Université Paris-Sud 2003/2004
S3SMP/NFIO2

Examen de Mathématiques
2 septembre 2004, durée 3 heures
Les documents et calculettes sont interdits

I

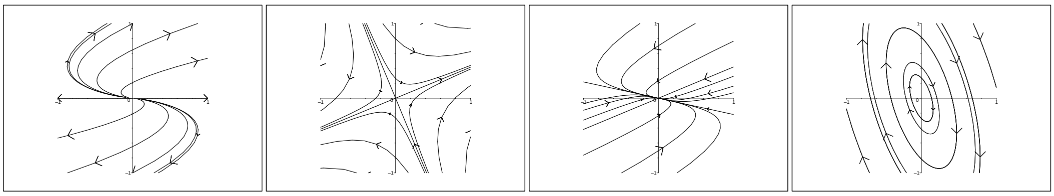
On s'intéresse à la famille de systèmes différentiels

$$(S_a)\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+(1+a)y \\ y' & = & (-1+a)x+a^2y \end{array}\right. .$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice du système (S_a). Indiquer, suivant la valeur de a, quel est le type du système (S_a). On pourra faire un tableau.

2. Tracer les trajectoires du système (S_3). On donne $\sqrt{6} \sim 2.45$.

3. Les figures ci-dessous représentent-elles certains des systèmes (S_a) ?



(a) (b) (c) (d)

4. Existe-t-il des solutions non nulles qui tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$?

II

On s'intéresse au système différentiel

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2y-z \\ y' & = & 2x-z \\ z' & = & 4z \end{array}\right. .$$

1. Soit A la matrice du système. Est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

2. Calculer des vecteurs propres de A. Ecrire la solution générale du système (S).

3. Soit (S') le système

$$(S')\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2y-e^{4t} \\ y' & = & 2x-e^{4t} \end{array}\right. .$$

Chercher une solution particulière de (S'). Ecrire la solution générale de (S').

4. Calculer la solution de (S') de conditions initiales $x(0)=0$, $y(0)=0$. En déduire la solution de (S) de conditions initiales $x(0)=0$, $y(0)=0$, $z(0)=1$. Quelle est la solution de (S) de conditions initiales $x(0)=0$, $y(0)=0$, $z(0)=2$?

III

Soit a un paramètre réel. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

3. Sans nouveaux calculs, déterminer A^4.

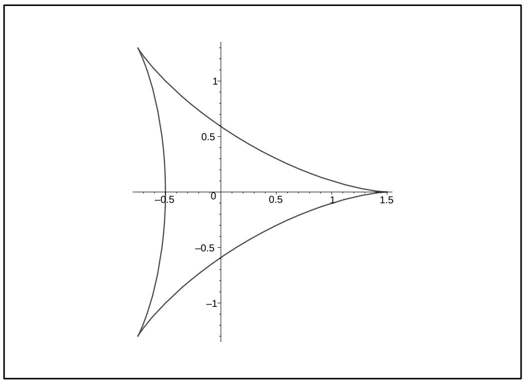
IV

Soit a un paramètre réel, $a \neq 0,\ 1,\ -1$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on note $\gamma_a(t)$ le nombre complexe $ae^{it} + e^{-iat}$. On s'intéresse à la courbe c_a décrite par le point du plan d'affixe γ_a.

1. Montrer que la courbe c_a admet des points singuliers pour les valeurs de t multiples d'un nombre T_a. Quelle est la nature du point singulier en $t = 0$?

2. Montrer que la courbe c_a entière s'obtient à partir de l'arc parcouru lorsque t décrit l'intervalle $[0, T_a]$ par des rotations.

3. Dans cette question et la suivante, on suppose $a = 1/2$. La figure ci-dessous représente la courbe $c_{1/2}$. Tracer la portion de $c_{1/2}$ correspondant à l'intervalle $[0, 4\pi/3]$. Indiquer le sens de parcours. Quelle est la période de $c_{1/2}$?



4. A l'aide d'une intégrale curviligne, calculer l'aire du domaine entouré par la courbe $c_{1/2}$.

Université Paris-Sud 2003/2004
S3SMP/NFIO

Corrigé de l'Examen de Mathématiques
2 septembre 2004, durée 3 heures

I

1. Soit $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1+a \\ -1+a & a^2 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Sa trace vaut $1+a^2$, son déterminant 1, son polynôme caractéristique $P(x) = x^2 - (1+a^2)x + 1$. Le discriminant de ce trinôme vaut $(1+a^2)^2 - 4 = (a^2-1)(a^2+3)$.

Si $-1 < a < 1$, le discriminant est strictement négatif, les racines ne sont pas réelles. Leur partie réelle $\frac{1}{2}(1+a^2)$ est strictement positive, donc (S_a) est un *foyer répulsif.*

Si $a = 1$ ou $a = -1$, A_a possède une valeur propre double 1. Comme A_a n'est pas diagonale, elle n'est pas diagonalisable. Par conséquent, (S_1) et (S_{-1}) sont des *noeuds dégénérés répulsifs.*

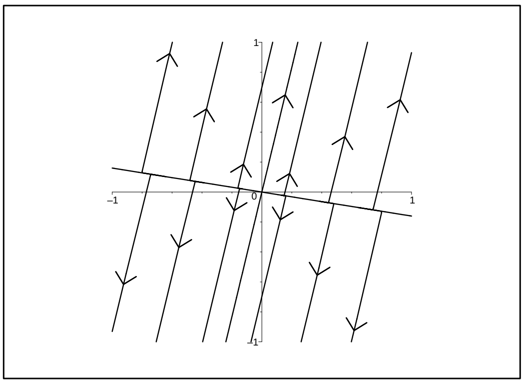
Si $a < -1$ ou $a > 1$, A_a possède deux valeurs propres réelles strictement positives, donc (S_a) est un *noeud non dégénéré répulsif.*

a	$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
type	noeud non dégénéré répulsif	noeud dégénéré répulsif	foyer répulsif	noeud dégénéré répulsif	noeud non dégénéré répulsif

2. D'après 1, le système (S_3) est un noeud non dégénéré répulsif. Les valeurs propres de A_3 sont $5+2\sqrt{6} \sim 10$ et $5-2\sqrt{6} \sim 0.1$. C'est $5-2\sqrt{6}$ qui a la plus petite valeur absolue.

L'espace propre $E_{5+2\sqrt{6}}$, défini par $\left\{\begin{array}{rcl} x+4y &=& (5+2\sqrt{6})x \\ 2x+9y &=& (5+2\sqrt{6})y \end{array}\right.$, est la droite d'équation $y = \frac{2+\sqrt{6}}{2}x$. Elle donne la direction asymptotique des trajectoires.

L'espace propre $E_{5-2\sqrt{6}}$, défini par $\left\{\begin{array}{rcl} x+4y &=& (5-2\sqrt{6})x \\ 2x+9y &=& (5-2\sqrt{6})y \end{array}\right.$, est la droite d'équation $y = \frac{2-\sqrt{6}}{2}x$. C'est elle qui est tangente à l'origine aux trajectoires curvilignes. D'où la figure



3. Les figures (b), (c) et (d) représentent respectivement un col, un noeud non dégénéré attractif et un centre. Ces types n'apparaissent pas dans le tableau de la question 1, donc ne correspondent à aucun système (S_a). La figure (a) est un noeud dégénéré répulsif, il admet l'axe Ox comme droite propre, il a tout pour être (S_1).

4. Dans tous les cas, le système est répulsif, donc toutes les trajectoires, hormis celle de l'origine, s'éloignent de l'origine indéfiniment. Autrement dit, toutes les solutions non nulles tendent vers l'infini lorsque t tend vers $+\infty$, aucune ne tend vers 0.

II

1. Le polynôme caractéristique de A vaut
$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -2 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+2).$$
Ses racines sont distinctes et réelles. Par conséquent, A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

2. On calcule une base de vecteurs propres de A.

L'espace propre E_{-2}, défini par le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2y-z & = & -2x \\ 2x-z & = & -2y \\ 4z & = & -2z \end{array}\right.$, est la droite de vecteur directeur $v_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'espace propre E_2, défini par le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2y-z & = & 2x \\ 2x-z & = & 2y \\ 4z & = & 2z \end{array}\right.$, est la droite de vecteur directeur $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'espace propre E_4, défini par le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2y-z & = & 4x \\ 2x-z & = & 4y \\ 4z & = & 4z \end{array}\right.$, est la droite de vecteur directeur $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La solution générale du système (S) s'écrit $X(t) = c_{-2}v_{-2}e^{-2t} + c_2v_2e^{2t} + c_4v_4e^{4t}$, où c_{-2}, c_2 et c_4 sont trois constantes réelles arbitraires. Autrement dit,
$$X(t) = \begin{pmatrix} c_{-2}e^{-2t} + c_2e^{2t} + c_4e^{4t} \\ -c_{-2}e^{-2t} + c_2e^{2t} + c_4e^{4t} \\ -2c_4e^{4t} \end{pmatrix}$$

3. La matrice du système (S') est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont 2 et -2. D'après le cours, comme 4 n'est pas valeur propre de A', (S') admet une solution particulière de la forme ve^{4t}. Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X(t) = ve^{4t}$ est solution de (S') si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{rcl} 4xe^{4t} & = & 2ye^{4t} - e^{4t} \\ 4ye^{4t} & = & 2xe^{4t} - e^{4t} \end{array}\right. .$$
Ce système linéaire a pour une unique solution $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, d'où la solution particulière $X(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{4t} \\ -\frac{1}{2}e^{4t} \end{pmatrix}$ de (S').

La solution générale de (S') s'obtient en ajoutant à la solution particulière X la solution générale du système homogène
$$(H')\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2y \\ y' & = & 2x \end{array}\right. .$$

On calcule des vecteurs propres de A'. L'espace propre E_{-2}, défini par le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2y & = & -2x \\ 2x & = & -2y \end{array}\right.$, est la droite de vecteur directeur $w_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'espace propre E_2, défini par le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2y & = & 2x \\ 2x & = & 2y \end{array}\right.$, est la droite de vecteur directeur $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La solution générale du système homogène (H') s'écrit $c_{-2}w_{-2}e^{-2t} + c_2 w_2 e^{2t}$, où c_{-2} et c_2 sont des constantes réelles arbitraires. La solution générale de (S') s'écrit donc

$$\begin{array}{rcl} Y(t) & = & X(t) + c_{-2}w_{-2}e^{-2t} + c_2 w_2 e^{2t} \\ & = & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{4t} + c_{-2}e^{-2t} + c_2 e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{4t} - c_{-2}e^{-2t} + c_2 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{array}$$

4. $Y(0)$ vaut 0 si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2} + c_{-2} + c_2 & = & 0 \\ -\frac{1}{2} - c_{-2} + c_2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Ce système linéaire a pour unique solution $c_{-2} = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, soit $Y(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$.

On remarque que le vecteur $Z(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$ est solution de (S). En effet, $(x(t), y(t), e^{4t})$ est solution de (S) si et seulement si $(x(t), y(t))$ est solution de (S'). Comme $Z(0) = (0, 0, 1)$, Z est la solution cherchée. Comme le système (S) est homogène, $2Z(t)$ est solution de (S). Il satisfait la condition initiale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 2$.

III

1. On calcule $det(xI - A)$. Pour cela, on retranche aux deux premières lignes des multiples de la 3ème ligne, pour faire apparaître des zéros dans la première colonne. Puis on développe suivant la première colonne, et on fait de même avec le déterminant 3×3 obtenu. Il vient

$$\begin{array}{rcl} det(xI - A) & = & \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & -a \\ -1 & x & -1 & 1 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1-x^2 & x-a \\ 0 & x & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1-x^2 & x-a \\ x & x-1 & 0 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} \\ & = & \begin{vmatrix} 0 & -x^2 & -a \\ 0 & -1 & x^2 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -x^2 & -a \\ -1 & x^2 \end{vmatrix} = x^4 + a. \end{array}$$

2. Si $a \neq 0$, le polynôme $x^4 + a$ possède des racines non réelles, donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Ces racines, les racines quatrièmes de $-a$, sont distinctes, donc A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

Si $a = 0$, le polynôme x^4 possède une racine quadruple 0. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui n'est pas le cas. On conclut que, si $a = 0$, A n'est pas diagonalisable, ni sur $\mathbf{R}$ ni sur $\mathbf{C}$.

3. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $A^4 + aI = 0$, où I est la matrice unité 4×4. Par conséquent, $A^4 = -aI$.

IV

1. Comme $a \neq 0$, la dérivée $c'_a(t) = ia(e^{it} - e^{-iat})$ s'annule si et seulement si $e^{it} = e^{-iat}$, i.e. si et seulement si $(1+a)t$ est un multiple de 2π. Autrement dit, les point singuliers correspondent aux multiples de $T_a = 2\pi/(1+a)$.

Le développement limité à l'ordre 3 en 0,

$$\begin{aligned}\gamma_a(t) &= a(1+it+\frac{1}{2}(it)^2+\frac{1}{6}(it)^3)+1-iat+\frac{1}{2}(-iat)^2+\frac{1}{6}(-iat)^3+t^3\epsilon(t)\\ &= a+1+\frac{1}{2}(-a-a^2)t^2+\frac{1}{6}i(-a+a^3)t^3+t^3\epsilon(t),\end{aligned}$$

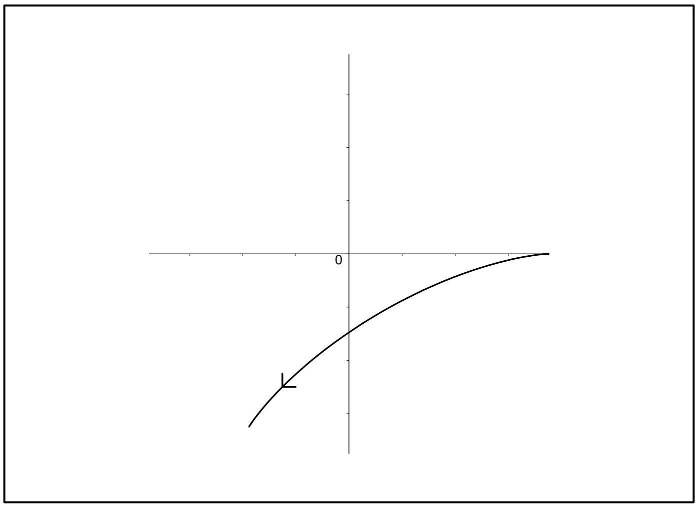
où les termes en t^2 et t^3 ont pour coefficients des vecteurs orthogonaux non nuls, montre que, en $t=0$, le point singulier est un rebroussement de première espèce, avec une demi tangente horizontale. Si $a>0$ ou $a<-1$, le vecteur directeur est $(-1,0)$, i.e. la demi-tangente est orientée vers la gauche. Si $-1<a<0$, la demi-tangente est orientée vers la droite.

2. On calcule

$$\begin{aligned}\gamma_a(t+T_a) &= ae^{it}e^{iT_a}+e^{-iat}e^{-iaT_a}\\ &= e^{iT_a}(ae^{it}+e^{-iat})\\ &= e^{iT_a}\gamma_a(t),\end{aligned}$$

car, $-aT_a = T_a - 2\pi$. Autrement dit, translater le temps de T_a fait tourner le point $c(t)$ d'un angle T_a autour de l'origine. Par conséquent, la courbe c_a entière s'obtient à partir de l'arc parcouru lorsque t décrit l'intervalle $[0, T_a]$ par des rotations d'angles multiples de T_a.

3. Voici le tracé de la portion de $c_{1/2}$ correspondant à l'intervalle $[0, 4\pi/3]$, avec le sens de parcours. $c_{1/2}$ est périodique de période 4π.



4. On utilise la forme différentielle $\alpha = x\,dy$. Elle satisfait $d\alpha = dx\,dy$. On remarque que l'orientation de $c_{1/2}$ est opposée à celle du bord du domaine D qu'elle délimite. Pour parcourir $c_{1/2}$ exactement une fois, il faut faire varier t dans un intervalle de longueur 4π. D'après la formule de Green-Riemann, l'aire cherchée vaut

$$\begin{aligned}
aire(D) &= \iint_D dx\,dy = \iint_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha = -\int_{c_{1/2}} \alpha \\
&= \int_{c_{1/2}} -x\,dy \\
&= \int_0^{4\pi} -(\frac{1}{2}\cos(t) + \cos(t/2))(\frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(t/2))\,dt \\
&= \int_0^{4\pi} (-\frac{1}{4}\cos^2(t) - \frac{1}{4}\cos(t)\cos(t/2) + \frac{1}{2}\cos^2(t/2))\,dt \\
&= \int_0^{4\pi} (-\frac{1}{8}(1+\cos(2t)) - \frac{1}{8}(\cos(3t/2) + \cos(t/2)) + \frac{1}{4}(1+\cos(t))\,dt \\
&= 4\pi(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

On a utilisé l'identité $2\cos(p)\cos(q) = \cos(\frac{p+q}{2}) + \cos(\frac{p-q}{2})$ et le fait que l'intégrale d'un cosinus sur une ou plusieurs périodes est nulle.