Université Paris-Sud 2007
Master de Mathématiques Pures et Appliquées Géométrie

Devoir n^0 2
A rendre le jeudi 31 mai 2007

On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, et S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On s'intéresse aux revêtements de l'espace $X = \mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

1. Quel est le groupe fondamental de X ?

2. Quel est le revêtement universel de X ? Combien a t'il de feuillets ?

3. Combien X possède-t'il de revêtements, à isomorphisme près ? Parmi les revêtements de X, lesquels sont orientables ?

4. On considère l'application $a : S \times S \to S \times S$ définie par $a(u, v) = (-u, -v)$ et le groupe G d'homéomorphismes de $S \times S$ qu'elle engendre. On note $E = G \backslash S \times S$. Montrer que E est un revêtement de X. Quel est le groupe fondamental de E ?

5. Montrer que la projection sur le premier facteur induit une application $f : E \to \mathbb{P}$. Soit $z \in \mathbb{P}$ un point quelconque. La fibre $f^{-1}(z)$ est-elle homéomorphe au plan projectif ? à la sphère ?

6. L'espace E est-il orientable ? En déduire que E n'est pas difféomorphe à $S \times \mathbb{P}$.

7. Soient g et h deux applications continues de $\mathbb{P}$ dans lui-même. On suppose que g et h sont homotopes. Montrer qu'il existe une application $k : \mathbb{P} \to E$ telle que pour tout $z \in \mathbb{P}$, $p(k(z)) = (g(z), h(z))$.

8. En déduire que l'application f de la question 5 possède une section, i.e. il existe une application continue $s : \mathbb{P} \to E$ telle que $f \circ s = id_{\mathbb{P}}$.

9. Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur deux applications continues g et h de $\mathbb{P}$ dans lui-même pour que (g, h) se relève à E, comme en 7 ?

10. Soit $\pi : \mathbb{P} \to Y$ un difféomorphisme de $\mathbb{P}$ sur une sous-variété Y de $\mathbb{R}^N$ (par exemple, celui étudié en cours). Vérifier que l'application

$$S \times S \to \mathbb{R}^{3N}, \quad (u, v) \mapsto (\pi(\pm u), \pi(\pm v), \pi(\pm(u + v)))$$

définit par passage au quotient un difféomorphisme de E sur une sous-variété de $\mathbb{R}^{3N}$.