Université Paris-Sud 2001/2002
S3SMP+NFIO

EXAMEN DE MATHEMATIQUES
17 janvier 2002, durée 3 heures
Les documents et calculettes sont interdits

I

On étudie la courbe c paramétrée par $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 - t^5$ pour $t \in [-1, 1]$.

1. La courbe c admet-elle une tangente, une demi-tangente à l'origine ? Possède-t-elle une symétrie ? On justifiera soigneusement la réponse.

2. Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ et tracer la courbe, en indiquant le sens de parcours et les tangentes aux extrémités. On donne $\sqrt{15} = 3.87....$

3. Calculer la circulation le long de c du champ de vecteurs w défini sur $\mathbf{R}^2$ par $w(x, y) = (y, 1+x)$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

4. Calculer l'aire du domaine D entouré par la courbe c.

II

Soit a un paramètre réel. On note u_a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A_a = \begin{pmatrix} a & -1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme u_a est il diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

2. Dans cette question et la suivante, on suppose que $a = 5$. Donner une base de $\mathbf{R}^2$ formée de vecteurs propres de u_5.

3. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}A_5P$ soit diagonale.
Calculer A_5^n pour $n \in \mathbf{N}$.

III

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ? On pose $B = A - I$. Sans calculs, donner la valeur de B^4.

2. Calculer B^2 et B^3. Au moyen de la formule du binôme, en déduire une expression pour les puissances de A.

IV

On cherche à résoudre le système différentiel

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t)+y(t)+e^{2t} \\ y'(t) & = & x(t)+2y(t) \end{array}\right. .$$

1. Trouver une solution particulière de (S).

2. Exprimer la solution générale de (S).

3. Calculer la solution de (S) telle que $x(0)=0$ et $y(0)=0$.
Quelle est sa limite lorsque t tend vers $-\infty$?

IVbis

On s'intéresse au système différentiel

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -4x(t)+2y(t) \\ y''(t) & = & 3x(t)-3y(t)-2y'(t) \end{array}\right. .$$

1. Transformer ce système en un système différentiel (S') du premier ordre.

2. Déterminer les valeurs propres de (S') et en déduire que toutes les solutions de S tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

V

Soit a un paramètre réel. On s'intéresse à la famille de systèmes différentiels

$$(S_a)\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t)+y(t) \\ y'(t) & = & (4a-4)x(t)+(2a-1)y(t) \end{array}\right. .$$

Indiquer lesquelles, parmi les figures ci-dessous, correspondent aux systèmes (S_{-1}), (S_0), (S_1), $(S_{7/6})$ et (S_2). On justifiera les réponses en raisonnant sur les valeurs propres et vecteurs propres.

(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

Université Paris-Sud 2001/2002
S3SMP+NFIO

Corrigé de l'Examen de Mathematiques

17 janvier 2002, durée 3 heures

I

1. Le développement limité

$$(x(t), y(t)) = t^2(1,0) + t^3(0,1) + t^3\epsilon(t).$$

montre que la courbe admet en $t = 0$ une demi-tangente orientée suivant $(1, 0)$ et que l'origine est un point de rebroussement de première espèce. Comme $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, le changement de t en $-t$ correspond à une symétrie par rapport à l'axe Ox.

2. On limite l'étude à l'intervalle $[0, 1]$. On calcule les dérivées : $x'(t) = 2t \geq 0$, $y'(t) = 3t^2 - 5t^4$ s'annule en 0 et en $\sqrt{3/5} = 0.77...$. En $t = 1$, la tangente a pour vecteur directeur $(2, -2)$. D'où le tableau de variations

t	0		$\sqrt{3/5}$		1
$x'(t)$	0	+		+	2
$y'(t)$	0	+	0	-	-2
$x(t)$	0	$\nearrow$	3/5	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$48\sqrt{15}/1000$	$\searrow$	0

On calcule $48\sqrt{15}/1000 = 0.186...$. En complétant par symétrie par rapport à Ox, et en tenant compte de l'étude du point singulier, on obtient la courbe suivante

3. La circulation de w le long de c vaut

$$\begin{aligned} circ(w, c) &= \int_{-1}^{1} (y(t)x'(t) + (1 + x(t)y'(t))\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} ((t^3 - t^5)2t + (1 + t^2)(3t^2 - 5t^4))\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} (3t^2 - 7t^6)\, dt \\ &= [t^3 - t^7]_{-1}^{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le résultat découle d'un principe général : en effet, le champ w dérive du potentiel $-y - xy$, donc sa circulation le long de la courbe fermée c est nulle.

4. On utilise le champ de vecteurs $v(x,y) = (y,0)$. D'après la formule de Green-Riemann,

$$\begin{array}{rcl} aire(D) & = & circulation(v,c) \\ & = & \displaystyle\int_{-1}^{1} y(t)x'(t)\,dt \\ & = & \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3-t^5)2t\,dt \\ & = & \displaystyle\int_{-1}^{1} (2t^4-2t^6)\,dt \\ & = & [\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7]_{-1}^{1} \\ & = & \dfrac{8}{35}. \end{array}$$

II

1. Le polynôme caractéristique de u_a est x^2+1-2a. Si $a > 1/2$, il a deux racines réelles distinctes, donc u_a est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Si $a < 1/2$, il a deux racines non réelles, donc u_a est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ mais pas sur $\mathbf{R}$. Si $a = 1/2$, $A_{1/2}$ possède une valeur propre double mais n'est pas diagonale, donc $u_{1/2}$ n'est pas diagonalisable.

2. Lorsque $a = 5$, les valeurs propres de u_5 sont 3 et -3. L'espace propre E_3 est défini par le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x+4y & = & 3x \\ -4x-5y & = & 3y \end{array} \right. .$$

C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $v_1 = (2,-1)$.

L'espace propre E_{-3} est défini par le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x+4y & = & -3x \\ -4x-5y & = & -3y \end{array} \right. .$$

C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $v_2 = (-1,2)$. Les vecteurs propres v_1 et v_2 forment une base de $\mathbf{R}^2$.

3. On prend pour P la matrice de passage de la base canonique vers la base (v_1, v_2), soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$P^{-1}A_5P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{array}{rcl} A_5^n & = & P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} 3^{n-1}(4-(-1)^n) & 3^{n-1}(2-2(-1)^n) \\ 3^{n-1}(-2+2(-1)^n) & 3^{n-1}(-1+4(-1)^n) \end{pmatrix} \end{array}$$

III

1. On développe suivant la quatrième ligne, puis suivant la deuxième ligne,

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-2 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^4.$$

On constate que A admet 1 comme valeur propre de multiplicité 4. Comme A n'est pas diagonale, elle n'est pas diagonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $(A-I)^4 = B^4 = 0$.

2. On vérifie par le calcul que $B^2 = 0$. Par conséquent, $B^3 = 0$ et la formule du binôme donne

$$A^n = (I+B)^n = I + nB = \begin{pmatrix} 1+n & 0 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n \\ -n & 0 & 1-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV

1. La matrice du système (S) a pour polynôme caractéristique $x^2 - 4x + 3$ dont les racines sont 1 et 3. Comme 2 n'est pas valeur propre, il exite une solution de la forme $X_0(t) = e^{2t}v$ où $v \in \mathbf{R}^2$. Cherchons v sous la forme $v = (x, y)$. Il vient

$$2xe^{2t} - 2xe^{2t} - ye^{2t} - e^{2t} = 0 \quad \text{et} \quad 2ye^{2t} - xe^{2t} - 2ye^{2t} = 0$$

d'où

$$\begin{cases} y = -1 \\ -x = 0 \end{cases}$$

soit $x = 0$ et $y = -1$. La fonction $t \mapsto (0, -e^{2t})$ est une solution de (S).

2. On calcule une base de vecteurs propres de la matrice du système. L'espace propre E_1 est défini par le système

$$\begin{cases} 2x + y = x \\ x + 2y = y \end{cases}.$$

C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $(1, -1)$.

L'espace propre E_3 est défini par le système

$$\begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \end{cases}.$$

C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $(1, 1)$.

La solution générale de (S) s'écrit donc

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^t + c_2 e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix},$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.

3. La condition initiale $X(0) = (0, 0)$ se traduit par le système

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

dont la solution est $c_1 = -1/2$, $c_2 = 1/2$. La solution de (S) issue de l'origine est donc

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$.

IVbis

1. On introduit une variable supplémentaire z, la dérivée de $t \mapsto y(t)$. Le système (S) est équivalent à

$$(S') \begin{cases} x' &= -4x + 2y \\ y' &= z \\ z' &= 3x - 3y - 2z \end{cases}.$$

2. On calcule le polynôme caractéristique en développant le déterminant suivant la troisième colonne.

$$\begin{vmatrix} x+4 & -2 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -3 & 3 & x+2 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} x+4 & -2 \\ 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+4 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = (x+2)(x+1)(x+3).$$

Comme les valeurs propres de la matrice du système sont distinctes, celle-ci est diagonalisable. Soient v_1, v_2, v_3 des vecteurs propres relatifs aux valeurs propres 1, 2 et 3 respectivement. Alors toute solution est de la forme

$$t \mapsto c_1 e^t v_1 + c_2 e^{2t} v_2 + c_3 e^{3t} v_3.$$

Les trois exponentielles tendent vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$, donc la solution tend vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$.

V

Le polynôme caractéristique de la matrice du système est $x^2 - 2ax - 2a + 3$. Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $4(a+3)(a-1)$.

Lorsque $a = -1$, le discriminant est négatif, les valeurs propres sont complexes, de partie réelle $a = -1 < 0$, donc le système (S_{-1}) est un *foyer attractif*. La seule figure qui convienne est (b).

Lorsque $a = 0$, les valeurs propres $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ sont imaginaires pures et non nulles, donc le système (S_0) est un *centre*. La seule figure qui convienne est (d).

Lorsque $a = 1$, le discriminant est nul, la matrice admet 1 comme valeur propre double mais n'est pas diagonale, donc le système (S_1) est un *noeud dégénéré répulsif*. La seule figure qui convienne est (g).

Lorsque $a = 7/6$, le discriminant est positif, les valeurs propres sont réelles et distinctes. Le déterminant vaut $2/3$, il est positif, les valeurs propres sont de même signe. Leur somme vaut $7/3$, elle est positive, donc les valeurs propres sont positives, donc le système $(S_{7/6})$ est un *noeud non dégénéré répulsif*. Deux figures peuvent convenir, (a) et (e). On va les départager en examinant la tangente à l'origine des trajectoires curvilignes. On calcule les droites propres. Les racines du polynôme caractéristique sont $1/3$ et 2. Les trajectoires curvilignes doivent être tangentes à $E_{1/3}$ à l'origine. Or $E_{1/3}$ est défini par le système

$$\begin{cases} x + y &= \frac{1}{3}x \\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y &= \frac{1}{3}y \end{cases},$$

c'est la droite de pente $-\frac{2}{3}$. On conclut que le portrait des trajectoires de $(S_{7/6})$ est (a).

Lorsque $a = 2$, le déterminant vaut -1, il est négatif, les valeurs propres sont réelles de signes contraires, donc le système (S_2) est un *col*. Deux figures peuvent convenir, (c) et (f). On va les départager en examinant les pentes d'une trajectoire rectiligne, i.e. de la droite propre correspondant à la valeur propre négative. Les racines du polynôme caractéristique sont $2 + \sqrt{5} > 0$ et

$2-\sqrt{5}<0$. L'espace propre $E_{2-\sqrt{5}}$ est défini par le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & (2-\sqrt{5})x \\ 4x+3y & = & (2-\sqrt{5})y \end{array}\right. ,$$

c'est la droite de pente $1-\sqrt{5}<0$. Cela n'est pas conforme à la figure (c), où les deux droites propres ont une pente positive. On conclut que le portrait des trajectoires de (S_2) est (f).