

VARIETES

P. Pansu, d'après des notes de L. Clozel

24 mai 2007

1 Sous-variétés

1.1 Motivation

Vérifier d'une quadrique affine non dégénérée est lisse, déterminer son hyperplan tangent.

1.2 Définitions

Définition 1 Soit $k \geq 1$. Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n . Un C^r -difféomorphisme de U sur V , c'est une bijection $f : U \rightarrow V$ qui est de classe C^r ainsi que sa réciproque.

Si un C^1 -difféomorphisme f est de classe C^r , alors f^{-1} est de classe C^r .

Définition 2 Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . X est une sous-variété de dimension d si pour tout point $x \in X$ il existe des ouverts U et V de \mathbb{R}^n et un C^r -difféomorphisme de U sur V qui envoie x sur 0 et envoie $U \cap X$ sur $V \cap \mathbb{R}^d$. On appelle $n - d$ la codimension de X .

Exemples 3 La réunion de deux droites sécantes n'est pas une sous-variété du plan. La réunion de deux droites parallèles l'est. Le graphe d'une fonction de classe C^r de \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R} est une sous-variété de dimension $n - 1$ de \mathbb{R}^n .

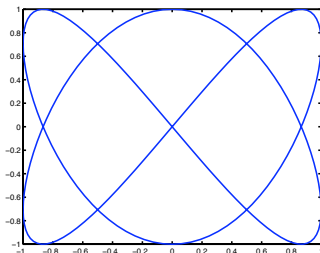
1.3 Immersions et submersions

Définition 4 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^r est une immersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est injective (i.e. si sa matrice jacobienne est de rang n). f est une submersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est surjective (i.e. si sa matrice jacobienne est de rang p). f est une submersion au dessus de $y \in \mathbb{R}^p$ si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$.

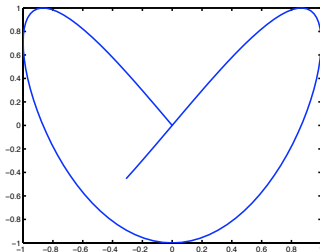
Théorème 1 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^r .

1. Si f est une immersion en $x \in U$, alors il existe un ouvert $x \in U' \subset U$ tel que $f(U')$ est une sous-variété de classe C^r et de dimension n de \mathbb{R}^p .
2. Si f est une submersion au dessus de $y \in \mathbb{R}^p$, alors $f^{-1}(y)$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété de classe C^r et de dimension $n - p$ de \mathbb{R}^n .

Exemples 5 1. L'application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ est une immersion en tout point mais son image n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 .



2. L'application $\eta :]-\pi/10, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ est une immersion en tout point, elle est injective, mais son image n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 .



3. La fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ est une submersion au-dessus de tout réel non nul. Les sphères de rayon non nul sont donc des sous-variétés de dimension $n - 1$ (i.e. de codimension 1).

Exercice 6 Vérifier que la projection stéréographique est une immersion du plan dans \mathbb{R}^3 .

1.4 Espace tangent

Définition 7 Soit X une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n , et $x \in X$. Les vecteurs vitesse en x des courbes contenues dans X et passant par x forment un sous-espace vectoriel appelé espace tangent à X en x et noté $T_x X$.

En effet, si $\phi : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme qui redresse X sur \mathbb{R}^d au voisinage de x , alors $T_x X = (d_x \phi)^{-1}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 8 Soit X une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n .

1. Si $X = f(U)$ est l'image d'une immersion, alors $T_{f(x)} X = \text{im } d_x f$.
2. Si $X = f^{-1}(y)$ est une fibre d'une submersion, alors $T_x X = \text{ker } d_x f$.

Corollaire 9 Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension d si et seulement si au voisinage de tout point $x \in X$, X s'écrit comme le graphe d'une application f de $T_x X$ dans $(T_x X)^\perp$ telle que $f(0) = 0$ et $d_0 f = 0$. En particulier, si $y \in X$ est voisin de $x \in X$, la distance de y à $T_x X$ est un $o(|y - x|)$. De même, si $v \in T_x X$ est assez petit, la distance de $x + v$ à X est un $o(|v|)$.

Preuve. Notons pr la projection orthogonale sur $T_x X$. Soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion qui paramètre X au voisinage de x . Alors $pr \circ g$ est une immersion de \mathbb{R}^d dans $T_x X$ en 0 donc un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage U de 0 dans $T_x X$. Notons $h : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ le difféomorphisme réciproque. Alors $f = pr^\perp \circ h : U \rightarrow (T_x X)^\perp$ est différentiable, sa différentielle en 0 est nulle, et son graphe coïncide avec X au voisinage de x . Si $v \in U$, $x + v + f(v) \in X$ donc $x + v$ est proche (en $o(|v|)$) de X .

L'application $y \mapsto y - f \circ pr(y - x)$ est différentiable, sa différentielle en x est l'identité, c'est un difféomorphisme local qui redresse X sur le plan affine $x + T_x X$. Il déplace le point y d'une distance en $o(|y - x|)$, donc si $y \in X$, y est proche du plan tangent. ■

Fin du cours n^017

1.5 Cas des quadriques affines

Proposition 10 Soit q une forme quadratique non dégénérée en $n + 1$ variables, de matrice S . Soit Q la quadrique affine de \mathbb{R}^n définie par l'équation affine $q(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$. Alors Q est une

sous-variété de classe C^∞ , et son hyperplan tangent en $x = (x_1, \dots, x_n, 1)$ est défini par l'équation linéaire en v ,

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n S_{i,j} x_i v_j + \sum_{j=1}^n S_{n+1,j} v_j = 0.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note $p = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de composantes $(x_1, \dots, x_n, 1)$.

L'équation de Q est $f(x) = q(p) = p^\top S p = 0$. Alors, pour $v \in \mathbb{R}^n$, $d_x f(v) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}^\top S p + p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 2p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$. Supposons que $x \in Q$. Notons $S p = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$. Alors $f(x) = w x + z = 0$. Comme S est inversible et p non nul, $S p$ est non nul, donc $w \neq 0$ et $z \neq 0$. Alors la forme linéaire $d_x f : v \mapsto 2p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 2w^\top v$ est surjective. Autrement dit, f est une submersion au dessus de 0. En particulier, $Q = f^{-1}(0)$ est une sous-variété d'espace tangent $\ker d_p f$. ■

2 Variétés

2.1 Motivation

On voudrait traiter le cas des quadriques projectives. Pour cela, il faut définir la notion de sous-variété de l'espace projectif.

2.2 Structure différentielle sur un espace topologique

Définition 11 Soit X un espace topologique. Un atlas de classe C^r pour X est la donnée

- d'un recouvrement de X par des ouverts U_i ;
- pour tout i, j , d'un homéomorphisme $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ ouvert de \mathbb{R}^n ,

tels que, pour tous i et j , $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ est un C^r -difféomorphisme.

On appelle les ϕ_i les *cartes* de l'atlas, et les U_i les *domaines de cartes*.

Définition 12 Deux atlas (U_i, ϕ_i) et (W_α, ψ_α) sont compatibles si les applications $\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1}$ sont des C^r -difféomorphismes. Une structure différentielle sur X est une classe d'atlas compatibles.

On peut alors prendre l'atlas formé de toutes les cartes compatibles avec un choix de (U_i, ϕ_i) . On appelle *variété* un espace topologique muni d'une structure différentielle.

Exemple 13 Sur \mathbb{R} considérons les deux atlas à une carte $(U = \mathbb{R}, \phi : x \mapsto x)$ et $(W = \mathbb{R}, \psi : x \mapsto x^3)$. Ces deux atlas ne sont pas compatibles.

En effet, $x \mapsto x^3$ n'est pas un difféomorphisme. Il y a donc plein de structures différentielles différentes sur \mathbb{R} . On verra qu'elle sont toutes difféomorphes.

Exemple 14 Sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} considérons l'atlas à deux cartes $U_1 =]0, 1[\text{ mod } 1$, $\phi_1(x \text{ mod } 1) = x$ et $U_2 =]-1/2, 1/2[$, $\phi_2(x \text{ mod } 1) = x$. Cela définit une structure différentielle sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

En effet, $U_1 \cap U_2 =]0, 1/2[\cup]1/2, 1[\text{ mod } 1$, $\phi_1(U_1 \cap U_2) =]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$, $\phi_2(U_1 \cap U_2) =]0, 1/2[$ et pour $y \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$, deux cas,

- si $y \in]0, 1/2[$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = y$;
- si $y \in]1/2, 1[$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = y - 1$.

Dans les deux moitiés, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est un C^∞ -difféomorphisme.

2.3 Objets différentiables

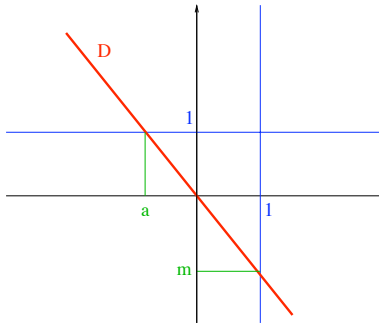
Toute propriété *locale* invariante par C^r -difféomorphisme a un sens évident sur une variété différentielle. Par exemple,

- Définition 15** – Une application $f : X \rightarrow Y$ entre variétés est de classe C^r si, pour toutes cartes (U_i, ϕ_i) de X et (W_α, ψ_α) de Y , $\psi_\alpha \circ f \circ \phi_i^{-1}$ est de classe C^r .
- Une application $f : X \rightarrow Y$ entre variétés est une immersion, submersion, difféomorphisme local, si pour toutes cartes (U_i, ϕ_i) de X et (W_α, ψ_α) de Y , $\psi_\alpha \circ f \circ \phi_i^{-1}$ l'est.
 - Une application $f : X \rightarrow Y$ entre variétés est un difféomorphisme si c'est un difféomorphisme local bijectif.
 - Un sous-ensemble $Y \subset X$ est une sous-variété si et seulement si pour toutes cartes (U_i, ϕ_i) de X , $\phi_i(U_i \cap Y)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n .
 - Deux sous-variétés $Z \subset X$ et $Y \subset X$ sont tangentes en x si et seulement si pour une (toute) carte (U_i, ϕ_i) de X définie en x , $\phi_i(Z)$ et $\phi_i(Y)$ sont tangentes en $\phi_i(x)$.

Terminologie. Dans la suite, *différentiable* signifie de classe C^r , où r est déterminé par le contexte.

2.4 Structure différentielle sur la droite projective

Une droite vectorielle D non verticale de \mathbb{R}^2 est représentée par une pente $m = \phi_1(D)$, c'est le réel tel que $(1, m) \in D$. Si D n'est pas horizontale, elle possède une antipente $a = \phi_2(D)$, c'est le réel a tel que $(a, 1) \in D$. Les deux applications pente et antipente constituent des cartes, et le changement de carte $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : m \mapsto a = 1/m$ est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cet atlas définit une structure différentielle sur la droite projective.



2.5 Structure différentielle sur l'espace projectif

Définition 16 On appelle ouvert affine U_i de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'ensemble des points dont la i -ème coordonnée homogène est non nulle. On appelle carte affine l'application réciproque de l'homéomorphisme $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$.

Alors $\phi_i(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{j'} \neq 0\}$, où $j' = j$ si $j < i$, $j' = j - 1$ si $j > i$. Comme

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_{j'}}, \dots, \frac{1}{x_{j'}}, \dots, 1, \dots, \frac{x_1}{x_{j'}} \right)$$

est un C^∞ -difféomorphisme, on obtient ainsi une structure différentielle sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Définition 17 De la même façon, on définit une structure différentielle de dimension $2n$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Exemple 18 Une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) est une sous-variété.

En effet, dans toute carte affine, une sous-variété linéaire est envoyée sur un sous-espace affine.

Fin du cours n^018

Lemme 19 1. Soit X une variété de classe C^r . Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ une application de classe C^r . Alors l'application induite $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est de classe C^r .

2. Soit Y une variété de classe C^r . Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow Y$ une application de classe C^r telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et tout $\lambda \neq 0$, $f(\lambda v) = f(v)$. Alors l'application induite $\bar{f} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow Y$ est de classe C^r .

Preuve. 1. Ecrivons $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$. Soit $x_0 \in X$, $w = f(x_0)$. Pour simplifier les notations, supposons que $w_{n+1} = f_{n+1}(x_0) \neq 0$. Alors, au voisinage de $\mathbb{P}(w)$, on peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} , et

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} \circ \bar{f}(x) &= \phi_{n+1}[f_1(x) : f_2(x) : \dots : f_{n+1}(x)] \\ &= \left(\frac{f_1(x)}{f_{n+1}(x)}, \dots, \frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} \right). \end{aligned}$$

C'est bien une application de classe C^r d'un ouvert de X dans \mathbb{R}^n , donc \bar{f} est de classe C^r .

2. Soit $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v \neq 0$. Pour simplifier les notations, supposons que $v_{n+1} \neq 0$. Alors, au voisinage de $\mathbb{P}(v)$, on peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} , et

$$\begin{aligned} \bar{f} \circ \phi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= \bar{f}[1 : x_1 : \dots : x_n] \\ &= f(1, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

C'est bien une application de classe C^r d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans Y , donc \bar{f} est de classe C^r . ■

Exemple 20 Une application projective est de classe C^∞ là où elle est définie.

En effet, on applique successivement les énoncés 1 et 2 du lemme.

2.6 Cas des quadriques projectives

Proposition 21 Soit q une forme quadratique non dégénérée en $n+1$ variables, de matrice S . Soit \mathcal{Q} la quadrique projective de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ définie par q . Alors \mathcal{Q} est une sous-variété de classe C^∞ . Soit $p \in \mathcal{Q}$. Alors l'hyperplan polaire de p est tangent à \mathcal{Q} en p . Cet énoncé reste vrai sans changement si on remplace \mathbb{R} par \mathbb{C} .

Preuve. On peut supposer que la dernière coordonnée homogène de p est non nulle. On utilise la carte affine $\phi_{n+1} : U_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors $\phi_{n+1}(U_{n+1} \cap \mathcal{Q}) = Q$ est la quadrique affine d'équation $q(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$, qui est une sous-variété. Cela prouve que \mathcal{Q} est une sous-variété. $\phi_{n+1}(U_{n+1} \cap \mathbb{P}(p^\perp))$ est un hyperplan affine, parallèle à l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, i.e. à l'hyperplan tangent à Q en $\phi_{n+1}(p)$. On conclut que H est tangent à \mathcal{Q} en p . ■

Exercice 22 A quelle condition l'intersection de deux quadriques projectives non dégénérées est-elle une sous-variété de l'espace projectif ?

2.7 Revêtements et structures différentielles

Proposition 23 Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Etant donnée une structure différentielle sur X , il existe une unique structure différentielle sur E qui rend p différentiable. Inversement, si E est une variété et si pour toute section locale s de p , $s \circ p$ est un difféomorphisme, alors il existe une unique structure différentielle sur X qui rend p différentiable

Preuve. Si X est une variété, on recouvre X par des ouverts U_i qui sont à la fois contenus dans des ouverts de cartes $\phi_i|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ et trivialisants pour le revêtement, i.e. $p^{-1}(U_i) = \coprod_j s_j(U_i)$. Les cartes $\phi \circ p|_{s_j(U_i)} : s_j(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un atlas pour E .

Inversement, supposons que E est une variété. On recouvre E par des ouverts U_i qui sont à la fois contenus dans des ouverts de cartes $\phi_i|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ et tels que $p(U_i)$ soit trivialisant, i.e. $p^{-1}(p(U_i)) = \coprod_j s_j(p(U_i))$. Les cartes $\phi_i \circ s_j : s_j(p(U_i)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un atlas pour X . En effet, deux choix j et j' différents donnent un changement de carte $\phi_i \circ s_{j'} \circ (\phi_i \circ s_j)^{-1} = \phi_i \circ s_{j'} \circ p \circ (\phi_i)^{-1}$ qui est un difféomorphisme. ■

Exemple 24 Soit G un groupe discret qui agit librement et proprement par difféomorphismes d'une variété E . Alors l'espace quotient $X = G \backslash E$ hérite d'une structure différentielle qui rend le revêtement $p : E \rightarrow X$ différentiable.

En effet, si s est une section locale de p , $s \circ p$ est la restriction à un ouvert d'un élément de G , donc $s \circ p$ est un difféomorphisme.

3 Partitions de l'unité

3.1 Motivation

Comment fabriquer des objets différentiables, ne serait-ce qu'une fonction non constante, sur une variété? En combinant des morceaux donnés dans des cartes.

3.2 Construction

Définition 25 Soit X un espace topologique. Soit u une fonction continue sur X . Le support de u est le plus petit fermé en dehors duquel u est nulle.

Rappel 26 Il existe une fonction paire χ sur \mathbb{R} , de classe C^∞ , à support dans $] -1, 1[$, qui vaut 1 sur un voisinage de 0.

Lemme 27 Soit X une variété séparée de classe C^r , soit $x \in X$, soit U_x un ouvert contenant x . Il existe un voisinage ouvert V_x de x et une fonction χ_x de classe C^r sur X , à support dans U_x , qui vaut 1 sur V_x .

Preuve. La structure différentielle fournit une carte $\phi : U \rightarrow V$. Supposons que V contient une boule de rayon ϵ . Pour $y \in U$, on pose $\chi_x(y) = \chi(\phi(y)/\epsilon)$, où χ est la fonction modèle sur \mathbb{R} , à support dans $] -1, 1[$. Alors le support de χ_x est un compact K de U . Comme X est séparé, c'est un fermé de X . Tout point $z \notin U$ possède un voisinage disjoint de K . On peut donc prolonger χ_x par 0 en dehors de U , elle reste de classe C^r . ■

Définition 28 Soit X un espace topologique. Soient W_α des ouverts qui recouvrent X . On appelle partition de l'unité subordonnée à (W_α) la donnée, pour chaque α , d'une fonction positive ou nulle χ_α sur X , à support compact dans W_α , de sorte que

1. Pour tout $x \in X$, seuls un nombre fini parmi les nombres $\chi_\alpha(x)$ sont non nuls.
2. $\sum_\alpha \chi_\alpha \equiv 1$.

Théorème 2 Soit X une variété compacte de classe C^r . Soient W_α des ouverts en nombre fini qui recouvrent X . Alors X possède une partition de l'unité de classe C^r subordonnée à (W_α) .

Preuve. Pour chaque $x \in X$, on applique le lemme 27 à l'intersection U_x des W_α qui contiennent x . On obtient une fonction χ_x qui vaut 1 sur un ouvert V_x . Les V_x forment un recouvrement ouvert de X . Comme X est compacte, on peut choisir un sous-recouvrement fini, i.e. une partie finie

$F \subset X$ telle que la somme $\sum_{x \in F} \chi_x > 0$ partout. On note $\eta_\alpha = \sum_{x \in F \cap W_\alpha} \chi_x$. C'est une fonction à support compact contenu dans W_α . Comme $\sum_\alpha \eta_\alpha \geq \sum_{x \in F} \chi_x > 0$, on peut poser

$$\chi_\alpha = \frac{\eta_\alpha}{\sum_\alpha \eta_\alpha}.$$

Par construction, c'est une fonction de classe C^r à support dans W_α et $\sum_\alpha \chi_\alpha \equiv 1$. ■

3.3 Plongement

Théorème 3 H. Whitney (1936). *Toute variété compacte est difféomorphe à une sous-variété de \mathbb{R}^n .*

Preuve. Soit X une variété compacte de dimension n . Soit $(U_i, \phi_i)_{i=1, \dots, N}$ un atlas fini pour la structure différentielle de X . Pour chaque $x \in X$, on applique le lemme 27 à l'intersection U_x des U_i qui contiennent x . On obtient un ouvert V_x et une fonction χ_x . On applique à nouveau le lemme 27 à V_x , on obtient une nouvelle fonction χ'_x et un ouvert V'_x . Les V'_x forment un recouvrement ouvert de X . Comme X est compacte, on peut choisir un sous-recouvrement fini, i.e. une partie finie $F \subset X$ telle que les $V'_z, z \in F$, suffisent à recouvrir X . On note N le nombre d'éléments de F .

Pour chaque $z \in F$, on choisit une des cartes définies au voisinage de z , et on note ϕ_z (resp. ϕ'_z) deux copies de cette carte, vues comme des applications à valeurs dans des facteurs tous distincts du produit $\mathbb{R}^{2nN} = \prod_{z \in F} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On définit une application différentiable $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{2nN}$ par $f(x) = (\dots, \chi_z(x)\phi_z(x), \chi'_z(x)\phi'_z(x), \dots)_{z \in F}$. f est bien définie, car lorsque $x \notin U_z, \chi_z(x) = 0$ donc on n'a pas besoin de connaître $\phi_z(x)$.

Alors f est une immersion. En effet, au voisinage de x , l'une des fonctions χ_z vaut 1, donc la différentielle en x de la z -ème composante $\chi_z\phi_z$ est de rang n . *A fortiori*, $d_x f$ est de rang n .

f est injective. En effet, si $f(x) = f(y)$, il existe z telle que $\chi'_z(x) > 0$ et $\chi'_z(y) > 0$, d'où $x \in V'_z, y \in V'_z, \chi_z(x) = \chi_z(y) = 1$ donc $\phi_z(x) = \phi_z(y)$. Comme ϕ_z est injective, on conclut que $x = y$.

f est un homéomorphisme sur son image, par compacité.

$f(X)$ est une sous-variété. En effet, pour tout $w \in f(X), w = f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U)$ soit une sous-variété. Comme $f(U)$ est un voisinage de w dans $f(X)$, cela prouve que $f(X)$ est une sous-variété.

f est un difféomorphisme, car f est un difféomorphisme local bijectif. ■

Remarque 29 *Le théorème de H. Whitney contient davantage d'information.*

1. Il s'applique aussi à des variétés non compactes (voir ci-dessous).
2. Il donne une meilleure borne sur la dimension de l'espace d'arrivée : Whitney plonge une variété de dimension n dans \mathbb{R}^{2n} .
3. Whitney montre que pour certaines valeurs de n , cette borne ne peut pas être améliorée.

Remarque 30 *Partitions de l'unité pour des espaces topologiques non compacts.*

Il faut préalablement pouvoir extraire d'un recouvrement un recouvrement de multiplicité finie (i.e. chaque point est contenu dans un nombre fini d'ouverts). On appelle cette propriété la *paracompacité*. Être localement compact ne suffit pas. Un espace localement compact séparé X est paracompact si et seulement si c'est une réunion disjointe de sous-espaces X_j tels que chaque X_j soit une réunion dénombrable de compacts. Il existe des variétés séparées non paracompactes.

3.4 Cas de l'espace projectif

Dans le cas de l'espace projectif, il y a des plongements explicites.

Exercice 31 Soit $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ l'application qui à une droite p associe le projecteur orthogonal sur p . Vérifier que f est un difféomorphisme sur son image.

Solution. Soit p une droite, soit w un vecteur directeur de p . Le projecteur orthogonal sur p est donné par la formule

$$f(p)(u) = \frac{w^\perp u}{w^\perp w} w = \frac{1}{w^\perp w} w w^\perp u,$$

donc sa matrice est $\frac{1}{w^\perp w} w w^\perp$. C'est une fonction de classe C^∞ de w , donc f est de classe C^∞ .

L'image de f est l'ensemble \mathcal{P} des projecteurs orthogonaux de rang un. L'application réciproque associe à un projecteur son image. Cela montre que f est un homéomorphisme de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sur \mathcal{P} .

Soit $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \dots : 0 : 1]$. On peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} au voisinage de p . Dans cette carte,

$$g = f \circ \phi_{n+1}^{-1}(x) = \frac{1}{1 + |x|^2} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\perp & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + |x|^2} \begin{pmatrix} x x^\perp & x^\perp \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

La différentielle de g en $x = 0$ est

$$v \mapsto \begin{pmatrix} v x^\perp + x v^\perp & v^\perp \\ v & 0 \end{pmatrix},$$

qui est injective, puisque le troisième bloc l'est. Cela prouve que f est une immersion en p . Comme on l'a vu lors de la preuve du théorème de Whitney, une immersion qui est un homéomorphisme sur son image est un difféomorphisme sur une sous-variété. ■

4 Espace tangent

4.1 Espace tangent

L'espace tangent est l'endroit où vivent les vecteurs vitesse des courbes. Cela suggère la définition suivante.

Définition 32 Soit X une variété et $x \in X$. Décidons que deux courbes γ et η telles que $\gamma(0) = \eta(0) = x$ ont même vitesse en $t = 0$ si, dans une carte ϕ définie au voisinage de x , les images $\phi \circ \gamma$ et $\phi \circ \eta$ ont même vitesse en $t = 0$. L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle l'espace tangent de X en x , noté $T_x X$.

Clairement, la carte $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ identifie $T_x X$ à l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Une autre carte $\psi : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ donne une identification qui diffère de la première par l'isomorphisme $d_{\phi(x)}(\psi \circ \phi^{-1})$. Par conséquent, $T_x X$ possède une structure d'espace vectoriel.

Définition 33 Une application différentiable $f : X \rightarrow Y$ entre variétés induit une application linéaire $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ appelée sa différentielle. En particulier, pour une sous-variété $Y \subset X$, $T_y Y$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $T_y X$.

Une application f est une immersion (resp. submersion) en x si et seulement si sa différentielle est injective (resp. surjective). Deux sous-variétés sont tangentes en x si et seulement si elles ont même espace tangent en x .

Exemple 34 Soit V un espace vectoriel. Soit $f \in \text{Gl}(V)$. La différentielle de f en p se calcule comme suit. On identifie $T_p \mathbb{P}(V)$ à $\text{Hom}(p, V/p)$ et $T_{f(p)} \mathbb{P}(V)$ à $\text{Hom}(f(p), V/f(p))$. Alors $d_p f$ est l'isomorphisme de $\text{Hom}(p, V/p)$ sur $\text{Hom}(f(p), V/f(p))$ induit par f .

En utilisant une carte affine, on vérifie que tout vecteur tangent w à $\mathbb{P}(V)$ en p est la vitesse en 0 d'une droite $t \mapsto \gamma(t) = \mathbb{P}(u + tv)$, u vecteur directeur de p . Montrons qu'une autre droite $t \mapsto \mathbb{P}(u' + tv')$ définit le même vecteur tangent w si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $u' = \lambda u, v' = \lambda v + \mu u$. Choisissons une base de V telle que $p = [0 : \dots : 0 : 1]$, avec $u = (0, \dots, 0, 1)$, $u' = (0, \dots, 0, \lambda)$. Alors

$$\phi_{n+1}(\mathbb{P}(u + tv)) = \left(\frac{tv_1}{1 + tv_{n+1}}, \dots, \frac{tv_n}{1 + tv_{n+1}} \right), \quad \phi_{n+1}(\mathbb{P}(u' + tv')) = \left(\frac{tv'_1}{\lambda + tv'_{n+1}}, \dots, \frac{tv'_n}{\lambda + tv'_{n+1}} \right),$$

dont les dérivées en $t = 0$ valent respectivement (v_1, \dots, v_n) et $(v'_1, \dots, v'_n)/\lambda$. Les deux droites ont même vitesse si et seulement si $v' - \lambda v$ est un multiple de u .

Par conséquent, l'homomorphisme $p \rightarrow V/p$ qui envoie u sur $v \bmod p$ ne dépend que du vecteur tangent w et non du choix de vecteur directeur u . Alors $f \circ \gamma(t) = f(u) + tf(v)$, donc le vecteur tangent $d_p f(w)$ correspond à l'homomorphisme $f(p) \rightarrow V/f(p)$ qui envoie $f(u)$ sur $f(v)$.

4.2 Champs de vecteurs

Définition 35 *Un champ de vecteurs sur une variété X , c'est une application qui à chaque point x associe un vecteur tangent $\xi(x) \in T_x X$, de sorte que, dans une carte ϕ , l'application $x \mapsto d_x \phi(\xi(x))$ soit différentiable.*

Remarque que lorsque X est de classe C^r , on peut parler de champs de vecteurs de classe C^{r-1} , mais pas mieux.

Remarque 36 *Lorsque $X \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété, un champ de vecteurs est aussi une application différentiable $\xi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il revient au même de dire que cette application est de classe C^{r-1} .*

Remarque 37 *Si $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme, et ξ un champ de vecteurs sur X , le champ de vecteurs transporté par f sur Y est noté $f_* \xi$. On a $(f_* \xi)(y) = (d_{f^{-1}(y)} f)(\xi(f^{-1}(y)))$.*

Exemple 38 *Soit V un espace vectoriel, soit $L \in \text{End}(V)$. Alors L détermine un champ de vecteurs sur $\mathbb{P}(V)$.*

En effet, l'homomorphisme $L|_p : p \rightarrow V/p$ définit un vecteur tangent en p , vitesse de la droite $\mathbb{P}(u + tL(u))$, $u \in p$.

4.3 Flots

Définition 39 *Soit ξ un champ de vecteurs sur une variété X . Une ligne intégrale de ξ est la donnée d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et d'une courbe différentiable $\gamma : I \rightarrow X$ solution de l'équation différentielle $\gamma'(t) = \xi(\gamma(t))$, $t \in I$.*

Théorème 4 *Soit X une variété de classe C^r , $r \geq 2$, soit ξ un champ de vecteurs de classe C^k , $1 \leq k \leq r - 1$.*

1. Existence locale. *Pour tout point $x \in X$, il existe $\epsilon > 0$ et une ligne intégrale de ξ définie sur $] - \epsilon, \epsilon[$ et passant par x en $t = 0$.*
2. Unicité locale. *Si $\gamma_1 : I_1 \rightarrow X$ et $\gamma_2 : I_2 \rightarrow X$ sont deux lignes intégrales de ξ de même condition initiale x , alors $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$.*
3. Solution maximale. *Pour tout point $x \in X$, il existe une unique solution maximale $\gamma_x : I_x \rightarrow X$ de condition initiale x . Si K est un compact de X et si, pour tout $t \in I_x$, $t \geq 0$, $\gamma_x(t) \in K$, alors $\sup I_x = +\infty$.*

4. Dépendance par rapport à la condition initiale. Soit

$$W = \bigcup_{x \in X} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times X.$$

Alors W est un ouvert, et l'application $\Phi : W \rightarrow X$ définie par $\Phi(t, x) = \gamma_x(t)$ est de classe C^k .

5. Flot. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $W_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$. Alors, pour $t \geq 0$, l'application $\phi_t : W_t \rightarrow W_{-t}$ est un C^k -difféomorphisme, et, lorsque tout est défini, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Corollaire 40 Si ξ est à support compact, $W = \mathbb{R} \times X$, et l'application $t \mapsto \phi_t$ est un homomorphisme de groupes de \mathbb{R} dans $\text{Diff}(X)$.

Définition 41 On appelle $t \mapsto \phi_t$ le groupe à un paramètre engendré par ξ , ou plus brièvement le flot de ξ .

Remarque 42 Soit $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme, et ξ un champ de vecteurs sur X , $t \mapsto \phi_t$ le flot de ξ . Alors le flot de $f_*\xi$ est $t \mapsto f \circ \phi_t \circ f^{-1}$.

Exemple 43 Soit V un espace vectoriel de dimension finie, soit $L \in \text{End}(V)$, soit ξ le champ de vecteurs correspondant. Alors le flot ϕ_t de ξ est formé des bijections projectives associées aux bijections linéaires e^{tL} .

En effet, si $p \in \mathbb{P}(V)$ et u est un vecteur directeur de p , la courbe $s \mapsto e^{sL}(p)$ est tangente en $s = t$ à la droite $s \mapsto e^{tL}u + (s - t)L e^{tL}u$ dont la vitesse en $s = t$ est $L|_{e^{tL}p} : e^{tL}p \rightarrow V/e^{tL}p$, c'est une ligne intégrale du champ ξ .

Exercice 44 Soit X une variété séparée et connexe. On note $\text{Diff}_c(X)$ le groupe des difféomorphismes de X qui valent l'identité hors d'un compact. Montrer que $\text{Diff}_c(X)$ agit transitivement sur X , i.e. pour tous $x, x' \in X$, il existe un difféomorphisme à support compact ϕ tel que $\phi(x) = x'$.

Solution. Soit $x \in X$. Soit $\phi_x : U_x \rightarrow V_x$ une carte au voisinage de x . Soit χ une fonction à support compact sur V_x qui vaut 1 sur un voisinage W_x de $0 = \phi(x)$.

Soit $z \in W_x$. Construisons un difféomorphisme à support dans V_x qui envoie 0 sur z . Soit ζ le champ de vecteurs constant sur \mathbb{R}^n qui vaut z . Soit η le champ de vecteurs à support compact sur \mathbb{R}^n défini par $\eta = \chi\zeta$. Le segment de droite $t \mapsto tz$, $t \in [-1, 1]$, est une ligne intégrale de η de condition initiale 0. Par conséquent, le flot $t \mapsto \psi_t$ de η satisfait $\psi_1(0) = z$.

Comme ψ_1 est à support dans V_x , le difféomorphisme $\phi^{-1} \circ \psi_1 \circ \phi$ de U_x , à support compact dans U_x , se prolonge en un difféomorphisme f de X tel que $f(x) = \phi^{-1}(z)$. Cela montre que l'orbite de x sous $\text{Diff}_c(X)$ contient un voisinage de x . En fait, on en déduit que les orbites du groupe $\text{Diff}_c(X)$ sont ouvertes. Comme X est connexe, elle ne peut être partitionnée en ouverts. On conclut qu'il n'y a qu'une orbite. ■

4.4 Intersection de sous-variétés

Soient Y et Y' deux sous-variétés de X . A quelle condition $Y \cap Y'$ est elle une sous-variété? Si $f : X \rightarrow Z$ et $f' : X \rightarrow Z'$ sont des submersions et $Y = f^{-1}(z)$, $Y' = f'^{-1}(z')$, il suffit que $(f, f') : X \rightarrow Z \times Z'$ soit une submersion.

Lemme 45 Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors l'application naturelle $E \rightarrow E/F \times E/F'$ est surjective si et seulement si $E = F + F'$.

Preuve. Le noyau de l'application naturelle $L : E \rightarrow E/F \times E/F'$ est $F \cap F'$. Comme

$$\dim(F \cap F') + \dim(F + F') = \dim(F) + \dim(F') \quad \text{et} \quad \dim(\ker L) + \dim(\text{im} L) = \dim(E),$$

$$\begin{aligned}
\text{codim}(\text{im}L) &= \dim(E/F \times E/F') - \dim(\text{im}L) \\
&= \dim(E/F) + \dim(E/F') - \dim(E) + \dim(F \cap F') \\
&= \dim(E) - \dim(F) - \dim(F') + \dim(F) + \dim(F') - \dim(F + F') \\
&= \text{codim}(F + F'),
\end{aligned}$$

donc L est surjective si et seulement si $E = F + F'$.

Autre argument. Remarquons que le dual de E/F s'identifie au sous-espace de E^* polaire F^0 de F , i.e. constitué des formes linéaires qui s'annulent sur F . Alors $(E/F)^* \times (E/F')^* = F^0 \times F'^0$. L'adjoint de L s'écrit $L^* : F^0 \times F'^0 \rightarrow E^*$, $(f, f') \mapsto f + f'$. Son noyau est l'ensemble des couples (f, f') tels que $f' = -f \in F^0 \cap F'^0$. Il s'identifie à $(F + F')^0$. Par conséquent, L^* est injective si et seulement si $E = F + F'$. ■

Définition 46 On dit que deux sous-espaces vectoriels F et F' d'un espace vectoriel E sont transverses si $E = F + F'$. On dit que deux sous-variétés Y et Y' de X sont transverses si leurs espaces tangents sont transverses en tout point de l'intersection $Y \cap Y'$.

Exemple 47 Deux plans de \mathbb{R}^3 sont transverses dès qu'ils sont distincts. Une droite D et un plan P de \mathbb{R}^3 sont transverses si et seulement si D n'est pas contenue dans P . Deux droites vectorielles de \mathbb{R}^3 , en tant que sous-espaces vectoriels, ne sont jamais transverses. Deux droites affines de \mathbb{R}^3 , en tant que sous-variétés, elles sont transverses si et seulement si elles sont disjointes.

Remarque 48 L'ensemble des couples (f, f') d'applications linéaires dont les images sont transverses est un ouvert de $\text{Hom}(F, E) \times \text{Hom}(F', E)$. Cet ouvert est non vide si et seulement si $\dim(F) + \dim(F') \geq \dim(E)$. Il est alors dense.

Autrement dit, lorsque la condition sur les dimensions est satisfaite, deux sous-espaces en position générale sont transverses.

Proposition 49 Si deux sous-variétés Y et Y' de X sont transverses, alors $Y \cap Y'$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété de codimension

$$\text{codim}(Y \cap Y') = \text{codim}(Y) + \text{codim}(Y').$$

Preuve. Il s'agit d'une propriété locale. Localement, Y et Y' sont définies par des submersions f et f' . D'après le lemme 45, (f, f') est une submersion, donc $Y \cap Y'$ est une sous-variété. ■

Fin du cours n^020

Exercice 50 Etudier l'intersection d'un tore de révolution avec une famille de plans parallèles.

5 Orientation

5.1 Rappel : orientation d'un espace vectoriel

Certaines opérations de la géométrie euclidienne, comme le produit mixte et le produit vectoriel, nécessitent le choix d'une orientation. Par exemple, la définition du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace ambiant nécessite la convention des 3 doigts de la main droite.

En effet, le produit mixte de n vecteurs de \mathbb{R}^n euclidien, c'est, au signe près, le déterminant dans une base orthonormée. Mais deux bases orthonormées diffèrent d'une isométrie dont le déterminant peut valoir 1 ou -1 , d'où une ambiguïté sur le signe, qu'on lève en fixant une fois pour toute une classe d'équivalence de bases de même signe.

Bien qu'on l'ait motivée par des considérations euclidiennes, et qu'on y pense souvent en termes euclidiens (une base du plan est directe si et seulement si les vecteurs forment un angle compris entre 0 et π , elle est indirecte si et seulement si les vecteurs forment un angle compris entre π et 2π), la notion d'orientation ne nécessite pas de structure euclidienne. Toute bijection linéaire entre espaces vectoriels transporte les orientations de l'un sur l'autre.

5.2 Orientation d'une variété

Définition 51 Soit X une variété. Orienter X , c'est choisir une orientation de chaque espace tangent de façon continue, i.e., si $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ est une carte, les orientations transportées par les différentielles $d_x\phi : T_xX \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont toutes les mêmes.

Remarque 52 Définition équivalente. Orienter X , c'est choisir un atlas formé de cartes à valeurs dans des espaces vectoriels orientés, telles que les changements de cartes préservent l'orientation.

En effet, un tel atlas permet d'orienter de façon continue les espaces tangents. Réciproquement, une fois les espaces tangents orientés, l'atlas des cartes préservant l'orientation convient.

5.3 Orientabilité

Définition 53 Une variété est orientable si elle possède une orientation.

Exemple 54 La sphère est orientable.

En effet, on peut définir sa structure différentielle au moyen de 2 cartes seulement, donc un seul changement de cartes, qu'on peut supposer direct. Autre procédé : fixer une orientation sur \mathbb{R}^{n+1} , munir $T_vS^n = v^\perp$ de la classe des bases (v_1, \dots, v_n) telles que (v_1, \dots, v_n, v) est une base directe de \mathbb{R}^n .

Proposition 55 Soit G un groupe discret qui agit librement et proprement par difféomorphismes d'une variété V . Alors la variété quotient $X = G \backslash V$ est orientable si et seulement si V est orientable et G préserve l'orientation.

Preuve. Si X est orienté, on peut tirer en arrière l'orientation de X par le revêtement $p : V \rightarrow X$, en une orientation de V qui est préservée par les transformations de revêtements. Réciproquement, si G préserve l'orientation, celle-ci passe au quotient sans ambiguïté. ■

Corollaire 56 L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair.

Preuve. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = G \backslash S^n$ est engendré par l'antipodie $a : v \mapsto -v$. a préserve (resp. change) l'orientation de \mathbb{R}^{n+1} si et seulement si n est impair (resp. pair), et a préserve la normale sortante, donc a préserve (resp. change) l'orientation de S^n si et seulement si n est impair (resp. pair). ■

Proposition 57 Toute variété X possède un revêtement à deux feuillets $p : X^{or} \rightarrow X$, appelé revêtement d'orientation, qui a la propriété suivante : X^{or} est trivial si et seulement si X est orientable. De plus, X^{or} est une variété orientable, et X est le quotient de X^{or} par une action du groupe à deux éléments.

Preuve. Soit X^{or} l'ensemble des couples (x, o_x) où o_x est une orientation de T_xX . On note $p : X^{or} \rightarrow X$, $(x, o_x) \mapsto x$. Si $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte, et si \mathbb{R}^n est muni d'une orientation o , on définit une section $s_{U, \phi, o}$ de p au-dessus de U par $s_{U, \phi, o}(x) = (x, (d_x\phi)^{-1}(o))$. Les ensembles $s_{U, \phi, o}(U)$ forment la base d'une topologie sur X^{or} , qui rend p et les $s_{U, \phi, o}$ continues. Comme $p^{-1}(U) = s_{U, \phi, o}(U) \amalg s_{U, \phi, -o}(U)$, p est un revêtement. Comme il n'a que 2 feuillets, il est automatiquement galoisien.

Par définition, une orientation d'un ouvert V de X correspond à une section continue de p au-dessus de V . Par conséquent, X est orientable si et seulement si p possède une section globale. Pour un revêtement galoisien, cela équivaut à être trivial.

Sur l'image $s_{U, \phi, o}(U)$, $\phi \circ p$ est un homéomorphisme sur un ouvert de \mathbb{R}^n . On obtient ainsi une structure différentielle sur X^{or} qui fait de p un difféomorphisme local (cf. proposition 23). Cet atlas définit une orientation. En effet, étant données deux cartes $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi' : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ et des orientations o et o' sur \mathbb{R}^n telles que $s_{U, \phi, o}(U) \cap s_{U', \phi', o'}(U') \neq \emptyset$, nécessairement $(d_x\phi)^{-1}(o) = (d_x\phi')^{-1}(o')$ aux points de $U \cap U'$, donc le changement de cartes $\phi' \circ p \circ (\phi \circ p)^{-1} = \phi' \circ \phi^{-1}$ préserve l'orientation. Cela prouve que X^{or} est orientable. ■

Corollaire 58 *Toute variété simplement connexe est orientable.*

Exemples 59 1. Si $X = G \backslash E$ n'est pas orientable, et si E est orientable, alors $X^{or} = G^+ \backslash E$, où G^+ est le sous-groupe de G formé des difféomorphismes qui préservent l'orientation.

2. La bande de Möbius est le quotient d'une bande infinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1\}$ par le groupe engendré par le difféomorphisme $g : (x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. Elle n'est pas orientable. Son revêtement des orientations est difféomorphe à la bande ordinaire. Remarquer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ contient une bande de Möbius.

3. La bijection affine g ci-dessus normalise le groupe des translations entières (i.e. si $\tau \in \mathbb{Z}^2$ est une translation entière, alors $g \circ \tau \circ g^{-1}$ est encore une translation entière. Par conséquent, elle induit un difféomorphisme \bar{g} du tore $\mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$, qui engendre un groupe \bar{G} à 2 éléments. La bouteille de Klein est le quotient du tore par \bar{G} . Son revêtement des orientations est le tore.

6 Éléments de topologie différentielle

Désormais, on va donner quelques résultats de *topologie différentielle*, i.e. qui tournent autour du problème de classification des variétés. Les démonstrations ne seront pas toujours complètes.

6.1 Régularité

Du point de vue de la topologie différentielle, il n'y a aucune différence entre C^1 , C^r , $r \geq 2$, C^∞ (ou même C^ω , mais cela demande davantage de travail). On va montrer que toute structure différentielle de classe C^2 possède un atlas compatible de classe C^∞ .

Lemme 60 *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété compacte de classe C^r , $r \geq 2$. Alors il existe un voisinage U de X dans \mathbb{R}^n et une rétraction de classe $C^{r-1} : U \rightarrow X$.*

Remarque 61 *On appelle U un voisinage tubulaire de X dans \mathbb{R}^n .*

Preuve. Pour $x \in X$, on note $\pi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x X$ le projecteur orthogonal (il dépend C^{r-1} de x), $\nu_x = \ker \pi_x$ et $\nu X = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n \mid v \in \nu_x\}$.

Montrons que νX est une sous-variété de classe C^{r-1} . Pour x voisin de x_0 , la restriction de π_{x_0} à $T_x X$ est bijective. Autrement dit, $\ker(\pi_{x_0} \circ \pi_x) = \ker \pi_x = \nu_x$. Par conséquent, au voisinage de $\{x_0\} \times \nu_{x_0}$, νX est défini par l'équation $g(x, v) = 0$ où $g : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_{x_0} X$ est définie par $g(x, v) = \pi_{x_0} \circ \pi_x(v)$. g est une submersion en tout point de $\{x_0\} \times \nu_{x_0}$, donc νX est une sous-variété.

L'application $\phi : \nu X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, v) \mapsto x + v$ est une immersion en tout point de $X \times \{0\}$. Montrons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que ϕ est injective sur l'ouvert $V = \{(x, v) \in \nu X \mid |v| < \epsilon\}$. Sinon, il existe des suites $(x_j, v_j) \in \nu X$, avec $|v_j|$ et $|w_j|$ tendant vers 0, telles que $\phi(x_j, v_j) = \phi(y_j, w_j)$. Par compacité, on peut supposer que x_j tend vers x et y_j vers y . Nécessairement,

$$x = \phi(x, 0) = \lim \phi(x_j, v_j) = \lim \phi(y_j, w_j) = \phi(y, 0) = y.$$

Or, comme ϕ est une immersion en $(x, 0)$, il existe un voisinage de $(x, 0)$ sur lequel ϕ est injective, contradiction.

$U = \phi(V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n . L'application ϕ^{-1} composée avec la projection $X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$ est la rétraction cherchée. ■

Définition 62 *Soit X un espace topologique compact. Sur l'ensemble \mathcal{A}_r des atlas de classe C^r de X , on met la topologie dont une base de voisinages est obtenue comme suit. Soit $(\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n)$ un atlas. Soient $K_i \subset U_i$ des compacts. Soit $\epsilon > 0$. On considère les atlas $(\phi'_i : U'_i \rightarrow \mathbb{R}^n)$ tels que $K_i \subset U'_i$, et $|\phi'_i \circ \phi_i^{-1} - id|_{C^r(\phi_i(K_i))} < \epsilon$.*

Proposition 63 *Pour tout $r \geq 1$, \mathcal{A}_∞ est dense dans \mathcal{A}_r . De plus, deux atlas de \mathcal{A}_r suffisamment voisins définissent des structures différentielles difféomorphes sur X .*

Preuve. On peut lisser un C^1 -difféomorphisme par convolution. Sur l'intérieur d'un compact contenu dans le domaine, une application C^1 proche d'un difféomorphisme est à nouveau un difféomorphisme. Cela montre la densité.

Supposons $r \geq 2$. Soit (ϕ_i) un atlas. Le théorème de plongement de Whitney fournit un plongement $f_{(\phi_i)} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si (ψ_i) est un atlas suffisamment proche de (ϕ_i) , le plongement $f_{(\psi_i)}$ est C^0 -proche de $f_{(\phi_i)}$. En particulier, son image est contenue dans un voisinage tubulaire de $f_{(\phi_i)}$. En composant $f_{(\psi_i)}$ avec la rétraction, on obtient un difféomorphisme de $(X, (\psi_i))$ sur $(X, (\phi_i))$. Le cas $r = 1$ demande davantage de travail. ■

Remarque 64 *La proposition 63 montre que la classification des variétés compactes à difféomorphisme près doit s'exprimer au moyen d'invariants discrets, par exemple, à valeurs entières, et non continus.*

En fait, elle montre que l'ensemble des classes de difféomorphisme de variétés compactes est dénombrable.

6.2 Classification des variétés de dimension 1

Théorème 5 *Toute variété compacte connexe de dimension 1 est difféomorphe à \mathbb{R}/\mathbb{Z} .*

Preuve. On commence par supposer la variété de classe C^r avec $r \geq 2$.

1. Cas orientable. Soit $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ un atlas fini définissant une orientation de X . Notons ζ un champ de vecteurs constant sur \mathbb{R} . Soit (χ_i) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i) . Posons $\xi = \sum_i \chi_i (\phi_i^{-1})_* \zeta$. Alors ξ est un champ de vecteurs différentiable sur X , qui ne s'annule jamais. En effet, pour tous indices i et j , $(\phi_j \phi_i^{-1})_* \zeta = \lambda_{i,j} \zeta$ où la fonction $\lambda_{i,j}$ est strictement positive. Alors

$$(\phi_j)_* \xi = \left(\sum_i \chi_i \lambda_{i,j} \right) \zeta,$$

et $\sum_i \chi_i \lambda_{i,j} > 0$ partout. Pour $x \in X$, notons $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow X$ la ligne intégrale de condition initiale x . Alors le vecteur vitesse $\gamma'_x(t) = \xi(\gamma_x(t))$ ne s'annule pas, donc γ_x est une immersion, et son image, l'orbite de x , est un ouvert de X . Comme les orbites partitionnent X , et X est connexe, il y a une seule orbite, donc γ_x est surjective. Si γ_x était injective, alors γ_x serait un homéomorphisme, ce qui est impossible, car \mathbb{R} n'est pas compact. On conclut qu'il existe $s, s' \in \mathbb{R}$, $s \neq s'$, tels que $\gamma_x(s) = \gamma_x(s')$. Alors $t \mapsto \gamma_x(t+s)$ et $t \mapsto \gamma_x(t+s')$ sont des lignes intégrales de ξ de même condition initiale, donc $\gamma_x(t+s) = \gamma_x(t+s')$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, γ_x est $|s' - s|$ -périodique. Soit T la plus petite période de γ_x . Alors γ_x passe au quotient en un difféomorphisme $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow X$ préservant l'orientation.

2. Cas non orientable. Soit X^{or} le revêtement des orientations de X . Alors X^{or} est orientable, donc X^{or} est difféomorphe à \mathbb{R}/\mathbb{Z} , et $X = G \backslash X^{or}$ où G est un groupe à deux éléments engendré par un difféomorphisme a de X^{or} renversant l'orientation. Alors a se relève en un automorphisme \tilde{a} du revêtement universel $\tilde{X} = \widetilde{X^{or}} = \mathbb{R}$, qui reverse l'orientation. Autrement dit, \tilde{a} est une fonction dont la dérivée est partout strictement négative. Elle tend vers $\mp\infty$ en $\pm\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\tilde{a}(t) = t$ possède une solution, ce qui est impossible pour un automorphisme d'un revêtement. On conclut que X est forcément orientable.

3. Cas des variétés de classe C^1 . Il suffit de remarquer qu'intégrer un champ de vecteurs en dimension 1, ce n'est rien d'autre qu'intégrer une fonction, donc un champ de vecteurs de classe C^0 seulement possède des lignes intégrales. ■

Remarque 65 *Pour peu qu'on sache construire des partitions de l'unité, le même argument montre que toute variété séparée, paracompacte, non compacte, connexe de dimension 1 est difféomorphe à \mathbb{R} .*

7 Caractéristique d'Euler-Poincaré

7.1 Décompositions cellulaires convexes

Une *décomposition cellulaire convexe* d'un compact K du plan, c'est une collection finie segments de droites (appelés *arêtes*) contenus dans K telle que

1. deux arêtes distinctes sont disjointes ou partagent une extrémité ;
2. la frontière de K est une réunion d'arêtes ;
3. chaque composante connexe du complémentaire de la réunion des arêtes est convexe.

On appelle les adhérences de ces composantes les *faces* de la décomposition cellulaire. On appelle *sommets*) les extrémités des arêtes.

Exemples 66 1. Si K est un polygone convexe, il admet une décomposition cellulaire à une seule face, dont les arêtes sont les côtés de K .

2. Si K est une ligne polygonale sans auto-intersection, il admet une décomposition cellulaire naturelle.

Définition 67 Soit \mathcal{C} une décomposition cellulaire convexe d'un compact du plan. On note S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces. On appelle caractéristique d'Euler-Poincaré de \mathcal{C} le nombre $\chi(\mathcal{C}) = S - A + F$.

Exemples 68 1. Pour la décomposition cellulaire à 1 face d'un polygone convexe, $\chi = 1$.

2. Si K est une ligne polygonale ouverte (i.e. ses extrémités sont distinctes), alors $\chi = 1$. Si K est une ligne polygonale fermée, $\chi = 0$.

Proposition 69 Soit \mathcal{C} une décomposition cellulaire convexe d'un polygone convexe du plan. Alors $\chi(\mathcal{C}) = 1$.

Preuve. Si s est un sommet et f une face qui lui est adjacente (i.e. $s \in \bar{f}$), notons $int(s, f) \in]0, \pi]$ l'angle intérieur de f en s , et $ext(s, f) = \pi - int(s, f)$ l'angle extérieur de f en s .

Notons $ext(f)$ la somme des angles extérieurs de f en tous ses sommets. Alors $ext(f) = 2\pi$. En effet, lorsqu'on parcourt le bord de la face f , à chaque sommet s la direction suivie tourne de $ext(s, f)$, et lorsque le tour est fini, la direction a fait un tour complet.

Notons $int(s)$ la somme des angles intérieurs en s des faces de \mathcal{C} adjacentes à s . Alors $int(s) = 2\pi$ si s est à l'intérieur de K . Sinon, $int(s) = int(s, K)$ est l'angle intérieur de K en s . On note S_{int} le nombre de sommet intérieurs et $S_{\partial K}$ le nombre de sommets du bord, de sorte que $S = S_{int} + S_{\partial K}$.

On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} ext(s, f) &= \sum_f \sum_{s \text{ sommet de } f} ext(s, f) \\ &= \sum_f ext(f) \\ &= 2\pi F. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} int(s, f) &= \sum_s \sum_{f \text{ adjacente à } s} int(s, f) \\ &= \sum_s int(s) \\ &= 2\pi S_{int} + \sum_{s \in \partial K} int(s, K) \\ &= 2\pi S_{int} + \sum_{s \in \partial K} (\pi - ext(s, K)) \\ &= 2\pi S_{int} + \pi S_{\partial K} - 2\pi. \end{aligned}$$

Si a est une arête orientée de \mathcal{C} , qui n'est pas contenue dans le bord de K , il lui correspond un couple (s, f) tels que s est un sommet de f : s est l'origine de a et f la face dont un côté est a , située à gauche de a . Si a est une arête de ∂K , il y a exactement une des deux orientations pour laquelle la face située à gauche existe. Réciproquement, étant donné un couple (s, f) tels que s est un sommet de f , il lui correspond une arête orientée, celle telle que, lorsqu'on la parcourt, on a la face f à sa gauche. Par conséquent, le nombre de couples (s, f) tels que s est un sommet de f est égal au nombre d'arêtes intérieures orientées plus le nombre d'arêtes du bord, sans orientation. Si on note A_{int} le nombre d'arêtes intérieures et $A_{\partial K}$ le nombre d'arêtes du bord, de sorte que $A = A_{int} + A_{\partial K}$, il vient

$$\sum_{(s,f)} 1 = 2A_{int} + A_{\partial K}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} int(s, f) + \sum_{(s,f)} ext(s, f) &= \sum_{(s,f)} \pi \\ &= \pi(2A_{int} + A_{\partial K}), \end{aligned}$$

d'où

$$2\pi F + 2\pi S_{int} + \pi S_{\partial K} - 2\pi = 2\pi A_{int} + \pi A_{\partial K},$$

ce qui peut s'écrire

$$S_{int} - A_{int} + F = 1 - \frac{1}{2}(S_{\partial K} - A_{\partial K}),$$

ou

$$\chi(\mathcal{C}) = 1 + \frac{1}{2}\chi(\partial K).$$

Comme le bord de K est une ligne polygonale fermée, $\chi(\partial K) = 0$, donc $\chi(\mathcal{C}) = 1$. ■

7.2 Invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré

Lemme 70 Si $K = K_1 \cup K_2$ et \mathcal{C} est une décomposition cellulaire convexe de K qui induit des décompositions cellulaires $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_0 sur K_1, K_2 et $K_0 = K_1 \cap K_2$, alors

$$\chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{C}_1) + \chi(\mathcal{C}_2) - \chi(\mathcal{C}_0).$$

Preuve. Chaque sommet (resp. arête, resp. face) de \mathcal{C}_0 est aussi un sommet (resp. arête, resp. face) de \mathcal{C}_1 et de \mathcal{C}_2 simultanément, donc $S = S_1 + S_2 - S_0$, $A = A_1 + A_2 - A_0$, $F = F_1 + F_2 - F_0$. ■

Proposition 71 Soit K un polygone du plan. Deux décompositions cellulaires convexes de K donnent la même caractéristique d'Euler-Poincaré.

Preuve. Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux décompositions cellulaires convexes de K .

1. Réduction au cas où \mathcal{C}' est plus fine que \mathcal{C} .

Comme l'intersection de deux polygones convexes est un polygone convexe, il y a une décomposition cellulaire convexe de K dont les faces sont les intersections de faces de \mathcal{C}' et de faces de \mathcal{C} . Il suffit de montrer que cette décomposition, raffinement de \mathcal{C}' et de \mathcal{C} , a même caractéristique d'Euler-Poincaré que \mathcal{C} .

2. Cas où \mathcal{C} n'a aucune face.

Dans ce cas, \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont deux graphes homéomorphes. Il ont donc les mêmes composantes connexes, qui ont mêmes connectivités $A - S + 1$ (voir cours sur le groupe fondamental), donc même

caractéristique d'Euler-Poincaré. On peut aussi remarquer que subdiviser les arêtes ne change pas $S - A$.

3. Récurrence sur le nombre de faces de \mathcal{C} .

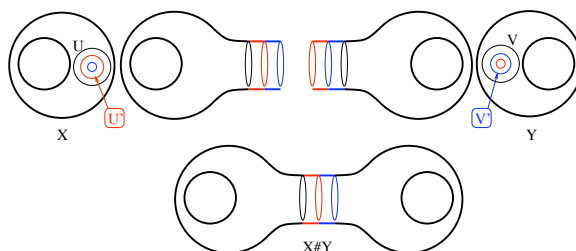
On retire l'intérieur de toutes ses faces à \mathcal{C} , on obtient un graphe K_0 muni de deux décompositions \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}'_0 . Puis on ajoute l'intérieur d'une face de \mathcal{C} , cela donne un polygone K_1 muni de deux décompositions \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}'_1 plus fine, etc... Supposons que $\chi(\mathcal{C}_k) = \chi(\mathcal{C}'_k)$. Par définition, $\chi(\mathcal{C}_{k+1}) = \chi(\mathcal{C}_k) + 1$. Remarque que $K_{k+1} = K_k \cup f$ où f est une seule face de \mathcal{C} , mais est décomposée en plusieurs faces au sens de \mathcal{C}' . D'après le lemme 70, $\chi(\mathcal{C}'_{k+1}) = \chi(\mathcal{C}'_k) + \chi(f) - \chi(K_k \cap f) = \chi(\mathcal{C}'_k) + 1$, car $K_k \cap f$ est une ligne polygonale fermée sans point double. Cela montre que $\chi(\mathcal{C}'_{k+1}) = \chi(\mathcal{C}_{k+1})$, et donc que $\chi(\mathcal{C}') = \chi(\mathcal{C})$, par récurrence sur k . ■

8 Variétés compactes de dimension 2

On commence par construire des exemples.

8.1 Somme connexe

Soient X et Y deux variétés de même dimension n . Notons B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2 dans \mathbb{R}^n , B' la boule unité ouverte. Soient U un ouvert de X , V un ouvert de Y , ϕ un difféomorphisme de U sur B et ψ un difféomorphisme de V sur B . On note $U' = \phi^{-1}(B')$ et $V' = \psi^{-1}(B')$. On considère l'espace topologique $X \# Y$ obtenu recollant $X \setminus U'$ et $Y \setminus V'$ le long de leur bord, au moyen de l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \phi|_{\partial U'}$. Noter que $X \# Y$ dépend des choix de ϕ et ψ .



On munit $X \# Y$ d'une structure différentielle comme suit. L'atlas contient toutes les cartes de X et de Y dont le domaine ne rencontre pas U' ou V' . Il contient aussi une carte Φ dont le domaine est $(U \setminus U') \cup (V \setminus V')$ (vu comme un ouvert de $X \# Y$), et définie par

$$\begin{cases} \Phi(x) = \phi(x) & \text{si } x \in U \setminus U', \\ \Phi(y) = \frac{\psi(y)}{|\psi(y)|^2} & \text{si } y \in V \setminus V'. \end{cases}$$

Définition 72 On appelle somme connexe de X et Y suivant ϕ et ψ la variété ainsi obtenue.

Exemple 73 Si $Y = S^n$ est la sphère de dimension n , et $\psi : V \rightarrow B$ est donné par la projection stéréographique, alors $X \#_{\psi} Y$ est difféomorphe à X .

En effet, l'inversion $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ se prolonge en un difféomorphisme global i de S^n . On définit un difféomorphisme Ψ de $X \# S^n$ sur X en posant,

$$\begin{cases} \Psi(x) = x & \text{si } x \in X \setminus U', \\ \Psi(y) = \phi^{-1} \circ i(y) & \text{si } y \in S^n \setminus V'. \end{cases} \blacksquare$$

Remarque 74 Si $n \geq 3$, $\pi_1(X \# Y) = \pi_1(X) \star \pi_1(Y)$ est un produit libre. Si $n = 2$, $\pi_1(X \# Y) = \pi_1(X \setminus U') \star_{\mathbb{Z}} \pi_1(Y \setminus V')$ est une somme amalgamée au-dessus de \mathbb{Z} .

Cela permet de voir qu'en général $X \# Y$ n'est difféomorphe ni à X ni à Y .

8.2 Dépendance par rapport aux choix

Proposition 75 Soient X et Y des variétés connexes. A difféomorphisme près, la variété $X\#Y$ ne dépend que de l'orientation de ϕ et de ψ . Précisément,

1. si X ou Y n'est pas orientable, $X\#Y$ est indépendante des choix;
2. si X (ou Y) est orientable et admet un difféomorphisme renversant l'orientation, $X\#Y$ est indépendante des choix;
3. si X et Y sont orientables, on peut obtenir au plus deux variétés $X\#Y$, suivant que $\psi^{-1} \circ \phi$ préserve ou non l'orientation.

Preuve. Soient U_1 et U_2 deux ouverts contenant un point x de X , soient $\phi_1 : U_1 \rightarrow B$ et $\phi_2 : U_2 \rightarrow B$ deux difféomorphismes sur la boule B de rayon 2, envoyant x en 0, et ayant même différentielle en x . Posons $U_{i,\epsilon} = \phi_i^{-1}(B(0, 2\epsilon))$, $\phi_{i,\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}(\phi_i)|_{U_{i,\epsilon}} : U_{i,\epsilon} \rightarrow B$. D'après le lemme 63, la structure différentielle sur $X\#\phi_{i,\epsilon}Y$ ne dépend pas de ϵ . Lorsque ϵ tend vers 0, $\phi_{1,\epsilon}^{-1} \circ \phi_{2,\epsilon}$ converge vers l'identité, donc pour ϵ assez petit, $X\#\phi_{1,\epsilon}Y$ et $X\#\phi_{2,\epsilon}Y$ sont difféomorphes. On conclut que ϕ_1 et ϕ_2 définissent la même somme connexe. Celle-ci ne dépend donc que de la donnée de points $x \in X$ et $y \in Y$, ainsi que d'isomorphismes linéaires de \mathbb{R}^n sur T_xX et T_yY respectivement. Comme X et Y sont connexes par arcs, le choix des points est sans importance. De même, seule compte la composante connexe de $Isom(T_xX, \mathbb{R}^n)$ à laquelle $d_x\phi$ appartient, i.e. le fait que ϕ préserve ou non l'orientation.

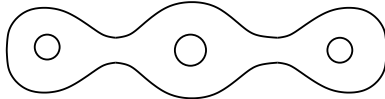
Si X n'est pas orientable, il existe un lacet dans X basé en x dont le relèvement dans le revêtement des orientations X^{or} n'est pas un lacet. On peut donc déformer continûment ϕ en un difféomorphisme ϕ' d'un voisinage de x sur la boule B tel que $\phi^{-1} \circ \phi'$ renverse l'orientation. Cela signifie que $X\#\phi Y = X\#\phi' Y$ ne dépend pas de la composante connexe de $Isom(T_xX, \mathbb{R}^n)$ à laquelle $d_x\phi$ appartient.

Si X possède un difféomorphisme global Φ qui renverse l'orientation, celui-ci induit un difféomorphisme de $X\#\phi Y$ sur $X\#\Phi \circ \phi Y$, et de nouveau $X\#\phi Y$ ne dépend pas de la composante connexe de $Isom(T_xX, \mathbb{R}^n)$ à laquelle $d_x\phi$ appartient. ■

Terminologie. Dans la suite, lorsque X et Y sont orientables, on notera $X\#Y$ celle des sommes connexes qui est orientable (obtenue à l'aide d'une carte orientée de X et d'une carte de Y renversant l'orientation).

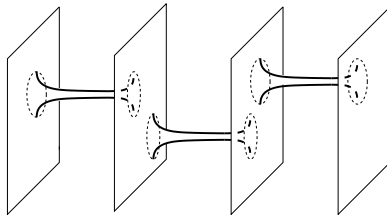
8.3 Exemples de variétés de dimension 2

Définition 76 Soit $g \in \mathbb{N}$ un entier. On appelle surface orientable de genre g , et on note Σ_g , la variété obtenue à partir de la sphère en effectuant g sommes connexes avec un tore.



Surface orientable de genre 3

Définition 77 Soit $g \in \mathbb{N}$ un entier. On appelle surface non orientable de genre g , et on note U_g , la variété obtenue à partir du plan projectif en effectuant g sommes connexes avec un plan projectif.



La surface non orientable de genre 3

8.4 Décompositions cellulaires lisses

Voici une généralisation, invariante par difféomorphisme, de la notion de décomposition en cellulaire convexe.

Définition 78 Soit X une variété de dimension 2, et $K \subset X$ un compact. Une décomposition cellulaire lisse de K , c'est la donnée d'une famille finie d'arcs de classe C^1 plongés dans K appelés arêtes tels que

- deux arêtes sont disjointes ou partagent une extrémité;
- pour chaque composante connexe D du complémentaire dans K de la réunion des arêtes, il existe un voisinage de l'adhérence de D qui est l'image par un difféomorphisme Φ d'un ouvert U du plan, tel que $\Phi^{-1}(D)$ soit un polygone convexe.

Dans ce cas, on appelle *sommets* de la décomposition les extrémités des arêtes et *faces* de la décomposition les composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes. Si toutes les faces sont des triangles, on parle de *triangulation lisse*. De nouveau, on appelle $\chi(\mathcal{C}) = S - A + F$ la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la décomposition cellulaire.

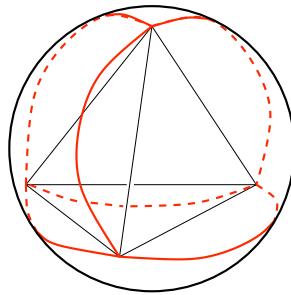
Le lemme 70 s'étend aux décompositions cellulaires lisses, avec la même preuve.

Lemme 79 Si $K = K_1 \cup K_2$ et \mathcal{C} est une décomposition cellulaire lisse de K qui induit des décompositions cellulaires $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_0 sur K_1, K_2 et $K_0 = K_1 \cap K_2$, alors

$$\chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{C}_1) + \chi(\mathcal{C}_2) - \chi(\mathcal{C}_0).$$

8.5 Exemples de décompositions cellulaires lisses

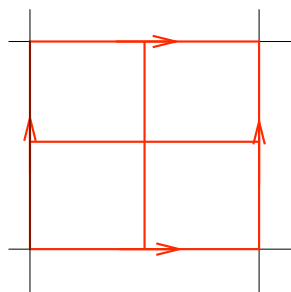
Exemple 80 La sphère S^2 possède une décomposition cellulaire lisse, obtenue en projetant radialement un tétraèdre régulier.



Il y a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 2.

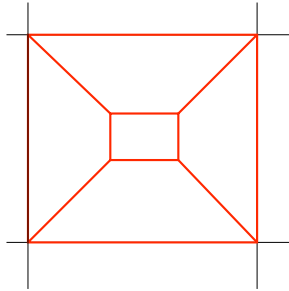
En particulier, le disque possède une décomposition lisse avec 4 sommets, 6 arêtes et 3 faces, donc sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 1.

Exemple 81 Le tore T^2 possède une décomposition cellulaire lisse.



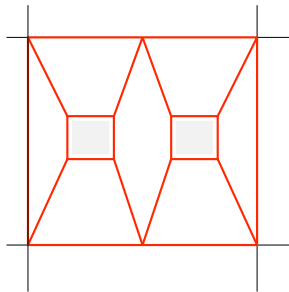
Il y a 2 sommets, 6 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0.

Exemple 82 *Le tore troué $T^2 \setminus D$ possède une décomposition cellulaire lisse.*



Il y a 5 sommets, 10 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -1 .

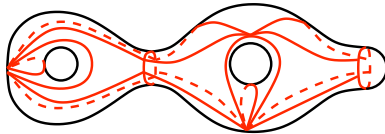
Exemple 83 *Le tore troué deux fois $T^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ possède une décomposition cellulaire lisse.*



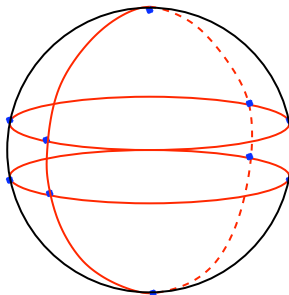
Il y a 10 sommets, 19 arêtes et 7 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -2 .

Exemple 84 *La surface orientable Σ_g de genre g possède une décomposition cellulaire, compatible avec une décomposition en un tore troué, $g - 1$ tores troués deux fois et un disque.*

La caractéristique d'Euler-Poincaré de cette décomposition vaut $2 - 2g$.



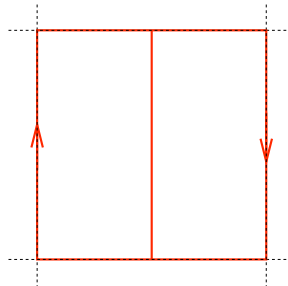
Exemple 85 *La sphère S^2 possède une décomposition cellulaire lisse, invariante par l'antipodie. En quotientant par l'antipodie, on obtient une décomposition cellulaire lisse du plan projectif.*



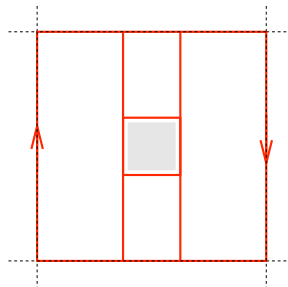
Pour le plan projectif, il y a 5 sommets, 10 arêtes et 6 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 1.

En particulier, le plan projectif privé d'un disque (aussi appelé *bande de Möbius*) possède une décomposition cellulaire lisse avec 4 sommets, 6 arêtes et 2 faces, donc sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0.

On peut aussi voir la *bande de Möbius* comme le quotient de la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ par le groupe engendré par $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. La décomposition cellulaire apparaît comme suit.

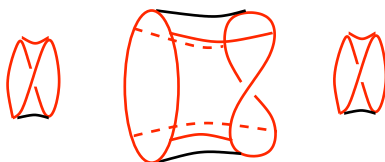


Exemple 86 La bande de Möbius trouée admet une décomposition cellulaire lisse.



Il y a 10 sommets, 15 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -1 .

Exemple 87 La surface non orientable U_g possède une décomposition cellulaire lisse compatible avec la décomposition en une bande de Möbius, $g - 1$ bandes de Möbius trouées, et une bande de Möbius. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré égale à $1 - g$.



8.6 Décompositions, revêtements et sommes connexes

Proposition 88 Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Soit \mathcal{C} une décomposition cellulaire lisse de X . Il existe une unique décomposition cellulaire lisse $\tilde{\mathcal{C}}$ de E dont chaque face est envoyée bijectivement sur une face de X . Si le revêtement a d feuillets, alors $\chi(\tilde{\mathcal{C}}) = d\chi(\mathcal{C})$.

Preuve. Comme chaque face f est simplement connexe, le revêtement $p|_{p^{-1}(f)} : p^{-1}(f) \rightarrow f$ est trivial, i.e. $p^{-1}(f) = \coprod_j s_j(f)$ où les s_j sont des sections de p au-dessus de f . La collection des $s_j(f)$ forme la décomposition $\tilde{\mathcal{C}}$.

Chaque sommet, arête, face de \mathcal{C} donne naissance à d sommets, arêtes, faces distincts de $\tilde{\mathcal{C}}$, donc $\tilde{S} = dS$, $\tilde{A} = dA$, $\tilde{F} = dF$. ■

Proposition 89 Soient X et Y deux variétés compactes de dimension 2. Alors

$$\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

Preuve. D'après la règle d'addition, $\chi(X) = \chi(X \setminus U) + \chi(U) - \chi(\partial U) = \chi(X \setminus U) + 1$. De plus

$$\chi(X \# Y) = \chi(X \setminus U) + \chi(Y \setminus V) - \chi(\partial U) = \chi(X) + \chi(Y) - 2. \blacksquare$$

8.7 Classification des variétés compactes de dimension 2

On admettra les trois théorèmes suivants.

Théorème 6 *Toute variété de dimension 2 compacte admet une triangulation lisse.*

Théorème 7 *Soit X une variété de dimension 2 compacte. Les décompositions cellulaires lisses de X ont toutes même caractéristique d'Euler-Poincaré, notée $\chi(X)$.*

Exercice 90 *A l'aide de ce théorème, et des propositions 88 et 89, retrouver de façon plus directe les résultats numériques du paragraphe précédent.*

Théorème 8 *Les variétés compactes connexes orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier pair ≤ 2 . Les variétés compactes connexes sans bord non orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier ≤ 1 .*

Autrement dit, toute variété compacte connexe orientable de dimension 2 est diffeomorphe à une et une seule des surfaces Σ_g , où, par convention, Σ_0 est la sphère. Toute variété compacte connexe orientable de dimension 2 est diffeomorphe à une et une seule des surfaces U_g , $g \geq 0$, où, par convention, U_0 est le plan projectif.

Exercice 91 *Déduire de la classification que toute surface orientable possède un difféomorphisme renversant l'orientation et sans points fixes.*

9 1-formes différentielles

9.1 Rappels

Définition 92 *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une 1-forme différentielle sur U est une application qui à chaque $x \in U$ associe une forme linéaire $\omega(x)$ sur \mathbb{R}^n . Si la matrice de $\omega(x)$ est $(a_1(x) \cdots a_n(x))$, on note $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$. Si les fonctions a_i , au lieu d'être à valeurs réelles, sont à valeurs complexes, on parle de 1-forme différentielle complexe sur U .*

Exemple 93 *Si u est une fonction différentiable sur U , sa différentielle $du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$ est une 1-forme différentielle sur U (réelle ou complexe suivant que u est à valeurs réelles ou complexes).*

Définition 94 *Soit V un ouvert de \mathbb{R}^q . Soit $f : V \rightarrow U$ une application différentiable, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Alors f tire en arrière les formes différentielles de U vers V ,*

$$f^*\omega(y) = \omega(f(y)) \circ d_y f = \sum_{i=1}^n a_i \circ f df_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i \circ f \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dy_j.$$

Proposition 95 *Si u est une fonction sur U , on note $f^*u = u \circ f$. Alors*

1. $d(f^*u) = f^*du$,
2. $f^*u\omega = f^*u f^*\omega$.

Cela rend le calcul de $f^*\omega$ entièrement mécanique.

Exemple 96 *Soit $\omega = x dy - y dx$ sur \mathbb{R}^2 . Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées polaires, $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Alors $f^*\omega = r^2 d\theta$.*

En effet, $f^*x = r \cos \theta$, $f^*dx = d(f^*x) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$, $f^*y = r \sin \theta$, $f^*dy = d(f^*y) = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$, d'où

$$\begin{aligned} f^*\omega &= r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ &= r^2 d\theta. \blacksquare \end{aligned}$$

Dans \mathbb{C}^n , il y a des notations commodes.

Notation. Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n . On note z_j les coordonnées complexes sur U , $x_j = \Re(z_j)$ et $y_j = \Im(z_j)$. On note $dz_j = dx_j + idy_j$ et $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$. Toute 1-forme différentielle à valeurs complexes s'écrit donc uniquement $\sum_{j=1}^n a_j dz_j + a_{\bar{j}} d\bar{z}_j$.

Définition 97 Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n . Une 1-forme différentielle complexe sur U est dite holomorphe si elle s'écrit $\sum_{j=1}^n a_j dz_j$, où les fonctions a_j sont holomorphes.

Exemple 98 Si f est une fonction holomorphe sur U , alors $df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$ est une 1-forme holomorphe.

Remarque 99 Si $f : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, est une application holomorphe, et ω une 1-forme holomorphe, alors

$$f^*\omega = \sum_{i=1}^n a_i \circ f df_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i \circ f \frac{\partial f_i}{\partial z_j} dz_j$$

est une 1-forme holomorphe.

Définition 100 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit qu'une 1-forme différentielle ω sur U est exacte s'il existe une fonction u sur X telle que $f = du$. Une condition nécessaire est que ω soit fermée, i.e. que $d\omega = 0$, où, si $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$,

$$d\omega = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i.$$

Ces deux notions sont préservées lorsqu'on tire les formes en arrière.

Définition 101 1. Soit $\omega = a(t)dt$ une 1-forme différentielle sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . L'intégrale de ω sur $[a, b]$ est

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b a(t) dt.$$

2. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une courbe différentiable. L'intégrale de ω sur γ est par définition

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \gamma^* \omega.$$

Définition 102 Comme on sait transporter les 1-formes différentielles par les difféomorphismes, on peut parler de 1-formes différentielles sur les variétés, de formes exactes, fermées, d'intégrales curvilignes. Dans le cas des variété complexes, on peut même parler de 1-formes holomorphes.

9.2 Motivation

Comment calculer une primitive de la fonction $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$? Il s'agit d'intégrer la 1-forme différentielle dx/y le long d'arcs de la courbe d'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$. Cette courbe C est une conique affine non dégénérée. On utilise un paramétrage unicursal de cette conique. C'est une application $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow C$ dont les composantes sont des fonctions rationnelles, donc $f^* \frac{dx}{y} = R(t) dt$ où R est une fraction rationnelle. Par conséquent, la primitive se calcule (décomposition en éléments simples). Le résultat s'exprime rationnellement en fonction de t et de $\log(t)$ si les pôles de R sont réels (sinon il faut ajouter $\arctan(t)$), donc c'est une expression rationnelle en x et en log d'une fraction rationnelle en x et en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Exemple 103 *Intégration de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Dans ce cas, C est le cercle unité. Le paramétrage unicursal d'origine $A = (-1, 0)$ est $f : t \mapsto (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$. Inversement, comme t est la pente de la droite passant par A et (x, y) , $t = \frac{y}{x+1}$. Alors

$$f^* \frac{dx}{y} = \frac{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2}{1+t^2} dt = d(2 \arctan(t)) = d(2 \arctan(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1})).$$

Remarque 104 *La méthode s'étend à toute fonction rationnelle en x et en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.*

Comment intégrer $\frac{1}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}}$?

La courbe T d'équation $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'est pas une conique. On va voir qu'elle ne possède pas de paramétrage rationnel par la droite projective. Si c'était le cas, l'ensemble des solutions complexes de l'équation (une courbe algébrique complexe) serait paramétrable par la droite projective complexe. Or on va voir que T est difféomorphe à un tore.

9.3 Courbes algébriques planes projectives

Comme pour les coniques, les courbes algébriques affines sont les points à distance finie de courbes algébriques projectives.

Définition 105 *Une courbe algébrique plane projective est $\mathcal{T} = \mathbb{P}(Z)$ où Z est le lieu des zéros d'un polynôme homogène en 3 variables.*

La complétion projective d'une courbe algébrique affine s'obtient en rendant homogène l'équation. Pour la courbe affine T d'équation affine $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, l'équation homogène est $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - y^2z = 0$. Les points à l'infini de T sont les points de coordonnées homogènes $[x : y : 0]$ tels que $ax^3 = 0$, il y a donc un seul point, $i = [0 : 1 : 0]$, le point de fuite de l'axe des y .

Exercice 106 *Si le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'a que des racines simples, la cubique projective \mathcal{T} d'équation $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - y^2z = 0$ est une sous-variété complexe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.*

Solution. Dans la carte affine ϕ_3 , il s'agit d'étudier l'équation affine, dont la différentielle est $(3ax^2 + 2bx + c) dx - 2y dy$. Celle-ci s'annule aux zéros communs du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ et de sa dérivée, i.e. aux racines multiples de ce polynôme.

Pour étudier l'unique point à l'infini $i = [0 : 1 : 0]$ de \mathcal{T} , on utilise la carte affine ϕ_2 . Dans cette carte, l'équation affine de $\phi_2(\mathcal{T})$ devient $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - z = 0$, dont la différentielle est $(3ax^2 + 2bxz + cz^2) dx + (bx^2 + 2cxz + 3dz^2 - 1) dz$. Au point $\phi_2([0 : 1 : 0]) = (0, 0)$, la différentielle est $-dz$, elle est non nulle. On conclut que \mathcal{T} est une sous-variété complexe. ■

Convention. On suppose désormais que le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ n'a que des racines simples.

9.4 Revêtement ramifié

On va calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré de \mathcal{T} . Si \mathcal{T} était un revêtement de degré d de la droite projective, on pourrait utiliser la formule $\chi(\mathcal{T}) = d\chi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Un tel revêtement n'existe pas. A la place, on utilise la projection de centre $i = [0 : 1 : 0]$, de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sur la droite projective \mathcal{D} d'équation $y = 0$, dont on note ∞ le point de fuite. En coordonnées homogènes, elle s'écrit $[x : y : z] \mapsto [x : 0 : z]$ (sa restriction au plan affine est simplement la projection sur l'axe des x , $(x, y) \mapsto x$). Cette application est un revêtement sauf en quelques points, dits *de ramification*, qui nécessiteront un traitement spécial.

Exercice 107 *La restriction à $\mathcal{T} \setminus \{i\}$ de la projection de centre i sur \mathcal{D} se prolonge en une application holomorphe $p : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$. C'est une submersion au-dessus de \mathcal{D} privée de ses 3 points d'intersection r, r', r'' avec \mathcal{T} et du point de fuite. La restriction de p à $\mathcal{T} \setminus \{r, r', r'', i\}$ est un revêtement à 2 feuillets.*

Solution. Au voisinage de i , on peut paramétrer \mathcal{T} par $x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$, où ζ est holomorphe au voisinage de 0, $\zeta(0) = 0$, d'où $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n = x\eta(x)$ où η est holomorphe au voisinage de 0. On utilise la carte $\phi_2 : [x : y : z] \mapsto (x/y, z/y)$. Au voisinage de ∞ dans \mathcal{D} , on utilise la carte $\psi_2 : [x : z] \mapsto z/x$. Dans ces cartes, la projection centrale s'écrit $(x, z) \mapsto [x : 1 : z] \mapsto [x : 0 : z] \mapsto z/x$, donc la restriction de cette projection à la courbe, dans le paramétrage choisi, s'écrit $x \mapsto \zeta(x)/x = \eta(x)$, qui est holomorphe. De l'équation $\zeta = ax^3 + bx^2\zeta + cx\zeta^2 + d\zeta^3$, on tire $x\eta = ax^3 + bx^3\eta + cx^3\eta^2 + dx^3\eta^3$, puis $\eta = x^2(a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3)$, qui montre que $\eta'(0) = 0$, i.e. p n'est pas une submersion en i .

Si $q = (x, y) \in T$ est à distance finie, p n'est pas une submersion en q lorsque la tangente à T en q est verticale, i.e. quand la différentielle de l'équation affine de T est proportionnelle à dx . Cela se produit lorsque $y = 0$, i.e. aux trois points r, r' et r'' de T dont les abscisses sont les racines du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Soit $q = (x, y) \in T$ un point où p est une submersion. Alors il existe des voisinages U de q dans T et V de $x = p(q)$ dans \mathcal{D} tels que $p|_U : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme, d'application réciproque s . Alors $p^{-1}(V) = s(V) \cup \sigma \circ s(V)$, où $\sigma(x, y) = (x, -y)$. Ceci montre que p est un revêtement en dehors des quatre points r, r', r'' et ∞ . ■

Lemme 108 *Il existe des voisinages disjoints V_1, \dots, V_4 des quatre points r, r', r'' et ∞ de \mathcal{D} et des cartes $\phi_i : p^{-1}(V_i) \rightarrow \mathbb{C}$ et $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout $q \in p^{-1}(V_i)$, $\psi_i \circ p(q) = \phi_i(q)^2$. Autrement dit, à changement de coordonnées holomorphe près, p se confond avec l'application $z \mapsto z^2$ au voisinage des points de ramification.*

Preuve. Au voisinage du point i , on utilise le paramétrage $x \mapsto (x, x\eta(x))$. On peut écrire $p = \eta(x) = \phi(x)^2$ où $\phi = \sqrt{a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3}$ est holomorphe au voisinage de 0, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \neq 0$, donc ϕ est une carte.

Au voisinage de $(r, 0)$, on peut paramétrer T par $y \mapsto (r + \xi(y), y)$, où ξ est holomorphe au voisinage de 0 et satisfait $\xi(0) = 0$. De l'équation $y^2 = a(r + \xi)^3 + b(r + \xi)^2 + c(r + \xi) + d$, on tire $y^2 = a(3r^2\xi + 3r\xi^2 + \xi^3) + b(2r\xi + \xi^2) + c\xi$, soit $(3ar^2 + 2br + c)\xi = y^2 - 3ar\xi^2 - a\xi^3 - b\xi^2$. Cela montre que $\xi'(0) = 0$, donc on peut écrire $\xi(y) = y^2\chi(y)$, où χ est holomorphe au voisinage de 0. Alors $\chi(y) = \frac{1}{3ar^2 + 2br + c}(1 - (3ar + b)y^2\chi(y)^2 - ay^4\chi(y)^3)$, donc $p(x, y) = x = \xi(y)$ peut s'écrire $\phi(y)^2$ où ϕ est holomorphe au voisinage de 0, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \neq 0$. Il en est de même au voisinage de r' et r'' . ■

9.5 Calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré

Soit C une décomposition cellulaire lisse de \mathcal{D} telle que

- les points r, r', r'' et ∞ sont des sommets de C ;
- toutes les faces de C contenant l'un de ces points sont contenues dans la réunion des ouverts V_i .

Chaque élément (sommet, arête, face) de C qui ne contient pas les points de ramification se relève en 2 éléments analogues, disjoints, dans \mathcal{T} . En contemplant le comportement de l'application $z \mapsto z^2$, on voit que chaque arête ou face contenant un point de ramification se relève en 2 éléments qui se touchent en un sommet. Les points de ramification eux-mêmes se relèvent en un seul sommet. On obtient une décomposition cellulaire lisse \hat{C} de \mathcal{T} , telle que

$$\hat{S} = 2S - 4, \quad \hat{A} = 2A, \quad \hat{F} = 2F,$$

donc $\chi(\mathcal{T}) = 2\chi(\mathcal{D}) - 4 = 4 - 4 = 0$, ce qui prouve que \mathcal{T} est un tore.

9.6 Différentiabilité de dx/y

Exercice 109 Vérifier que la 1-forme différentielle $\frac{dx}{y}$ se prolonge en une 1-forme différentielle holomorphe sur \mathcal{T} .

Solution. Au voisinage de r , on utilise le paramétrage $f : y \mapsto [r + \xi(y) : y : 1]$, où $\xi(y) = y^2\chi(y)$. Alors $f^*\frac{dx}{y} = \frac{\xi'(y)}{y} dy = (2\chi + y\chi'(y)) dy$ est holomorphe au voisinage de 0, ce qui prouve que $\frac{dx}{y}$ est holomorphe au voisinage de r . C'est pareil en r' ou r'' .

Au voisinage de i , on utilise le paramétrage $g : x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$, où $\zeta(x) = x\eta(x)$. Alors $g^*\frac{dx}{y} = dx$ est holomorphe au voisinage de 0, ce qui prouve que $\frac{dx}{y}$ est holomorphe au voisinage de i . ■

9.7 1-formes fermées et primitives

Que signifie calculer une primitive d'une 1-forme différentielle comme dx/y sur un tore ?

Remarque 110 Il n'existe pas de fonction f sur \mathcal{T} telle que $df = dx/y$.

En effet, comme df est holomorphe, f est une fonction holomorphe. Comme \mathcal{T} est compacte, $|f|$ atteint son maximum en un point q . En composant avec une carte au voisinage de q , on trouve une fonction holomorphe définie au voisinage de 0 dans \mathbb{C} , telle que $|f|$ est maximum en 0. Nécessairement, f est constante, $df = 0$, contradiction. ■

Pourtant, dx/y admet des primitives localement. Par exemple, au voisinage de i , la carte g^{-1} , réciproque du paramétrage $g : x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$, satisfait $d(g^{-1}) = \frac{dx}{y}$. L'obstacle pour étendre une primitive locale en une primitive globale est lié au groupe fondamental.

Proposition 111 Soit X une variété connexe. Soit ω une 1-forme différentielle fermée sur X , réelle ou complexe. Il existe un plus petit revêtement connexe $p : X^\omega \rightarrow X$ tel que $p^*\omega$ soit exacte. Ce revêtement est galoisien. Son groupe d'automorphismes est commutatif et libre. Si X est compacte, il est isomorphe à \mathbb{Z}^N , pour un $N \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soit $x_0 \in X$ un point base. On considère l'ensemble des chemins différentiables d'origine x_0 . On note $f(\gamma) = \int_\gamma \omega := \int_0^1 \gamma^*\omega$. On introduit la relation d'équivalence qui identifie deux chemins γ et γ' s'ils ont même extrémité et si de plus $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$. Comme lors de la construction du revêtement universel, on vérifie que l'espace quotient X^ω est une variété, et que la projection $p : X^\omega \rightarrow X$ qui à une classe de chemins associe leur extrémité commune est un revêtement. La fonction f passe au quotient en une fonction différentiable sur X^ω , et, par construction, $df = p^*\omega$. Le point essentiel est que deux lacets différentiables de mêmes extrémités et homotopes sont équivalents.

Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie de γ à γ' . Comme ω est fermée, elle admet des primitives locales. Recouvrons $F([0, 1] \times [0, 1])$ par un nombre fini d'ouverts connexes U_i telle que $\alpha|_{U_i} = df_i$. Soit $\delta > 0$ un nombre de Lebesgue du recouvrement $F^{-1}(U_i)$ (i.e. tout sous-carré de côté δ est entièrement contenu dans l'un des $F^{-1}(U_i)$). Découpons $[0, 1] \times [0, 1]$ en N^2 sous-carrés égaux, de côté $\leq \delta/2$. Soit α un chemin dans cette grille, passant successivement par

les intersections z_0, \dots, z_k . Pour chaque $j = 1, \dots, k$, choisissons un indice i_j tel que les carrés contenant le côté $[z_{k-1}, z_k]$ soient contenus dans $F^{-1}(U_{i_j})$. Baptisons “intégrale” de ω sur α la somme $\sum_{j=1}^k f_{i_j}(z_k) - f_{i_j}(z_{k-1})$. Clairement, l’“intégrale” de ω sur tout carré de la grille vaut zéro, donc, en additionnant, l’“intégrale” de ω sur le bord de $[0, 1] \times [0, 1]$ vaut 0. Or c’est la différence entre les intégrales ordinaires de ω sur γ et γ' . Celles-ci sont donc égales.

Comme toute classe d’homotopie contient un lacet lisse, on obtient une application $h^\omega : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . C’est un homomorphisme de groupes. Soit H son noyau. Alors $X^\omega = H \backslash \tilde{X}$ où \tilde{X} est le revêtement universel de X . Comme H est un noyau, il est distingué, et le quotient $\pi_1(X, x_0)/H$ est isomorphe à l’image de h^ω , un sous-groupe de \mathbb{R} ou \mathbb{C} . En particulier, le revêtement est galoisien, et son groupe d’automorphismes est isomorphe à un sous-groupe de \mathbb{R} ou \mathbb{C} , il est donc commutatif et libre. Si X est compacte, $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par un nombre fini d’éléments. Un groupe commutatif libre de type fini, c’est \mathbb{Z}^N . ■

Exemple 112 Dans le cas où $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\omega = \frac{dz}{z}$, $X^\omega = \tilde{X}$ coïncide avec le revêtement universel, donné par l’exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En effet, X se rétracte par déformation sur le cercle unité, $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ est engendré par le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique, le long duquel l’intégrale de dz/z est non nulle, donc l’homomorphisme $h^{dz/z} : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ est injectif. La primitive de $\exp^* \frac{dz}{z} = dw$ est la coordonnée w sur \mathbb{C} .

9.8 Application d’Abel-Jacobi

On montre que la forme $\frac{dx}{y}$ possède des primitives, qu’il faut voir comme des applications à valeurs dans un quotient de \mathbb{C} .

Proposition 113 Soit $X = \mathcal{T}$ et $\omega = \frac{dx}{y}$. Soient γ et γ' deux générateurs de $\pi_1(\mathcal{T})$. Alors les nombres complexes $\tau = \int_\gamma \omega$ et $\tau' = \int_{\gamma'} \omega$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} . En particulier, $X^\omega = \tilde{X}$ coïncide avec le revêtement universel.

Preuve. Par l’absurde. Supposons que $\tau' = \lambda\tau$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons la 1-forme réelle fermée $a = \Im m(\tau^{-1}\omega)$. Alors $\int_\gamma a = \int_{\gamma'} a = 0$, donc le revêtement \mathcal{T}^a est trivial. Autrement dit, $a = dg$ est exacte sur \mathcal{T} . Soit $x \in \mathcal{T}$ un point où g atteint son maximum M . Soit f la primitive locale de $\tau^{-1}\omega$ qui vaut M en x . Alors $e^g = |e^{-if}|$ au voisinage de x . Le principe du maximum entraîne que la fonction holomorphe e^{-if} est constante au voisinage de x , contradiction. On conclut que τ et τ' sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} . L’homomorphisme h^ω est injectif, donc $\mathcal{T}^\omega = \tilde{\mathcal{T}}$. ■

Corollaire 114 Soit Λ le sous-groupe de \mathbb{C} formé des intégrales de $\frac{dx}{y}$ sur les lacets de \mathcal{T} . Alors, en intégrant $\frac{dx}{y}$, on obtient un isomorphisme de la variété complexe \mathcal{T} avec le tore quotient $\Lambda \backslash \mathbb{C}$.

Preuve. D’après la proposition 113, l’homomorphisme $h^{dx/y}$ a pour image un sous-groupe Λ de \mathbb{C} engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur \mathbb{R} . Ce groupe agit librement et proprement sur \mathbb{C} . Le quotient $\Lambda \backslash \mathbb{C}$ est naturellement un tore. La 1-forme constante dz sur \mathbb{C} passe au quotient en une 1-forme holomorphe dz sur $\Lambda \backslash \mathbb{C}$. Notons $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{C}$ une primitive de dx/y . Alors \tilde{f} passe au quotient en une application $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \backslash \mathbb{C}$ qui satisfait $f^*dz = dx/y$. Comme dx/y ne s’annule nulle part, f est un difféomorphisme local entre variétés compactes, donc un revêtement holomorphe. Par construction de Λ , $f_\# : \pi_1(\mathcal{T}) \rightarrow \pi_1(\Lambda \backslash \mathbb{C}) = \Lambda$ coïncide avec l’isomorphisme $h^{dx/y}$. Les revêtements étant en bijection avec les sous-groupes du groupe fondamental, f est trivial, i.e. un difféomorphisme biholomorphe. Cela prouve que \mathcal{T} n’est pas seulement homéomorphe à un tore, mais biholomorphe au quotient de \mathbb{C} par deux translations indépendantes. ■

9.9 Un théorème d'Abel

Les primitives f de dx/y ne sont pas des fonctions élémentaires, comme les fonctions rationnelles, le logarithme, l'exponentielle, les fonctions trigonométriques, leurs réciproques, ou les combinaisons de celles-ci. Autrement dit, on ne sait pas les calculer. Néanmoins, on sait prouver qu'elles satisfont à des identités, dont voici la plus simple.

Théorème 9 N. Abel (1826). *Etant donnée une droite projective \mathcal{L} de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, notons $p_1(\mathcal{L})$, $p_2(\mathcal{L})$ et $p_3(\mathcal{L})$ les trois points d'intersection de L et de T (certains sont éventuellement confondus). Soit $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \setminus \mathbb{C}$ une primitive de dx/y . Alors*

$$f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L})) \in \Lambda \setminus \mathbb{C}$$

est indépendant de \mathcal{L} .

Preuve. Soit $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ l'espace des droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. C'est une variété complexe de dimension 2. Alors l'application $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* \rightarrow \Lambda \setminus \mathbb{C}$, $\mathcal{L} \mapsto f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L}))$ est holomorphe. En effet, lorsque \mathcal{L} et \mathcal{T} sont transverses, le théorème des fonctions implicites affirme que chacun des points $p_j(\mathcal{L})$ dépend holomorphiquement de \mathcal{L} . Soit \mathcal{L} une droite tangente à \mathcal{T} en un point distinct de i . Lorsqu'une sécante converge vers la tangente, 2 des points d'intersection convergent vers le point de tangence. En effet, par compacité, étant donné une suite de sécantes, on peut toujours extraire des sous-suites pour lesquelles les points d'intersection convergent. Les limites sont nécessairement des points d'intersection de la tangente et de la courbe, donc le point de tangence. Comme pour toutes les suites extraites, la limite est la même, il y a convergence. Pour la même raison, pour la tangente en i , les points d'intersection des sécantes voisines convergent vers i . Cela montre que l'application g est continue. Localement, g est une fonction continue, holomorphe le long d'une courbe, elle est automatiquement holomorphe partout.

Comme $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ est simplement connexe, g possède un relèvement $\tilde{g} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* \rightarrow \mathbb{C}$. C'est une fonction holomorphe. D'après le principe du maximum (pour les fonctions holomorphes sur des ouverts de \mathbb{C}^2), \tilde{g} est constante, donc g est constante. ■

9.10 Structure de groupe sur la cubique

Soit $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \setminus \mathbb{C}$ la primitive de $\frac{dx}{y}$ qui envoie le point i de \mathcal{T} sur $0 \in \Lambda \setminus \mathbb{C}$. Comme f est un difféomorphisme, on peut transporter par f la structure de groupe commutatif de $\Lambda \setminus \mathbb{C}$. Cette addition est donnée par une construction géométrique.

Corollaire 115 *Soient q, q' des points de \mathcal{T} . La droite qq' (la tangente à \mathcal{T} , si $q = q'$) recoupe \mathcal{T} en un point r . Soit r' l'image de r par la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Alors l'application $(q, q') \mapsto q \oplus q' = r'$ est une structure de groupe commutatif sur \mathcal{T} , et $f : (\mathcal{T}, \oplus) \rightarrow (\Lambda \setminus \mathbb{C}, +)$ est un isomorphisme de groupes.*

Preuve. Soit L_i la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Alors L_i coupe \mathcal{T} en un seul point, i . Par conséquent,

$$f(p_1(\mathcal{L}_i)) + f(p_2(\mathcal{L}_i)) + f(p_3(\mathcal{L}_i)) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

D'après le théorème d'Abel, pour toute droite $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$, $f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L})) = 0$.

Soit $q \in \mathcal{T}$ un point à distance finie. La droite projective L_q passant par les points i et q recoupe \mathcal{T} au point symétrique $\sigma(q)$. Par conséquent

$$f(q) + f(i) + f(\sigma(q)) = f(p_1(\mathcal{L}_q)) + f(p_2(\mathcal{L}_q)) + f(p_3(\mathcal{L}_q)) = 0,$$

donc $f(\sigma(q)) = -f(q)$.

Soient q, q' et r trois points de \mathcal{T} qui sont alignés. Alors $f(q) + f(q') + f(r) = 0$. Par conséquent $f(q \oplus q') = f(r') = -f(r) = f(q) + f(q')$. Ceci montre que la loi \oplus est une structure de groupe isomorphe à $\Lambda \setminus \mathbb{C}$. ■

Remarque 116 *Cette structure de groupe sur une cubique est suffisamment simple à calculer pour qu'on ait proposé de remplacer, dans la méthode RSA de cryptage à clé publique, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ par une cubique sur un corps fini.*