Université Paris-Sud | 2007
Master de Mathématiques Pures et Appliquées | Géométrie

Corrigé du devoir n$^0$ 1

**1.** L'image est la droite de vecteur directeur $u$, le noyau coïncide avec celui de $\alpha$. Le rang est donc égal à 1.

**2.** D'après la question 1, à proportionalité près, $u$ et $\alpha$ sont déterminés par l'endomorphisme $u \otimes \alpha$ ou tout multiple non nul de celui-ci. Autrement dit $F(ku, k\alpha)$ détermine $ku$ et $k\alpha$, donc $F$ est injective.

**3.** La matrice de $u \otimes \alpha$ est $\begin{pmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 \\ x_1y_0 & x_1y_1 \end{pmatrix}$. Son déterminant est nul.

**4.** $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = (\frac{a+d}{2})^2 - (\frac{a-d}{2})^2 - (\frac{b+c}{2})^2 + (\frac{b-c}{2})^2$ est non dégénérée, de signature $(2,2)$ lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$.

**5.** Les endomorphismes de rang 1 de $V$ sont exactement les éléments non nuls de $\mathrm{End}(V)$ qui annulent le déterminant. Ils forment donc, dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{End}(V))$, une quadrique non dégénérée.

**6.** Soit $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorphisme de rang 1. Soit $u \in V$ un vecteur directeur de son image, soit $(v, w)$ une base de $V$ telle que $w \in \ker(f)$ et $v \notin \ker(f)$. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $f(v) = c\,u$. Soit $\alpha$ la forme linéaire définie par $\alpha(v) = c$ et $\alpha(w) = 0$. Alors $f = u \otimes \alpha$.

**7.** Dans la question 5, on a montré que tout point de $\mathcal{Q}$ correspond à un endomorphisme de rang 1, puis dans la question 6, que ceux-ci peuvent s'écrire $u \otimes \alpha$. Par conséquent, l'image de $F$ est $\mathcal{Q}$.

**8.** $F$ est une bijection continue entre deux espaces compacts, donc c'est un homéomorphisme de $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ sur $\mathcal{Q}$.

**9.** Lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, toutes les quadriques non dégénérées de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ sont équivalentes, donc équivalentes à la quadrique particulière étudiée dans les questions précédentes. On conclut qu'elles sont toutes homéomorphe au produit de deux droites projectives, i.e. deux sphères.

**10.** Lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$, toutes les quadriques de signature $(2,2)$ sont équivalentes à la quadrique des endomorphismes de rang 1, donc homéomorphes au produit de deux droites projectives, i.e. deux cercles. Les quadriques de signatures $(4,0)$ ou $(0,4)$ sont vides. Les quadriques de signatures $(3,1)$ ou $(1,3)$ sont des sphères. Par conséquent, les quadriques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ qui sont homéomorphes au produit de deux cercles sont exactement celles dont la signature est $(2,2)$.