Université Paris-Sud 2007
Master de Mathématiques Pures et Appliquées Géométrie/D4MA1U6

Partiel de Géométrie

Mercredi 28 mars 2007, durée 3h
Documents autorisés : poly de cours

Soit E un plan affine complexe, soit $\mathbb{P}(V)$ le complété projectif de E. On appelle *conique affine* l'intersection $C = E \cap \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est une conique non dégénérée de $\mathbb{P}(V)$. On dit que C est une *parabole* si $\mathcal{C}$ est tangente à la droite à l'infini, une *hyperbole* sinon.

I

On donne une construction point par point d'une parabole

1. Soit C une conique affine d'équation affine $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ avec $a \neq 0$. Une droite horizontale $\{y = t\}$ la coupe en deux points (éventuellement confondus), on note $p(t)$ leur milieu. Que peut on dire du lieu des points $p(t)$?

2. Soit C une conique affine. On coupe C par une famille de droite parallèles non asymptotes à C. Chacune coupe C en deux points (éventuellement confondus). On prend le milieu. Que peut on dire du lieu des milieux ?

3. *(Cours).* Soient p et q deux points distincts, soit m le milieu de p et q, soit f le point de fuite de la droite affine pq. Montrer que p, q, m et f forment une division harmonique.

4. Vérifier que le résultat de la question 2 est un cas particulier d'un exemple du cours.

5. Montrer que l'énoncé général (exemple du cours) résulte du cas particulier (question 2).

6. Soit C une conique affine. Soient p_0, p_1 des points distincts de C, soit m leur milieu. Soit q le point d'intersection des tangentes à C en p_0 et p_1. Montrer que les tangentes à C aux points de $qm \cap C$ sont parallèles à la droite p_0p_1.

Dans la suite, on suppose que C est une parabole. On conserve les notations de la question 6.

7. Montrer que la droite qm coupe C en un unique point p_{01} qui est le milieu de q et de m.

8. On note q_0 et q_1 les points d'intersection de la tangente en p_{01} à C avec les tangentes en p_0 et p_1. Montrer que q_0 est le milieu de q et de p_0, et que q_1 est le milieu de q et de p_1. Montrer que p_{01} est le milieu de q_0 et de q_1.

9. On note q_{00} (resp. q_{10}) le milieu de q_0 et de p_0 (resp. de p_{01}). Montrer que le milieu p_{001} de q_{00} et de q_{01} appartient à C. Quelle est la tangente à C en p_{001} ? Sur une grande figure soignée (voir feuille jointe), itérer la construction jusqu'à obtenir 9 points de C avec leurs tangentes.

10. Dans cette question, on change le corps de base, qui est $\mathbb{R}$ désormais. Montrer que l'aire du triangle qq_0q_1 vaut le quart de l'aire du triangle initial qp_0p_1.

Soit G la région délimitée par l'arc de C entre p_0 et p_1 et par le segment $[p_0, p_1]$. En encadrant G par des polygones et en sommant une série, en déduire que l'aire de G vaut deux tiers de l'aire du triangle qp_0p_1.

II

On étudie les symétries des coniques affines

1. On choisit des coordonnées affines sur E. Montrer que la courbe C_0 d'équation $q_0(x, y) = y - x^2 = 0$ est une parabole.

2. Déterminer le sous-groupe du groupe affine $Aff(E)$ qui laisse stable C_0 (si f est une bijection affine du plan, écrire que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $q_0(f(x, x^2)) = 0$).

3. Soit C une parabole. Montrer qu'il existe des coordonnées affines dans lesquelles l'équation de C est $y = x^2$.

4. Rappeler (cours) quel est le sous-groupe de $PGl(2, \mathbb{C})$ qui fixe ∞. En utilisant l'isomorphisme $PGl(2, \mathbb{C}) \simeq PO(3, \mathbb{C})$, donner une autre solution à la question 2.

5. On choisit des coordonnées affines sur E. Montrer que la courbe C_1 d'équation $q_1(x, y) = yx - 1 = 0$ est une hyperbole.

6. Déterminer le sous-groupe du groupe affine $Aff(E)$ qui laisse stable C_1 (si f est une bijection affine du plan, écrire que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $q_1(f(x, 1/x)) = 0$).

7. Soit C une hyperbole. Montrer qu'il existe des coordonnées affines dans lesquelles l'équation de V est $yx = 1$.

8. Déterminer le sous-groupe de $PGl(2, \mathbb{C})$ qui fixe 0 et ∞. En utilisant l'isomorphisme $PGl(2, \mathbb{C}) \simeq PO(3, \mathbb{C})$, donner une autre solution à la question 6.

Corrigé du partiel de Géométrie

Mercredi 28 mars 2007, durée 3h

I

1. $p(t) = (\frac{1}{2}\frac{-bt-d}{2a}, t)$ est une représentation paramétrique d'une droite.

2. Choisissons des coordonnées affines telles que l'axe Ox soit parallèle à la direction donnée. Dans ces coordonnées, C possède une équation de la forme $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$. Si $a=0$, l'équation devient $x = -\frac{cy^2+ey+f}{by+d}$ qui admet la droite $y = -\frac{b}{d}$ comme asymptote ou direction asymptotique, c'est exclu. Par conséquent, $a \neq 0$. D'après 1, le lieu des milieux est une droite.

3. La représentation paramétrique $t \mapsto \frac{1-t}{2}p + \frac{1+t}{2}q$ de la droite pq est une application affine $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ qui se prolonge en une application projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui envoie 1 sur q, -1 sur p, 0 sur m et le point ∞ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur f. Par invariance projective du birapport,

$$[f, m, q, p] = [\infty, 0, 1, -1] = -1,$$

donc p, q, m et f forment une division harmonique.

4. Un exemple du cours affirme que si $\mathcal{C}$ est une conique projective non dégénérée, w un point qui n'est pas sur $\mathcal{C}$, D une droite passant par w et coupant $\mathcal{C}$ en p et q, alors le conjugué harmonique de w par rapport à la paire $\{p, q\}$ se trouve sur la polaire w^0 de w par rapport à $\mathcal{C}$. Lorsque $\mathcal{C}$ est la complétion d'une conique affine C et w un point de la droite à l'infini, les points à distance finie des droites projectives passant par w forment une famille de droites parallèles de même point de fuite w, et, d'après 3, les conjugués harmoniques de w sont les milieux des segments $[p, q]$. Ils sont donc tous sur une même droite, la polaire de w par rapport à $\mathcal{C}$.

5. On expédie le point w à l'infini. Autrement dit, on choisit un repère projectif dont le premier point est w. On se retrouve dans le cas particulier 2.

6. Par construction, q est le polaire de la droite p_0p_1. Soit w le polaire de la droite qm. Alors les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points r et s de $qm \cap C$ passent par w. Comme $q \in w^0 \Rightarrow w \in q^0 = p_0p_1$, le conjugué harmonique de w par rapport à la paire $\{p_0, p_1\}$ le long de la droite p_0p_1 est m. Comme m est le milieu de p_0 et p_1, w est le point de fuite de la droite p_0p_1. En particulier, il appartient à la droite à l'infini. Les tangentes sw et rw sont donc parallèles à la droite $mw = p_0p_1$.

7. Si C est une parabole, la droite à l'infini ℓ est tangente à $\mathcal{C}$. Comme $w \in \ell$, ℓ est l'une des deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par w, donc l'un des deux points r et s est à l'infini. Par conséquent, la droite qm coupe C en seul point p_{01}. Comme $m \in q^0$, m est le polaire de q par rapport à la paire $\{r, s\}$, le long de qm, donc les points q, m, $r = p_{01}$ et $s \in \ell$ forment une division harmonique. D'après 3, p_{01} est le milieu de q et de m.

8. Comme p_0p_1 et la tangente en p_{01} à C sont parallèles, le théorème de Thalès s'applique, $\frac{\overline{qq_0}}{\overline{qp_0}} = \frac{\overline{qq_1}}{\overline{qp_1}} = \frac{\overline{qp_{01}}}{\overline{qm}} = \frac{1}{2}$, donc q_0 est le milieu de q et de p_0, et q_1 est le milieu de q et de p_1. De façon projective, considérons les droites $D = p_0p_1$, $D' = T_{p_{01}}C$, D'' = la parallèle à D passant par q et $D''' = \ell$. Ces droites concourantes en w coupent qm en 4 points qui forment une division harmonique. Elles forment donc une division harmonique du faisceau des droites passant par w. Elles coupent les droites qp_0 et qp_1 suivant des divisions harmoniques comportant des points à l'infini, donc D' coupe ces droites aux milieux des paires $\{q, p_0\}$ et $\{q, p_1\}$ respectivement. Le même argument donne le fait que p_{01} est le milieu de q_0 et q_1. On peut aussi utiliser le fait que la projection de centre q préserve les divisions harmoniques.

9. On reprend la construction des questions 6, 7 et 8 en remplaçant le point p_1 par p_{01}. C'est q_0 qui joue le rôle de q. Soit m_0 le milieu de p_0 et de p_{01}. Alors q_0m_0 coupe C en un seul point qui est le milieu de q_0 et de m_0. D'après Thalès, ce milieu coïncide avec p_{001}. La tangente à C en p_{001} est parallèle à p_0p_{01}, donc c'est la droite $p_{001}q_{00}$.

10. La construction ne faisant intervenir que des milieux, le changement de corps n'altère pas le résultat de la question 9.

D'après 8, le triangle qq_0q_1 est homothétique d'un facteur $1/2$ au triangle initial qp_0p_1, donc son aire vaut le quart de l'aire de qp_0p_1, notée A. En construisant le nouveau point p_{01} de C et sa tangente, on construit un quadrilatère $p_0q_0q_1p_1$ d'aire $3A/4$ circonscrit à l'ensemble G délimité par l'arc de C entre p_0 et p_1 et par le segment $[p_0, p_1]$.

Le triangle $p_0q_0p_{01}$ a même base et même hauteur que qq_0p_{01} qui a même base et même hauteur que $qp_{01}q_1$. Par conséquent, son aire est la moitié de celle de qq_0q_1, soit $A/8$. Le triangle homothétique $q_0q_{00}q_{01}$ a donc une aire égale à $A/32$. On peut insérer un second triangle de même aire $q_1q_{10}q_{11}$ entre la parabole et qq_0q_1. Par conséquent, en construisant les deux nouveaux points p_{001} et p_{011} (et deux nouvelles tangentes) à C, on construit un polygone $p_0q_{00}q_{01}q_{10}q_{11}p_1$ contenu dans le précédent, circonscrit à G et d'aire $A - \frac{A}{4} - \frac{A}{16}$. On montre ainsi que l'aire de G est inférieure ou égale à

$$A - \frac{A}{4} - \frac{A}{16} - \cdots = 2A - A(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots) = 2A - A\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}A.$$

Inversement, par convexité, G contient le triangle $p_0p_{01}p_1$, de même base mais de hauteur moitié de celle de p_0qp_1, donc d'aire $A/2$. Pour la même raison, G

contient les triangles $p_0p_{001}p_{01}$ et $p_{01}p_{011}p_1$ d'aire moitié de celle de $p_0q_0p_{01}$, soit $A/16$. Autrement dit, G contient le polygone $p_0p_{001}p_{01}p_{011}p_1$ d'aire $\frac{A}{2}+\frac{A}{8}$. On montre ainsi que l'aire de G est supérieure ou égale à

$$\frac{A}{2}+\frac{A}{8}+\cdots=\frac{A}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots)=\frac{A}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}A.$$

On conclut que aire$(G)=\frac{2}{3}A$.

Cette démonstration, dûe à Archimède, est un précurseur du calcul intégral. C'est le plus ancien témoignage connu d'un raisonnement mathématique faisant intervenir une infinité d'opérations et accepté comme tel et non rejeté comme le paradoxe de Zénon.

II

1. En coordonnées homogènes, l'équation de $\mathcal{C}_0$ est $x_1x_2=x_0^2$. La droite à l'infini D a pour équation $x_2=0$. L'intersection est le point $p_0=\{x_0=x_2=0\}$, de coordonnées homogènes $[0:1:0]$. Il y a donc tangence.

2. Si f a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b & u\\ c & d & v\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, avec $ad-bc\neq 0$, alors f laisse stable C_0 si et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{C}$, $f(x,x^2)\in C_0$. Cela conduit à l'équation $b^2x^4+2abx^3+(a^2+2bu-d)x^2+(2au-c)x+u^2-v=0$. Ca donne $b=0$, $c=2au$, $d=a^2$, $v=u^2$, $a\neq 0$. On trouve un groupe à deux paramètres, isomorphe au groupe affine de la droite.

3. Soit $\mathcal{C}$ une conique non dégénérée, tangente en p à la droite à l'infini. Soient q et r deux autres points de $\mathcal{C}$. Soit s le point commun des tangentes à $\mathcal{C}$ en p et q. Dans le repère projectif (s,p,q,r), $s=[1:0:0]$, $p=[0:1:0]$, $q=[0:0:1]$, $r=[1:1:1]$. Si l'équation projective de $\mathcal{C}$ est $ax_0^2+bx_1^2+cx_2^2+2dx_0x_1+2ex_1x_2+2fx_2x_0$, alors l'équation homogène de la tangente en p est $dx_0+bx_1+ex_2=0$. Elle passe par p et s si et seulement si $d=b=0$. L'équation homogène de la tangente en q est $fx_0+ex_1+cx_2=0$. Elle passe par q et s si et seulement si $f=c=0$. La courbe passe par r si et seulement si $a+2e=0$. L'équation se réduit donc à $-x_0^2+x_1x_2=0$, c'est celle de $\mathcal{C}_0$.

Autre solution. Le groupe $PGl(V)$ agit transitivement sur les coniques non dégénérées. Le stabilisateur d'une telle conique agit transitivement sur la conique. Par conséquent, si $\mathcal{C}$ est une conique non dégénérée, tangente en p à la droite à l'infini D, il existe une bijection projective f qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_0$ et p sur p_0. Nécessairement, f envoie la tangente à $\mathcal{C}$ en p sur la tangente à $\mathcal{C}_0$ en p_0, i.e. laisse stable D. Par conséquent, f est affine. Il existe donc une bijection affine qui envoie C sur C_0.

4. D'après le cours, le stabilisateur du point à l'infini de la droite projective est le groupe affine. De plus le stabilisateur d'une conique non dégénérée est isomorphe à

$PGl(2,\mathbb{C})$, et agit sur la conique comme $PGl(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1$. Si $\mathcal{C}$ est une conique non dégénérée tangente à la droite à l'infini, son stabilisateur dans le groupe affine est exactement le sous-groupe du groupe projectif qui stabilise $\mathcal{C}$ et fixe l'unique point à l'infini de $\mathcal{C}$. Il est isomorphe au stabilisateur d'un point de la droite projective, donc au groupe affine de la droite.

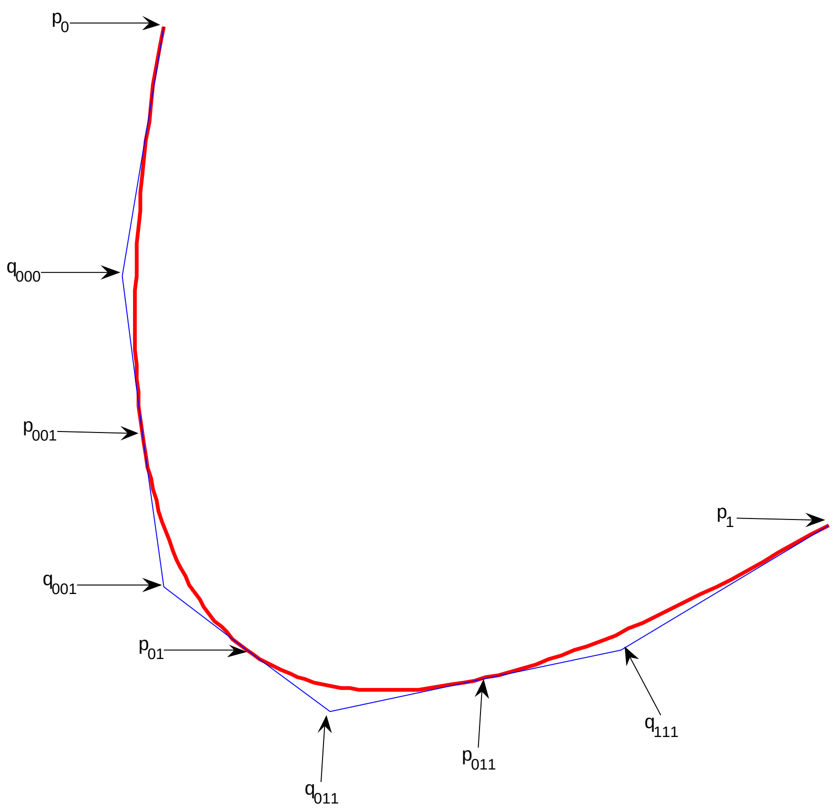
5. En coordonnées homogènes, l'équation de $\mathcal{C}_1$ est $x_0x_1 = x_2^2$. La droite à l'infini D a pour équation $x_2 = 0$. L'intersection consiste en les deux points $p_0 = \{x_0 = x_2 = 0\}$ et $p_1 = \{x_1 = x_2 = 0\}$, de coordonnées homogènes $[0:1:0]$ et $[1:0:0]$. Il n'y a donc pas tangence.

6. Si f a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $ad - bc \neq 0$, alors f laisse stable C_1 si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $f(x, 1/x) \in C_1$. Cela conduit à l'équation $acx^4 + (uc + av)x^3 + (ad + uv + bc - 1)x^2 + (ud + bc)x + bd = 0$. Si $d = 0$, alors $bc = 0$, d'où $ad - bc = 0$, contradiction. Donc $d \neq 0$, $b = 0$, $u = 0$, $ad = 1$, $c = 0$, $v = 0$. On trouve un groupe à un paramètre.

7. Soit $\mathcal{C}$ une conique non dégénérée, qui coupe en p et p' la droite à l'infini. Soit q le point d'intersection des tangentes à $\mathcal{C}$ en p et p', soit r un autre point de $\mathcal{C}$. Dans le repère projectif (p', p, q, r), $p' = [1:0:0]$, $p = [0:1:0]$, $q = [0:0:1]$, $r = [1:1:1]$. Si l'équation projective de $\mathcal{C}$ est $ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_1x_2 + 2fx_2x_0$, alors l'équation homogène de la tangente en p est $dx_0 + bx_1 + ex_2 = 0$. Elle passe par p et q si et seulement si $b = e = 0$. L'équation homogène de la tangente en p' est $ax_0 + dx_1 + fx_2 = 0$. Elle passe par p' et q si et seulement si $a = f = 0$. La courbe passe par r si et seulement si $c + 2d = 0$. L'équation se réduit donc à $-x_2^2 + x_0x_1 = 0$, c'est celle de $\mathcal{C}_1$.

Autre solution. Le groupe $PGl(V)$ agit transitivement sur les coniques non dégénérées. Le stabilisateur d'une telle conique agit transitivement sur les paires de points distincts de la conique. Par conséquent, si $\mathcal{C}$ est une conique non dégénérée, qui coupe en p et p' la droite à l'infini D, il existe une bijection projective f qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_1$, p sur p_0 et p' sur p_1. Nécessairement, f envoie la droite pp' sur la droite p_0p_1, i.e. laisse stable D. Par conséquent, f est affine. Il existe donc une bijection affine qui envoie C sur C_1.

8. Le fixateur du point à l'infini et de l'origine est le sous-groupe du groupe affine qui fixe l'origine, autrement dit, c'est le groupe linéaire. En dimension 1, c'est un groupe à un paramètre. De plus le stabilisateur d'une conique non dégénérée est isomorphe à $PGl(2,\mathbb{C})$, et agit sur la conique comme $PGl(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1$. Si $\mathcal{C}$ est une conique non dégénérée qui coupe la droite à l'infini en deux points, son stabilisateur dans le groupe affine est exactement le sous-groupe du groupe projectif qui stabilise $\mathcal{C}$ et fixe les deux points à l'infini de $\mathcal{C}$. Il est isomorphe au fixateur de deux points de la droite projective, donc c'est un groupe à un paramètre.


p0
q000
p001
q001
p01
q011
p011
q111
p1