Université Paris-Sud 2004/2005
S3SMP

# Examen de Mathématiques

5 juillet 2005, durée 3h

Les calculettes et documents sont interdits

## I

Soit $c$ la courbe paramétrée par $x(t) = 1 + \cos t$, $y(t) = \sin t \cos t$ pour $t \in \mathbf{R}$.

**1.** Décrire les symétries que possède la courbe $c$.

**2.** Etudier les variations de $x(t)$ et de $y(t)$ pour $t \in [0, \pi/2]$. Présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

**3.** Soit $c_1$ l'arc de $c$ parcouru lorsque $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tracer soigneusement l'arc $c$ en précisant le sens de parcours et les tangentes aux extrémités.

**4.** Soit $D$ le domaine bordé par $c_1$. En utilisant la formule de Green-Riemann (qu'on énoncera), calculer l'aire de $D$.

## II

On considère le système différentiel $(S)$ $\begin{cases} x'' &= -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y \\ y'' &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y \end{cases}$.

**1.** En introduisant les fonctions inconnues auxiliaires $z = x'$ et $w = y'$, transformer $(S)$ en un système du premier ordre $(S')$, de matrice $A'$.

**2.** Vérifier que le système $(S)$ possède une solution non nulle de la forme $t \mapsto e^{it}v$ et une solution non nulle de la forme $t \mapsto e^{2it}w$ où $v$ et $w$ sont des vecteurs constants.

**3.** Que peut-on en déduire au sujet des valeurs propres de la matrice $A'$ ?

**4.** Décider si la matrice $A'$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, sur $\mathbf{C}$, ou non diagonalisable (il n'est pas indispensable de calculer le polynôme caractéristique de $A'$).

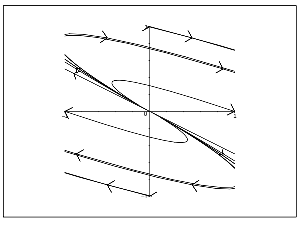
## III

On s'intéresse à la famille de systèmes différentiels $(S_a)$ $\begin{cases} x' &= (4+a)x + (5+a)y \\ y' &= ax + ay \end{cases}$.

**1.** Pour quelles valeurs de $a$ la matrice du système $(S_a)$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$ ? diagonalisable sur $\mathbf{C}$ ? non diagonalisable ?

**2.** Pour quelles valeurs de $a$ la matrice du système $(S_a)$ est-elle inversible ?

**3.** Déterminer le type du système $(S_a)$ en fonction de $a$. Présenter la réponse sous la forme d'un tableau.



**4.** Pour quelles valeurs de $a$ le système $(S_a)$ est-il attractif ? répulsif ?

**5.** Pour quelles valeurs de $a$ le système $(S_a)$ possède-t'il des trajectoires rectilignes ?

**6.** A quelle valeur de $a$ correspond le dessin ci-contre ?

Université Paris-Sud 2004/2005
S3SMP

Corrigé de l'examen de Mathématiques
5 juillet 2005, durée 3h

I

**1.** Si on change $t$ en $-t$, $x(t)$ ne change pas et $y(t)$ change de signe. Cela signifie que $c(-t)$ est le symétrique de $c(t)$ par rapport à l'axe $Ox$.

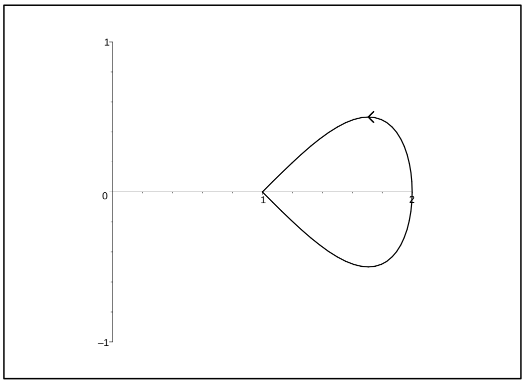
Si on change $t$ en $\pi + t$, $x(t)$ est changé en $2 - x(t)$ et $y(t)$ est inchangé. Cela signifie que $c(\pi + t)$ est le symétrique de $c(t)$ par rapport à la droite d'équation $\{y = 1\}$.

**2.** $x'(t) = -\sin t$ s'annule en 0 seulement. $y'(t) = \cos 2t$ change de signe en $\pi/4$.

| t | 0 | | $\pi/4$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| x' | 0 | - | - | - | $-1$ |
| x | 2 | $\searrow$ | $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ | $\searrow$ | 1 |
| y' | 1 | + | 0 | - | $-1$ |
| y | 0 | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | 0 |

**3.** Le tableau permet de tracer la moitié de l'arc, et on complète par symétrie.

Le vecteur vitesse en $t = \pi/2$ est $(-1, -1)$. Cela donne comme tangente en $c(\pi/2) = (1, 0)$ la droite d'équation $y = x - 1$, et le sens de parcours. La tangente en $t = -\pi/2$ s'obtient par symétrie.




**4.** On constate que $c_1$ est orientée comme le bord de $D$. On choisit la forme différentielle $\alpha =$

$-y\,dx$. La formule de Green-Riemann s'énonce

$$\begin{aligned}
\iint_D d\alpha &= \int_{c_1} \alpha \\
&= \int_{c_1} -y\,dx \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos t\,dt \\
&= [\frac{\sin^3 t}{3}]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Comme $d\alpha = dx\,dy$, $aire(D) = \iint_D d\alpha = \frac{2}{3}$.

II

**1.** On trouve le système $Y' = A'Y$ où $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**2.** Il s'agit de trouver $v = (a, b)$ tel que

$$\begin{cases} x'' = -ae^{it} &= -\frac{5}{2}ae^{it} + \frac{3}{2}be^{it} \\ y'' = -be^{it} &= \frac{3}{2}be^{it} - \frac{5}{2}ae^{it} \end{cases},$$

qui conduit au système

$$\begin{cases} -a &= -\frac{5}{2}a + \frac{3}{2}b \\ -b &= \frac{3}{2}a - \frac{5}{2}b \end{cases},$$

qui possède une solution non nulle $v = (1, 1)$.

De même, $w = (c, d)$ doit satisfaire

$$\begin{cases} x'' = -4ce^{2it} &= -\frac{5}{2}ce^{2it} + \frac{3}{2}de^{2it} \\ y'' = -4de^{2it} &= \frac{3}{2}ce^{2it} - \frac{5}{2}de^{2it} \end{cases},$$

qui conduit au système

$$\begin{cases} -4c &= -\frac{5}{2}c + \frac{3}{2}d \\ -4d &= \frac{3}{2}c - \frac{5}{2}d \end{cases},$$

qui possède une solution non nulle $w = (1, -1)$.

**3.** $Y(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} \\ e^{it} \\ ie^{it} \\ ie^{it} \end{pmatrix}$ et $Z(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2it} \\ -e^{2it} \\ 2ie^{2it} \\ -2ie^{2it} \end{pmatrix}$ satisfont $Y' = A'Y$ et $Z' = A'Z$. Or $Y' = iY \neq 0$, $Z' = 2iZ \neq 0$, donc $A'Y = iY$, $A'Z = 2iZ$. Cela prouve que $i$ et $2i$ sont valeurs propres de $A'$.

**4.** Comme $A'$ est une matrice à coefficients réels, et comme $i$ et $2i$ sont des valeurs propres de $A'$, leurs conjugués $-i$ et $-2i$ le sont aussi. $A'$ possède donc 4 valeurs propres distinctes non réelles. On conclut que $A'$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ mais pas sur $\mathbf{R}$.

**1.** On calcule le polynôme caractéristique de la matrice $A_a$ du système, $P_{A_a}(x) = x^2-(4+2a)x-a$, et son discriminant $\Delta = (4+2a)^2 + 4a = 4(a+1)(a+4)$.

Si $-4 < a < -1$, le discriminant est strictement positif, donc le polynôme caractéristique a deux racines non réelles distinctes, la matrice $A_a$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ mais pas sur $\mathbf{R}$.

Si $a < -4$ ou $a > -1$, le discriminant est strictement négatif, donc le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes, la matrice $A_a$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

Si $a = -1$ ou $a = -4$, le discriminant est nul, donc le polynôme caractéristique a une racine double. Or $A_{-1}$ et $A_{-4}$ ne sont pas diagonales. Comme on est en dimension 2, elles ne sont pas diagonalisables.

**2.** Comme $det(A_a) = -a$, $A_a$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$.

**3.** Les valeurs de $a$ qui jouent un rôle particulier sont $-4$, $-1$, $0$, déjà rencontrés, et aussi $a = -2$ où la trace de $A_a$ change de signe.

Si $a < -4$, la matrice $A_a$ a deux valeurs propres réelles. Leur produit vaut $-a > 0$ donc elles sont de même signe. Leur somme vaut $2a + 4 < 0$, donc elles sont strictement négatives. Par conséquent, $(S_a)$ est un *noeud non dégénéré attractif* (NNDA).

Si $a = -4$, la valeur propre double vaut $-2$, donc $(S_{-4})$ est un *noeud dégénéré attractif* (NDA).

Si $-4 < a < -2$, la matrice $A_a$ a deux valeurs propres non réelles. Leur partie réelle vaut $a + 2 < 0$, donc $(S_{-4})$ est un *foyer attractif* (FA).

Si $a = -2$, la matrice $A_a$ a deux valeurs propres imaginaires pures, donc $(S_{-4})$ est un *centre*.

Si $-2 < a < -1$, la matrice $A_a$ a deux valeurs propres non réelles. Leur partie réelle vaut $a + 2 > 0$, donc $(S_{-4})$ est un *foyer répulsif* (FR).

Si $a = -1$, la valeur propre double vaut 1, donc $(S_{-1})$ est un *noeud dégénéré répulsif* (NDR).

Si $-1 < a < 0$, la matrice $A_a$ a deux valeurs propres réelles. Leur produit vaut $-a > 0$ donc elles sont de même signe. Leur somme vaut $2a + 4 > 0$, donc elles sont strictement positives. Par conséquent, $(S_a)$ est un *noeud non dégénéré répulsif* (NNDR).

Si $a = 0$, $A_0$ est non inversible, donc elle admet 0 comme valeur propre. La somme des valeurs propres vaut $2a + 4 = 4$, donc l'autre valeur propre est non nulle, le système $(S_0)$ est de type $O_1$.

Si $a > 0$, la matrice $A_a$ a deux valeurs propres réelles. Leur produit vaut $-a < 0$ donc elles sont de signes opposés. Par conséquent, $(S_a)$ est un *col*.

| a | $a < -4$ | $-4$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | $a > 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| type | NNDA | NDA | FA | Centre | FR | NDR | NNDR | $O_1$ | Col |

**4.** Le tableau indique que $(S_a)$ est attractif si et seulement si $a < -2$, répulsif si et seulement si $-2 < a < 0$.

**5.** Dans le tableau, les seuls types sans trajectoires rectilignes sont les foyers et le centre. Par conséquent, $(S_a)$ possède des trajectoires rectilignes si et seulement si $a \leq -4$ ou $a \geq -1$.

**6.** La figure représente un noeud dégénéré répulsif, donc il ne peut s'agir que de $(S_{-1})$.