisinage de x . Le principe du maximum entraîne que la fonction holomorphe e^{-if} est constante au voisinage de x , contradiction. On conclut que τ et τ' sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} . L’homomorphisme h^ω est injectif, donc $\mathcal{T}^\omega = \tilde{\mathcal{T}}$. ■

Corollaire 3.9.22 Soit Λ le sous-groupe de \mathbb{C} formé des intégrales de $\frac{dx}{y}$ sur les lacets de \mathcal{T} . Alors, en intégrant $\frac{dx}{y}$, on obtient un isomorphisme de la variété complexe \mathcal{T} avec le tore quotient $\Lambda \backslash \mathbb{C}$.

Preuve. D’après la proposition 3.9.21, l’homomorphisme $h^{dx/y}$ a pour image un sous-groupe Λ de \mathbb{C} engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur \mathbb{R} . Ce groupe agit librement et proprement sur \mathbb{C} . Le quotient $\Lambda \backslash \mathbb{C}$ est naturellement un tore. La 1-forme constante dz sur \mathbb{C} passe au quotient en une 1-forme holomorphe dz sur $\Lambda \backslash \mathbb{C}$. Notons $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{C}$ une primitive de dx/y . Alors \tilde{f} passe au quotient en une application $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \backslash \mathbb{C}$ qui satisfait $f^*dz = dx/y$. Comme dx/y ne s’annule nulle part, f est un difféomorphisme local entre variétés compactes, donc un revêtement holomorphe. Par construction de Λ , $f_\# : \pi_1(\mathcal{T}) \rightarrow \pi_1(\Lambda \backslash \mathbb{C}) = \Lambda$ coïncide avec l’isomorphisme $h^{dx/y}$. Les revêtements étant en bijection avec les sous-groupes du groupe fondamental, f est trivial, i.e. un difféomorphisme biholomorphe. Cela prouve que \mathcal{T} n’est pas seulement homéomorphe à un tore, mais biholomorphe au quotient de \mathbb{C} par deux translations indépendantes. ■

3.9.10 Un théorème d'Abel

Les primitives f de dx/y ne sont pas des fonctions élémentaires, comme les fonctions rationnelles, le logarithme, l'exponentielle, les fonctions trigonométriques, leurs réciproques, ou les combinaisons de celles-ci. Autrement dit, on ne sait pas les calculer. Néanmoins, on sait prouver qu'elles satisfont à des identités, dont voici la plus simple.

Théorème 28 N. Abel (1826). *Etant donnée une droite projective \mathcal{L} de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, notons $p_1(\mathcal{L})$, $p_2(\mathcal{L})$ et $p_3(\mathcal{L})$ les trois points d'intersection de \mathcal{L} et de \mathcal{T} (certains sont éventuellement confondus). Soit $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \setminus \mathbb{C}$ une primitive de dx/y . Alors*

$$f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L})) \in \Lambda \setminus \mathbb{C}$$

est indépendant de \mathcal{L} .

Preuve. Soit $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ l'espace des droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. C'est une variété complexe de dimension 2. Alors l'application $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* \rightarrow \Lambda \setminus \mathbb{C}$, $\mathcal{L} \mapsto f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L}))$ est holomorphe. En effet, lorsque \mathcal{L} et \mathcal{T} sont transverses, le théorème des fonctions implicites affirme que chacun des points $p_j(\mathcal{L})$ dépend holomorphiquement de \mathcal{L} . Soit \mathcal{L} une droite tangente à \mathcal{T} en un point distinct de i . Lorsqu'une sécante converge vers la tangente, 2 des points d'intersection convergent vers le point de tangence. En effet, par compacité, étant donné une suite de sécantes, on peut toujours extraire des sous-suites pour lesquelles les points d'intersection convergent. Les limites sont nécessairement des points d'intersection de la tangente et de la courbe, donc le point de tangence. Comme pour toutes les suites extraites, la limite est la même, il y a convergence. Pour la même raison, pour la tangente en i , les points d'intersection des sécantes voisines convergent vers i . Cela montre que l'application g est continue. Localement, g est une fonction continue, holomorphe le long d'une courbe, elle est automatiquement holomorphe partout.

Comme $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ est simplement connexe, g possède un relèvement $\tilde{g} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* \rightarrow \mathbb{C}$. C'est une fonction holomorphe. D'après le principe du maximum (pour les fonctions holomorphes sur des ouverts de \mathbb{C}^2), \tilde{g} est constante, donc g est constante. ■

3.9.11 Structure de groupe sur la cubique

Soit $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \setminus \mathbb{C}$ la primitive de $\frac{dx}{y}$ qui envoie le point i de \mathcal{T} sur $0 \in \Lambda \setminus \mathbb{C}$. Comme f est un difféomorphisme, on peut transporter par f la structure de groupe commutatif de $\Lambda \setminus \mathbb{C}$. Cette addition est donnée par une construction géométrique.

Corollaire 3.9.23 *Soient q, q' des points de \mathcal{T} . La droite qq' (la tangente à \mathcal{T} , si $q = q'$) recoupe \mathcal{T} en un point r . Soit r' l'image de r par la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Alors l'application $(q, q') \mapsto q \oplus q' = r'$ est une structure de groupe commutatif sur \mathcal{T} , et $f : (\mathcal{T}, \oplus) \rightarrow (\Lambda \setminus \mathbb{C}, +)$ est un isomorphisme de groupes.*

Preuve. Soit L_i la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Alors L_i coupe \mathcal{T} en un seul point, i . Par conséquent,

$$f(p_1(\mathcal{L})_i) + f(p_2(\mathcal{L}_i)) + f(p_3(\mathcal{L}_i)) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

D'après le théorème d'Abel, pour toute droite $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$, $f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L})) = 0$.

Soit $q \in \mathcal{T}$ un point à distance finie. La droite projective L_q passant par les points i et q recoupe \mathcal{T} au point symétrique $\sigma(q)$. Par conséquent

$$f(q) + f(i) + f(\sigma(q)) = f(p_1(\mathcal{L}_q)) + f(p_2(\mathcal{L}_q)) + f(p_3(\mathcal{L}_q)) = 0,$$

donc $f(\sigma(q)) = -f(q)$.

Soient q, q' et r trois points de \mathcal{T} qui sont alignés. Alors $f(q) + f(q') + f(r) = 0$. Par conséquent $f(q \oplus q') = f(r') = -f(r) = f(q) + f(q')$. Ceci montre que la loi \oplus est une structure de groupe isomorphe à $\Lambda \setminus \mathbb{C}$. ■

Remarque 3.9.24 *Cette structure de groupe sur une cubique est suffisamment simple à calculer pour qu'on ait proposé de remplacer, dans la méthode RSA de cryptage à clé publique, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ par une cubique sur un corps fini.*

Bibliographie

- [B1] M. BERGER, *Géométrie. Vol. 1. Actions de groupes, espaces affines et projectifs*. CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, (1977).
- [B4] M. BERGER, *Géométrie. Vol. 4. Formes quadratiques, coniques et quadriques*. CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, (1977).
- [BG] M. BERGER, B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Deuxième édition. Collection Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, (1992).
- [Go] C. GODBILLON, *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, (1971).
- [Gr] A. GRAMAIN, *Topologie des surfaces*. Collection Le mathématicien. Presses Universitaires de France, Paris, (1971).
- [M] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, (1965).

Table des matières

1	GEOMETRIE PROJECTIVE	1
1.1	Géométrie affine	1
1.1.1	Points et vecteurs	1
1.1.2	Applications affines	1
1.2	Perspective	2
1.2.1	Vues	2
1.2.2	Calcul de la vue en perspective	3
1.2.3	Applications projectives	4
1.2.4	Vues en perspective d'objets	4
1.3	L'espace projectif	5
1.3.1	Définition	5
1.3.2	Topologie	5
1.3.3	Sous-variétés linéaires	6
1.3.4	Repères projectifs	6
1.3.5	Complétion projective d'un espace affine	7
1.3.6	Applications projectives	7
1.3.7	Le groupe $PGL(2, k)$	8
1.3.8	Sous-groupes de $PGL(n, k)$	9
1.3.9	Dualité	9
1.4	Géométrie projective : propriétés linéaires	10
1.4.1	Le théorème de Desargues	10
1.4.2	Le théorème de Pappus	10
1.4.3	Le théorème fondamental de la géométrie projective	11
1.4.4	Géométrie d'incidence	12
1.5	Un peu de géométrie quadratique	12
1.5.1	Cônes et quadriques	12
1.5.2	Plan tangent	12
1.5.3	Polarité	13
1.5.4	Paramétrisation unicursale des cônes	14
1.5.5	Le groupe $PO(3, \mathbb{C})$	15
1.5.6	Division harmonique	16
1.5.7	L'hexagramme mystique de Pascal	17
2	GROUPE FONDAMENTAL, REVETEMENTS	19
2.1	Déterminations de l'angle polaire	19
2.1.1	Préliminaires	19
2.1.2	Motivation	19
2.1.3	Rappel : détermination principale du logarithme	20
2.1.4	Lien entre les 3 questions	20
2.1.5	Le théorème de relèvement	20
2.1.6	Degré	20
2.1.7	Degré des applications différentiables	21

2.1.8	Indice	22
2.2	Groupe fondamental	22
2.2.1	Définition	22
2.2.2	Exemples	23
2.2.3	Applications	24
2.3	Type d'homotopie	26
2.3.1	Equivalences d'homotopie	26
2.3.2	Naturalité de π_0 et π_1	27
2.3.3	Rétraction par déformation	28
2.4	Le théorème de Van Kampen	28
2.4.1	Motivation	28
2.4.2	Un résultat partiel	29
2.4.3	Somme amalgamée de groupes	29
2.4.4	Produit libre de deux groupes	30
2.4.5	Preuve du théorème 13	30
2.4.6	Théorème de Van Kampen	31
2.4.7	Exemples	32
2.5	Revêtements	32
2.5.1	Motivation	32
2.5.2	Définition	33
2.5.3	Exemples	33
2.5.4	Morphismes	34
2.5.5	Sections	34
2.6	Relèvement des homotopies	35
2.6.1	Relèvements	35
2.6.2	Relèvement des chemins	35
2.6.3	Relèvement des homotopies	35
2.7	Revêtement universel	36
2.7.1	Revêtements non connexes	37
2.7.2	Revêtements du cercle	37
2.7.3	Construction d'un revêtement simplement connexe	37
2.7.4	Propriété universelle des revêtements simplement connexes	38
2.7.5	Unicité du revêtement simplement connexe	38
2.8	Revêtements et groupe fondamental	39
2.8.1	Automorphismes du revêtement universel	39
2.8.2	Construction de revêtements intermédiaires	39
2.8.3	Action du groupe fondamental sur les fibres	40
2.8.4	Critère de relevabilité	41
2.8.5	Classification des revêtements connexes	41
2.8.6	Revêtements galoisiens	42
2.8.7	Revêtements du tore	44
2.8.8	A retenir	44
3	VARIETES	45
3.1	Sous-variétés	45
3.1.1	Motivation	45
3.1.2	Définitions	45
3.1.3	Immersion et submersions	45
3.1.4	Espace tangent	46
3.1.5	Cas des quadriques affines	47
3.2	Variétés	47
3.2.1	Motivation	47
3.2.2	Structure différentielle sur un espace topologique	47
3.2.3	Objets différentiables	48

3.2.4	Structure différentielle sur la droite projective	48
3.2.5	Structure différentielle sur l'espace projectif	48
3.2.6	Cas des quadriques projectives	49
3.2.7	Revêtements et structures différentielles	50
3.3	Partitions de l'unité	50
3.3.1	Motivation	50
3.3.2	Construction	50
3.3.3	Plongement	51
3.3.4	Cas de l'espace projectif	52
3.4	Espace tangent	52
3.4.1	Espace tangent	52
3.4.2	Champs de vecteurs	53
3.4.3	Flots	53
3.4.4	Intersection de sous-variétés	54
3.5	Orientation	55
3.5.1	Rappel : orientation d'un espace vectoriel	55
3.5.2	Orientation d'une variété	56
3.5.3	Orientabilité	56
3.6	Éléments de topologie différentielle	57
3.6.1	Régularité	57
3.6.2	Classification des variétés de dimension 1	58
3.7	Caractéristique d'Euler-Poincaré	59
3.7.1	Décompositions cellulaires convexes	59
3.7.2	Invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré	60
3.8	Variétés compactes de dimension 2	61
3.8.1	Somme connexe	61
3.8.2	Dépendance par rapport aux choix	62
3.8.3	Exemples de variétés de dimension 2	62
3.8.4	Décompositions cellulaires lisses	63
3.8.5	Exemples de décompositions cellulaires lisses	63
3.8.6	Décompositions, revêtements et sommes connexes	65
3.8.7	Classification des variétés compactes de dimension 2	66
3.9	1-formes différentielles	66
3.9.1	Rappels	66
3.9.2	Motivation	68
3.9.3	Courbes algébriques planes projectives	68
3.9.4	Connexité	69
3.9.5	Revêtement ramifié	69
3.9.6	Calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré	70
3.9.7	Différentiabilité de dx/y	71
3.9.8	1-formes fermées et primitives	71
3.9.9	Application d'Abel-Jacobi	72
3.9.10	Un théorème d'Abel	73
3.9.11	Structure de groupe sur la cubique	73