Université Paris-Sud | 2007
Master de Mathématiques Pures et Appliquées | Géométrie

Devoir n^0 1
A rendre le jeudi 22 mars

Soit V un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Etant donnés $u \in V$ et $\alpha \in V^*$, on note $u \otimes \alpha$ l'endomorphisme de V défini par $(u \otimes \alpha)(v) = \alpha(v)u$. On s'intéresse à l'application projectivisée de $(u, \alpha) \mapsto u \otimes \alpha$, notée

$$F : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(\mathrm{End}(V)).$$

1. Vérifier que si u et α ne sont pas nuls, l'endomorphisme $u \otimes \alpha$ est de rang 1. Quel est son noyau ? Quelle est son image ?

2. Montrer que F est injective.

3. On choisit une base de V. Soit $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ la colonne des composantes de u, soit $\begin{pmatrix} y_0 & y_1 \end{pmatrix}$ la matrice de α. Quelle est la matrice de $u \otimes \alpha$? Que vaut son déterminant ?

4. Vérifier que le déterminant est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathrm{End}(V)$. Lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$, quelle est sa signature ?

5. Montrer que les (projections des) endomorphismes de rang 1 de V forment, dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{End}(V))$, une quadrique non dégénérée, qu'on note $\mathcal{Q}$.

6. Montrer que pour tout endomorphisme $f \in \mathrm{End}(V)$ de rang 1, il existe $u \in V$ et $\alpha \in V^*$ tels que $f = u \otimes \alpha$.

7. Montrer que l'image de F est exactement $\mathcal{Q}$.

8. Montrer que F est un homéomorphisme de $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ sur $\mathcal{Q}$.

9. Lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, montrer que toute quadrique non dégénérée de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est homéomorphe au produit de deux sphères.

10. Lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$, quelles sont les quadriques non dégénérées de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ qui sont homéomorphes au produit de deux cercles ?