# GROUPE FONDAMENTAL, REVETEMENTS

P. Pansu

4 avril 2007

## 1 Déterminations de l'angle polaire

### 1.1 Préliminaires

Dans ce chapitre, on va construire à la main des applications continues, et utiliser à plusieurs reprises le fait suivant.

**Lemme 1** *Soient $X$ et $Y$ des espaces topologiques, soient $A$ et $B$ des fermés de $X$ tels que $X = A \cup B$. Soit $f : X \to Y$ une application telle que $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues. Alors $f$ est continue.*

**Preuve.** Soit $F \subset Y$ un fermé. $f_{|A}^{-1}(F)$ est un fermé de $A$, donc un fermé de $X$. Alors $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = f_{|A}^{-1}(F) \cup f_{|B}^{-1}(F)$ est fermé. ■

D'autre part

**Lemme 2** *Soit $X$ un espace métrique compact. Soient $U_i$, $i \in I$ des ouverts qui recouvrent $X$. Alors il existe un rayon $r > 0$ (appelé* nombre de Lebesgue *du recouvrement) tel que toute boule de rayon $r$ dans $X$ soit entièrement contenue dans l'un des $U_i$.*

**Preuve.** Par compacité, on peut supposer l'ensemble $I$ fini. Soit, pour $x \in X$, $d(x) = \max\{d(x, X \setminus U_i) \,|\, i \in I\}$. Alors $d$ est continue, strictement positive, donc elle est bornée inférieurement par un $r > 0$. Si $x \in X$, comme $r \leq d(x)$, il existe $i \in I$ tel que $d(x, X \setminus U_i) \geq r$, ce qui signifie que $B(x, r) \subset U_i$. ■

### 1.2 Motivation

**Question 1**. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t \mapsto c(t)$, $I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ une courbe continue dans le plan qui évite l'origine. On note $r(t) \in ]0, +\infty[$, $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ses coordonnées polaires. Peut-on choisir une fonction continue $t \mapsto \theta(t)$, $I \to \mathbb{R}$ telle que $\theta(t) \in \bar{\theta}(t)$ pour tout $t$ ?

**Question 2**. Supposons que $I = \mathbb{R}$ et que $c$ est $2\pi$-périodique. Peut-on choisir la fonction continue $t \mapsto \theta(t)$ $2\pi$-périodique ?

**Question 3**. La fonction holomorphe $z \mapsto 1/z$, $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ?

### 1.3 Rappel : détermination principale du logarithme

**Définition 3** *La* détermination principale du logarithme *est la fonction holomorphe* Log *définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, qui vaut 0 en 1 et dont la dérivée est $z \mapsto 1/z$.*

On la calcule en intégrant $1/z$ le long d'arcs évitant $\mathbb{R}_-$. On trouve que si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in ] - \pi, \pi[$, alors

$$\mathrm{Log}(z) = \log(r) + i\theta.$$

Le fait que les limites par le haut et par le bas de Log en un point de $\mathbb{R}_-$ sont distinctes entraîne que $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donc la réponse à la question 3 est négative.

## 1.4 Lien entre les 3 questions

Cela entraîne que la réponse à la question 2 est négative elle-aussi.

**Exemple 4** *Soit $c(t) = e^{it} \in \mathbb{C}$, qu'on identifie à $\mathbb{R}^2$. Alors $r(t) = 1$ pour tout $t$ et il n'existe pas de fonction continue $2\pi$-périodique $t \mapsto \theta(t)$ telle que $c(t) = e^{i\theta(t)}$.*

En effet, sinon, la formule $\mathrm{my}-\log(re^{it}) = \log(r) + i\theta(t)$ définirait une fonction continue sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ telle que $e^{my-log(z)} = z$. Le théorème d'inversion locale, appliqué à la fonction exponentielle, entraînerait que $\mathrm{my}-\log$ est holomorphe, de dérivée $1/z$, contradiction.

## 1.5 Le théorème de relèvement

**Théorème 1** *On note $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$. Soit $t \mapsto u(t)$, $I \to U$ une application continue. Soit $\theta_0$ un réel tel que $e^{i\theta_0} = u(x_0)$. Il existe une unique fonction continue $t \mapsto \theta(t)$, $I \to \mathbb{R}$ telle que $e^{i\theta(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$ et $\theta(t_0) = \theta_0$.*

**Preuve.** L'unicité est facile : deux solutions diffèrent d'une fonction continue à valeur dans $2\pi\mathbb{Z}$, nécessairement constante, en fait nulle puisqu'elle s'annule en $t_0$.

Supposons d'abord qu'il existe un point $v \in U$ qui n'est pas dans l'image de $u$. Si $v = -1$, posons $\theta_v(t) = -i\mathrm{Log}(u(t))$. Si $v \neq -1$, posons $\theta_v(t) = -i\mathrm{Log}(-u(t)/v) - i\mathrm{Log}(v) - i\pi$. Dans les deux cas, $e^{i\theta_v(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$. En particulier, $e^{i\theta_v(t_0)} = u(t_0)$, donc il suffit d'ajouter un multiple entier de $2\pi$ à $\theta_v$ pour que $\theta(t_0) = \theta_0$.

Passons au cas général. Soit $T = \sup\{s \in I \,|\, \text{il existe une solution définie sur } [t_0, s]\}$ (éventuellement, $T = +\infty$). Supposons que $T \in I$. Soit $v \in U$ un point distinct de $u(T)$. Par continuïté de $u$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $u$ ne prenne pas la valeur $v$ sur $]T - \epsilon, T + \epsilon[\cap I$. Par définition de $T$, il existe un $t > T - \epsilon$ et une solution $\theta_s$ définie sur $[t_0, s]$. Alors $e^{i\theta_s(s)} = u(s) = e^{i\theta_v(s)}$, donc il existe un entier $n$ tel que $\theta_s(s) - \theta_v(s) = 2\pi n$. On prolonge $\theta_s$ par continuïté en posant $\theta(t) = \theta_v(s) + 2\pi n$ pour $t \in [s, T + \epsilon[\cap I$. On obtient une solution définie sur $[t_0, T + \epsilon[\cap I$. Ceci contredit le choix de $T$. On conclut que $T \notin I$, donc la moitié du contrat est remplie. En faisant le même travail à gauche de $t_0$, on construit le relèvement souhaité sur $I$ entier. ■

**Moralité**. On a utilisé la propriété suivante de la paramétrisation exponentielle $\mathbb{R} \to U$ du cercle unité : au voisinage de chaque point de $U$, on dispose d'une famille d'applications réciproques continues dont les images recouvrent l'image réciproque du voisinage. Cette propriété caractérise les *revêtements*, on y reviendra.

## 1.6 Degré

Retour à la question 2. Soit $u : \mathbb{R} \to U$ une application $2\pi$-périodique. Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relèvement de $u$. Alors $t \mapsto \theta(t + 2\pi)$ est un autre relèvement de $u$, donc il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$. L'exemple de la paramétrisation exponentielle elle-même ($\theta(t) = t$) montre que $n$ n'est pas toujours nul.

**Définition 5** *Soit $f : U \to U$ une application continue, soit $\theta$ un relèvement de $t \mapsto f(e^{it})$. On appelle* degré *de $f$ l'entier $n = \deg(f)$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$.*

**Exemple 6** *Le degré de $z \mapsto z^n$ est $n$.*

**Proposition 7** *Si deux applications $f$ et $g : U \to U$ sont suffisamment voisines, elles ont même degré.*

**Preuve.** Supposons que $|f - g| < 2$. Soient $\theta_f$, $\theta_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des relèvements de $f$ et $g$. On peut les choisir de sorte que $|\theta_f(0) - \theta_g(0)| < \pi$. Supposons que $s = \inf\{t > 0 \,|\, |\theta_f(t) - \theta_g(t)| \geq \pi\}$ est fini. Alors $|\theta_f(s) - \theta_g(s)| = \pi$, ce qui contredit $|f(s) - g(s)| < 2$. Par conséquent, pour tout $t > 0$, $|\theta_f(t) - \theta_g(t)| < \pi$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2k\pi|\deg(f) - \deg(g)| - |\theta_f(0) - \theta_g(0)| &\leq |\theta_f(0) - \theta_g(0) + 2k\pi(\deg(f) - \deg(g)| \\ &\leq |\theta_f(2k\pi) - \theta_g(2k\pi)| < \pi, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\deg(f) = \deg(g)$. ■

## 1.7 Degré des applications différentiables

**Rappel 8** *On dit que $f : U \to U$ est de classe $C^k$ si $g(t) = f(e^{it})$ définit une application de classe $C^k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.*

**Proposition 9** *Soit $f : U \to U$ une application de classe $C^1$. Posons $g(t) = f(e^{it})$. Alors*

$$\deg(f) = \int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{i\, g(t)}\, dt.$$

**Preuve.** Soit $\theta$ un relèvement de $g$, i.e. $g(t) = e^{i\theta(t)}$. Alors $\theta$ est dérivable, et $\frac{g'(t)}{g(t)} = i\theta'(t)$, d'où

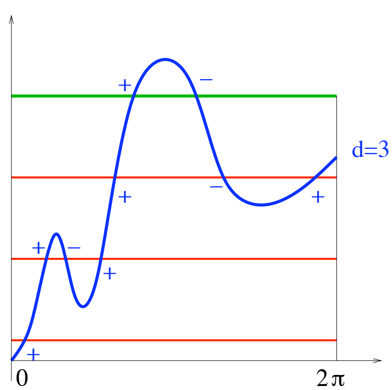
$$\int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{i\, g(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \theta'(t)\, dt = \theta(2\pi) - \theta(0) = \deg(f). ■$$

**Proposition 10** *Soit $f : U \to U$ une application de classe $C^1$. Soit $u \in U$ tel que pour tout $v \in U$ tel que $f(v) = u$, la dérivée de $f$ en $v$ est non nulle. Elle possède un signe, $\epsilon(v) = +1$ si la vitesse va dans le sens trigonométrique, $\epsilon(v) = -1$ sinon. Alors*

$$\deg(f) = \sum_{v \in f^{-1}(u)} \epsilon(v).$$

**Preuve.** La somme est finie, car l'ensemble $f^{-1}(u)$ est discret (chacun de ses points est isolé) donc fini. En effet, soit $\theta$ un relèvement de $f$, $f(e^{it}) = e^{i\theta(t)}$, et soit $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $u = e^{i\theta_0}$. Par hypothèse, pour tout $t$ tel que $\theta(t) = \theta_0 \mod 2\pi$, $\theta'(t) \neq 0$, donc $t$ est isolé.

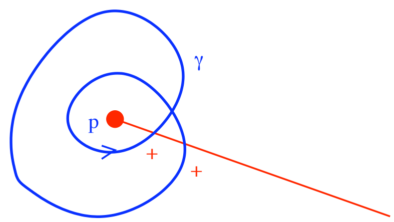
Notons $d = \deg(f)$. Quitte à translater le temps, on peut supposer que $\theta(0) = 0$ et $\theta_0 \neq 0$. Lorsque $t$ varie de 0 à $2\pi$, la fonction $\theta$ croise chacun des niveaux $\theta_0 + 2k\pi$, $k = 0, \ldots, d-1$ un nombre fini de fois, avec une dérivée positive ou négative, mais la somme des signes vaut 1. Pour un niveau $\theta_0 + 2k\pi$, où $k$ n'est pas compris entre 0 et $d - 1$, la somme des signes vaut 0. Par conséquent, la somme des signes des dérivées à toutes les traversées des niveaux $\theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vaut $d$. Or cette somme coïncide avec celle de l'énoncé. ■



## 1.8 Indice

**Définition 11** *Soit $\gamma : U \to \mathbb{R}^2$ une courbe dans le plan qui évite un point $p$. On appelle* indice *de $\gamma$ par rapport à $p$ le degré de l'application $u \mapsto \dfrac{\gamma(u)-p}{|\gamma(u)-p|}$.*

Autrement dit, l'indice de $\gamma$ par rapport à $p$, c'est le nombre de tours que $\gamma$ fait autour de $p$. On peut le calculer en coupant $\gamma$ par une demi-droite bien choisie : on compte le nombre de fois que $\gamma$ coupe la demi-droite dans le sens trigonométrique, moins le nombre de fois que $\gamma$ coupe la demi-droite dans l'autre sens.




Fin du cours $n^0 10$

# 2 Groupe fondamental

## 2.1 Définition

Soit $X$ un espace topologique. Un *chemin* dans $X$ est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$. Lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on parle de *lacet*, *basé* au point $x = \gamma(0) = \gamma(1)$.

### 2.1.1 Composition

Si $\alpha$, $\beta : [0,1] \to X$ sont des chemins tels que $\beta(0) = \alpha(1)$, leur *composition* est le chemin noté $\alpha \cdot \beta$ tel que

$$\begin{cases} \alpha \cdot \beta(t) = \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha \cdot \beta(t) = \beta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

### 2.1.2 Inverse

L'inverse d'un chemin $\alpha$, noté $\alpha^{-1}$, est défini par

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t).$$

### 2.1.3 Homotopie

Deux chemins sont homotopes si on peut les déformer continûment l'un en l'autre.

**Définition 12** *Soient $\alpha$, $\beta : [0,1] \to X$ des chemins de mêmes extrémités $x_0$ et $x_1$. On dit que $\alpha$ et $\beta$ sont homotopes (à extrémités fixées), et on note $\alpha \sim \beta$, s'il existe une application continue $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que*

$$\begin{aligned} F(0,t) &= \alpha(t), \\ F(1,t) &= \beta(t), \\ F(s,0) &= x_0, \quad F(s,1) = x_1. \end{aligned}$$

**Lemme 13** *Il s'agit d'une relation d'équivalence.*

En effet, soit $F$ (resp. $G$) une homotopie de $\alpha$ à $\beta$ (resp. de $\beta$ à $\gamma$). Alors $H$ définie par

$$\begin{cases} H(s,t) = F(2s,t) & \text{si } s \in [0,\frac{1}{2}], \\ H(s,t) = G(2s-1,t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

est une homotopie de $\alpha$ à $\gamma$. ■

**Théorème 2** *Soit $x \in X$. Soit $\pi_1(X,x)$ l'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixées) de lacets basés en $x$. La composition des lacets induit sur $\pi_1(X,x)$ une structure de groupe.*

**Définition 14** *On appelle $\pi_1(X,x)$ le* groupe fondamental *de $X$.*

**Preuve.**

1. $\alpha \sim \alpha'$ et $\beta \sim \beta'$ entraîne $\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta'$.
   En effet, soit $F$ (resp. $G$) une homotopie de $\alpha$ à $\alpha'$ (resp. de $\beta$ à $\beta'$). Alors $H$ définie par

   $$\begin{cases} H(s,t) = F(s,2t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}], \\ H(s,t) = G(s,2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

   est une homotopie de $\alpha \cdot \beta$ à $\alpha' \cdot \beta'$.
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \sim (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.
   En effet, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \circ \phi$ où $\phi$ est une application de $[0,1]$ dans lui-même, homotope à l'identité (à extrémités fixées).
3. Soit $x$ le lacet constant basé en $x$. Alors $\alpha \cdot x \sim x \cdot \alpha \sim \alpha$.
   Idem.
4. $\alpha \cdot \alpha^{-1} \sim \alpha^{-1} \cdot \alpha \sim x$.
   En effet, l'application

   $$\begin{cases} H(s,t) = \alpha(2ts) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}], \\ H(s,t) = \alpha^{-1}(1-(2-2t)s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

   est une homotopie du lacet constant à $\alpha \cdot \alpha^{-1}$. ■

## 2.2 Exemples

**Proposition 15** *Si $X$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $\pi_1(X,x)$ est trivial.*

**Preuve.** $F(s,t) = sx + (1-s)\alpha(t)$ est une homotopie du lacet $\alpha$ au lacet constant. ■

**Proposition 16** *Le groupe fondamental du cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}$. L'isomorphisme est donné par le degré $\deg : \pi_1(U,1) \to \mathbb{Z}$.*

**Preuve.** Un lacet $\alpha$ basé en 1 dans $U$ définit une application continue $f : U \to U$ via $f(e^{2\pi it}) = \alpha(t)$. Un relèvement de $\alpha$, c'est-à-dire une application $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha(t) = e^{2\pi i\eta(t)}$, donne un relèvement $\theta$ de $f$ via $\theta(2\pi t) = 2\pi\eta(t)$. On peut donc parler du degré de $\alpha$, c'est simplement $\eta(1) - \eta(0)$.

Deux lacets homotopes ont même degré. En effet, si $F$ est une homotopie de $\alpha$ à $\beta$, alors, par uniforme continuïté, il existe un entier $N$ tel que les lacets $\gamma_j(t) = F(\frac{j}{N},t)$ satisfassent $|\gamma_j,\gamma_{j+1}| < 2$. Alors $\deg(\gamma_j) = \deg(\gamma_{j+1})$ pour tout $j$, donc $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$.

Le degré de la composition, c'est la somme des degrés. En effet, soit $\theta$ (resp. $\eta$) le relèvement de $\alpha$ (resp. $\beta$) tel que $\theta(0) = 0$ (resp. $\eta(0) = \theta(1)$). Alors le relèvement de $\alpha \cdot \beta$ est $\eta \cdot \theta$, donc

$$\deg(\alpha \cdot \beta) = \eta(1) = \eta(1) - \eta(0) + \theta(1) - \theta(0) = \deg(\alpha) + \deg(\beta).$$

Deux lacets de même degré sont homotopes. En effet, soit $\theta$ (resp. $\eta$) le relèvement de $\alpha$ (resp. $\beta$) tel que $\theta(0) = \eta(0) = 0$. Posons $F(s,t) = e^{i((1-s)\theta(2\pi t)+s\eta(2\pi t))}$. C'est une homotopie de $\alpha$ à $\beta$.

Ceci prouve que l'application $\deg : \pi_1(U,1) \to \mathbb{Z}$ est un homomorphisme bien défini et injectif. Les lacets $z \mapsto z^n$ montrent qu'il est surjectif. ■

**Proposition 17** *Soient $X$, $Y$ des espaces topologiques, $x \in X$, $y \in Y$. Alors*

$$\pi_1(X \times Y, (x,y)) = \pi_1(X,x) \oplus \pi_1(Y,y).$$

*En particulier, le groupe fondamental du tore $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est $\mathbb{Z}^n$.*

**Preuve.** Un lacet basé en $(x,y)$ dans $X \times Y$, c'est un couple d'un lacet de $X$ basé en $x$ et d'un lacet de $Y$ basé en $y$. Les homotopies aussi sont des couples d'homotopies, donc les classes d'homotopie sont des couples de classes.

Enfin, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$. ■

**Proposition 18** *Soit $S^n$ la sphère de dimension $n$. Si $n \geq 2$, $\pi_1(S^n)$ est trivial.*

**Preuve.** Soit $\gamma : [0,1] \to S^n$ un lacet.

**1er cas**. Supposons que $\gamma$ évite au moins un point $u \in S^n$. Comme $S^n \setminus \{u\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, $\gamma$ est homotope à une constante dans $S^n \setminus \{u\}$, et *a fortiori* dans $S^n$.

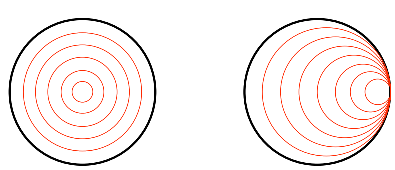
**Cas général**. Pour se ramener au premier cas, on montre que $\gamma$ est homotope à un lacet qui évite un point. Notons $pr$ la projection radiale $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$. Montrons que $\gamma$ est homotope à une ligne brisée, i.e. un lacet $\beta = pr \circ \alpha$ où $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est affine par morceaux. Par continuïté uniforme, il existe un entier $N$ tel que si $|t' - t| \leq 1/N$, $|\gamma(t') - \gamma(t)| < 1/2$. Soit $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'application continue qui coïncide avec $\gamma$ aux multiples de $1/N$ et est affine entre deux multiples consécutifs. Soit $F(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s\alpha(t)$ l'homotopie affine de $\gamma$ à $\alpha$. Pour chaque $j = 1, \ldots, N$, la boule de rayon $1/2$ centrée en $\gamma(\frac{j}{N})$ contient $\gamma([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]) \cup \alpha([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}])$ donc elle contient aussi $F([0,1] \times [\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}])$. Autrement dit, l'image de $F$ ne rencontre pas la boule de rayon $1/2$. L'application $G = pr \circ F$ est donc une homotopie de $\gamma$ à $\beta = pr \circ \alpha$ dans $S^n$. L'image de $\beta$ est contenue dans une réunion finie de grands cercles, donc si $n \geq 2$, elle ne recouvre pas la sphère. ■

## 2.3 Applications

**Lemme 19** *Un lacet $\alpha : [0,1] \to X$, $\alpha(0) = \alpha(1) = x$, définit une application continue $f : U \to X$ par $f(e^{2\pi i t}) = \alpha(t)$. $\alpha$ est homotope à une constante si et seulement si $f$ se prolonge en une application continue du disque fermé $\bar{D} \to X$.*

**Preuve.** Si $F(s,t)$ est une homotopie de $\alpha$ à une constante, on pose $g(re^{2\pi i t}) = F(r,t)$. $F$ est continue en vertu du lemme 1. En effet, on coupe le disque fermé en deux demi-disques fermés $A = \bar{D} \cap \{\Im m(z) \geq 0\}$ et $B = \bar{D} \cap \{\Im m(z) \leq 0\}$. Sur $A \setminus \{0\}$, $g = F \circ H$ où $H(z) = (|z|, \mathrm{Arg}(z)/2\pi)$ où l'argument est pris dans $]-\pi/2, 3\pi/2[$. On vérifie ensuite que $g$ se prolonge par continuïté à $A$. Idem pour $B$. Enfin, la condition de raccord est vérifiée.

Inversement, soit $g : \bar{D} \to X$ une application continue, $x = g(1)$ et $\alpha(t) = g(e^{2\pi i t})$. Alors $\alpha$ est un lacet basé en $x$. L'application $F(s,t) = g(se^{2\pi i t})$ est une homotopie de $\alpha$ à une constante, ce qui suffit pour bien des usages. Mais cette homotopie ne fixe pas les extrémités. On utilise plutôt $G(s,t) = g(1 - s + se^{2\pi i t})$, qui envoie 0 et 1 sur $x$ pour tout $s$. ■

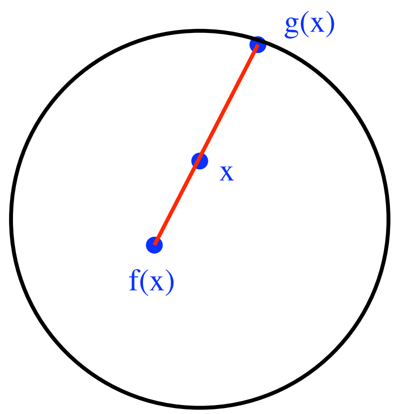


**Théorème 3** (L.E.J. Brouwer, 1909). *Soit $\bar{D}$ le disque unité fermé du plan. Toute application continue $\bar{D} \to \bar{D}$ possède un point fixe.*

**Preuve.** Par l'absurde. Supposons qu'il existe une application continue $f : \bar{D} \to \bar{D}$ sans point fixe. Considérons l'application $g : \bar{D} \to U$ qui à $x \in \bar{D}$ associe le point d'intersection $g(x)$ de la demi-droite d'origine $f(x)$ passant par $x$. $g$ est continue. En effet, $g(x)$ est caractérisé par une condition fermée

$$\begin{cases} \det(\overrightarrow{f(x)z}, \overrightarrow{f(x)x}) = 0, \\ \overrightarrow{f(x)z} \cdot \overrightarrow{f(x)x} \geq 0. \end{cases}$$

Si $x_j$ est une suite tendant vers $x$, toute sous-suite convergente de $g(x_j)$ doit converger vers $g(x)$. Par conséquent, $g(x_j)$ converge vers $x$.




Posons, pour $s \in [0,1]$ et $u \in U$, $F(s,u) = g(su)$. Alors $F(0,\cdot) = g(0)$ est constante, et $F(1,\cdot)$ est l'identité. Par conséquent, l'identité $U \to U$ est homotope à une constante. Or le degré de l'identité vaut 0, alors que celui d'une application constante vaut 0, contradiction. ■

**Remarque 20** *Le théorème est vrai en toutes dimensions. Brouwer a traité le cas $n = 3$ en 1919, le cas général est dû à J. Hadamard.*

J'ignore l'histoire du cas $n = 2$. Pour généraliser la preuve aux dimensions supérieures, il faut un invariant d'homotopie (groupe d'homotopie ou d'homologie) en chaque dimension, alors que le groupe fondamental ne capture que des propriétés unidimensionnelles.

**Corollaire 21** *Quand on est à Paris et qu'on déplie un plan de Paris, il y a un point du plan qui représente exactement sa position réelle dans Paris.*

**Théorème 4** (d'Alembert, Gauss). *Tout polynôme à coefficients complexes, de degré non nul, possède au moins une racine complexe.*

**Preuve.** Par l'absurde. Supposons qu'il existe un polynôme $f$ de degré $d$ à coefficients complexes, qui ne s'annule pas. Il ne coûte rien de supposer que le coefficient directeur de $f$ vaut 1. Considérons l'application $]0,1[\to U$ définie par $g(s,u) = \dfrac{f(u(1-s/s))}{|f(u(1-s/s))|}$. Lorsque $s$ tend vers 0, $g(s,u)$ tend vers $u^d$. Lorsque $s$ tend vers 1, $g(s,u)$ tend vers $\frac{f(0)}{|f(0)|}$. Par conséquent, $g$ se prolonge en une application continue $G : [0,1] \times U \to U$, qui est une homotopie entre la constante $\frac{f(0)}{|f(0)|}$ et l'application $u \mapsto u^d$. Si $d \neq 0$, c'est incompatible avec l'invariance homotopique du degré. ■

# 3 Type d'homotopie

## 3.1 Equivalences d'homotopie

**Définition 22** *Soient $X$, $Y$ des espaces topologiques. Deux applications continues $f_0$ et $f_1 : X \to Y$ sont* homotopes *s'il existe une homotopie de $f_0$ à $f_1$, i.e. une application continue $F : [0,1] \times X \to Y$ telle que $F(0,\cdot) = f_0$ et $F(1,\cdot) = f_1$. On le note $f_0 \sim f_1$.*

C'est une relation d'équivalence.

**Définition 23** *Une* équivalence d'homotopie *entre $X$ et $Y$, c'est une application continue $f : X \to Y$ telle qu'il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes à l'identité. S'il existe une équivalence d'homotopie entre $X$ et $Y$, on dit que $X$ et $Y$ ont même* type d'homotopie*.*

C'est une relation d'équivalence.

**Exemple 24** *$\mathbb{R}^n$ a même type d'homotopie qu'un espace $*$ réduit à un point (on dit qu'il est* contractile*).*

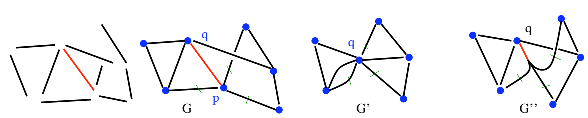
En effet, soit $f : \mathbb{R}^n \to *$ l'application constante, et $g : * \to \mathbb{R}^n$ l'application dont l'image est 0. Alors $g \circ f = id_*$, $f \circ g$ est la fonction nulle, homotope à l'identité par $F(s, x) = sx$. ■

**Exemple 25** *Soient $X$, $Y$ des espaces topologiques. Si $X$ a même type d'homotopie que $X'$, alors $X \times Y$ a même type d'homotopie que $X' \times Y$. En particulier, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a même type d'homotopie que le cercle unité $U$.*

---
Fin du cours $n^0 11$

**Proposition 26** *Soit $G$ un* graphe fini*, i.e. l'espace topologique obtenu à partir d'une réunion disjointe finie de copies de l'intervalle $[0, 1]$ en identifiant des extrémités. Soit $a$ une* arête*, i.e. un des intervalles constituant $G$. On suppose que les extrémités de $a$ sont distinctes dans $G$. Soit $G'$ le graphe obtenu en* écrasant *$a$, i.e. en identifiant tous les points de $a$. Alors $G$ et $G'$ ont même type d'homotopie.*

**Preuve.** Notons $f : G \to G'$ le passage au quotient. Pour construire son inverse $g$, montrons que $G$ peut être vu comme un quotient de $G'$. Notons $p$ et $q \in G$ les extrémités de l'arête écrasée. Notons $a = pq$, $a_1, \ldots, a_k$ les arêtes dont l'une des extrémités est $p$. Si une arête a ses deux extrémités égales à $p$, on la compte deux fois. Paramétrons chacune d'entre elles par $t \mapsto a_i(t)$, $t \in [0, 1]$, de sorte que $p$ corresponde au paramètre 0. Si une arête a ses deux extrémités égales à $p$, on la paramètre deux fois, une fois dans chaque sens, i.e. $a_j(t) = a_i(1 - t)$. Pour chaque $t \in [0, 1/3]$, identifions les points $a_1(t), \ldots, a_k(t)$. On obtient un espace $G''$ homéomorphe à $G$. On note $g : G' \to G'' \to G$ le passage au quotient suivi de l'homéomorphisme, qui étire un tiers d'arête (obtenu par identification du premier tiers des $a_i$) en l'arête $a$ entière. C'est l'inverse homotopique de $f$.




Considérons l'application $F_s : G \mapsto G$ qui est l'identité en dehors des arêtes contenant $p$, envoie $a(t)$ en $a(s + (1 - s)t)$, $a_i(t)$ en $a(|2st - s + t|)$ pour $t \leq s/1 + 2s$, $a_i(t)$ en $a_i(|2st - s + t|)$ pour $s/1 + 2s \leq t \leq \frac{1}{2}$, sans rien changer si $t \geq \frac{1}{2}$, sauf pour les arêtes $a_i$ ayant leurs deux extrémités en $p$, pour lesquelles les points $a_i(t) = a_j(1 - t)$ subissent le traitement prescrit aussi pour $t \geq \frac{1}{2}$. Alors $F$ est une homotopie de l'identité à $g \circ f$.

Considérons l'application $H_s : G' \mapsto G'$ qui est l'identité en dehors des arêtes $a_i$, envoie $a_i(t)$ en $a_i(0)$ pour $t \leq s/1 + 2s$, $a_i(t)$ en $a_i(|2st - s + t|)$ pour $s/1 + 2s \leq t \leq \frac{1}{2}$, sans rien changer si $t \geq \frac{1}{2}$, sauf pour les arêtes $a_i$ ayant leurs deux extrémités en $p$, pour lesquelles les points $a_i(t) = a_j(1 - t)$ subissent le traitement prescrit aussi pour $t \geq \frac{1}{2}$. Alors $H$ est une homotopie de l'identité à $f \circ g$. ■

**Corollaire 27** *Tout graphe fini connexe a même type d'homotopie qu'un graphe n'ayant qu'un sommet auquel sont attachées un nombre fini de boucles.*

**Preuve.** On écrase l'une après l'autre toutes les arêtes dont les extrémités sont distinctes. A la fin, il ne reste que des boucles attachées au même sommet. ■

## 3.2 Naturalité de $\pi_0$ et $\pi_1$

**Notation**. Soit $X$ un espace topologique. On note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de $X$, i.e. l'espace quotient de $X$ par la relation d'équivalence définie par $x \sim x'$ s'il existe un chemin reliant $x$ à $x'$ dans $X$.

**Remarque 28** *Si $X$ est localement connexe par arcs, $\pi_0(X)$ est discret.*

**Terminologie**. Soit $X$ un espace topologique connexe par arcs. Alors pour tous $x, x' \in X$, les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, x')$ sont isomorphes. De façon un peu abusive, on note tous ces groupes $\pi_1(X)$. On dit que $X$ est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si $\pi_1(X)$ est trivial.
**Preuve.** Soit $\alpha$ un chemin de $x$ à $x'$. Alors l'application $\gamma \mapsto \alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}$ induit un isomorphisme en homotopie (qui dépend que de la classe d'homotopie de $\alpha$ à extrémités fixées). En effet, si $\beta$ est un lacet basé en $x'$, $\beta \sim \alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}$ pour $\gamma = \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha$. ■

**Proposition 29** *Toute application continue $f : X \to Y$ induit une application $f_\# : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ et un homomorphisme de groupes $f_\# : \pi_1(X, x) \to \pi_0(Y, f(y))$. Si $f \sim g$, alors $f_\# = g_\#$.*

*Si $X$ et $Y$ ont même type d'homotopie, alors $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$ sont homéomorphes. Si, de plus, $X$ et $Y$ sont connexes par arcs, alors $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ sont isomorphes. En particulier, la simple connexité est un invariant d'homotopie.*

**Preuve.** L'homotopie et la composition des chemins sont conservés par composition des applications. ■

**Corollaire 30** *$S^1 = U$ n'a pas même type d'homotopie que $S^n$ ou $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ pour $n \geq 2$.*

## 3.3 Rétraction par déformation

**Définition 31** *Soit $X$ un espace topologique et $Y \subset X$ un sous-espace. Une* rétraction *$r : X \to Y$ est une application continue qui fixe chaque point de $Y$. Une* rétraction par déformation *de $X$ sur $Y$, c'est une rétraction $r : X \to Y$ qui est homotope à l'identité parmi des applications qui fixent chaque point de $Y$.*

**Remarque 32** *Si $Y$ est un rétracte par déformation $X$, il a même type d'homotopie que $X$.*

**Exemple 33** *$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se rétracte par déformation sur $S^{n-1}$.*

**Preuve.** Poser $F(s, x) = \dfrac{x}{s|x| + 1 - s}$. ■

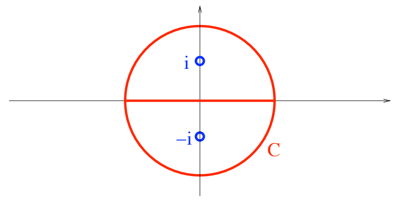
**Proposition 34** *Soit $p \in \mathbb{R}^2$. Soit $\ell \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la droite à l'infini. Alors $\ell$ est un rétracte par déformation de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{p\}$.*

**Preuve.** Soit $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{p\} \to \ell$ la projection de centre $p$ sur $\ell$. Alors $\pi$ est une rétraction. Chaque fibre $\pi^{-1}(q)$, $q \in \ell$ est une droite projective avec un point marqué ($q$) et un point retiré ($p$), elle possède donc une structure canonique de droite vectorielle. On peut donc multiplier un point $r \in \pi^{-1}(q)$ par $s \in \mathbb{R}$. L'application $F(s, r) = sr$ définit une homotopie de $\pi$ à l'identité à travers des rétractions.

Concrètement, si $p = [0 : 0 : 1]$, $r = [x_0 : x_1 : x_2]$, $\pi(r) = [x_0 : x_1 : 0]$, et on pose $F(s, r) = [x_0 : x_1 : sx_2]$. ■

**Corollaire 35** *Le complémentaire d'un disque dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à un disque. En fait, il n'a pas le même type d'homotopie.*

**Exemple 36** *$\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ a même type d'homotopie que la réunion du cercle de rayon 2 centré en 0 et de l'intervalle $[-2, 2]$ de l'axe réel.*




En effet, notons $B = \bar{B}(0,2) \setminus \{-i, i\}$. Alors $B$ est un rétracte par déformation de $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. La rétraction $\rho$ envoie un point $z$ du complémentaire de $B$ sur $2z/|z|$. La déformation $\rho_s$ envoie $z$ sur $(1-s)z + s\rho(z)$.

Notons $C = [-2, 2] \cup \{|z| = 2\}$. Alors $B$ se rétracte par déformation sur $C$. Dans chacune des moitiés de $B$, la rétraction $r$ envoie un point $z$ sur le premier point d'intersection de la demi-droite $iz$ (resp. $(-i)z$) avec $C$. La déformation $r_s$ envoie $z$ sur $(1-s)z + sr(z)$.

# 4 Le théorème de Van Kampen

## 4.1 Motivation

Comment calculer $\pi_1(X)$ pour $X = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ ? On écrit $X = X_1 \cup X_2$ où $X_1 = \{\Im m(z) > -1,\, z \neq i\}$ et $X_2 = \bar{X}_2$. On va donner une formule pour $\pi_1(X)$ en fonction de $\pi_1(X_1)$, $\pi_1(X_2)$ et $\pi_1(X_0)$ où $X_0 = X_1 \cap X_2$.

**Notations**. Dans toute cette section, on suppose que $X_1$ et $X_2$ sont ouverts, et que $X_0$, $X_1$ et $X_2$ sont connexes par arcs. On fixe un point base $x_0 \in X_0$. On note $G_0 = \pi_1(X_0, x_0)$, $G_1 = \pi_1(X_1, x_0)$, $G_2 = \pi_1(X_2, x_0)$ et $G = \pi_1(X, x_0)$.

## 4.2 Un résultat partiel

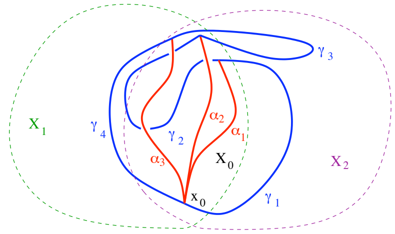
**Lemme 37** *$G$ est engendré par les images de $G_1$ et de $G_2$.*

**Preuve.** Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un lacet basé en $x_0$. Supposons d'abord que $\gamma_1 := \gamma([0, 1/2]) \in X_1$ et $\gamma_2 =: \gamma([1/2, 1]) \in X_2$. Alors $\gamma(1/2) \in X_0$. Choisissons un chemin $\alpha$ de $x_0$ à $\gamma(1/2)$ dans $X_0$. Alors $\gamma = \beta_2 \cdot \beta 1$ où $\beta_1 = \alpha^{-1} \cdot \gamma_1 \subset X_1$ et $\beta_2 = \gamma_2 \cdot \alpha \subset X_2$, donc la classe d'homotopie de $\gamma$ est le produit d'un élément de $G_1$ et d'un élément de $G_2$.

Dans le cas général, on va écrire $\gamma$ comme un produit de lacets contenus alternativement dans $X_1$ et $X_2$. Soit $F_i = \gamma^{-1}(X \setminus X_i)$. Soit $N$ un entier tel que $1/N$ soit un nombre de Lebesque pour le recouvrement de $[0,1]$ par les deux ouverts $f^{-1}(X_i)$ (voir lemme 2). Alors chaque intervalle $[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]$ est envoyé par $\gamma$ dans $X_1$ ou dans $X_2$. Parmi les $\frac{j}{N}$, ne conservons que ceux pour lesquels on change d'ouvert. Autrement dit, on extrait des $\frac{j}{N}$ une subdivision $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ telle que

1. $\gamma(t_j) \in X_0$ pour tout $j = 0, \ldots, j$,
2. $\gamma_j := \gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset X_{\epsilon(j)}$ où $\epsilon(j)$ vaut alternativement 1 et 2.

Soit $\alpha_j$ un chemin de $x_0$ à $\gamma(t_j)$ dans $X_0$ (lorsque $j = 0$ ou $k$, prendre le chemin constant), soit $\beta_j = \alpha_{j-1} \cdot \gamma_j \cdot \alpha_j^{-1} \subset X_{\sigma(j)}$. Alors la classe d'homotopie de $\gamma = \beta_k \cdots \beta_1$ est un produit d'éléments appartenant alternativement à $G_1$ et à $G_2$. ■




**Corollaire 38** *Si $X_0$ est connexe et $X_1$, $X_2$ simplement connexes, $X$ est simplement connexe.*

## 4.3 Somme amalgamée de groupes

Voici une construction de théorie des groupes.

**Théorème 5** *Soient $G_1$ et $G_2$ deux groupes. Soit $G_0$ un troisième groupe, soient $f_1 : G_0 \to G_1$ et $f_2 : G_0 \to G_2$ deux homomorphismes. Il existe un groupe $G$, unique à unique isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes.*

1. *Il existe des homomorphismes $k_i : G_i \to G$, $i = 1, 2$ tels que $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$.*
2. *Inversement, étant donnés un groupe $H$ et des homomorphismes $h_i : G_i \to H$, $i = 1, 2$ tels que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, il existe un homomorphisme unique $h : G \to H$ tel que $h_1 = h \circ k_1$, $h_2 = h \circ k_2$.*

**Définition 39** *On appelle le groupe $G$ produit par le théorème précédent la* somme amalgamée *de $G_1$ et $G_2$ au-dessus de $G_0$, et on le note $G_1 *_{G_0} G_2$.*

**Preuve.**

**Unicité**. Soient $G$, $G'$ deux solutions du problème. On applique la propriété universelle à chacun d'entre eux, cela donne deux homomorphisme $h : G \to G'$ et $h' : G' \to G$, puis on constate que $h' \circ h : G \to G$ est solution du problème universel pour $H = G$, d'où $h' \circ h = id_G$.

**Existence**. On l'établit d'abord dans un cas particulier, par une construction explicite, au paragraphe suivant, avant de traiter le cas général.

## 4.4 Produit libre de deux groupes

**Définition 40** *Le* produit libre *de deux groupes $G_1$ et $G_2$, noté $G_1 * G_2$, c'est la somme amalgamée au-dessus du groupe trivial.*

**Construction**. On considère l'ensemble des suites finies $(g_1, \ldots, g_k)$ d'éléments non triviaux pris alternativement dans $G_1$ et $G_2$, sans oublier la suite vide, notée $()$. On multiplie deux suites $(g_1, \ldots, g_k)$ et $(g'_1, \ldots, g_\ell)$ selon la règle définie par récurrence sur la longueur comme suit : si $g_k$ et $g'_1$ n'appartiennent pas au même groupe,

$$(g_1, \ldots, g_k) \cdot (g'_1, \ldots, g_\ell) = (g_1, \ldots, g_k, g'_1, \ldots, g_\ell).$$

Sinon, et si de plus $g_k g'_1 \neq 1$,

$$(g_1, \ldots, g_k) \cdot (g'_1, \ldots, g_\ell) = (g_1, \ldots, g_k g'_1, \ldots, g_\ell).$$

Enfin, si $g_k g'_1 = 1$,

$$(g_1, \ldots, g_k) \cdot (g'_1, \ldots, g_\ell) = (g_1, \ldots, g_{k-1}) \cdot (g'_2, \ldots, g_\ell),$$

qui est déjà défini, car de longueur inférieure. On vérifie (laborieux) que cette multiplication est associative. Cela donne un groupe $G$, avec élément neutre $()$, l'inverse de $(g_1, \ldots, g_k)$ étant $(g_k^{-1}, \ldots, g_1^{-1})$.

Clairement, l'application $k_1 : G_1 \to G$, $e \mapsto ()$, $g \mapsto (g)$ est un homomorphisme injectif. De même pour $G_2$. Remarquer que $k_1(G_1)$ et $k_2(G_2)$ engendrent $G$. Si $H$ est un groupe, et si $h_i : G_i \to H$, $i = 1, 2$, sont des homomorphismes, l'application $h : G \to H$, définie par $h(g_1, \ldots, g_k) = \Pi_j h_{\sigma(j)}(g_j)$, où $\sigma(g_j)$ est le numéro du groupe auquel $g_j$ appartient, est un homomorphisme, et c'est le seul possible, qui satisfait $h_1 = h \circ k_1$, $h_2 = h \circ k_2$. On conclut que $G$ est le produit libre de $G_1$ et de $G_2$. ■

**Exemple 41** *$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ s'appelle le groupe libre à deux générateurs.*

**Exemple 42** *En général, $G_1 * (G_2 * G_3) = (G_1 * G_2) * G_3$, qu'on note $G_1 * G_2 * G_3$. On peut donc noter $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ le groupe libre à $n$ générateurs.*

Fin du cours $n^0 12$

## 4.5 Preuve du théorème 5

Soit $N \subset G_1 * G_2$ le plus petit sous-groupe distingué de $G_1 * G_2$ qui contient $f_1(\ker(f_2))$, $f_2(\ker(f_1))$ ainsi que tous les éléments de la forme $(f_1(g_0), f_2(g_0)^{-1})$ pour $g_0 \in G_0 \setminus (\ker(f_1) \cup \ker(f_2))$. Soit $G$ le groupe quotient $G_1 * G_2/N$, avec les homomorphismes $k_1 : G_1 \to G_1 * G_2 \to G$ et $k_2 : G_2 \to G_1 * G_2 \to G$. Par construction, pour tout $g_0 \in G_0$, $k_1 \circ f_1(g_0)(k_2 \circ f_2(g_0))^{-1} = f_1(g_0) f_2(g_0)^{-1} = e \mod N$, donc $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$.

Si $H$ est un groupe, $h_1 : G_1 \to H$ et $h_1 : G_1 \to H$ des homomorphismes tels que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, alors l'homomorphisme induit $\bar{h} : G_1 * G_2 \to H$ est trivial sur $N$, donc passe au quotient en $h : G \to H$ qui satisfait $h_1 = h \circ f_1$, $h_2 = h \circ f_2$. Inversement, tout homomorphisme $h : G \to H$ tel que $h_1 = h \circ f_1$, $h_2 = h \circ f_2$ se relève en un homomorphisme $G_1 * G_2 \to H$ trivial sur $N$, donc il n'y a aucun choix pour $h$. On conclut que $G = G_1 *_{G_0} G_2$. ■

**Remarque 43** *Lorsque $f_1 : G_0 \to G_1$ et $f_2 : G_0 \to G_2$ sont injectives, les homomorphismes naturels $k_1 : G_1 \to G_1 *_{G_0} G_2$ et $k_2 : G_2 \to G_1 *_{G_0} G_2$ sont injectifs.*

Dans ce cas, on peut penser à $G_0$ comme à un sous-groupe commun à $G_1$ et $G_2$, et à $G_1 *_{G_0} G_2$ comme le produit libre dans lequel on s'est arrangé pour que chaque élément de $G_0$ n'apparaisse qu'une seul fois.

## 4.6 Théorème de Van Kampen

**Théorème 6** *Soit $X$ un espace topologique, soient $X_1$, $X_2$ des ouverts connexes par arcs de $X$ tels que $X = X_1 \cup X_2$ et tels que $X_0 = X_1 \cap X_2$ soit connexe par arcs. Notons $G_i = \pi_1(G_i)$, $i = 0, 1, 2$, avec les homomorphismes $f_1 : G_0 \to G_1$ et $f_2 : G_0 \to G_2$ induits par les injections $X_0 \to X_1$ et $X_0 \to X_2$. Alors l'homomorphisme naturel $G_1 *_{G_0} G_2 \to \pi_1(X)$ est un isomorphisme.*

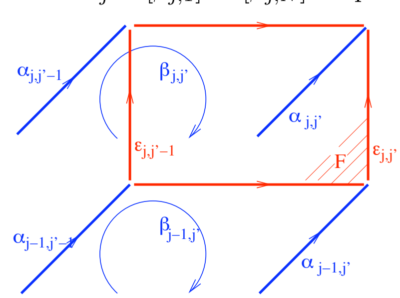
**Preuve.** Notons $G = \pi_1(X)$. Notons $\bar{h} : G_1 * G_2 \to G$ l'homomorphisme naturel. Comme les injections $X_0 \subset X_1 \subset X$ et $X_0 \subset X_2 \subset X$ forment un diagramme commutatif, il en est de même au niveau des groupes fondamentaux, donc il y a un homomorphisme naturel $h : G_1 *_{G_0} G_2 \to G$. Comme les images de $G_1$ et $G_2$ dans $G$ engendrent $G$, $h$ est surjectif. Comme $\bar{h}$ relève $h$, il est trivial sur le sous-groupe distingué $D$ engendré par les $f_1(g_0) f_2(g_0)^{-1}$, $g_0 \in G_0$. Reste à voir que $\ker(\bar{h}) \subset D$.

Soit $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ un lacet dans $X$, basé en $x_0$, obtenu par composition de lacets $\gamma_j \subset G_{\sigma(j)}$. Supposons $\gamma$ homotope à une constante (i.e. $[\gamma] \in \ker(\bar{h})$). Soit $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ une telle homotopie, dans laquelle $F(0,t)$, $t \in [\frac{j'-1}{k}, \frac{j'}{k}]$ est une paramétrisation de $\gamma_{j'}$. On applique le lemme 2 au recouvrement du carré $[0,1] \times [0,1]$ par les deux ouverts $F^{-1}(X_1)$ et $F^{-1}(X_2)$. On obtient un entier $N$ tel que tout sous-carré de côté $1/N$ soit envoyé entièrement dans $X_1$ ou dans $X_2$. On peut supposer que $N$ est un multiple de $k$. Pour tout $(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in [0,1] \times [0,1]$, on pose $\sigma(j,j') = 0$ si $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in X_0$, $\sigma(j,j') = 1$ ou $2$ sinon, et on relie $x_0$ à $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N})$ par un chemin $\alpha_{j,j'}$ entièrement contenu dans $X_{\sigma(j,j')}$. Si $j = 1$, $j' = 0$ ou $j' = 1$, $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) = x_0$ et on choisit le chemin constant.

Pour chaque $j$, $t \mapsto F(\frac{j}{N}, t)$ est un lacet basé en $x_0$, noté $\beta_j$. On écrit $\beta_j = \beta_{j,1} \cdots \beta_{j,N}$, où

$$\beta_{j,j'} = \alpha_{j,j'-1} \cdot F_{|\{\frac{j}{N}\} \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]} \cdot \alpha_{j,j'}^{-1} \subset X_{\max\{\sigma(j,j'-1), \sigma(j,j')\}}.$$

Lorsque $\max\{\sigma(j,j'-1), \sigma(j,j')\} = 0$, on décide de voir $\beta_{j,j'}$ comme un lacet de $X_1$. Autrement dit, on peut voir $\beta_j$ comme l'élément $m_j = [\beta_{j,1}] \cdots [\beta_{j,N}]$ du produit libre $G_1 * G_2$.



Montrons que modulo le sous-groupe distingué $D$, $m_j$ est indépendant de $j$. Notons $\epsilon_{j,j'} = F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times \{\frac{j'}{N}\})$. Si $F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]) \subset X_1$, alors $\beta_{j,j'}$ est homotope dans $X_1$ à

$$\beta'_{j,j'} = \alpha_{j,j'-1} \cdot \epsilon_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \beta_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1}.$$

Si $F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}])$ n'est pas entièrement contenu dans $X_1$, alors il est contenu dans $X_2$. Décider de changer le statut de $\beta_{j,j'}$ de celui de lacet de $X_1$ à celui de lacet de $X_2$ n'est nécessaire que si $\beta_{j,j'} \subset X_0$ et revient à multiplier $[\beta_{j,j'}]$ par un élément de $D$. Donc quitte à multiplier $m_j$ et $m_{j-1}$ par des éléments de $D$, on peut décider que tout se passe dans $X_2$ et dans ce cas l'homotopie de $\beta_{j,j'}$ à $\beta'_{j,j'}$ a lieu à nouveau. Dans l'élément $m_j$, on trouve, modulo $D$, le produit

$$\begin{aligned}\beta'_{j,j'}\beta'_{j,j'+1} \quad = \quad & \alpha_{j,j'-1} \cdot \epsilon_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \beta_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \\ & \cdot \beta_{j-1,j'+1} \cdot \alpha_{j,j'+1} \cdot \epsilon_{j-1,j'+1} \cdot \alpha_{j-1,j'+1}^{-1},\end{aligned}$$

au coeur duquel figure

$$\alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1},$$

qui est trivial si les 6 chemins sont contenus dans le même $X_1$ ou $X_2$. Sinon, c'est qu'ils sont tous contenus dans $X_0$. On a donc affaire au produit de deux lacets de $X_0$ inverses l'un de l'autre, leur produit appartient à $D$. Modulo $D$, le facteur qui s'intercale entre $\beta_{j-1,j'}$ et $\beta_{j-1,j'+1}$ dans le produit est trivial. Les termes de bords $\alpha_{j,0} \cdot \epsilon_{j-1,0}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,0}^{-1}$ et $\alpha_{j,N} \cdot \epsilon_{j-1,N} \cdot \alpha_{j-1,N}^{-1}$ sont des lacets constants. On conclut que $m_j = m_{j-1} \bmod D$ dans $G_1 * G_2$. Comme le dernier mot $m_N$ est trivial et le premier égal à $\gamma$, on conclut que $\gamma \subset D$, i.e. que $\ker(\bar{h}) \subset D$. ■

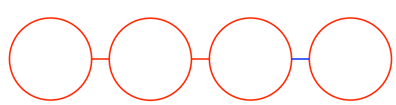
## 4.7 Exemples

**Proposition 44** *Soit $G$ un graphe fini connexe. Alors $\pi_1(G)$ est un groupe libre à $\kappa$ générateurs, où $\kappa$, la* connectivité *de $G$, vaut*

$$\kappa = 1 - S + A,$$

*où $S$ est le nombre de sommets et $A$ le nombre d'arêtes de $G$.*

**Preuve.** Lorsqu'on écrase une arête dont les sommets sont distincts, $S$ et $A$ diminuent d'une unité, donc la connectivité ne change pas. Lorsque toutes les arêtes sont écrasées, sauf les boucles, on se retrouve avec $\kappa$ boucles attachées à l'unique sommet. On introduit une arête entre deux boucles, pour obtenir la figure suivante, notée $L_\kappa$. A nouveau, cela ne change ni la connectivité, ni le groupe fondamental.



On lui applique le théorème de Van Kampen, avec $X_1$ homéomorphe à un cercle avec une arête qui dépasse, $X_2$ à un $L_{\kappa-1}$ avec une arête qui dépasse, $X_0$ une arête sans ses extrémités. Comme $\pi_1(X_0)$ est trivial, $\pi_1(X)$ est un produit libre. Clairement, le cercle avec arête ouverte qui dépasse se rétracte par déformation sur le cercle. De même pour $L_{\kappa-1}$. On trouve que $\pi_1(G)$ est un produit libre de $\kappa$ copies de $\mathbb{Z}$. ■

**Corollaire 45**
1. *La connectivité est un invariant d'homotopie des graphes.*
2. *Le groupe fondamental de $\mathbb{C}$ privé de 2 points est un groupe libre à 2 générateurs. Il n'est donc pas commutatif.*

# 5 Revêtements

## 5.1 Motivation

Il s'agit d'étendre à d'autres situations la propriété de relèvement mise en évidence pour l'application exponentielle $\mathbb{R} \to U$.

## 5.2 Définition

**Définition 46** *Une application continue $p : E \to X$ est un* revêtement *si tout point $x \in X$ a un voisinage $U$ tel que*

1. *$p^{-1}(V) = \coprod_{i\in I} V_i$, $V_i \subset E$, $I \neq \emptyset$, réunion disjointe,*
2. *pour chaque $i \in I$, $p_{|V_i} = V_i \to U$ est un homéomorphisme.*

*On appelle $X$ la* base *et $E$ l'*espace total *du revêtement. J'appelle $U$ un* voisinage trivialisant.

**Remarque 47**
1. *$p$ est un homéomorphisme local, donc les fibres $p^{-1}(y)$ sont discrètes.*
2. *On peut faire des produits de revêtements $(p, p') : E \times E' \to X \times X'$.*
3. *Si $X$ est connexe, les* fibres *$p^{-1}(x)$, $x \in X$, ont toutes le même cardinal (éventuellement infini).*
4. *Si $p : E \to X$ est un revêtement et $Y \subset X$, alors $p_{|p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \to Y$ est un revêtement.*

## 5.3 Exemples

1. Soit $S$ un espace topologique discret. Alors la projection sur le premier facteur $p : X \times S \to X$ est un revêtement appelé *revêtement trivial* de fibre $S$.
2. $t \mapsto e^{it}$, $\mathbb{R} \to U$ est un revêtement.
3. $z \mapsto e^z$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un revêtement.
4. Si $n \neq 0$, $z \mapsto z^n$, $U \to U$, est un revêtement.
5. La restriction de $t \mapsto e^{it}$ à $]0, 3\pi[$ n'est pas un revêtement de $]0, 3\pi[$ sur $U$.

En effet, soit $U$ le voisinage de $-1$ dans $U$ formé des $z \in U$ dont l'argument diffère de $\pi$ (modulo $2\pi$) d'au plus $\epsilon$. Alors $p^{-1}(U)$ est la réunion disjointe de deux intervalles, $V_1 = ]\pi - \epsilon, \pi + \epsilon[$ et $V_2 = ]3\pi - \epsilon, 3\pi[$. $V_1$ est l'image d'une section de $p$ au-dessus de $U$, mais $V_2$ ne l'est pas. D'ailleurs, le cardinal des fibres n'est pas constant.

**Proposition 48** *Soit $p : E \to X$ un homéomorphisme local, avec $E$ compact. Alors $p$ est un revêtement.*

**Preuve.** Soit $x \in X$. Alors $p^{-1}(x) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est fini. Soit $W_i$ un voisinage ouvert de $e_i$ tel que $p_{|W_i}$ soit un homéomorphisme de $W_i$ sur un ouvert $U_i$ contenant $x$. Quitte à rétrécir, on peut supposer les $W_i$ deux à deux disjoints. Soit $e_j \in E$ une suite telle que $p(e_j)$ tend vers $x$. Toute sous-suite convergente de $(e_j)$ converge vers un point de $p^{-1}(x)$. Par conséquent, pour $j$ assez grand, $e_j \in \bigcup_i W_i$. On conclut qu'il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$, contenu dans $\bigcap_i U_i$, tel que $p^{-1}(U) \subset \bigcup_i W_i$. Posons $V_i = (p_{|W_i})^{-1}(U)$. Alors pour tout $i$, $p_{|V_i} : V_i \to U$ est un homéomorphisme. Par construction, $p^{-1}(U) = \coprod_i V_i$. ■

**Exemple 49** *L'application $f : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ qui à un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^{n+1}$ associe la droite vectorielle qu'il engendre est un revêtement.*

En effet, soit $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \cdots : 1]$. Si $q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est proche de $p$, il admet des coordonnées homogènes de la forme $q = [x_0 : \cdots : x_n]$ avec $x_n > 0$. Alors $(x_0^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2}(x_0, \cdots, x_n)$ est l'unique vecteur unitaire sur la droite $q$ dont la dernière composante est $> 0$. Il dépend continûment de $q$. Il y a deux telles applications réciproques locales de $f$, donc $f$ est un revêtement. ■

**Proposition 50** *Soit $E$ un espace topologique localement compact (i.e. tout point admet une base de voisinages compacts). Soit $G$ un groupe qui agit sur $E$*

1. librement*, i.e. si $x \in E$ et $g \neq 1$, alors $ge \neq e$ ;*
2. proprement*, i.e. si $K \subset E$ est compact, l'ensemble des $g \in G$ tels que $gK \cap K \neq \emptyset$ est fini.*

*Alors $X = G \backslash E$ est séparé, et la projection $p : E \to G\backslash E$ est un revêtement.*

**Preuve.** Séparation : voir TD. Soit $e \in E$. Soit $V$ un voisinage compact de $e$. Comme $E$ est séparé, et comme l'intersection de $V$ et de l'orbite de $e$ est un ensembme fini, les points de $Ge \cap V = \{e = g_0 e, g_1 e, \ldots, g_n e\}$ admettent des voisinages $U_i$ deux à deux disjoints dans $V$. Soit $U = \bigcap_i g_i^{-1}(U_i)$. C'est un voisinage de $e$ dont les translatés par des éléments de $G$ sont deux à deux disjoints. La restriction de $p$ à chaque $gU$ est un homéomorphisme sur le voisinage $[U]$ de la classe $[p] \in G\backslash E$. ■

Fin du cours $n^0 13$

**Exemple 51** *L'application $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est le revêtement associé à l'action du groupe à 2 éléments sur la sphère par $x \mapsto -x$.*

**Exemple 52** *Soit $C_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\}$ le groupe cyclique à $n$ éléments, agissant par multiplication sur $U$. Alors le revêtement associé n'est autre que $z \mapsto z^n$, $U \to U$.*

**Exemple 53** *Soit $G \subset \mathbb{R}$ le groupe engendré par la translation de $2\pi$. Alors $G$ agit librement et proprement sur $\mathbb{R}$. Le revêtement associé coïncide avec le revêtement exponentiel $\mathbb{R} \to U$.*

## 5.4 Morphismes

On précise le sens de "coïncide".

**Définition 54** *Soient $p : E \to X$ et $p' : E' \to X$ deux revêtements. On appelle* morphisme *de $E$ vers $E'$ une application continue $m : E \to E'$ telle que $p' \circ m = p$. Si $f$ est une bijection, on parle d'*isomorphisme.

Remarquer que si $E'$ est connexe, un morphisme injectif est automatiquement un isomorphisme, lequel est automatiquement un homéomorphisme.

**Définition 55** *On dit qu'un revêtement est* trivial *s'il est isomorphe à un revêtement trivial $X \times S$.*

Noter que si $S$ a plus d'un élément, $X \times S$ n'est jamais connexe. Par conséquent, un revêtement $p : E \to X$ avec $E$ connexe n'est trivial que si c'est un homéomorphisme.

**Exemple 56** *Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ le groupe engendré par $n$ translations linéairement indépendantes. Le revêtement associé est isomorphe au produit de $n$ copies du revêtement exponentiel $\mathbb{R} \to U$.*

En effet, à changement linéaire de coordonnées près, on peut supposer que $G = \mathbb{Z}^n$ est l'ensemble des translations par les vecteurs à coordonnées entières.

## 5.5 Sections

**Définition 57** *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Une* section *de $p$ est une application continue $s : X \to E$ telle que $p \circ s = id_X$. Une* section au-dessus de $Y \subset Y$*, c'est une section de $p_{|p^{-1}(Y)}$, i.e. définie seulement au-dessus de $Y$. Une* section locale *en $x$ est une section définie sur un voisinage de $x$.*

Remarquer qu'une section $s$ au-dessus de $Y$ est automatiquement un homéomorphisme de $Y$ sur $s(Y)$. Par définition même, un revêtement possède des sections locales en tout point $x$, exactement autant que d'images réciproques de $x$. Si $X$ est connexe, deux sections qui coincident en un point sont égales.

# 6 Relèvement des homotopies

## 6.1 Relèvements

**Définition 58** *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Soit $f : Y \to X$ une application continue. Un* relèvement *de $f$ à $E$, c'est une application $\tilde{f} : Y \to E$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$. Si on se donne en plus des points bases $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$, et un relèvement $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ dans $E$, on parle de* relèvement d'origine *$\tilde{x}_0$.*

**Lemme 59** *Lorsque $Y$ est connexe, quand $f$ admet un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$, il est unique.*

**Preuve.** Soient $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ deux relèvements d'oigine $\tilde{x}_0$. Alors $\{y \in Y \,|\, \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$ est ouvert. En effet, au voisinage de $\tilde{f}(y)$, $p$ est un homéomorphisme, donc pour $z$ proche de $y$, l'équation $p(\tilde{x}) = f(z)$ admet une unique solution voisine de $\tilde{f}(y)$, c'est $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(y)$. Comme cet ensemble est non vide et fermé, c'est $Y$, donc $\tilde{f} = \tilde{f}'$. ■

## 6.2 Relèvement des chemins

La proposition suivante généralise le théorème de relèvement du revêtement exponentiel. On organise la preuve différemment.

**Proposition 60** *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Tout chemin $\gamma : [0,1] \to X$ admet des relèvements. Si on fixe $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de $x_0$, il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ d'origine $\tilde{x}_0$.*

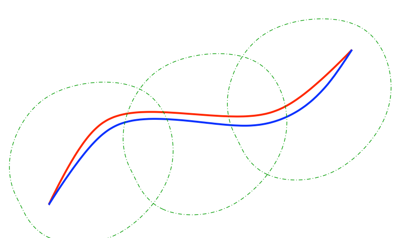
**Preuve.** Soit $T = \sup\{t \leq 1 \,|\, \exists \tilde{\gamma} : [0,t] \to E$ relèvement de $\gamma$ d'origine $\tilde{x}_0\}$. Par unicité, le relèvement sur $[0,t']$, $t' > t$, prolonge celui sur $[0,t]$. Par conséquent, le relèvement existe sur $[0,T[$. Soit $U \subset X$ un voisinage ouvert trivialisant de $\gamma(T)$, i.e. il existe des sections $s_i$ au-dessus de $U$ telles que $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} s_i(U)$. Pour un $t_0 < T$ assez proche de $T$, $\tilde{\gamma}(t_0) \in p^{-1}(U)$, donc il existe $i \in I$ tel que $\tilde{\gamma}(t_0) \in s_i(U)$. Alors la formule $\tilde{\gamma}'(t) = s_i(\gamma(t))$ définit un relèvement de $\gamma$ sur un voisinage de $T$, qui coïncide avec $\tilde{\gamma}$ en $t_0$, donc $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}$, i.e. $\tilde{\gamma}$ est défini au-delà de $T$ (contradiction si $T < 1$), donc $T = 1$ et $\tilde{\gamma}$ est continu sur $[0,1]$. ■

## 6.3 Relèvement des homotopies

La proposition suivante généralise l'invariance du degré par homotopie.

**Proposition 61** *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Soit $Y$ un espace topologique. Fixons des points bases $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de $x_0$. Soit $F : [0,1] \times Y \to X$ une homotopie entre deux applications $f_0$ et $f_1 : Y \to X$ envoyant $y_0$ sur $x_0$. Si $f_0$ possède un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$, il en est de même de $F$, et par conséquent de $f_1$.*

**Preuve.** D'après la proposition précédente, pour chaque $y \in Y$, le chemin $\gamma_y : s \mapsto F(s,y)$ possède un unique relèvement $\tilde{\gamma}_y$ d'origine $\tilde{f}_0(y)$. On pose $\tilde{F}(s,y) = \tilde{\gamma}_y(s)$. Pour montrer que $\tilde{F}$ est continue, il suffit de vérifier que le procédé de relèvement est continu, i.e. que deux chemins voisins se relèvent en deux chemins voisins. Or relever un chemin $\gamma_y$, c'est faire appel à un nombre fini de sections locales $s_j$ (définies sur les ouverts trivialisants recouvrant le compact $\gamma([0,1])$). Les mêmes sections locales permettent de relever $\gamma_z$ pour $z$ proche de $y$. ■



**Corollaire 62** *Soient $\alpha$, $\beta$ deux chemins dans $X$ de mêmes extrémités $x_0$ et $x_1$. Soit $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de $x_0$. Soient $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ les relèvements de $\alpha$ et $\beta$ d'origine $\tilde{x}_0$. Si $\alpha$ et $\beta$ sont homotopes à extrémités fixées, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. En particulier, si $\alpha$ est un lacet homotope à une constante, $\tilde{\alpha}$ est un lacet.*

**Preuve.** Par l'hypothèse, l'homotopie $F$ de $\alpha$ à $\beta$ satisfait $F(s,1) = x_1$ pour tout $s$. Son relèvement $\tilde{F}$ satisfait $\tilde{F}(s,1) \in p^{-1}(x_1)$ pour tout $s$. Comme $p^{-1}(x_1)$ est discret, $\tilde{F}(s,1)$ ne dépend pas de $s$, donc $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(0,1) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{\beta}(1)$. ■

**Corollaire 63** *Soit $p : E \to X$ un revêtement, soit $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de $x_0$. Soit $Y$ un espace connexe par arcs et simplement connexe, avec point base $y_0$. Toute application continue $f : Y \to X$ envoyant $y_0$ en $x_0$ possède un (unique) relèvement à $E$ d'origine $\tilde{x}_0$.*

**Preuve.** Etant donné $y \in Y$, il existe un chemin $\alpha$ de $y_0$ à $y$. Soit $\tilde{\gamma}$ le relèvement d'origine $\tilde{x}_0$ du chemin $\gamma = f \circ \alpha$. On pose $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}(1)$. Comme $Y$ est simplement connexe, un autre choix de chemin $\alpha'$ donne le même point $\tilde{\gamma'}(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Par continuïté du relèvement des chemins, $\tilde{f}$ est continue. Par construction, $p \circ \tilde{f} = f$. ■

**Remarque 64** *Supposons $E$ connexe par arcs. La réciproque du corollaire 62 est vraie si et seulement si $E$ est simplement connexe.*

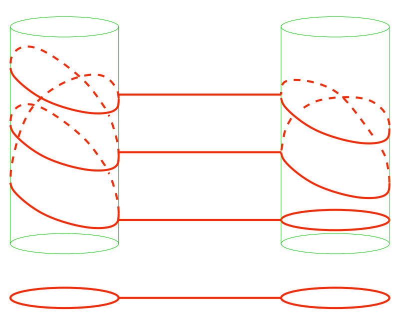
**Lemme 65** *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Supposons $E$ connexe par arcs. Alors les deux énoncé suivants sont équivalents.*

1. *Pour tout lacet $\alpha$, $\tilde{\alpha}$ est un lacet $\Rightarrow$ $\alpha$ est homotope à une constante.*
2. *$E$ est simplement connexe.*

**Preuve.** Si $E$ est simplement connexe, un relèvement $\tilde{\alpha}$ qui est un lacet est homotope à une constante, donc $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ l'est aussi. Réciproquement, soit $\tilde{\gamma}$ un lacet dans $E$ basé en $\tilde{x}_0$. C'est un relèvement du lacet $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Par hypothèse, $\gamma$ est homotope à une constante dans $X$. Soit $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ une homotopie du lacet constant $1_{x_0}$ à $\gamma$. Comme $1_{x_0}$ se relève en le lacet constant $1_{\tilde{x}_0}$, $F$ se relève en $\tilde{F}$, qui est une homotopie de $1_{\tilde{x}_0}$ à $\tilde{\gamma}$. ■

Fin du cours $n^0 14$

**Exercice 66** *La figure suivante représente un revêtement à 3 feuillets. Soit $x_0$ le sommet de droite de $X$. Déterminer les relèvements de divers lacets basés en $x_0$, pour diverses origines $\tilde{x}_0$. En déduire que certains lacets ne sont pas homotopes à une constante.*



# 7 Revêtement universel

On s'oriente vers la classification des revêtements d'un espace $X$. On va voir que $X$ admet presque toujours un revêtement connexe plus grand que tous les autres (les autres en sont des quotients), c'est celui qui est simplement connexe.

Réglons d'abord le sort des revêtements non connexes.

## 7.1 Revêtements non connexes

**Définition 67** *Un espace topologique $X$ est dit* localement connexe *(resp.* par arcs*) si tout point possède une base de voisinages connexes (resp. par arcs).*

**Proposition 68** *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Supposons $X$ localement connexe par arcs. Soit $E'$ une composante connexe de $E$. Alors $p_{|E'} : E' \to X$ est un revêtement.*

Autrement dit, un revêtement non connexe est une union disjointe de revêtements connexes.
**Preuve.** Soit $x \in X$, soit $U$ un voisinage trivialisant de $x$, i.e. il existe des sections $s_i$ au-dessus de $U$ telles que $p^{-1}(U) = \coprod_i s_i(U)$. Quitte à rétrécir $U$, on peut le supposer connexe. Alors les $s_i(U)$ sont connexes, donc chacun est ou bien contenu dans ou bien disjoint de $E'$. Par conséquent,

$$p_{|E'}^{-1}(U) = p^{-1}(U) \cap E' = \coprod_{\{i \,|\, s_i(U) \subset E'\}} s_i(U). \blacksquare$$

## 7.2 Revêtements du cercle

**Proposition 69** *Tout revêtement connexe du cercle est isomorphe ou bien au revêtement exponentiel $\mathbb{R} \to U$, ou bien à l'un (et un seul) des revêtements $z \mapsto z^n$, $n \geq 1$.*

**Preuve.** Soit $p : E \to U$ un revêtement. L'application exponentielle $t \mapsto e^{it}$, $\mathbb{R} \to U$ admet un relèvement $f : \mathbb{R} \to E$. Alors $f$ est un morphisme de revêtements.

Si $f$ est injective, $f$ est un isomorphisme, c'est fini.

Supposons $f$ non injective. Si $t < t' \in \mathbb{R}$ et $f(t) = f(t')$, alors $e^{it} = e^{it'}$ donc $t' - t$ est un multiple entier strictement positif de $2\pi$. Soit $2\pi n$ le plus petit multiple rencontré, i.e. il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0 + 2\pi n) = f(t_0)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, notons $\gamma_s = p \circ f_{[s,s+2\pi n]}$. C'est un lacet dans $U$. Comme tous les $\gamma_s$ sont homotopes et $\gamma_{t_0}$ admet un relèvement à $E$, il en est de même de $\gamma_s$. Comme le relèvement $\tilde{\gamma}_{t_0}$ est un lacet, il en est de même de $\tilde{\gamma}_s$. Autrement dit, $f(s + 2\pi n) = f(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $f$ passe au quotient en $g : \mathbb{R}/2\pi n\mathbb{Z} \to E$ qui est un morphisme de revêtements injectif, donc un isomorphisme.

Le degré permet de distinguer les revêtements $z \mapsto z^n$ entre eux. En effet, si $p : U \to U$ et $p' : U \to U$ sont des revêtements, et $m : U \to U$ un homéomorphisme tel que $p' \circ m = p$, alors $\deg(p) = \deg(m)\deg(p') = \pm\deg(p')$. $\blacksquare$

## 7.3 Construction d'un revêtement simplement connexe

Supposons que $X$ admette un revêtement $p : E \to X$ simplement connexe. Soit $U \subset X$ un ouvert trivialisant. Alors tout lacet $\gamma$ contenu dans $U$ se relève en un lacet $\tilde{\gamma}$ de $E$. Comme $\tilde{\gamma}$ est homotope à une constante, il en est de même de $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Cela motive la définition suivante.

**Définition 70** *Un espace connexe par arcs $X$ est dit* semi-localement simplement connexe *si tout point $x$ admet un voisinage $U$ tel que tout lacet basé en $x$, contenu dans $U$ soit homotope à une constante dans $X$.*

**Théorème 7** *Soit $X$ un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors $X$ possède un revêtement $E$ connexe et simplement connexe.*

**Preuve.** Fixons $x_0 \in X$. Soit $C_{x_0}$ l'espace des chemins d'origine $x_0$ dans $X$, muni de la topologie de la convergence uniforme. C'est un espace topologique contractile (poser $\gamma_s(t) = \gamma(st)$ définit une rétraction par déformation jusqu'au chemin constant $1_{x_0}$). On note $\tilde{p} : C_{x_0} \to X$, $\gamma \mapsto \gamma(1)$. On note $E = C_{x_0}/\sim$ l'espace quotient de $C_{x_0}$ par la relation d'homotopie à extrémités fixées. Il est connexe par arcs. L'application $\tilde{p}$ passe au quotient en une application continue $p : E \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$.

$p$ est un revêtement. En effet, soit $x \in X$, soit $U$ le voisinage de $x$ donné par l'hypothèse de simple connexité semi-locale. Quitte à le rétrécir, on peut supposer $U$ connexe par arcs. Notons

$I$ l'ensemble des classes d'homotopie à extrémités fixées de chemins reliant $x_0$ à $x$. Fixons un représentant $\gamma_i$ de chaque classe. Pour chaque $x' \in U$, fixons un chemin $\delta_{x'}$ reliant $x$ à $x'$ dans $U$. Posons $s_i(x') = [\gamma_i \cdot \delta_{x'}]$. Etant donné un voisinage $V$ de $x'$ dans $U$, il existe un voisinage connexe par arcs $V' \subset V$. Pour chaque $x'' \in V'$, fixons un chemin $\delta_{x',x''}$ reliant $x'$ à $x''$ dans $V'$. Comme le lacet $\delta_{x'} \cdot \delta_{x',x''} \cdot \delta_{x''}^{-1}$, entièrement contenu dans $U$, est homotope à une constante dans $X$ $s(x'') = [\gamma_i \cdot \delta_{x''}] = [\gamma_i \cdot \delta_{x'} \cdot \delta_{x',x''}]$. A condition de paramétrer le produit de façon que le troisième facteur, $\delta_{x',x''}$, soit paramétré par un petit voisinage de 1, on réalise ainsi les $s_i(x'')$, $x'' \in V'$, par des chemins uniformément proches de $\gamma_i \cdot \delta_{x'}$ qui réalise $s_i(x')$. Cela prouve que $s_i$ est continue en $x'$. Pour tout chemin $\gamma$ de $x_0$ à un point $x'$ de $U$, $\gamma \cdot \delta_{x'}^{-1}$ est homotope à l'un des $\gamma_i$, donc $\gamma = s_i(x')$. On conclut que $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} s_i(U)$.

$E$ est simplement connexe. On utilise la remarque 65. Il suffit de montrer que si un lacet $\alpha$ se relève en un lacet $\sigma$ de $E$, alors $\alpha$ est homotope à une constante. Pour chaque $t \in [0,1]$, $\sigma(t)$ est un chemin de $x_0$ à $\alpha(t)$. Pour $t$ petit, le lacet $\sigma(t)^{-1}\alpha_{|[0,t]}$ est homotope à une constante. Par continuïté (à homotopie près), cette propriété persiste pour tout $t$. Par conséquent, le lacet $\sigma(1)$ est homotope à $\alpha$. Autrement dit, si $\sigma$ est un lacet, $\alpha$ est homotope à une constante. ■

## 7.4 Propriété universelle des revêtements simplement connexes

**Proposition 71** *Soit $p : E \to X$ un revêtement connexe par arcs et simplement connexe de $X$. Soit $p' : E' \to X$ un autre revêtement. Soient $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0$ des relèvements d'un même point base $x_0 \in X$. Alors il existe un unique morphisme $m : E \to E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$.*

**Preuve.** D'après le Corollaire 63, l'application $p : E \to X$ possède un relèvement $\tilde{p} : E \to E'$, tel que $p = p' \circ \tilde{p}$ et $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$. C'est un morphisme de revêtements. Inversement, si $m : E \to E'$ est un morphisme de revêtements, alors $p = p' \circ m$, donc $m$ est un relèvement de $p$. D'après le Corollaire 63, la condition sur les points bases le rend unique. ■

**Remarque 72** *Lorsque $E'$ est connexe, $m : E \to E'$ est un revêtement. On peut donc penser au revêtement $E'$ comme à un revêtement intermédiaire entre $X$ et $E$.*

**Exemple 73** *Les revêtements finis du cercle $z \mapsto z^n$, $U \to U$, sont eux mêmes revêtus par le revêtement exponentiel.*

## 7.5 Unicité du revêtement simplement connexe

**Théorème 8** *Soit $X$ un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $x_0 \in X$ un point base. Soient $p : E \to X$ et $p' : E' \to X$ deux revêtements connexes et simplement connexes de $X$. Soient $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0 \in E'$ des relèvements de $x_0$. Il existe un* unique *isomorphisme de revêtements $f : E \to E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$.*

**Preuve.** Résulte de la propriété universelle. ■

Autrement dit, une fois fixés des points bases, le revêtement connexe et simplement connexe de $X$ est canoniquement défini, i.e. unique à unique isomorphisme près.

**Terminologie**. On appelle le revêtement simplement connexe *revêtement universel.*

**Exercice 74** *Soit $X$ le graphe de l'exercice 66. Déterminer le revpetement universel de $X$ (c'est un arbre infini de valence 3, comment s'enroule-t'il autour de $X$ ?*

Fin du cours $n^0 15$

# 8 Revêtements et groupe fondamental

## 8.1 Automorphismes du revêtement universel

**Notation**. On note $Aut(E/X)$ le groupe des automorphismes d'un revêtement $p : E \to X$.

**Théorème 9** *Soit $X$ un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $p : E \to X$ un revêtement simplement connexe de $X$.*

1. *Pour tout $x_0 \in X$, $Aut(E/X)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x_0)$.*
2. *A chaque choix de relèvement $\tilde{x}_0$ de $x_0$ correspond un unique isomorphisme de $\pi_1(X, x_0) \simeq Aut(E/X)$.*

**Preuve.**

1. Cela résulte du théorème 8 : étant donnés deux relèvements $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}'_0$ de $x_0$, il existe un unique isomorphisme du revêtement $f : E \to E$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$.
2. Le groupe fondamental agit simplement transitivement à droite sur la fibre $p^{-1}(x_0)$ comme suit : si $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ et si $\alpha$ est un lacet basé en $x_0$, son relèvement d'origine $\tilde{x}$ se termine en un autre relèvement $\tilde{x}' = \tilde{x} \cdot \alpha$. L'action est transitive, car un chemin de $\tilde{x}$ à $\tilde{x}'$ est le relèvement de son image dans $X$. Comme $E$ est simplement connexe, l'action est simplement transitive en vertu du lemme 65. Cette action, qui ne fait pas intervenir de choix d'origine dans $E$, commute avec l'action à gauche de $Aut(E/X)$. Fixons un relèvement $\tilde{x}_0$. L'application, évidemment bijective, $\pi_1(X, x_0) \to Aut(E/X)$ qui à $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ associe l'unique $f \in Aut(E/X)$ tel que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$ est un isomorphisme de groupes. ■

**Exemple 75** *Pour le revêtement exponentiel, les automorphismes du revêtement sont les translations d'un multiple de $2\pi$.*

## 8.2 Construction de revêtements intermédiaires

On a vu que le revêtement $z \mapsto z^n$ du cercle unité $U$ pouvait s'obtenir en quotientant le revêtement universel $t \mapsto e^{it}$ par le sous-groupe $2\pi n\mathbb{Z}$ du groupe de ses automorphismes. Cette construction est générale.

**Proposition 76** *Soit $p : E \to X$ un revêtement simplement connexe. Soit $H \subset Aut(E/X)$ un sous-groupe. Alors l'espace quotient $E' = H \backslash E$ est séparé, la projection $p$ passe au quotient en un revêtement $p' : E' \to X$. Le groupe fondamental de $E'$ est isomorphe à $H$, l'isomorphisme est obtenu en composant $p'_{\#} : \pi_1(E', \tilde{x}'_0) \to \pi_1(X, x_0)$ et l'isomorphisme $\pi_1(X, x_0) \to Aut(E/X)$ du théorème 9.*

**Preuve.** Soient $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ deux points de $E$ qui ne sont pas dans la même orbite de $H$.

Premier cas : $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$. Notons $x = p(\tilde{x})$. Soit $U$ un voisinage ouvert trivialisant de $x$ dans $X$, i.e. il existe des sections locales $s_j$ au-dessus de $U$, indexées par les éléments de $J = p^{-1}(x)$, telles que $p^{-1}(U) = \displaystyle\coprod_{j \in p^{-1}(x)} s_j(U)$. Le groupe $Aut(E/X)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x)$. Alors $V_{\tilde{x}} = \coprod_{j \in H\tilde{x}}$ et $V_{\tilde{y}} = \coprod_{j \in H\tilde{y}}$ sont des ouverts saturés de $E$ contenant respectivement les orbites de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$. Il leur correspond des voisinages disjoints dans l'espace quotient $E' = H \backslash E$.

Deuxième cas : $p(\tilde{x}) \neq p(\tilde{y})$. Alors c'est encore plus simple. Soient $U_x$ et $U_y$ des voisinages trivialisants disjoints de $x = p(\tilde{x})$ et $y = p(\tilde{y})$ dans $X$. Alors $p^{-1}(U_x)$ et $p^{-1}(U_y)$ sont des voisinages saturés de $E$ contenant respectivement les orbites de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$. Il leur correspond des voisinages disjoints dans l'espace quotient $E' = H \backslash E$. Ceci prouve que $E'$ est séparé.

L'application $p$ passe au quotient par définition même des automomorphismes de revêtement. Si $x \in X$, soit $J \subset p^{-1}(x)$ un sous-ensemble qui contient exactement un représentant de chaque orbite de $H$, soit $U$ un voisinage trivialisant de $x$ dans $X$. Alors l'ouvert $V_j = \coprod_{h \in H} s_{hj}(U)$ coupe chaque orbite de $H$ en un seul point, cela définit une section $s'_j : U \to E'$ de $p'$ au-dessus de $U$, et $p'^{-1}(U) = \coprod_{i\in J} V_j$, donc $p'$ est un revêtement, et la projection $m : E \to E'$ un morphisme de revêtements.

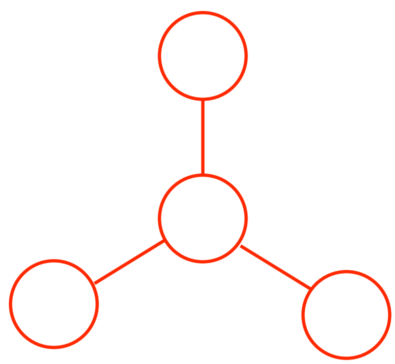
Soit $\tilde{x}_0$ un point base dans $E$. Soit $h \in H$, soit $\gamma$ un chemin de $\tilde{x}_0$ à $h\tilde{x}_0$ dans $E$. Son image dans $E'$ est un lacet $\gamma'$ basé en $\tilde{x}'_0 = m(\tilde{x}_0)$. Notons $\alpha = p' \circ \gamma' = p \circ \gamma$. C'est un lacet dans $X$ basé en $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, et représentant la classe $p_\#([\gamma']) \in \pi_1(X, x_0)$. D'après le théorème 9, il lui correspond la transformation de revêtement $g \in Aut(E/X)$ telle que $g(\tilde{x}_0)$ soit l'extrémité de l'unique relèvement de $\alpha$ d'origine $\tilde{x}_0$ dans $E$. Or ce relèvement, c'est $\gamma$, donc $g = h$. Inversement, si $\alpha'$ est un lacet dans $E'$ basé en $\tilde{x}'_0$, il possède un relèvement $\gamma$ d'origine $\tilde{x}_0$ dans $E$, d'extrémité $g(\tilde{x}_0)$. Comme $m(g(\tilde{x}_0)) = m(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$, $g \in H$, donc $\simeq \circ p_\#([\alpha']) \in H$.

On a donc montré que l'image de $\simeq \circ p_\# : \pi_1(E', \tilde{x}'_0) \to \pi_1(X, x_0) \to Aut(E/X)$ est exactement le sous-groupe $H$. L'injectivité de cet homomorphisme résulte du lemme suivant. ■

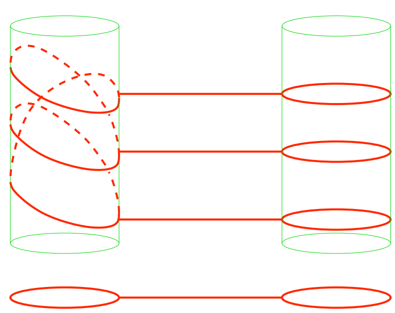
**Lemme 77** *Soit $p : E \to X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de $x_0$. La projection $p$ induit un homomorphisme injectif $p_\# : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$.*

**Preuve.** En effet, soit $\gamma \in E$ un lacet basé en $\tilde{x}_0$. Supposons $\alpha = p \circ \gamma$ homotope à une constante. Alors l'homotopie $F$ de $\alpha$ au lacet constant $1_{\tilde{x}_0}$ se relève en une homotopie de $\gamma$ à un lacet contenu dans un fibre, donc constant. On conclut que $\gamma$ est trivial dans $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$, donc que $p_\#$ est injective. ■

**Exercice 78** *Soit $E$ le graphe de la figure suivante. Vérifier que l'action du groupe $H$ des rotations d'ordre 3 sur $E$ définit un revêtement $E \mapsto H\backslash E = X$, et le représenter graphiquement dans le style de la figure de l'exercice 66.*



**Solution**.



## 8.3 Action du groupe fondamental sur les fibres

Pour un revêtement quelconque, ce qui subsiste du théorème 9, c'est l'action à droite transitive du groupe fondamental. Comme on l'a vu en 65, cette action est simplement transitive si et seulement si $E$ est simplement connexe. En général, il y a des stabilisateurs.

**Proposition 79** *Soit $p : E \to X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$. Le relèvement des lacets définit une action à droite du groupe $\pi_1(X, x_0)$ sur la fibre $p^{-1}(x_0)$. Elle est transitive. Le stabilisateur de $\tilde{x}_0$ est le sous-groupe $p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$.*

**Preuve.** Un élément de $\pi_1(X, x_0)$ qui fixe $\tilde{x}_0$, c'est la classe d'homotopie d'un lacet $\alpha$ dont le relèvement $\tilde{\alpha}$ d'origine $\tilde{x}_0$ est un lacet. Alors $\alpha = p_\#(\tilde{\alpha})$ appartient à l'image de $p_\#$.

Réciproquement, si $\alpha$ est un lacet dans $X$ basé en $x_0$ qui est homotope à un lacet de la forme $p \circ \beta$ où $\beta$ est un lacet dans $E$ basé en $\tilde{x}_0$, alors $(p \circ \beta^{-1}) \cdot \alpha$ est homotope au lacet constant $1_{x_0}$, donc se relève en un lacet d'origine $\tilde{x}_0$. Mais l'unique relèvement est nécessairement $\beta^{-1} \cdot \tilde{\alpha}$, donc $\tilde{\alpha}$ est un lacet basé en $\tilde{x}_0$, i.e. il fixe l'élément $\tilde{x}_0$ de la fibre. ∎

**Corollaire 80** *Si $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ sont deux éléments de la fibre $p^{-1}(x_0)$, les sous-groupes $p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}))$ et $p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}'))$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$. Tous les sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ conjugués à $p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}))$ sont de la forme $p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}'))$ pour un choix de $\tilde{x}'$.*

**Preuve.** C'est une propriété générale pour les actions transitives. ∎

**Exemple 81** *Soit $p : U \to U$, $z \mapsto z^n$. Alors $p_\#(\pi_1(U))$ est le sous-groupe $2\pi n\mathbb{Z} \subset 2\pi\mathbb{Z}$.*

## 8.4 Critère de relevabilité

**Théorème 10** *Soit $p : E \to X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de $x_0$. Soit $Y$ un espace connexe et localement connexe par arcs, soit $y_0 \in Y$ un point base. Soit $f : Y \to X$ une application continue qui envoie $y_0$ en $x_0$. Alors $f$ possède un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$ si et seulement si*

$$f_\#(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}_0)).$$

*Le relèvement est alors unique.*

**Preuve.** Supposons que $f$ possède un relèvement $\tilde{f} : Y \to E$. Alors $f_\# = p_\# \circ \tilde{f}_\#$ donc son image est contenue dans celle de $p_\#$.

Réciproquement, supposons que l'image de $f_\#$ est contenue dans celle de $p_\#$. Soit $y \in Y$ et $\gamma$ un chemin de $y_0$ à $y$. Le chemin $\alpha = f \circ \gamma$ de $x_0$ à $f(y)$ possède un relèvement $\tilde{\alpha}$ d'origine $\tilde{x}_0$. Posons $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$. Si $\gamma'$ est un autre lacet de $y_0$ à $y$, alors le lacet $\alpha' \cdot \alpha^{-1} = f_\#(\gamma' \cdot \gamma^{-1})$ dans $X$ est homotope à un lacet de la forme $p_\#(\beta)$ où $\beta$ est un lacet dans $E$ basé en $x_0$. Autrement dit, les chemins $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ et $\alpha'$ sont homotopes à extrémités fixées dans $X$. Ils se relèvent donc en des chemins de même extrémités. Or l'unique relèvement d'origine $\tilde{x}_0$ de $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ est $\beta \cdot \tilde{\alpha}$. On conclut que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$, donc que le point $\tilde{f}(y) \in E$ ne dépend pas du choix du chemin $\gamma$. A nouveau, la continuïté de $\tilde{f}$ résulte de la continuïté du procédé de relèvement des chemins. ∎

**Exemple 82** *Une application $f : U \to U$ se relève à travers le revêtement $z \mapsto z^n$ si et seulement si elle représente une classe d'homotopie divisible par $n$. Autrement dit, si et seulement si son degré est divisible par $n$.*

**Exercice 83** *Soit $p : X \to E$ le revêtement de l'exercice 66. Vérifier, pour quelques exemples, que les lacets de $X$ qui se relèvent en des lacets de $E$ sont bien dans l'image du groupe fondamental $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$ (cela dépend de $\tilde{x}_0$) ?*

## 8.5 Classification des revêtements connexes

On va établir une bijection entre classes d'isomorphismes de revêtements connexes $p : E \to X$ et classes de conjugaison de sous-groupes $H \subset \pi_1(X, x_0)$.

**Proposition 84** *Soient $p : E \to X$ et $p' : E' \to X$ des revêtements connexes, $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0 \in E$ des relèvements de $x_0$.*

1. *Il existe un morphisme de revêtements $m : E \to E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$ si et seulement si $p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset p_\#(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$.*

2. *Il existe un morphisme de revêtements $m : E \to E'$ si et seulement s'il existe un conjugué de $p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ dans $\pi_1(X, x_0)$ qui est contenu dans $p_\#(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$.*
3. *Les revêtements $E$ et $E'$ sont isomorphes si et seulement si $p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ et $p_\#(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$.*

**Preuve.** Un morphisme de revêtements $m : E \to E'$, c'est la même chose qu'un relèvement de $p : E \to X$ à $E'$. ■

**Corollaire 85** *Supposons $X$ connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. L'application qui à un revêtement $p : E \to X$ associe le sous-groupe $p_\#(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ induit une bijection entre classes d'isomorphisme de revêtements et classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$. La bijection réciproque consiste à quotienter le revêtement universel de $X$ par un sous-groupe de son groupe d'automorphismes.*

**Preuve.** Résulte des propositions 76 et 84. ■

**Exemple 86** *Il y a autant de revêtements du cercle, à isomorphisme près, que de sous-groupes dans $\mathbb{Z}$.*

Comme $\mathbb{Z}$ est commutatif, il n'y a pas lieu de parler de conjugaison.

**Remarque 87** *Dans cette correspondance entre revêtements connexes pointés et sous-groupes du groupe fondamental, il y a aussi une correspondance entre morphismes et injections de sous-groupes. On parle d'*équivalence de catégories*.*

## 8.6 Revêtements galoisiens

On se demande si, en dehors du revêtement universel, il existe des revêtements qui possèdent beaucoup d'automorphismes.

**Exemple 88** *Le revêtement à 3 feuillets de l'exercice 66 ne possède aucun automorphisme autre que l'identité.*

En effet, le graphe $E$ contient un sommet uniquement caractérisé par la propriété suivante : les deux extrémités d'une même arête s'y confondent. Tout homéomorphisme (et *a fortiori* tout automorphisme) doit fixer ce point. Or un automorphisme qui fixe un point est l'identité. Autrement dit, étant donné un point de $E$, il n'est pas possible de choisir continûment un point parmi les deux autres points de sa fibre.

Sachant qu'un automorphisme est uniquement déterminé par son action sur une fibre, ce qu'on peut demander de plus, c'est la transitivité sur une fibre.

**Définition 89** *Un revêtement $p : E \to X$ est dit* galoisien *si son groupe d'automorphismes $Aut(E/X)$ agit transitivement sur les fibres.*

**Remarque 90** *Si $X$ est connexe, il suffit que ce soit vrai pour une fibre.*

En effet, l'ensemble des $x \in X$ tels que $Aut(E/X)$ agisse transitivement sur $p^{-1}(x)$ est une réunion d'ouverts trivialisants, donc est ouvert et fermé.

**Exemple 91** *Les revêtements triviaux, le revêtement universel sont galoisiens.*

**Proposition 92** *On suppose $X$ localement connexe par arcs. Un revêtement connexe $p : E \to X$ est galoisien si et seulement si le sous-groupe $p_\#(\pi_1(E)) \subset \pi_1(X)$ est distingué. Dans ce cas, $Aut(E/X) \simeq \pi_1(X)/p_\#(\pi_1(E))$ (isomorphisme qui dépend du choix d'un point base).*

**Preuve.** Un morphisme de revêtement, c'est un relèvement de $p$. D'après le critère de relevabilité, il existe un morphisme de revêtement envoyant $\tilde{x}_0$ sur $\tilde{x}'_0$ si et seulement si $p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}_0)) \subset p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}'_0))$, et un automorphisme si et seulement si $p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}_0)) = p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}'_0))$. Donc, avec le corollaire 80, si $Aut(E/X)$ est transitif, tous les conjugués de $p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}_0))$ coïncident, donc ce sous-groupe est distingué. Et réciproquement.

Si $p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}_0))$ est distingué, il agit trivialement (à droite) sur la fibre de $x_0$. Par conséquent, le groupe quotient $G = \pi_1(X,x_0)/p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}_0))$ agit à droite sur la fibre, simplement transitivement d'après la proposition 79. De son côté, le groupe $Aut(E/X)$ agit à gauche simplement transitivement sur la fibre, les deux actions commutent, ce qui donne un isomorphisme entre les deux groupes. ■

**Exemple 93** *Existe t'il des revêtements non galoisiens à deux feuillets ?*

Plus généralement,

**Proposition 94** *On suppose $X$ localement connexe par arcs. Soit $p : E \to X$ un revêtement connexe, soient $\tilde{x}_0$ et $x_0$ des points bases. Notons $G = \pi_1(X,x_0)$ et $H = p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}_0))$. Soit $N_G(H)$ le* normalisateur *de $H$ dans $G$, i.e. l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $g^{-1}Hg \subset H$. Alors $Aut(E/X) \simeq N_G(H)/H$ (isomorphisme qui dépend du choix d'un point base).*

**Preuve.** Soit $g \in G$. Alors $p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}_0\cdot g)) = g^{-1}p_\#(\pi_1(E,\tilde{x}_0))g = g^{-1}Hg$. D'après le critère de relevabilité, il existe $h \in Aut(E/X)$ tel que $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot g$ si et seulement si $g^{-1}Hg \subset H$. Autrement dit, l'orbite à gauche de $\tilde{x}_0$ sous $Aut(E/X)$ coïncide avec l'orbite à droite de $\tilde{x}_0$ sous $N_G(H)$. Sur cette orbite, $Aut(E/X)$ agit à gauche simplement transitivement. D'après le proposition 79, le stabilisateur de $\tilde{x}_0$ est $H$. Or $H$ est distingué dans $N_G(H)$, donc $H$ fixe chaque point de l'orbite. Autrement dit, le groupe quotient $N_G(H)/H$ agit à droite simplement transitivement sur l'orbite. Les deux actions commutent, ce qui donne un isomorphisme entre les deux groupes. ■

**Exemple 95** *Cas du revêtement non galoisien à 3 feuillets de l'exercice 66.*

Prenons le sommet spécial de $E$ comme point base $\tilde{x}_0$, et $x_0$ son image. Le graphe $X$ a une connectivité égale à 4, donc son groupe fondamental est un groupe libre à 2 générateurs $a$ et $b$, où $a$ est représenté par la boucle de sommet $x_0$ et $b$ par un lacet qui va faire le tour de l'autre boucle sans repasser par $x_0$. Pour spécifier uniquement $a$ et $b$, il suffit d'orienter chacune des boucles. Ces orientations se relèvent à $E$.

Le graphe $E$ a une connectivité égale à 4, donc son groupe fondamental est un groupe libre à 4 générateurs $c$, $d$, $e$ et $f$, où

- $c$ est représenté par la boucle de sommet $\tilde{x}_0$ parcourue dans le sens positif, de sorte que $p_\#(c) = a$,
- $d$ par un lacet qui ne recoupe pas la fibre de $x_0$, parcouru dans le sens positif, de sorte que $p_\#(d) = b^3$,
- $e$ par un lacet obtenu comme suit : on traverse de $x_0$ au sommet du bas à gauche, on monte positivement d'un tour le long de $c$, on traverse de gauche à droite au niveau 2, on suit positivement la boucle qui entoure deux fois le second cylindre jusqu'au niveau 3, on retraverse de droite à gauche, on redescend positivement le long de $c$, et on rejoint $x_0$, de sorte que $p_\#(e) = bab$,
- $f$ obtenu comme suit : on traverse de $x_0$ au sommet du bas à gauche, on monte positivement d'un tour le long de $c$, on traverse de gauche à droite au niveau 2, on fait positivement le tour complet de la boucle qui entoure deux fois le second cylindre, ce qui ramène au niveau 2, on retraverse de droite à gauche, on redescend négativement le long de $c$, et on rejoint $x_0$, de sorte que $p_\#(f) = ba^2b^{-1}$.

Il résulte de la proposition 94 que le normalisateur dans $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ du sous-groupe engendré par $a$, $b^3$, $bab$ et $ba^2b^{-1}$ est réduit à ce sous-groupe. Il résulte de la proposition 79 que le sous-groupe de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ engendré par $a$, $b^3$, $bab$ et $ba^2b^{-1}$ est d'indice 3. Ce n'est pas facile à montrer directement.

C'est une illustration du fait que la théorie des revêtements est réellement utile pour démêler des questions combinatoires sur les groupes. Voici une autre illustration.

Fin du cours $n^0 16$

**Théorème 11** Nielsen-Schreier. *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

**Preuve.** Puisqu'on n'a parlé que de graphes finis et de groupes libres de type fini, seul le cas des sous-groupes d'indice fini d'un groupe libre de type fini est à notre portée. Voici tout de même l'argument général. Tout groupe libre est le groupe fondamental d'un graphe. Tout sous-groupe est le groupe fondamental d'un revêtement de ce graphe (proposition 76). Comme un revêtement d'un graphe est un graphe, et comme le groupe fondamental d'un graphe est libre (proposition 44, dans le cas des graphes finis), le sous-groupe est libre. ■

## 8.7 A retenir

Soit $X$ un espace connexe, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe.

1. Tout revêtement connexe de $X$ est un quotient $H\backslash\tilde{X}$ du revêtement universel $\tilde{X}$ par un sous-groupe $H$ de $Aut(\tilde{X}/X) \simeq \pi_1(X)$.
2. Deux revêtements de ce type sont isomorphes si et seulement si les sous-groupes sont conjugués.
3. Le revêtement $E = H\backslash\tilde{X}$ est galoisien si et seulement si $H$ est distingué, et dans ce cas $Aut(E/X) \simeq \pi_1(X)/H$.