FORMES MODULAIRES p-ADIQUES DE HILBERT DE POIDS 1

par

Vincent Pilloni

Résumé. — Nous démontrons un théorème de relévement modulaire pour des représentations galoisiennes p-adiques de dimension 2, non-ramifiées en p, des corps totalement réels peu ramifiés en p.

Table des matières

Voici le résultat principal de cet article :

Théorème 0.1. — *Soit F un corps totalement réel et p un nombre premier impair. On pose $(p) = \prod_{i=1}^r \pi_i^{e_i}$ la décomposition de p en idéaux premiers. On note d_i le degré résiduel en π_i. Soit*

$$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbf{Z}}_p)$$

une représentation galoisienne. On fait les hypothèses suivantes :

- **i.** *ρ est continue, ramifiée en un nombre fini de places,*
- **ii.** *En toute place $\pi_i \mid p$, il existe deux éléments $\alpha_i, \beta_i \in \bar{\mathbf{Z}}_p^\times$, tels que $\alpha_i \neq \beta_i \mod \mathfrak{m}_{\bar{\mathbf{Z}}_p}$ et $\rho|_{D_{\pi_i}} \simeq \psi_{\alpha_i} \oplus \psi_{\beta_i}$ où ψ_{α_i} et ψ_{β_i} sont les caractères non ramifiés qui appliquent $Frob_{\pi_i}$ sur α_i et β_i,*
- **iii.** *$\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est absolument irreductible,*
- **iv.** *pour $1 \leq i \leq r$, on a $e_i \leq p-1$ si $d_i \geq 2$ et $e_i \leq p$ si $d_i = 1$,*
- **v.** *L'un des deux points est vérifié :*
  - *$\bar{\rho}$ est ordinairement modulaire et si $p \neq 3$, $[F(\zeta_p) : F] > 3$,*
  - *$\bar{\rho}$ est modulaire, $p \geq 7$ et $[F(\zeta_p) : F] > 4$.*

Il existe alors une forme modulaire de Hilbert cuspidale f de poids $\underline{1}$, propre à coefficients dans $\bar{\mathbf{Q}}$ et un plongement $i_p : \bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$ tel que $\rho_{f,i_p} = \rho$. En particulier, ρ est d'image finie.

Lorsque $F = \mathbf{Q}$, le résultat est dû à Buzzard-Taylor et nous adaptons à ce contexte leur démonstration. Les théorèmes de relèvement modulaire à la Taylor-Wiles-Kisin et les théorèmes sur les formes compagnons (voir par exemple [**Ki**], [**Ge**], [**G**], [**BLGG**]) permettent de démontrer l'existence de 2^r formes modulaires p-adiques ordinaires propres de poids $\underline{1}$. Chacune est attachée au choix d'une valeur propre de $Frob_{\pi_i}$ pour $1 \leq i \leq r$ et elles ont toutes la même représentation galoisienne associée ρ. On veut montrer la classicité de ces formes modulaires p-adiques. Le théorème de [**P-S**] ne s'applique bien sûr pas. La méthode de démonstration (inspirée de [**Buz**] et [**Kas**]) consistait à étendre le domaine de définition d'une forme surconvergente propre de pente finie sur la variété de niveau p par prolongement analytique et séries de Kassaei. En poids $\underline{1}$, les séries de Kassaei ne convergent pas. On montre néanmoins qu'on peut étendre les formes surconvergentes sur un ouvert rigide de la variété de niveau p qui (essentiellement) se surjecte sur la variété de niveau premier à p. On trouve ensuite une combinaison linéaire convenable des 2^r formes surconvergentes qui satisfait une donnée de descente vers la variété de niveau premier à p. Le résultat nouveau de cet article est donc un résultat de classicité pour des formes modulaires p-adiques ordinaires compagnon de poids $\underline{1}$ (voir la proposition **4.6.1**). Il est démontré pour tout corps totalement réel et pour tout nombre premier p (peut-être égal à 2) pour lequel l'hypothèse sur la ramification **iv** du théorème est vérifiée.

Les théorèmes de relèvement modulaire en poids $\underline{1}$ sont motivés par la conjecture d'Artin. A la suggestion du rapporteur, nous présentons une application de nos résultats.

Théorème 0.2. — *Soit F un corps totalement réel et $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ une représentation continue. On suppose que :*

i. *ρ est totalement impaire,*

ii. $\mathrm{Proj}\rho(G_F) \simeq \mathrm{A}_5$*,*

iii. *ρ est non ramifiée en toute place $v \mid 5$ et $\mathrm{Proj}\rho(\mathrm{Frob}_v)$ est d'ordre 2,*

iv. $[F(\zeta_5) : F] = 4$*,*

v. *Soit $5 = \prod_{i=1}^r (\pi_i)^{e_i}$ la décomposition de 5 en idéaux premiers dans F et soit d_i le degré résiduel en π_i. On suppose que $e_i \leq 4$ si $d_i \geq 2$ et que $e_i \leq 5$ si $d_i = 1$.*

Alors il existe une forme de Hilbert f propre de poids $\underline{1}$, cuspidale, à coefficients dans $\bar{\mathbf{Q}}$ et un plongement $i : \bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$ telle que $\rho_{f,i} \simeq \rho$.

Alors que nous terminions la rédaction de cet article, nous avons eu connaissance d'une prépublication de Payman Kassaei dans laquelle il démontre un résultat de classicité analogue au notre sous l'hypothèse que p est non ramifié dans F ainsi que d'un travail en préparation de Kassaei, Sasaki et Tian sur la conjecture d'Artin pour les corps totalement réels non ramifiés en 5. Remarquons que Shu Sasaki a également deux prépublications dans lesquelles il démontre un théorème de classicité sous l'hypothèse que p est totalement décomposé dans F et obtient des applications à la conjecture d'Artin pour des corps totalement réels dans lesquels 2 ou 5 sont totalement décomposés.

L'organisation de ce travail est la suivante. Les deux premières parties sont largement préliminaires. Nous introduisons les formes modulaires de Hilbert géométriques et automorphes, et comparons avec soin les deux points de vue. Nous établissons aussi des formules de q-développement. Tous ces résultats sont bien connus, mais nous avons eu du mal à trouver une référence unique et précise. Vu le rôle joué par les q-développements à la section 4, nous avons préféré tout écrire en détail. Dans la troisième partie, nous étudions les groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon 1 et leurs sous-groupes. Ceci nous permettra d'étudier la géométrie p-adique des espaces de modules de Hilbert dans la section 4. La section 4 contient la démonstration du théorème de classicité, inspirée par [**Buz**], mais présentée de façon plus géométrique. On présente à la fin l'application à la conjecture d'Artin en utilisant la méthode de [**Tay**].

Mes remerciements les plus chaleureux vont à Alain Genestier qui m'a expliqué un jour que l'argument "numérique" de [**Buz**] section 9, était en fait une descente étale. Je remercie également

Benoit Stroh et Fabrizio Andreatta pour d'utiles discussions, Jacques Tilouine qui a organisé un groupe de travail sur les formes modulaires de bas poids au deuxième semestre 2011 et le rapporteur pour ses commentaires.

1. La variété de Hilbert

1.1. Description du problème de modules. — Soit F une extension totalement réelle de $\mathbf{Q}$ de degré $d \geq 2$, $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers, p un nombre premier. Notons $(p) = \prod_{i=1}^r \pi_i^{e_i}$ la décomposition de p en idéaux premiers dans $\mathcal{O}_F$. Un schéma abélien de Hilbert-Blumenthal (SAHB) sur un schéma S est un schéma abélien A de dimension d muni d'un plongement $\mathcal{O}_F \hookrightarrow \mathsf{End}(A)$.
Soit δ la différente de F, $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de F. On note $\mathfrak{c}^+$ le cône des éléments totalement positifs. Soit $Y_{\Gamma_1^1(\mathfrak{c},N)} \to \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N]$ le schéma de modules dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des données (A, i, ϕ) où

- **i.** $A \to S$ est un SAHB.
- **ii.** $i : \delta^{-1} \otimes_{\mathbf{Z}} \mu_N \hookrightarrow A[N]$ est une structure de niveau μ_N.
- **iii.** ϕ est une $\mathfrak{c}$-polarisation c'est à dire ϕ est un homomorphisme $\mathcal{O}_F$-linéaire $\phi : \mathfrak{c} \to P(A)$, où $P(A)$ est le $\mathcal{O}_F$-module projectif de rang 1 des morphismes symétriques $f : A \to A^t$, tel que :
  - ϕ envoie $\mathfrak{c}^+$ dans le cône des polarisations,
  - ϕ induit un isomorphisme $A \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{c} \xrightarrow{\sim} A^t$.

On dispose d'une action naturelle "diamant" de $\mathcal{O}_F/N\mathcal{O}_F^\times$ sur la structure de niveau μ_N de $Y_{\Gamma_1^1(\mathfrak{c},N)}$. On a aussi une action du groupe $\mathcal{O}_F^{\times>0}$ des unités positives sur $Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}$ définie en envoyant un triplet (A, i, ϕ) et un élément $\epsilon \in \mathcal{O}_F^{\times>0}$ sur $(A, i, \epsilon\phi)$. Notons $\mathcal{O}_{F,N}^\times = \{\epsilon \in \mathcal{O}_F^\times, \epsilon = 1 \mod N\}$. La multiplication par ϵ induit un isomorphisme entre le triplet $(A, i, \epsilon^2\phi)$ et (A, i, ϕ). Par conséquent, l'action précédente de $\mathcal{O}_F^{\times>0}$ se factorise par le groupe fini $\Delta = \mathcal{O}_F^{\times>0}/(\mathcal{O}_{F,N}^\times)^2$.

Notons ω_A le faisceau conormal de A en sa section unité. C'est un faisceau de $\mathcal{O}_F \otimes \mathscr{O}_{Y_{\Gamma_1^1(N)}}$-module. Fixons un plongement $F \to \bar{\mathbf{Q}}$. Soit K un corps de nombres galoisien contenant F et tous les éléments de la forme $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ pour $\epsilon \in \mathcal{O}_F^{\times>0}$. On relève alors l'action de $\mathcal{O}_F^{\times>0}$ sur $Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c}),\mathcal{O}_K[1/N]}$ à une action sur le faisceau conormal du SAHB universel, en identifiant $\omega_{A,i,\phi} = \omega_A$ au point (A, i, ϕ) avec $\omega_{(A,i,\epsilon\phi)} = \omega_A$ au point $(A, i, \epsilon\phi)$ au moyen de la multiplication par $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$. Cette action se factorise de nouveau par le groupe Δ.

Soit $x \in F^{\times>0}$. L'application qui à (A, i, ϕ) associe $(A, i, x\phi)$ induit un isomorphisme de $Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c}_i)}$ vers $Y_{\Gamma_1^1(N,x\mathfrak{c}_i)}$. On souhaite relever cette action en une action sur le faisceau conormal. Il nous faut supposer que K contienne l'élément $x^{\frac{1}{2}}$ pour $x \in F^{\times>0}$. Le relèvement canonique de l'action, défini au dessus de $\mathrm{Spec}\ K$, est celui qui envoie (A, i, ϕ, ω) sur $(A, i, x\phi, x^{\frac{1}{2}}\omega)$.

On dispose d'un ouvert $Y^R_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})} \hookrightarrow Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}$ qui est le lieu où le faisceau conormal ω_A du SAHB universel $A \to Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}$ est un $\mathcal{O}_F \otimes \mathscr{O}_{Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}}$-module libre de rang 1. C'est le lieu de Rapoport. D'après **[D-P]**, le complémentaire de cet ouvert est un fermé de codimension 3 dans $Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}$ et de codimension 2 dans le fermé $N_{F/\mathbf{Q}}(\delta) = 0$ de $Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}$. Rappelons aussi que pour tout $\ell \mid \delta$, $Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}|_{\mathbf{F}_\ell}$ est normal et que $Y^R_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}|_{\mathbf{F}_\ell}$ est lisse.

1.2. Pointes. — Une pointe non ramifiée de niveau μ_N, $\mathfrak{c}$-polarisée est la donnée d'un quadruplet $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \Phi, i)$ vérifiant :

- $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des ideaux fractionnaires de F ;
- $\Phi : \mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{b}^{-1} \simeq \mathfrak{c}$ est une polarisation ;
- i est un isomorphisme $\mathcal{O}_F$-linéaire $N^{-1}\mathcal{O}_F/\mathcal{O}_F \simeq N^{-1}\mathfrak{a}^{-1}/\mathfrak{a}^{-1}$.

Soit $M = \mathfrak{ab}$. Notons $M^\vee$ le cône des applications bilinéaires $\phi : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathbf{R}$, qui vérifient $\phi(\lambda a, b) = \phi(a, \lambda b)$ pour tout $(\lambda, a, b) \in \mathcal{O}_F \times \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ et $\phi(\mathfrak{a}^+, \mathfrak{b}^+) \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$. Le groupe $\mathcal{O}_F^\times$ agit sur $M^\vee$ par $u.\phi = \phi(u.\ , u.\ )$ et l'action se fait donc à travers les carrés d'unités. Fixons une décomposition polyédrale rationnelle Σ de $M^\vee$ stable sous l'action de $\mathcal{O}_F^\times$ et telle que $\Sigma/\mathcal{O}_F^\times$ est finie. Posons $U = \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N][M]$, et pour tout $\sigma \in \Sigma$, $S_\sigma = \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N][\sigma^\vee \cap M]$. On dispose d'un plongement torique affine $U \hookrightarrow S_\sigma$. Posons aussi $Z_\sigma = \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N][\sigma^\perp \cap M]$, c'est la strate fermée de S_σ. Notons $\widehat{S}_\sigma$ la complétion de S_σ le long de Z_σ et $\widehat{U}_\sigma = \widehat{S}_\sigma \times_{S_\sigma} U$. On dispose d'un 1-motif au dessus de U :

$$\mathrm{M} = \mathfrak{b} \hookrightarrow \mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^{-1}\delta^{-1}.$$

Le 1-motif dual, obtenu en échangeant les rôles de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, s'écrit :

$$\mathrm{M}^\vee = \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{b}^{-1}\delta^{-1}.$$

La polarisation Φ induit un isomorphisme $\mathrm{M} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{c} \simeq \mathrm{M}^\vee$. Si σ est non nul, la construction de Mumford (voir [**Ra**], sect. 4) fournit un schéma semi-abélien $Tate(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \Phi)_\sigma \to \widehat{S}_\sigma$ qui est un SAHB $\mathfrak{c}$-polarisé sur l'ouvert $\widehat{U}_\sigma$ et le tore $\mathbb{G}_m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{a}^{-1}\delta^{-1}$ sur Z_σ. Au dessus de $\widehat{U}_\sigma$, on a pour tout entier L une suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{a}^{-1}\delta^{-1} \otimes \mu_L \to Tate(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \Phi)_\sigma[L] \to L^{-1}b/b \to 0.$$

Il en résulte que i définit une structure de niveau μ_N, et le groupe $\mathfrak{a}^{-1}\delta^{-1} \otimes_{\mathbf{Z}} \mu_p$ définit une structure Iwahorique en p. Enfin, on a $\omega_{Tate(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\Phi)_\sigma} \simeq (\mathfrak{a} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathscr{O}_{\widehat{S}_\sigma})\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Remarque 1.2.1. — Si $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ comme idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_F$, on note $\Phi_{can} : \mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{b}^{-1} \simeq \mathfrak{c}$ l'application canonique donnée par le produit.

1.3. Formes modulaires géométriques. — Soit K un corps de nombres contenant la clôture normale de F dans $\bar{\mathbf{Q}}$. Notons $Y_\mathfrak{c} = Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})} \otimes_{\mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K[1/N]$ et $Y_\mathfrak{c}^R = Y^R_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})} \otimes_{\mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K[1/N]$.

Soit T le groupe algébrique $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbf{Z}}\mathbb{G}_m$. Au faisceau conormal ω_A de A sur $Y_\mathfrak{c}^R$ correspond un T-torseur $f : \mathcal{T} \to Y_\mathfrak{c}^R$. A tout d-uplet $\kappa = (k_\sigma) \in \mathbf{Z}^{\mathrm{Hom}(F,K)}$ correspond un caractère $\kappa : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_m$. On pose $\omega^\kappa = f_\star \mathscr{O}_{\mathcal{T}}[-\kappa]$. Pour tout $\mathcal{O}_K[1/N]$-algèbre C, $\mathrm{H}^0(Y^R_{\mathfrak{c},C}, \omega^\kappa)$ est le module des formes modulaires de poids κ sur $Y_\mathfrak{c}$ à coefficient dans C. Nous le notons $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, C)$. Ce module porte une action "diamant" de $\mathcal{O}_F/N\mathcal{O}_F^\times$. Soit $\psi : \mathcal{O}_F/N\mathcal{O}_F^\times \to C^\times$ un caractère. On note $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, \psi, C)$ le module des sections ψ-variantes.

Remarquons que si $\kappa = (k, \cdots, k)$ est parallèle, ω^κ n'est autre que $\mathrm{dét}^{\otimes k}\omega_A$ et se prolonge donc en un faisceau inversible sur $Y_\mathfrak{c}$. De plus pour tout $\mathcal{O}_K[1/N]$-algèbre C, on a, par normalité, $\mathrm{H}^0(Y_{\mathfrak{c},C}, \omega^\kappa) = \mathrm{H}^0(Y^R_{\mathfrak{c},C}, \omega^\kappa)$.

Supposons à présent que K contient tous les éléments de la forme $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ pour $\epsilon \in \mathcal{O}_F^{\times>0}$. On relève alors l'action de $\mathcal{O}_F^{\times>0}$ sur Y à une action sur le faisceau conormal du SAHB universel. Cette action se factorise par le groupe Δ. Elle commute avec l'action des opérateurs diamants. On peut alors considérer le sous-module $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, C)^\Delta$ de $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, C)$ des éléments invariants par Δ. On verra plus loin que c'est ce module qui est relié aux formes automorphes pour le groupe GL_2/F.

Soit $x \in F^{\times>0}$, on peut identifier les modules $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, C)$ et $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, x\mathfrak{c}, C)$. Il y a plusieurs identifications possibles. Supposons disposer dans C d'un élément $x^{\frac{\kappa}{2}}$. On pose alors

$$\begin{array}{rcl} L_x : \mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, C) & \to & \mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, x\mathfrak{c}, C) \\ f & \mapsto & [(A, i, x\phi, \omega) \mapsto x^{\frac{\kappa}{2}} f(A, i, \phi, \omega)] \end{array}$$

La restriction de L_x à $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, C)^\Delta$ est un isomorphisme vers $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, x\mathfrak{c}, C)^\Delta$ qui est indépendant de x et qu'on note alors $L_{\mathfrak{c},x\mathfrak{c}}$.

Soit C une K-algèbre qui contient tous les éléments de la forme $x^{\frac{\kappa}{2}}$ pour $x \in F^{\times>0}$. On note $\mathcal{FR}(F)$ le groupe des idéaux fractionnaires non nuls de $\mathcal{O}_F$.

Définition 1.3.1. — Le module des formes modulaires de niveau $\Gamma_1(N)$, poids κ, à coefficient dans C est

$$\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, C)^\Delta = \cup_{\mathfrak{c} \in \mathcal{FR}(F)} \mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, C)^\Delta / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence qui identifie $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, C)^\Delta$ et $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, x\mathfrak{c}, C)^\Delta$ pour tout $x \in F^{\times>0}$ au moyen de $L_{\mathfrak{c},x\mathfrak{c}}$.

Remarque 1.3.2. — L'opérateur L_x ne respecte pas les structures entières. Pour cette raison, on préfère parfois considérer l'opérateur $L'_x = x^{-\frac{\kappa}{2}} L_x$, qui dépend de x, mais qui est défini sans hypothèse sur C et qui respecte les structures entières.

1.4. q-développement géométrique. — Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \Phi, i)$ une pointe non-ramifiée $\mathfrak{c}$-polarisée. Supposons fixé un isomorphisme $\lambda : \mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_F} C \simeq C$. Cet isomorphisme a pour effet de trivialiser $\omega_{Tate(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\Phi)_\sigma}$. Pour tout élément $f \in \mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, C)$, on note $f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \Phi, i, \lambda)$ le q-développement de f, à valeur dans $C[[M]]$, obtenu en évaluant f sur $(Tate(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \Phi)_\sigma, i, \frac{\mathrm{d}t}{t})$ pour n'importe quel $\sigma \in \Sigma$. Ce q-développement est supporté en les élément de $M^+ \cup \{0\}$ (voir **[A-G]**, sect. 6 pour une discussion détaillée).

1.5. Opérateurs de Hecke. — Soit $\mathfrak{c}$ un ideal fractionnaire et $\mathfrak{m}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_F$. La correspondance de Hecke $Y_{(\mathfrak{c},\mathfrak{c}\mathfrak{m})} \to \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N]$ est l'espace de modules dont les S-points sont les classes d'isomorphismes de données $(A, i, \phi, A', i', \phi', \alpha)$ où (A, i, ϕ) est un point de $Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}$, (A', i', ϕ') est un point de $Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{m}\mathfrak{c})}$ et $\alpha : A \to A'$ est une isogénie $\mathcal{O}_F$-linéaire vérifiant

$$\alpha^t \circ \phi' \circ \alpha = \phi \circ \mathfrak{m} \ \text{ et } \ \alpha \circ i = i'$$

On note $H_\mathfrak{m} \hookrightarrow A[\mathfrak{m}]$ le noyau de α. C'est un groupe de rang $N_{F/\mathbf{Q}}(\mathfrak{m})$ stable sous l'action de $\mathcal{O}_F$. Au dessus de Spec $\mathbf{Z}[1/NN_{F/\mathbf{Q}}(\mathfrak{m})]$, c'est un schéma en groupes étale localement isomorphe à $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}\mathcal{O}_F$. Lorsque $\mathfrak{m} \mid N$, on impose de plus que $H_\mathfrak{m} \cap i(\delta^{-1} \otimes_\mathbf{Z} \mu_N) = \{0\}$ dans la définition de $Y_{(\mathfrak{c},\mathfrak{c}\mathfrak{m})}$.

On a deux projections évidentes $p_1 : Y_{(\mathfrak{c},\mathfrak{c}\mathfrak{m})} \to Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c})}$ (l'oubli de $H_\mathfrak{m}$) et $p_2 : Y_{(\mathfrak{c},\mathfrak{c}\mathfrak{m})} \to Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c}\mathfrak{m})}$ (l'oubli de (A, i, ϕ, α)). Au dessus de Spec $\mathbf{Q}$, on peut définir comme précédemment $Y_{(\mathfrak{c},\mathfrak{c}\mathfrak{m})}$ pour tout idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_F$. Plaçons nous à présent sur $\mathbf{Q}$. Notons $\pi_\mathfrak{m} : A \to A'$ l'isogénie universelle. La différentielle définit un isomorphisme $\mathcal{O}_F$-linéaire :

$$\pi_\mathfrak{m}^\star \omega_{A'} \to \omega_A$$

qui permet de d'obtenir une application $\pi_\mathfrak{m}^\kappa : p_2^\star \omega^\kappa \to p_1^\star \omega^\kappa$.

Soit C une $\mathbf{Q}$-algèbre. On définit alors l'opérateur de Hecke $T_\mathfrak{m} \in \mathrm{Hom}_K\big(\mathrm{M}_\kappa(\mathfrak{m}\mathfrak{c}, N, C), \mathrm{M}_\kappa(\mathfrak{c}, N, C)\big)$ par la composition :

$$\mathrm{H}^0(Y_{\mathfrak{m}\mathfrak{c},C}, \omega^\kappa) \to \mathrm{H}^0(Y_{(\mathfrak{c},\mathfrak{m}\mathfrak{c}),C}, p_2^\star \omega^\kappa) \overset{\pi_\mathfrak{m}^\kappa}{\to} \mathrm{H}^0(Y_{(\mathfrak{c},\mathfrak{m}\mathfrak{c}),C}, p_1^\star \omega^\kappa) \overset{\mathrm{Tr}_{p_1} N(\mathfrak{m})^{-1}}{\to} \mathrm{H}^0(Y_{\mathfrak{c},C}, \omega^\kappa).$$

Supposons maintenant que K soit une extension normale de $\mathbf{Q}$ qui contient les éléments $x^{\frac{1}{2}}$ pour $x \in F^{\times >0}$. Soit C une K-algèbre. L'opérateur $T_\mathfrak{m}$ induit un endomorphisme de $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, C)^\Delta$.

Notons $\mathrm{I}(N)$ le groupe des idéaux factionaires de F, qui sont premiers à N. Pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{I}(N)$, on a une application $[\mathfrak{m}] : Y_\mathfrak{c} \to Y_{\mathfrak{c}\mathfrak{m}^2}$ induite par $(A, i, \phi) \mapsto (A \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}, i', \phi')$ où i' et ϕ' sont les images inverses i et ϕ par la quasi-isogénie $\psi_\mathfrak{m} : A \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m} \to A$. Cette quasi-isogénie induit une application $\psi_\mathfrak{m}^\star : [\mathfrak{m}]^\star \omega_A \to \omega_A$ puis une application $\psi_\mathfrak{m}^\kappa : [\mathfrak{m}]^\star \omega^\kappa \to \omega^\kappa$. On note alors

$$S_\mathfrak{m} : \mathrm{H}^0(Y_{\mathfrak{m}^2\mathfrak{c},C}, \omega^\kappa) \overset{\psi_\mathfrak{m}^\kappa}{\to} \mathrm{H}^0(Y_\mathfrak{c}, \omega^\kappa).$$

Ceci induit une action de $\mathrm{I}(N)$ sur $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, C)^\Delta$. On vérifie qu'elle se factorise par le groupe de classes strict de rayon N : $Cl^+(N) = \mathrm{I}(N)/F_N^{\times >0}$ où $F_N^{\times >0}$ désigne les éléments de $F^{\times >0}$ qui sont congrus à 1 modulo N.

On note $\mathrm{T}(N, C)$ l'algèbre de Hecke engendrée par les opérateurs $T_\mathfrak{m}$ et $S_\mathfrak{m}$, agissant sur $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, C)^\Delta$. Cette algèbre est commutative et on a la formule suivante : $T_\mathfrak{m} T_\mathfrak{n} = T_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}$ si $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = 1$ ou $\mathfrak{m} \mid N$. Rappelons enfin que si $\mathfrak{m} \mid N$ on note souvent $U_\mathfrak{m}$ à la place de $T_\mathfrak{m}$. Si $\psi : Cl^+(N) \to C^\times$ est un caractère, on note $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \psi, C)^\Delta$ le sous-module de $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, C)^\Delta$ des sections ψ-variantes.

2. Formes modulaires de Hilbert sur C

Nous faisons quelques rappels inspirés de [**Shi**] et [**D-T**] sur les formes de Hilbert sur $\mathbf{C}$, les q-développements et le lien avec la définition géométrique. Tout ce qui suit est bien connu, mais nous avions à coeur d'obtenir des formules précises car elles vont s'avérer cruciales dans la prochaine section.

2.1. La définition automorphe. — On pose $\mathrm{G} = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbf{Z}}\mathrm{GL}_2$ et $\nu : \mathrm{G} \to \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbf{Z}}\mathbb{G}_m$ est le déterminant réduit. Notons $K_0(N)$ le sous-groupe compact de $\mathrm{G}(\hat{\mathbf{Z}})$ des matrices

$$\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ c \in N\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}\}$$

et $K_1(N)$ son sous-groupe défini par la condition supplémentaire $d \in 1 + N\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}$. Notons $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré et $I = \mathrm{Hom}(F, \bar{\mathbf{Q}})$. On note G_∞^+ la composante neutre de $\mathrm{G}(\mathbf{R})$. Elle agit sur $\mathcal{H}^I$ par la formule habituelle. On note K_∞^+ le stabilisateur du point $\underline{i} \in \mathcal{H}^I$. Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(\mathbf{R})$ et $z \in \mathcal{H}^d$, on définit le facteur d'automorphie $j(\gamma, z) = (cz + d) \in F \otimes \mathbf{C}$.

Soit $k = (k_\sigma) \in \mathbf{Z}^I$. Soit $\psi : \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbf{C}^\times$ un caractère dont la restriction à $(F \otimes \mathbf{R})^{\times>0}$ est triviale. On définit l'espace des formes de Hilbert automorphes de poids κ, niveau $K_0(N)$, caractère central ψ comme l'ensemble des fonctions :

$$f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbf{C}$$

qui vérifient :
- $f(\gamma g) = f(g)$ pour tout $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$, $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$;
- $f(gu) = \nu(u)^{\frac{\kappa}{2}} j(u, \underline{i})^{-\kappa} f(g)$ pour tout $u \in K_\infty^+$;
- $f(gk) = f(g)$ pour tout $k \in K_1(N)$;
- $f(gz) = \psi(z)f(g)$ pour tout $z \in \mathbb{A}_F^\times/F^\times$;
- f est "holomorphe".

On note cet espace $\mathrm{M}_\kappa^{aut}(N, \psi, \mathbf{C})$.

Soit $\tilde{\delta} \in \mathbb{A}_F^{\times f}$ une idèle finie d'image la différente dans $\mathcal{FR}(F)$. Soit $c \in \mathbb{A}_F^{\times f}$. Posons $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c\tilde{\delta} \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(\hat{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q})$

A toute fonction $f \in \mathrm{M}_\kappa^{aut}(N, \psi, \mathbf{C})$ on associe alors la fonction $f_c : \mathcal{H}^I \to \mathbf{C}$ définie par :

$f_c(z) = \nu(u)^{-\frac{\kappa}{2}} j(u, \underline{i})^\kappa f(Cu)$ où u est un élément de G_∞^+ qui satisfait $u.\underline{i} = z$. Soit $\mathfrak{c}$ l'image de c dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F)$. On introduit les groupes $\Gamma_0(\mathfrak{c}, N) = \mathrm{G}(\mathbf{Q}) \cap CK_0(N)C^{-1}\mathrm{G}_\infty^+ = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_F & \mathfrak{c}^{-1}\delta^{-1} \\ \mathfrak{c}\delta N & \mathcal{O}_F \end{pmatrix} \cap \mathrm{G}_\infty^+$ et $\Gamma_1(\mathfrak{c}, N) = \mathrm{G}(\mathbf{Q}) \cap CK_1(N)C^{-1}\mathrm{G}_\infty^+ = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_F & \mathfrak{c}^{-1}\delta^{-1} \\ \mathfrak{c}\delta N & 1 + N\mathcal{O}_F \end{pmatrix} \cap \mathrm{G}_\infty^+$. Soit $\psi_{K_0(N)}$ le caractère du groupe $K_0(N)$ qui à une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\psi(d)$. Soit ψ_c le caractère du groupe $\Gamma_0(\mathfrak{c}, N)$ défini par $\psi_c(\gamma) = \psi_{K_0(N)}(C^{-1}\gamma^{-1}C)$.

La fonction $f_c(z)$ vérifie $f_c(\gamma z) = \nu(\gamma)^{-\frac{\kappa}{2}} j(\gamma, z)^\kappa \psi_c(\gamma) f(z)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(\mathfrak{c}, N)$.

Notons $\mathrm{M}_\kappa(\Gamma_0(\mathfrak{c}, N), \psi_c, \mathbf{C})$ l'espace des fonctions $f : \mathcal{H}^I \to \mathbf{C}$, holomorphes, qui vérifient $f(\gamma z) = \nu(\gamma)^{-\frac{\kappa}{2}} j(\gamma, z)^\kappa \psi_c(\gamma) f(z)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(\mathfrak{c}, N)$.

Soit $c_1, ..., c_h$ des idèles finies représentant le groupe des classes stricts. Par le théorème d'approximation forte :

$$\mathrm{G}(\mathbb{A}_{\mathbf{Q}}) = \coprod_i \mathrm{G}(\mathbf{Q})\mathrm{G}_\infty^+ C_i K_1(N)$$

La règle qui à $f \in \mathrm{M}_\kappa^{aut}(N, \psi, \mathbf{C})$ associe la collection des fonctions (f_{c_i}) définit une bijection

$$\mathrm{M}_\kappa^{aut}(N, \psi, \mathbf{C}) \simeq \oplus_i \mathrm{M}_\kappa(\Gamma_0(\mathfrak{c}_i, N), \psi_{c_i}, \mathbf{C}).$$

Si $\epsilon \in (\mathcal{O}_F \otimes \hat{Z})^\times$, on vérifie que $f_{\epsilon.c} = \psi(\epsilon) f_c$. Si $x \in F^{\times > 0}$, on a la formule :

$$f_{x.c}(z) x^{-\frac{\kappa}{2}} = f_c(xz).$$

2.2. Le q-développement automorphe. — Soit $f_c \in \mathrm{M}_\kappa^{aut}(\Gamma_0(\mathfrak{c}, N), \psi_c, \mathbf{C})$. Cette fonction est invariante sous l'action du groupe $\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{c}^{-1}\delta^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, elle admet un développement de Fourier (voir [**Shi**], p. 649, 2.16) :

$$f_c(z) = \sum_{\xi \in \mathfrak{c}^+ \cup 0} a_{c,\xi} e_F(\xi z)$$

où $e_F = e^{2i\pi \circ \mathrm{Tr}_F/\mathbf{Q}} : F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \to \mathbf{C}^\times$

Ce développement de Fourier s'identifie au q-développement géométrique $f(\mathfrak{c}, \mathcal{O}_F, i, \lambda_{can})$ où $\lambda_{can} : \mathfrak{c} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathbf{C} \simeq \mathbf{C}$ est l'isomorphisme canonique donné par la multiplication.

On a donc une fonction :

$$a_{.,.} : \mathbb{A}_F^{\times f} \times F^{\times > 0} \to \mathbf{C}$$

Cette fonction vérifie :
- $a_{\epsilon c,\xi} = \psi(\epsilon) a_{c,\xi}$;
- $a_{xc,x\xi} = x^{\frac{\kappa}{2}} a_{c,\xi}$;
- $a_{c,\xi} = 0$ si $\xi \notin \mathfrak{c}$.

On a une fonction "coefficient de Fourier" de f (voir [**Shi**], p. 649, 2.17) :

$$\begin{array}{rcl} C(\ ,f) : \mathcal{FR}(F) & \to & \mathbf{C} \\ \mathfrak{c} & \mapsto & C(\mathfrak{c}, f) \end{array}$$

donnée par la règle, $C(\mathfrak{c}, f) = a_{c^{-1},1}\psi^{-1}(c)$ si $\mathfrak{c} \subseteq \mathcal{O}_F$ et c est une idèle finie qui représente $\mathfrak{c}$ et $C(\mathfrak{c}, f) = 0$ si $\mathfrak{c}$ n'est pas entier.

2.3. Le lien entre les définitions automorphes et modulaires. — Fixons une idèle finie c d'image $\mathfrak{c}$ dans $\mathcal{FR}(F)$. A tout $z \in \mathcal{H}^I$, on associe le réseau $L_z = \mathcal{O}_F z \oplus \mathfrak{c}^{-1}\delta^{-1}$ de $F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$, le tore complexe $A_z = F \otimes \mathbf{C}/L_z$ muni d'une action évidente de $\mathcal{O}_F$ et de la $\mathfrak{c}$-polarisation $\mathcal{O}_F$-linéaire :

$$\Phi_z : L_z \times L_z \to \mathfrak{c}^{-1}\delta^{-1}$$

donnée par $\Phi_z(x,y) = \frac{\mathrm{Im}(x\bar{y})}{\mathrm{Im}(z)}$. On a un isomorphisme $N^{-1}\mathcal{O}_F/\mathcal{O}_F \simeq N^{-1}\mathfrak{c}^{-1}/\mathfrak{c}^{-1}$ donné par c. On dispose alors d'une application $i_z : N^{-1}\mathcal{O}_F/\mathcal{O}_F \otimes \delta^{-1} \simeq N^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\delta^{-1}/\ \mathfrak{c}^{-1}\delta^{-1} \hookrightarrow N^{-1}L_z/L_z$ qui définit une structure naturelle de niveau μ_N. L'exponentielle fournit un isomorphisme $\omega_{F\otimes \mathbf{C}/L_z} \simeq \mathfrak{c} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}\frac{dt}{t}$. On a canoniquement $\mathfrak{c} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \simeq \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$. Notons $\omega_z = 1 \otimes \frac{dt}{t} \in \omega_{F\otimes\mathbf{C}/L_z}$ la differentielle canonique ainsi obtenue. Pour tout $\gamma \in \Gamma_0(\mathfrak{c}, N)$, on a un isomorphisme

$$j(\gamma, z)^{-1} : L_z \to L_{\gamma.z}$$

qui satisfait de plus

$$\phi_{\gamma.z}(j(\gamma,z)^{-1}.,j(\gamma,z)^{-1}.) = \det{}^{-1}(\gamma)\phi_z.$$

Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\mathfrak{c}, N)$, on pose $<\gamma>= d \mod N\mathcal{O}_F$. On un isomorphisme $j(\gamma,z)^{-1} : A_z \to A_{\gamma.z}$ qui vérifie

$$j(\gamma,z)^{-1} \circ i_z =<\gamma^{-1}> i_{\gamma.z} \quad (j(\gamma,z)^{-1})^\star \omega_{\gamma.z} = j(\gamma,z)^{-1}\omega_z$$

Soit $\Gamma_1^1(\mathfrak{c}, N)$ le groupe $\Gamma_1(\mathfrak{c}, N) \cap \mathrm{SL}_2(F)$ et $\Gamma_0^1(\mathfrak{c}, N)$ le groupe $\Gamma_0(\mathfrak{c}, N) \cap \mathrm{SL}_2(F)$. Le quotient $\mathcal{H}^I/\Gamma_1^1(\mathfrak{c}, N)$ est equipé d'un SAHB $\mathfrak{c}$-polarisé, et d'une structure de niveau μ_N. Il s'identifie à la variété de Hilbert complexe $Y_{\Gamma_1^1(\mathfrak{c},N)} \otimes \mathbf{C}$.

Soit $s_c \in \mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, \psi_c, \mathbf{C})$. On pose $f_c(z) = s_c(A_z, \Phi_z, i_z, \omega_z)$. C'est une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}^I$ qui vérifie

$$f_i(\gamma.z) = \psi_c(<\gamma>) j(\gamma,z)^\kappa f(z)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_0^1(\mathfrak{c}, N)$.

Supposons que $s_c \in \mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, \psi_c, \mathbf{C})^\Delta$. L'identité $A_z \to A_{\epsilon.z}$ induit un isomorphisme de $(A_z, \epsilon^{-1}\Phi_z, i_z)$ vers $(A_{\epsilon.z}, \Phi_{\epsilon.z}, i_{\epsilon.z})$. Il en résulte que $f_c(\epsilon.z) = \epsilon^{-\frac{\kappa}{2}} f_c(z)$ et donc que $f_c(\gamma z) = \psi_c(<\gamma>)\nu(\gamma)^{-\frac{\kappa}{2}} j(\gamma, z)^\kappa f(z)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0(\mathfrak{c}, N)$.

On obtient ainsi une bijection de $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \mathfrak{c}, \psi_c, \mathbf{C})^\Delta$ vers $\mathrm{M}_\kappa^{aut}(\Gamma_0(\mathfrak{c}, N), \psi_c, \mathbf{C})$. Cette bijection induit une bijection de $\mathrm{M}_\kappa^{mod}(N, \psi, \mathbf{C})^\Delta$ vers $\mathrm{M}_\kappa^{aut}(N, \psi, \mathbf{C})$.

Remarque 2.3.1. — Plus généralement, considérons deux idèles finies $a, b \in \mathbb{A}_F^{\times f}$. Soit $f \in \mathrm{M}_\kappa^{aut}(N, \psi, \mathbf{C})$. Posons $f_{a,b}(z) = \nu(u_\infty)^{-\frac{\kappa}{2}} j(u_\infty, \underline{i})^\kappa f(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\delta \end{pmatrix} u_\infty)$. Soit

$$\Gamma_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, N) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_F & \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\delta^{-1} \\ \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\delta N & \mathcal{O}_F \end{pmatrix} \cap \mathrm{G}_\infty^+.$$

On définit de façon similaire les groupes $\Gamma_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, N)$, $\Gamma_0^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, N)$ et $\Gamma_1^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, N)$. On définit également un caractère $\psi_{a,b} : \Gamma_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, N) \to \mathbf{C}^\times$. La fonction $f_{a,b}$ vérifie la formule $f_{a,b}(\gamma z) = \psi_{a,b}(\gamma)\nu(\gamma)^{-\frac{\kappa}{2}} j(\gamma, z)^\kappa f_{a,b}(z)$. A tout point z de $\mathcal{H}^I$, on associe le SAHB $F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}/\mathfrak{a}z \oplus \mathfrak{b}^{-1}\delta^{-1}$ muni de la $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$-polarisation $\mathcal{O}_F$-linéaire :

$$\mathfrak{a}z \oplus \mathfrak{b}^{-1}\delta^{-1} \times \mathfrak{a}z \oplus \mathfrak{b}^{-1}\delta^{-1} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\delta^{-1}$$

donnée par $\frac{\mathrm{Im}(x\bar{y})}{\mathrm{Im}(z)}$, et d'une structure de niveau μ_N évidente.

Le quotient $\mathcal{H}^I/\Gamma_1^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, N)$ est une autre réalisation de l'espace de modules $Y_{\Gamma_1^1(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, N)} \otimes \mathbf{C}$. On a bien sûr $f_{a,b} = f_{ab} \in \mathrm{H}^0(Y_{\Gamma_1^1(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, N)} \otimes \mathbf{C}, \omega^\kappa)^\Delta$.

2.4. Action de l'algèbre de Hecke et formulaire. — Soit $\mathfrak{m}$ un idéal de F et m un adèle fini d'image $\mathfrak{m}$ dans $\mathrm{FR}(F)$. On définit un opérateur $T_{\mathfrak{m}}^{aut} \in \mathrm{M}_\kappa^{aut}(N, \psi, \mathbf{C})$ qui est la convolution à droite par la fonction caractéristique

$$\mathbf{1}_{K_1(N)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_1(N)}$$

(la mesure est normalisée pour que $K_1(N)$ soit de masse 1). Soit $f \in \mathrm{M}_\kappa^{aut}(N, \psi, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{Q}$ un idéal premier. Notons π_q une uniformisante locale de cet idéal, vue comme un adèle fini. Supposons $(N, \pi_q) = 1$. On a alors

$$K_1(N)\begin{pmatrix} \pi_q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_1(N) = \coprod_{b \in \mathcal{O}_F/\mathfrak{Q}\mathcal{O}_F} \begin{pmatrix} \pi_q & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_1(N) \coprod \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix} K_1(N).$$

Il en résulte que

$$T_{\mathfrak{Q}}^{aut} f(g) = \sum_b f(g\begin{pmatrix} \pi_q & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) + f(g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix})$$

On a maintenant

$$f(C\begin{pmatrix} \pi_q & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.u_\infty) = \psi(\pi_q) f(C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_\infty(b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.u_\infty)$$

où $x(b)$ est un élément de $\mathcal{O}_F$ qui vérifie $c\tilde{\delta}x(b) + b \in \pi_q\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}$. Le cas où $(N, \pi_q) \neq 1$ est similaire. On obtient facilement les formules :

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{Q}}^{aut}.f_c(z) &= \psi(\pi_q) N_{F/\mathbf{Q}}(\pi_q) \sum_{\xi \in \mathfrak{c}^+} a_{c\pi_q^{-1},\xi} e_F^{\xi z} + \sum_{\xi \in \mathfrak{Q}\mathfrak{c}^+} a_{c\pi_q,\xi} e_F^{\xi z} \quad \text{si } (N, \pi_q) = 1 \\ T_{\mathfrak{Q}}^{aut}.f_c(z) &= \psi(\pi_q) N_{F/\mathbf{Q}}(\pi_q) \sum_{\xi \in \mathfrak{c}^+} a_{c\pi_q^{-1},\xi} e_F^{\xi z} \quad \text{si } (N, \pi_q) \neq 1 \end{aligned}$$

Il en résulte le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.1. — *Soit $f \in \mathrm{M}_\kappa^{aut}(N, \psi, \mathbf{C})$ une forme propre pour tous les opérateurs de Hecke. On suppose f normalisée au sens où $C(\mathcal{O}_F, f) = 1$. La valeur propre de $T_{\mathfrak{m}}^{aut}$ agissant sur f vaut $C(\mathfrak{m}, f) N_{F/\mathbf{Q}}(\mathfrak{m})$ et le coefficient de Fourier $a_{c,\xi}$ de f vaut $C(c^{-1}\xi, f)\xi^{-\frac{\kappa}{2}}\psi(\xi^{-1}c)$.*

Comparons simplement les définitions modulaires et automorphes des opérateurs de Hecke pour terminer.

Proposition 2.4.2. — *On a l'égalité des opérateurs agissant sur* $\mathrm{M}_\kappa^{aut}(N,\psi,\mathbf{C}) = \mathrm{M}_\kappa^{mod}(N,\psi,\mathbf{C})^\Delta$:
$$N_{F/\mathbf{Q}}(\mathfrak{m})T_\mathfrak{m} = T_\mathfrak{m}^{aut}$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer la formule pour un idéal premier $\mathfrak{Q}$. Supposons aussi $(\mathfrak{Q},N)=1$, l'autre cas étant similaire. Soit c une idèle finie et $A_{c,z} = F\otimes\mathbf{C}/\mathcal{O}_F z\oplus\mathfrak{c}^{-1}\delta^{-1}$ (munie des structures additionnelles standard). L'image de $A_{c,z}$ par l'opérateur de Hecke modulaire $T_\mathfrak{Q}$ vaut les $N_{F/\mathbf{Q}}(\mathfrak{Q})+1$ SAHB $\mathfrak{Q}\mathfrak{c}$-polarisés $\{A_{\pi_q c,z},\quad F\otimes\mathbf{C}/\pi_q^{-1}(z+x(b))\oplus\mathfrak{c}^{-1}\delta^{-1}\quad b\in\mathcal{O}_F/\mathfrak{Q}\quad + \text{structures additionnelles standard}\}$.

On a donc
$$\begin{aligned} N_{F/\mathbf{Q}}(\mathfrak{Q})T_\mathfrak{Q}f_c(z) &= \sum_{b\in\mathcal{O}_F/\mathfrak{Q}} f_{\pi_q,c}(z+x(b)) + f_{\pi_q c}(z)\\ &= \psi(\pi_q)\sum_{b\in\mathcal{O}_F/\mathfrak{Q}} f_{\pi_q^{-1}c}(z+x(b)) + f_{\pi_q c}(z)\\ &= T_\mathfrak{Q}^{aut}f_c(z)\end{aligned}$$

2.5. Représentations Galoisiennes. — Soit $\kappa=(k_i)_{i\in I}\in\mathbf{Z}^I$. Supposons que tous les k_i ont la même parité. Soit $k_0=\sup_i k_i$. Soit $f\in\mathrm{M}_\kappa^{aut}(N,\psi,\mathbf{C})$ une forme propre cuspidale normalisée. Posons $\lambda(\mathfrak{m}) = N_{F/\mathbf{Q}}(\mathfrak{m})^{\frac{k_0}{2}}C(\mathfrak{m},f)$. Les éléments $\lambda(\mathfrak{m})$ sont des nombres algébriques. Soit $i_p:\bar{\mathbf{Q}}\to\bar{\mathbf{Q}}_p$ un plongement. Ce plongement définit une partition $I=\coprod_v I_v$ où v parcourt l'ensemble des places au-dessus de p et I_v est l'ensemble des plongements $F_v\to\bar{\mathbf{Q}}_p$. Il existe alors, par les travaux de Carayol, Langlands-Tunnel, Taylor, Blasius-Rogawski, Kisin, Saito et *al*, une représentation $\rho_{f,i_p}: G_F\to\mathrm{GL}_2(\bar{\mathbf{Q}}_p)$ non ramifiée hors de Np, et qui vérifie :

- Trace$(Frob_v) = i_p(\lambda(v))$ pour $v\nmid Np$ et $Frob_v$ désigne une Frobenius géométrique en v,
- dét$\rho_{f,i_p}=\psi_{i_p}\chi_p^{1-k_0}$, où ψ_{i_p} est le caractère fini, réalisation p-adique de ψ,
- si $v\mid p$, $\rho_{f,i_p}|_{G_{F_v}}$ est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate $(\frac{-k_0-k_i}{2}+1,\frac{-k_0+k_i}{2})_{i\in I_v}$.

3. Sur les groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon 1

Dans toute cette section, nous fixons K une extension valuée complète de $\mathbf{Q}_p$ pour une valuation $v:K\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ étendant celle de $\mathbf{Q}_p$. On note $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers.

3.1. Un résultat général sur les sous-groupes de petit degré des Barsotti-Tate. — Soit G un schéma en groupes fini et plat sur Spec $\mathcal{O}_K$. On désigne par G^D le dual de cartier de G et on note ω_{G^D} le faisceau conormal de G en sa section neutre. On rappelle qu'on dispose d'une application de Hodge-Tate entre faisceaux abéliens pour la topologie $fppf$:
$$\mathrm{HT}: G\to\omega_{G^D}.$$
Notons $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. On peut évaluer cette application sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et on obtient un morphisme de groupes abéliens encore noté de la même manière :
$$\mathrm{HT}: G(\bar{K})\to\omega_{G^D}\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_{\bar{K}}.$$
On note enfin
$$\mathrm{HT}\otimes 1: G(\bar{K})\otimes_\mathbf{Z}\mathcal{O}_{\bar{K}}\to\omega_{G^D}\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_{\bar{K}}$$
l'application linéaire associée. L'un des points de départ de ce travail est le théorème suivant du à Laurent Fargues :

Théorème 3.1.1 **([Far], thm. 7)**. — *Le conoyau de l'application* HT $\otimes$ 1 *est annulé par tout élément de valuation supérieur ou égale à* $\frac{1}{p-1}$.

On fait à présent l'hypothèse inoffensive que K est algébriquement clos. Pour tout $w \in \mathbf{R}_{>0}$, notons $\mathcal{O}_{K,w} = \mathcal{O}_K/p^w\mathcal{O}_K$. Tout $\mathcal{O}_K$-module M de présentation finie et de torsion est de la forme $\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\bar{K},w_i}$ pour un entier $r \in \mathbf{N}$ et des éléments $w_i \in \mathbf{R}_{>0}$. On note $\deg\, M = \sum_{i=1}^r w_i$ le degré de M qui est indépendant de la présentation de M choisie. Si G est un groupe fini et plat sur $\mathcal{O}_K$, on note $\deg\, G$ le degré du module ω_G. On note $\mathrm{ht}\, G$ la hauteur de G, c'est le logarithme en base p du rang sur $\mathcal{O}_K$ de l'algèbre des fonctions régulières de G. On rappelle la formule utile suivante (voir [**Ray**], prop. 9, p. 279 ou [**Far**], lem. 4) :

$$\deg\, G + \deg\, G^D = \mathrm{ht}\, G.$$

Supposons que G soit annulé par p. On peut alors définir une filtration par le degré sur $G(K)$. Considérons en effet la fonction

$$\begin{array}{rcl} \deg : G(K) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \deg \mathrm{Adh} < x > \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \mapsto & 1 \end{array}$$

où $\mathrm{Adh} < x >$ désigne le sous-schéma en groupe de G adhérence schématique dans G du sous-groupe de $G(K)$ engendré par x.

Remarque 3.1.2. — De manière équivalent, pour $x \in G(K)\backslash\{0\}$, on a

$$\deg(x) = \sup\{v(a),\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(G_{a,b}, \mathrm{Adh} < x >) \neq 0\}$$

où $G_{a,b}$ est le schéma en groupes de Oort-Tate de schéma sous-jacent $\mathcal{O}_K[X]/(X^p - aX)$ (voir [**O-T**]).

On vérifie facilement la formule

$$\deg(x+y) \geq \inf\{\deg(x), \deg(y)\}$$

avec égalité si $\deg(x) \neq \deg(y)$.

On obtient une filtration décroissante, par le degré, sur $G(K)$ en posant pour tout $\lambda \in [0,1]$

$$G_\lambda^{\deg}(K) = \{x \in G(K),\ \deg(x) \geq \lambda\}.$$

Les $G_\lambda^{\deg}(K)$ sont des sous-groupes. On désigne par $G_\lambda^{\deg}$ le sous-schéma en groupes de G adhérence schématique de $G_\lambda^{\deg}(K)$.

Corollaire 3.1.3. — *Soit $G \to \mathrm{Spec}\ \ \mathcal{O}_K$ un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1, de dimension d et de hauteur h. Il existe un sous-schéma en groupes $H \hookrightarrow G$ de rang p^{h-d} vérifiant $H(K) \cap G_\lambda^{\deg}(K) = 0$ pour tout $\lambda > \frac{1}{p-1}$ et $\deg H \leq \frac{h-d}{p-1}$.*

Démonstration. — On a $\omega_G \simeq \mathcal{O}_{K,1}^{h-d}$ et l'image de $\mathrm{HT}\otimes 1$ est un sous-module qui contient $p^{\frac{1}{p-1}}\omega_G$. Il est donc engendré par $h-d$ éléments et pas moins. Soit $x_1, ..., x_h$ une base du $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-module $G(K)$. On déduit du théorème de structure des $\mathcal{O}_K$-modules qu'il existe un sous-ensemble I de cardinal $h-d$ de $\{1,2,...,h\}$ tel que $\{\mathrm{HT}(x_i), i \in I\}$ engendre l'image de $\mathrm{HT}\otimes 1$. Notons H le sous-groupe de G engendré par les $\{x_i, i \in I\}$. Pout tout $i \in I$, notons H_i le sous-groupe engendré par x_i. On a un diagramme :

$$\begin{tikzcd} H_i \arrow[r] \arrow[d] & \omega_{H_i^D} \arrow[d] \\ H \arrow[r] \arrow[d] & \omega_{H^D} \arrow[d] \\ G \arrow[r] & \omega_{G^D} \end{tikzcd}$$

On en déduit que $\deg H_i = 1 - \deg \omega_{H_i^D} \leq \frac{1}{p-1}$ et que $\deg H = h - d - \deg \omega_{H^D} \leq \frac{h-d}{p-1}$.

Remarque 3.1.4. — Supposons que $d = 1$, $h = 2$ et donc que G est la p-torsion d'une courbe elliptique. On vérifie alors que G possède toujours un sous-groupe de degré inférieur à $\frac{1}{p+1}$ et que cette borne est atteinte lorsque G ne possède pas de sous-groupe canonique. C'est donc que le corollaire précédent est asymptotiquement optimal en p !

Nous allons maintenant nous focaliser sur certains Barsotti-Tate munis d'une action d'un corps fini $\mathbf{F}_{p^h}$. Supposons fixé un plongement $\mathbf{F}_{p^h} \hookrightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$. On identifie $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{p^h}/\mathbf{F}_p)$ avec $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ en envoyant 1 sur le Forbenius arithmétique.

Définition 3.1.5. — Un schéma en groupes fini et plat $G \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 de Hilbert-Blumenthal (abrégé BTTHB) si :
- G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 de dimension h et hauteur $2h$ muni d'une action de $\mathbf{F}_{p^h}$,
- le $\mathbf{F}_{p^h} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ module ω_G est libre de rang 1,
- G est muni d'une polarisation $\mathbf{F}_{p^h}$-linéaire $G \simeq G^D$.

On s'intéresse aux sous-groupes de G qui sont de hauteur h et qui sont stables sous l'action de $\mathbf{F}_{p^h}$. Ce sont des schémas en $\mathbf{F}_{p^h}$-vectoriels de rang 1 classifiés par Raynaud dans [**Ray**]. Rappelons brièvement un cas particulier de son résultat. On a une unité p-adique universelle ω_p (voir [**O-T**]). A tout $2h$-uplet $(\delta_1, ..., \delta_h; \gamma_1, ..., \gamma_h) \in \mathcal{O}_K^{2h}$ vérifiant $\delta_i\gamma_i = p\omega_p$, Raynaud associe le schéma en $\mathbf{F}_{p^h}$-vectoriels $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$ de schéma sous-jacent

$$\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K[X_1, ..., X_h]/(X_i^p - \delta_{i+1}X_{i+1})$$

où les indices i sont pris dans $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ et l'action de $\mathbf{F}_{p^h}$ sur la i-ème coordonnée X_i se fait à travers le caractère fondamental $\mathbf{F}_{p^h} \to \mathcal{O}_K$ dont la réduction modulo p vaut le plongement $\mathbf{F}_{p^h} \xrightarrow{i} \mathbf{F}_{p^h} \hookrightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$.

Théorème 3.1.6 **([Ray], thm. 1.4.1, coro. 1.5.2).** — **i.** *Tout schéma en $\mathbf{F}_{p^h}$-vectoriels de dimension un sur $\mathcal{O}_K$ est isomorphe à un schéma en $\mathbf{F}_{p^h}$-vectoriel $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$.*

ii. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} DEG : \{\textit{Classes d'isomorphismes de schémas en groupes de Raynaud sur } \mathcal{O}_K\} & \to & [0,1]^h \\ H_{(\delta_i,\gamma_i)} & \mapsto & (v(\delta_i)) \end{array}$$

est injective, d'image de $(v(K) \cap [0,1])^h$.

Remarque 3.1.7. — Soit $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$ un schéma en groupes de Raynaud. Le faisceau conormal $\omega_{H_{(\delta_i;\gamma_i)}}$ est un $\mathbf{F}_{p^h} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$-module qui se décompose selon les plongements $j \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ de $\mathbf{F}_{p^h}$ dans $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ en : $\omega_{H_{(\delta_i;\gamma_i)}} = \oplus_j \omega_{H_{(\delta_i;\gamma_i)},j}$. On vérifie immédiatement que $\deg\ \omega_{H_{(\delta_i;\gamma_i)},j} = v(\delta_j)$ et donc que $\deg\ H_{(\delta_i;\gamma_i)} = \sum_j v(\delta_j)$.

Corollaire 3.1.8. — *Soit G un BTTHB. Il existe un sous-groupe de Raynaud $H \subset G$ de paramètre $DEG(H) \in [0, \frac{1}{p-1}]^h$.*

Démonstration. — On peut décomposer le $\mathbf{F}_{p^h} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$-module ω_G selon les plongement $i \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$: $\omega_G = \oplus_i \omega_{G,i}$. Chaque $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$-module $\omega_{G,i}$ est libre de rang 1. On note v : $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \to [0,1]$ la valuation tronquée. Elle est définie par $v(x) = \inf\{v(\tilde{x}), 1\}$ où $\tilde{x}$ est un relèvement quelconque de x dans $\mathcal{O}_K$. On dispose alors de même de valuations tronquées $\omega_{G,i} \to [0,1]$. Notons $p_i : \omega_G \to \omega_{G,i}$ la projection naturelle. D'après le résultat de Fargues, pour tout $i \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, il existe $x_i \in G(K)$ tel que $v(p_i(\mathrm{HT}(x_i))) \leq \frac{1}{p-1}$. Nous allons montrer qu'il existe $x \in G(K)$ tel que $v(p_i(\mathrm{HT}(x))) \leq \frac{1}{p-1}$ pour tout $i \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$. Raisonnons par recurence sur $0 \leq i \leq h-1$. Supposons donc qu'on sait trouver y_i vérifiant $v(p_j(\mathrm{HT}(y_i))) \leq \frac{1}{p-1}$ pour tout $0 \leq j \leq i$. Démontrons à présent qu'il existe $\lambda \in \mathbf{F}_{p^h}^\times$ tel que $y_{i+1} = y_i + \lambda x_{i+1}$ vérifie $v(p_j(\mathrm{HT}(y_{i+1}))) \leq \frac{1}{p-1}$ pour tout $0 \leq j \leq i+1$. Pour chaque j, il existe au plus une valeur λ tel que $v(p_j(\mathrm{HT}(y_i + \lambda x_{i+1}))) > \inf\{v(p_j(\mathrm{HT}(y_i))), v(p_j(\mathrm{HT}(x_{i+1})))\}$. On peut donc trouver λ

tel que $v(p_j(\mathrm{HT}(y_i+\lambda x_{i+1}))) = \inf\{v(p_j(\mathrm{HT}(y_i))), v(p_j(\mathrm{HT}(x_{i+1})))\}$ pour chaque $0 \leq j \leq i+1$. Notons H le sous-$\mathbf{F}_{p^h}$-module de G engendré par x. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d] & \omega_{H^D} \arrow[d] \\ G \arrow[r] & \omega_G \end{tikzcd}$$

Décomposons $\omega_{H^D} = \oplus_i \omega_{H^D,i}$ selon les plongement $i \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$. On a $p_i(\mathrm{HT}(x)) \in \omega_{H^D,i} \subset \omega_{G,i}$ d'où on obtient que $\deg \omega_{H^D,i} \geq 1 - \frac{1}{p-1}$. Ceci termine la démonstration.

Remarque 3.1.9. — Tous les résultats de cette section sont triviaux si $p=2$, car $p-1=1$. En fait nous n'utiliserons pas le corollaire **3.1.8** mais plutôt les résultats plus précis mais moins généraux de la section suivante dans cet article.

3.2. Un calcul sur les modules de Kisin. — Soit $G \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un BTTHB. Dans cette section nous allons obtenir un raffinement du corollaire **3.1.8** en faisant des hypothèses sur G. On pose $G_1 = G|_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K}$. On a un Vershiebung :

$$V : G_1^{(p)} \to G_1$$

La différentielle de cette application fournit un morphisme de Hasse-Witt :

$$HW : \omega_G \to \omega_G$$

et pour tout $i \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, on a un invariant de Hasse partiel :

$$HW_i : \omega_{G,i} \to \omega_{G,i-1}.$$

Définition 3.2.1. — Pour tout $i \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, on appelle i-ème hauteur de Hodge partielle de G, et on note hdg_i, la valuation tronquée du déterminant de l'application

$$HW_i : \omega_{G,i} \to \omega_{G,i-1}.$$

Rappelons la proposition générale suivante (voir **[G-K]** lemma. 2.3 ou l'appendice de cet article) :

Proposition 3.2.2. — *Soit G un BTTHB et H un sous-groupe de Raynaud de paramètre $DEG(H) = (\delta_1, ..., \delta_h)$. On a les relations suivantes entre hauteur de Hodge et paramètre de Raynaud :*

i. $\delta_i + p\delta_{i-1} > 1 \Rightarrow hdg_i = 1 - \delta_i$,

ii. $\delta_i + p\delta_{i-1} < 1 \Rightarrow hdg_i = p\delta_{i-1}$,

iii. $\delta_i + p\delta_{i-1} = 1 \Rightarrow hdg_i \geq p\delta_{i-1}$.

Avant de poursuivre tirons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.3. — *Supposons $h \geq 2$. Soit G un BTTHB et H un sous-groupe de Raynaud de paramètre $DEG(H) = (\delta_1, ..., \delta_h)$. On a :*
- *Si $\delta_i = 0$ pour $1 \leq i \leq h-1$ et $\delta_h \in]0,1[$ alors $hdg_i = 0$ pour $2 \leq i \leq h$ et $hdg_1 > 0$.*
- *Si $hdg_i = 0$, on a $\delta_{i-1}(1-\delta_i) = 0$.*
- *Si $hdg_{i-1} = hdg_i = 0$ on a $\delta_{i-1} = 1 \Rightarrow \delta_i = 1$ et $\delta_i = 0 \Rightarrow \delta_{i-1} = 0$.*

On suppose à présent que les hauteur de Hodge partielles hdg_i sont nulles si $2 \leq i \leq h$. Notre objectif est de décrire les sous-groupes de Raynaud H de G. Le cas $h=1$ est bien connu, car G est isomorphe à la p-torsion d'une courbe elliptique.

Proposition 3.2.4 **([Ka], thm. 3.10.7).** — *Supposons $h=1$.*

i. *Si $hdg_1 < \frac{p}{p+1}$, G possède un sous groupe canonique de degré $1 - hdg_1$ et p sous-groupes de degré $\frac{hdg_1}{p}$.*

ii. *Si $hdg_1 \geq \frac{p}{p+1}$, G possède $p+1$ sous-groupes de degré $\frac{1}{p+1}$.*

La méthode que nous utilisons ici permet de traiter le cas h général. Cependant, pour les calculs, il est commode de distinguer les cas $h \geq 2$ et $h = 1$ et nous allons nous restreindre au cas $h \geq 2$.

Si $hdg_1 < 1$, alors G possède un sous-groupe canonique et dans ce cas il est connu, par les résultats de Goren-Kassaei [**G-K**], que les sous-groupes de Raynaud de G forment une configuration de Raynaud $\{P_0, P_1\}$ de cardinal 1 (voir [**P-S**], 3.2.3 pour la définition des configurations de Raynaud). On a $P_0 = (0, ..., 0, \frac{hdg_1}{p})$ et $P_1 = (1 - hdg_1, 1, ..., 1)$. On suppose donc dorénavant que $hdg_1 = 1$ et $hdg_i = 0$ si $2 \leq i \leq h$. On obtient facilement à partir de **3.2.3** :

Corollaire 3.2.5. — *Posons $DEG(H) = (\delta_1, ..., \delta_h)$. Il existe $2 \leq k \leq h$ tel que pour $1 \leq i \leq k-1$, $\delta_i = 0$, pour $k+1 \leq i \leq h$, $\delta_i = 1$ et $\delta_k \in [0, 1]$. Si $k = h$, on a de plus $\delta_k \in [\frac{1}{p}, 1]$.*

En particulier l'ensemble des sous-groupes de Raynaud de G est totalement ordonné pour la relation d'ordre $\leq$ sur $[0, 1]^h$ (voir [**P-S**] 3.2.2, pour la définition de cette relation d'ordre). Par conséquent l'ensemble des sous-groupes de Raynaud de G forme une configuration de Raynaud de cardinal 0 ou 1.

Soit k le corps résiduel de $\mathcal{O}_K$ et e l'indice de ramification. Quitte à étendre les scalaires, on peut supposer que tous les sous-groupes de Raynaud de G sont définis sur $\mathcal{O}_K$ et que $p|e$. Posons $\mathcal{S}_1 = k[[u]]$.

Soit $\mathfrak{M}$ le module de Kisin de G. Tous les calculs qui suivent sont inspirés de la section 3 de [**Ti**] dont nous utilisons librement les notations.

On a $\mathfrak{M} = \oplus_i \mathfrak{M}_i$. On prend une base adaptée (f_i, e_i) de chaque $\mathfrak{M}_i$. On suppose que les hauteurs de Hodge partielles hdg_i sont nulles si $2 \leq i \leq h$ et que $hdg_1 = 1$. Quitte à remplacer f_1 par $\phi(e_h)$ et f_{i+1} par $\phi(f_i)$ pour $1 \leq i \leq h-1$, les matrices de Frobenius

$$\phi : \mathfrak{M}_i \to \mathfrak{M}_{i+1}$$

sont données par

$$\begin{pmatrix} 1 & b_i \\ 0 & u^e d_i \end{pmatrix}$$

pour $1 \leq i \leq h-1$ et par

$$\begin{pmatrix} a_h & 1 \\ u^e c_h & 0 \end{pmatrix}$$

lorsque $i = h$ (précisons que la première colonne donne l'image de f_i dans la base (f_{i+1}, e_{i+1}) et la seconde colonne donne celle de e_i dans la même base). Les coefficients d_i, $1 \leq i \leq h-1$ et c_h sont inversibles. On a $v_u(a_h) \geq e$ par hypothèse sur la hauteur de Hodge et nous posons $a_h = u^e a'_h$.

On va maintenant chercher des groupes de Raynaud H de paramètre $DEG(H) = (0, ..., 0, \delta_h)$ avec $\delta_h \in [\frac{1}{p}, 1]$. Soit $\mathfrak{L} = \oplus_i \mathfrak{L}_i$ le sous-module de Kisin de $\mathfrak{M}$ correspondant à un tel sous-groupe.

Comme $\delta_i = 0$ pour $1 \leq i \leq h-1$, on cherche $\mathfrak{L}_i$ de la forme $\mathcal{S}_1.e_i + y_i f_i$. Comme $\delta_h > 0$, on cherche $\mathfrak{L}_h$ de la forme $\mathcal{S}_1.y_h e_h + f_h$. On a $v_u(y_h) \geq \frac{e}{p}$. Posons $y_h = u^{\frac{e}{p}} z_h$. On a $\phi(\mathfrak{L}_i) \subset \mathfrak{L}_{i+1}$.

On obtient le système d'équations (Σ) :

$$\begin{aligned} &(3.\mathbf{a}) & y_k^p + b_k &= u^e d_k y_{k+1} \quad 1 \leq k \leq h-2, \\ &(3.\mathbf{b}) & u^e d_{h-1} &= (y_{h-1}^p + b_{h-1}) y_h, \\ &(3.\mathbf{c}) & u^e a'_h + y_h^p &= y_1 u^e c_h \end{aligned}$$

Les équations 3.**a** mises bout à bout donnent :

$$y_1^{p^{h-2}} + b_1^{p^{h-3}} + \cdots + b_{h-2} = u^{e\frac{p^{h-2}-1}{p-1}} d_{h-2} \cdots d_1^{p^{h-3}} y_{h-1}.$$

On réinjecte ensuite cette expression dans 3.**b** pour obtenir :

$$(y_1^{p^{h-1}} + b_1^{p^{h-2}} + ... + b_{h-2}^p + b_{h-1}) y_h = u^{e\frac{p^{h-1}-1}{p-1}} d_{h-1} d_{h-2}^p \cdots d_1^{p^{h-2}}.$$

En utilisant 3.**c**, on obtient finalement l'équation $P(z_h)=0$ pour z_h, où $P(z_h)$ est donné par :

$$P(z_h)=u^{e\frac{p^h-2p+1}{p(p-1)}}d_{h-1}-z_h^{p^h+1}\left(\frac{1}{c_h^{p^{h-1}}d_1^{p^{h-2}}...d_{h-2}^p}\right)-z_h\left(\frac{a'^{p^{h-1}}_h}{c_h^{p^{h-1}}d_1^{p^{h-2}}...d_{h-2}^p}+\frac{b_1^{p^{h-2}}}{d_1^{p^{h-2}}...d_{h-2}^p}+...+\frac{b_{h-2}^p}{d_{h-2}^p}+b_{h-1}\right).$$

Posons $C=\frac{a'^{p^{h-1}}_h}{c_h^{p^{h-1}}d_1^{p^{h-2}}...d_{h-2}^p}+\frac{b_1^{p^{h-2}}}{d_1^{p^{h-2}}...d_{h-2}^p}+...+\frac{b_{h-2}^p}{d_{h-2}^p}+b_{h-1}$. En examinant le polygone de Newton on en déduit que

– Si $v_u(C)\geq e\frac{(p^h-2p+1)p^h}{p(p-1)(p^h+1)}$ alors toutes les racines de P ont pour pente $e\frac{(p^h-2p+1)}{p(p-1)(p^h+1)}$.
– Si $v_u(C)<e\frac{(p^h-2p+1)p^h}{p(p-1)(p^h+1)}$ alors P a une racine de pente $e\frac{(p^h-2p+1)}{p(p-1)}-v_u(C)$ et les p^h autres racines ont pour pente $\frac{v_u(C)}{p^h}$.

En revenant à la variable $y_h=u^{\frac{e}{p}}z_h$ et en posant $Q(y_h)=P(u^{-\frac{e}{p}}y_h)$ on obtient :

– Si $v_u(C)\geq e\frac{(p^h-2p+1)p^d}{p(p-1)(p^h+1)}$ alors toutes les racines de Q ont pour pente $e\frac{(p^h-1)}{(p-1)(p^h+1)}$.
– Si $v_u(C)<e\frac{(p^h-2p+1)p^d}{p(p-1)(p^h+1)}$ alors Q a une racine de pente $e\frac{(p^{h-1}-1)}{p-1}-v_u(C)$ et les p^h autres racines ont pour pente $\frac{v_u(C)}{p^h}+\frac{e}{p}$.

La connaissance de y_h solution de Q dans $\mathcal{S}_1[\frac{1}{u}]$ détermine uniquement $y_1,....,y_{h-1}\in\mathcal{S}_1[\frac{1}{u}]$ solution de (Σ). Une telle solution $(y_1,...,y_h)$ détermine toujours un sous-module de Kisin, en posant

$$\mathfrak{L}_i=\mathfrak{M}_i\cap\mathcal{S}_1[\frac{1}{u}].e_i+y_i.f_i\subset\mathfrak{M}_i[\frac{1}{u}]$$

pour $1\leq i\leq h-1$ et

$$\mathfrak{L}_h=\mathfrak{M}_h\cap\mathcal{S}_1[\frac{1}{u}].y_he_h+f_h\subset\mathfrak{M}_h[\frac{1}{u}].$$

Cette solution correspond à un sous-groupe de Raynaud H de paramètre $DEG(H)=(0,...,0,\delta_h)$ avec $\delta_h\in[\frac{1}{p},1]$. si et seulement si $y_1,...,y_h\in\mathcal{S}_1$ et $v_u(y_h)\geq\frac{e}{p}$. Dans ce cas, $\delta_h=\inf\{1,\frac{v_u(y_h)}{e}\}$. D'après 3.**a**, une solution $(y_1,...,y_h)$ est entière dès que y_h et y_{h-1} sont entiers. D'après 3.**b**, y_{h-1} est entier si et seulement si $v_u(y_h)\leq e$.

On obtient donc la proposition suivante :

Proposition 3.2.6. — **i.** *Si $v_u(C)\geq e\frac{(p^h-2p+1)p^h}{p(p-1)(p^h+1)}$, les sous-groupes de Raynaud de G forment une configuration de Raynaud de cardinal 0. Il y a une seule classe d'isomorphisme de sous-groupe de Raynaud de G qui vérifie $\delta_i=0$, $1\leq i\leq h-1$ et $\delta_h=\frac{p^h-1}{(p-1)(p^h+1)}$.*

ii. *Si $v_u(C)\in[e\frac{p^{h-1}-p}{p-1},e\frac{(p^h-2p+1)p^h}{p(p-1)(p^h+1)}[$, les sous-groupes de Raynaud de G forment une configuration de Raynaud de cardinal 1. Il y a deux classes d'isomorphismes $(\delta_1,\cdots,\delta_h)$ et $(\delta'_1,\cdots,\delta'_h)$ de sous-groupes de Raynaud de G qui vérifient $\delta_i=\delta'_i=0$ si $1\leq i\leq h-1$ et $\delta_h,\delta'_h\in[\frac{1}{p},1]$. Pour fixer les idées, supposons $\delta_h<\delta'_h$. On a alors $\delta_h=\frac{v_u(C)}{ep^h}+\frac{1}{p}\in[\frac{p^{h-1}-1}{(p-1)p^{h-1}},\frac{p^h-1}{(p-1)(p^h+1)}[$, $\delta'_h\in]\frac{p^h-1}{(p-1)(p^h+1)},1]$ et $p^h\delta_h+\delta'_h=\frac{p^h-1}{p-1}$. Il y a p^h-sous-groupes isomorphes à (δ_i) et un seul isomorphe à (δ'_i).*

iii. *Si $v_u(C)<e\frac{p^{h-1}-p}{p-1}$, les sous-groupes de Raynaud de G forment une configuration de Raynaud de cardinal 1. Il y a une seule classe d'isomorphisme, de cardinal p^h, de sous-groupes de Raynaud de G vérifiant $\delta_i=0$, $1\leq i\leq h-1$ et $\delta_h\in[\frac{1}{p},1]$. Dans ce cas $\delta_h=\frac{v_u(C)}{ep^h}+\frac{1}{p}\in[\frac{1}{p},\frac{p^{h-1}-1}{(p-1)p^{h-1}}[$.*

En particulier, le groupe G possède toujours un sous-groupe H vérifiant $\delta_h\in[\frac{1}{p},\frac{p^h-1}{(p-1)(p^h+1)}]$.

Remarque 3.2.7. — On a bien $\frac{p^h-1}{(p-1)(p^h+1)}\leq\frac{1}{p-1}$. On a donc une confirmation experimentale du corollaire **3.1.8**. Lorsque h tend vers $+\infty$, $\frac{p^h-1}{(p-1)(p^h+1)}\to\frac{1}{p-1}$. Le corollaire **3.1.8** est donc asymptotiquement optimal lorsque $h\to\infty$!

Remarque 3.2.8. — Lorsque $h = 1$, il y a une seule matrice de Frobenius de la forme

$$\begin{pmatrix} a_h & 1 \\ u^e c_h & 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient la seule équation : $y_h a_h + y_{h+1}^p - u^e c_h = 0$. On retrouve sans peine le résultat de la proposition **3.2.4**.

3.3. Etude de certains Barsotti-Tate tronqués munis d'une action de $\mathbf{F}_q[T]/T^e$. — Posons $d = eh$ et $q = p^h$. Soit $G \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1, de hauteur $2d$, dimension d, muni d'une action de $\mathbf{F}_q[T]/T^e$. On se donne une polarisation $\mathbf{F}_q[T]/T^e$-linéaire : $G \simeq G^D$. On dispose sur G d'une filtration croissante $\mathrm{Fil}_i G = G[T^i]$. Soit G_k la fibre spéciale de G. On fait de plus l'hypothèse (H) suivante :

Pour tout $0 \leq r \leq i \leq e$, la suite

$$0 \to G[T^r] \to G[T^i] \stackrel{\times T^r}{\to} G[T^{i-r}] \to 0$$

est exacte.

Cela signifie que G est un $\mathbf{F}_q[T]/T^e$-module plat. Remarquons que G est un $\mathbf{F}_q[T]/T^e$-module plat si et seulement si G_k a cette propriété ou encore, si et seulement si le module de Dieudonné D de G_k est un $k \otimes \mathbf{F}_q[T]/T^e$ module libre de rang 2.

Proposition 3.3.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. $G[T]$ *est un BTTHB,*

ii. $\mathrm{Lie}(G)$ *est un* $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_q[T]/T^e$ *module libre de rang* 1.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que $G_k[T]$ est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 si et seulement si $\mathrm{Lie}(G_k)$ est un $k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_q[T]/T^e$ module libre de rang 1. Dans le module de Dieudonné D de G_k on a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ker}(F) \to D \to \mathrm{Im}(F) \to 0$$

où $\mathrm{Ker}(F) = \omega_{G_k}$ et $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Lie}(G_k)$ par dualité. En réduisant modulo T, on obtient la suite longue

$$0 \to \mathrm{Tor}^1_{k\otimes \mathbf{F}_q[T]/T^e}(\mathrm{Im}(F), k \otimes \mathbf{F}_q) \to \mathrm{Ker}(F) \otimes \mathbf{F}_q \to D(G[T]) \to \mathrm{Im}(F) \otimes \mathbf{F}_q \to 0$$

Si $\mathrm{Lie}(G_k)$ est un $k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_q[T]/T^e$ module libre de rang 1 alors $\mathrm{Im}(F)$ est un $k \otimes \mathbf{F}_q[T]/T^e$-module libre et donc $\mathrm{Ker}(F) \otimes \mathbf{F}_q = \mathrm{Ker}(F : D(G_k[T]) \to D(G_k[T]))$. Il en résulte que $\mathrm{Ker} F = \mathrm{Im} V$ dans $D(G_k[T])$ et $G_k[T]$ est bien un Barsotti-Tate tronqué.

Inversement, si $\mathrm{Ker} F = \mathrm{Im} V$ dans $D(G_k[T])$, alors $\mathrm{Tor}^1_{k\otimes \mathbf{F}_q[T]/T^e}(\mathrm{Im}(F), k \otimes \mathbf{F}_q)$ est nul et donc $\mathrm{Im}(F)$ est un $k \otimes \mathbf{F}_q[T]/T^e$ module localement libre. Montrons que c'est un $k \otimes \mathbf{F}_q[T]/T^e$-module libre. On a $k \otimes \mathbf{F}_q[T]/T^e = \oplus_i k[T]/T^e$ où i parcourt les plongements de $\mathbf{F}_q$ dans k. Dans cette description $\mathrm{Im}(F) = \oplus_i (k[T]/T^e)^{n_i}$. Mais par dualité, on vérifie que $n_i = 1$ pour tout i.

Remarque 3.3.2. — Soit F une extension finie totalement réelle de $\mathbf{Q}$. Soit π un ideal premier de $\mathcal{O}_F$ au dessus de p. Supposons que l'indice de ramification en π vale e et que le degré résiduel en π vale h. On a donc un isomorphisme $\mathcal{O}_F/\pi^e \simeq \mathbf{F}_q[T]/T^e$. Soit $A \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est un schéma abélien de Hilbert-Blumenthal munit d'une action de $\mathcal{O}_F$ possédant une $\mathfrak{c}$-polarisation (au sens de Deligne-Pappas **[D-P]**, 2.1.3) avec $(p, \mathfrak{c}) = 1$. Alors $A[\pi^e]$ est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 muni d'une action de $\mathbf{F}_q[T]/T^e$ qui vérifie la condition (H). De plus, si A vérifie la condition de Rapoport (voir **[Ra]**, def. 1.1, $(\star)$) alors $A[\pi]$ est un BTTHB.

4. Descente étale

4.1. La donnée. — On a la décomposition suivante en idéaux premiers dans $F : p = \prod_{i=1}^{r}(\pi_i)^{e_i}$ et nous définissons l'idéal $\pi = \prod_i(\pi_i)$. On note d_i le degré résiduel en π_i. Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ suffisamment grande. On se donne un plongement $i_p : \bar{\mathbf{Q}} \to \bar{\mathbf{Q}}_p$. On suppose par exemple que K contient tous les éléments de la forme $i_p(x^{\frac{1}{2}})$ pour $x \in F^{\times>0}$. On fixe également des plongements de $\mathcal{O}_F/\pi_i\mathcal{O}_F$ dans $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$. Pour $1 \leq i \leq r$, on identifie $Gal(\mathcal{O}_F/\pi_i\mathcal{O}_F/\mathbf{F}_p)$ avec $\mathbf{Z}/d_i\mathbf{Z}$. Choisissons des représentants premiers à p du groupe des classes strict $\mathfrak{c}_1, ..., \mathfrak{c}_h$. Posons $Y = \coprod_i Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c}_i)} \otimes_{\mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\ \ \mathcal{O}_K$. Soit Y_{rig} l'espace rigide associé à Y sur K. On notera (A, i, ϕ) l'objet universel au dessus de Y ou Y_{rig}. Posons $X = \coprod Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c}_i)\cap\Gamma_0^1(\pi)} \otimes_{\mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\ \ \mathcal{O}_K$ et $X' = \coprod_i Y_{\Gamma_1^1(N,\pi^{-1}\mathfrak{c}_i)\cap\Gamma_0^1(\pi)} \otimes_{\mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\ \ \mathcal{O}_K$. On note de nouveau X_{rig} et X'_{rig} les espaces rigides associés. Remarquons que nous avons noté ici $Y_{\Gamma_1^1(N,\mathfrak{c}_i)\cap\Gamma_0^1(\pi)}$ la correspondance de Hecke $Y_{(\mathfrak{c}_i,\mathfrak{c}_i\pi)}$ définie au numéro **1.5**. On désigne par (A, i, ϕ, H) le quadruplet universel au dessus de X, X', X_{rig} ou X'_{rig}.

L'involution de Weil induite par $(A, H) \mapsto (A/H, A[\pi]/H)$ est un isomorphisme $w : X' \to X$. On dispose de deux projections $p_1 : X \to Y$ (l'oubli de H la structure Iwahorique en π) et $p_2 = p_1 \circ w : X' \to Y$.

On note Y_{ord} le tube ordinaire de Y_{rig}. On note X_{ord-m} et X'_{ord-m} les tubes ordinaires multiplicatifs dans X_{rig} et X'_{rig}.

Soit $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbf{Z}}_p)$ une représentation vérifiant les hypothèses du théorème **0.1**. On cherche donc une forme de Hilbert propre, cuspidale $F \in \mathrm{H}^0(Y, \omega^{\underline{1}})$, qui vérifie $\rho_F = \rho$. On dispose de 2^r applications de "dégénérescence" de $\mathrm{H}^0(Y, \omega^{\underline{1}})^{\Delta}$ vers $\mathrm{H}^0(X, \omega^{\underline{1}})^{\Delta}$ (induites par les applications $(A, H) \mapsto A/H[\prod_i \pi_i^{\epsilon_i}]$ où $\epsilon_i \in \{0, 1\}$). A la forme F on peut alors associer un sous-espace vectoriel de dimension 2^r dans $\mathrm{H}^0(X, \omega^{\underline{1}})^{\Delta}$. Les opérateurs de Hecke aux places ne divisant pas p agissent sur cet espace vectoriel par le scalaire qui donne leur action sur F. On peut également diagonaliser simultanément les actions des opérateurs U_{π_i}. Notons A l'ensemble des r-uplets $a = (a_1, ..., a_r)$ avec $a_i \in \{\alpha_i, \beta_i\}$ (on rappelle que $\{\alpha_i, \beta_i\}$ sont les valeurs propres de $Frob_{\pi_i}$). La base de diagonalisation est alors donnée par les vecteurs $(F_a)_{a\in A}$, caractérisés au scalaire près par $U_{\pi_i}F_a = a_iF_a$. Ce sont les p-stabilisations de F. Les théorèmes de relèvement modulaires ne nous permettent pas d'obtenir F directement, mais ils nous permettent de construire 2^r formes modulaires p-adiques ordinaires $(f_a)_{a\in A}$ qui sont propres pour l'algèbre de Hecke avec les mêmes valeurs propres que les $(F_a)_{a\in A}$. On soupçonne donc que les $(f_a)_{a\in A}$ sont la restriction des $(F_a)_{a\in A}$ au lieu ordinaire, et le but de cette section de l'article est (à quelques normalisations près) de le démontrer (voir la proposition **4.6.1**).

Axiomatisons donc l'information fournie par les théorèmes de relèvement modulaire. Pour $1 \leq i \leq r$, on se donne deux éléments distincts $\alpha_i, \beta_i \in K^{\times}$. Notons A l'ensemble des r-uplets $a = (a_1, ..., a_r)$ avec $a_i \in \{\alpha_i, \beta_i\}$. On suppose disposer de 2^r formes modulaires p-adiques ordinaires $(f_a)_{a\in A}$ de poids $\underline{1}$, normalisées, de Nebentypus $\psi : \mathbb{A}_F/F^{\times}F_{\infty}^{\times+} \to K^{\times}$. Ce sont par définition des sections du module $\mathrm{H}^0(X'_{ord-m}, \omega^{\underline{1}})^{\Delta}$ qui s'identifie canoniquement à $\mathrm{H}^0(X_{ord-m}, \omega^{\underline{1}})^{\Delta}$ (voir le numéro **1.3**). On suppose que pour tous les opérateurs de Hecke $T_{\mathfrak{m}}$, avec $\mathfrak{m} \nmid pN$, on a $C(\mathfrak{m}, f_a) = C(\mathfrak{m}, f_{a'})$ pour tout $a, a' \in A$. On suppose également que $U_{\pi_i}f_a = a_if_a$ pour $1 \leq i \leq r$. Une réduction standard (utiliser [**Shi**], prop. 2.3) nous permet de supposer, quitte à remplacer N par N^k pour k un entier convenable, que $C(\mathfrak{m}, f_a) = 0$ dès que $(\mathfrak{m}, N) \neq 1$.

Lemme 4.1.1. — *Il existe deux combinaisons linéaires normalisées F et G des $\{f_a\}_{a\in A}$ telles que :*
- $C(\mathfrak{m}, F) = C(\mathfrak{m}, f_a)$ *si* $(p, \mathfrak{m}) = 1$,
- $C(\mathfrak{m}, G) = C(\mathfrak{m}\pi^{-1}, F)$ *pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F)$.

Démonstration. — Pour tout $0 \leq k \leq r-1$, on pose $A_k = \{\alpha_i, \beta_i\}_{1\leq i\leq k}$. On pose $F_{r,a} = G_{r,a} = f_a$ pour $a \in A$. Pour tout $0 \leq k \leq r-1$, et tout $a \in A_k$, on définit par la formule de récurrence suivante les formes

$$F_{k,a} = \frac{\alpha_{k+1}F_{k+1,(a,\alpha_{k+1})} - \beta_{k+1}F_{k+1,(a,\beta_{k+1})}}{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}$$

et

$$G_{k,a} = \frac{G_{k+1,(a,\alpha_{k+1})} - G_{k+1,(a,\beta_{k+1})}}{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}$$

On vérifie que $G = G_{0,\emptyset}$ et $F = F_{0,\emptyset}$ satisfont les propriétés requises.

L' identification $\mathrm{H}^0(X_{ord-m}, \omega^{\underline{1}})^{\Delta} = \mathrm{H}^0(X'_{ord-m}, \omega^{\underline{1}})^{\Delta}$ permet de voir F comme une section de $\mathrm{H}^0(X_{ord-m}, \omega^{\underline{1}})^{\Delta}$. La projection p_1 est un isomorphisme de X_{ord-m} vers Y_{ord}. On peut ainsi voir F comme une section de $\mathrm{H}^0(Y_{ord}, \omega^{\underline{1}})^{\Delta}$.

Lemme 4.1.2. — *Considérons le morphisme $p_2 : X'_{ord-m} \to Y_{ord}$ et l'application induite*

$$p_2^{\star} : \mathrm{H}^0(Y_{ord}, \omega^{\underline{1}}) \to \mathrm{H}^0(X'_{ord-m}, \omega^{\underline{1}}).$$

On a la relation $p_2^{\star} F = \psi(\pi) G$.

Démonstration. — On va utiliser le principe du q-développement ([**Ra**], thm. 6.7) pour vérifier cette identité. Soit $(\pi^{-1}\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, i, \Phi_{can})$ une pointe non ramifiée de X' au dessus d'une pointe $(\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, i, \Phi_{can})$ de Y. Précisément, posons $M = \pi^{-1}\mathfrak{c}_i$ et $N = \mathfrak{c}_i$. On a une inclusion canonique $N \to M$, qui induit une inclusion $M^{\vee} \to N^{\vee}$ (avec les notations du numéro **1.2**). Soit σ un cône rationnel dans $N^{\vee}$. On note encore σ sa trace sur $M^{\vee}$. Posons $V = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K[[M]]$ et $U = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K[[N]]$. A partir de σ, on construit alors (voir le numéro **1.2** pour les notations), un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{V}_{\sigma} & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{U}_{\sigma} & \longrightarrow & Y \end{array}$$

L'image inverse du SAHB universel sur $\widehat{V}_{\sigma}$ est $Tate(\pi^{-1}\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, \Phi_{can})_{\sigma}$ et la structure Iwahorique est la π-torsion multiplicative dans $Tate(\pi^{-1}\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, \Phi_{can})_{\sigma}$. L'image inverse du SAHB universel sur $\widehat{U}_{\sigma}$ est $Tate(\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, \Phi_{can})_{\sigma}$. L'application $\widehat{V}_{\sigma} \to \widehat{U}_{\sigma}$ est induite par l'isogénie $Tate(\pi^{-1}\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, \Phi_{can})_{\sigma} \to Tate(\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, \Phi_{can})_{\sigma}$ de noyau la π-torsion de la partie multiplicative de $Tate(\pi^{-1}\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, \Phi_{can})_{\sigma}$.

Choisissons maintenant une décomposition polyédrale admissible Σ de $N^{\vee}$. Notons encore Σ sa trace sur $M^{\vee}$. La donnée de Σ permet de construire des compactifications toroidales partielles Y^{Σ} et ${X'}^{\Sigma}$ de Y et X' aux pointes $(\pi^{-1}\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, i, \Phi_{can})$ et $(\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, i, \Phi_{can})$ (voir [**Ra**], sect. 5). Pour tout $\sigma \in \Sigma$, les schémas $\widehat{U}_{\sigma}$ et $\widehat{V}_{\sigma}$ sont des ouverts des cartes formelles affines de ces compactifications. Le morphisme $X' \to Y$ s'étend en un morphisme ${X'}^{\Sigma} \to Y^{\Sigma}$. On définit de façon évidente ${X'}^{\Sigma}_{ord-m}$ et Y^{Σ}_{ord}. Par le principe de Koecher rigide (qui se déduit de [**Ra**], prop. 4.9) on a les égalités $\mathrm{H}^0(Y_{ord}, \omega^{\underline{1}}) = \mathrm{H}^0(Y^{\Sigma}_{ord}, \omega^{\underline{1}})$ et $\mathrm{H}^0(X'_{ord-m}, \omega^{\underline{1}}) = \mathrm{H}^0({X'}^{\Sigma}_{ord-m}, \omega^{\underline{1}})$. On peut donc définir les q-développements des éléments de $\mathrm{H}^0(Y_{ord}, \omega^{\underline{1}})$ et $\mathrm{H}^0(X'_{ord-m}, \omega^{\underline{1}})$. On utilise les formules de la section **2.4** qui ont été démontrées sur $\mathbf{C}$ pour des formes classiques. Elles sont universelles. On a donc :

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, \Phi_{can}, i, \lambda_{can}) &= \sum_{\xi\in\mathfrak{c}_i^+} a_{c,\xi} q^\xi \\ &= \sum_{\xi\in\mathfrak{c}_i^+} C(c^{-1}\xi, F)\xi^{-\frac{\kappa}{2}}\psi(\xi^{-1}c)q^\xi. \\ G(\pi^{-1}\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, \Phi_{can}, i, \lambda_{can}) &= \sum_{\xi\in\pi^{-1}\mathfrak{c}_i^+} a_{\pi^{-1}c,\xi} q^\xi \\ &= \sum_{\xi\in\pi^{-1}\mathfrak{c}_i^+} C(\pi c^{-1}\xi, G)\xi^{-\frac{\kappa}{2}}\psi(\xi^{-1}\pi^{-1}c)q^\xi \\ &= \sum_{\xi\in\mathfrak{c}_i^+} C(c^{-1}\xi, F)\xi^{-\frac{\kappa}{2}}\psi(\xi^{-1}\pi^{-1}c)q^\xi \\ &= \psi(\pi^{-1})F(\mathfrak{c}_i, \mathcal{O}_F, \Phi_{can}, i, \lambda_{can}). \end{aligned}$$

4.2. Prolongement analytique. — Dans cette section nous établissons des résultats de prolongement analytique pour des formes surconvergentes. On a une application

$$\begin{aligned} DEG : X_{rig} &\to \prod_{i=1}^{r}[0,1]^{d_i} \\ (A, i, \phi, H) &\mapsto (DEG(H[\pi_i]))_{1\leq i\leq r} \end{aligned}$$

On note DEG_i la projection sur le i-ème cube de cette application et $\deg_i$ le degré du groupe $H[\pi_i]$. Nous avons noté X_{ord-m} le tube ordinaire-multiplicatif, c'est par définition $DEG^{-1}((1,1,...,1))$.

Définition 4.2.1. — Une forme surconvergente de poids κ sur X_{rig} est une section du faisceau ω^κ sur l'ouvert X_{ord-m} qui s'étend dans un voisinage strict.

En reprenant la construction du numéro **1.5**, on construit des opérateurs de Hecke U_{π_i} pour $1 \leq i \leq r$ agissant sur les formes surconvergentes sur X_{rig}. Fixons un isomorphisme $X \simeq X'$ en choisissant des isomorphismes positifs $\mathfrak{c}_k \simeq \mathfrak{c}_{j(k)}\pi_i^{-1}$ pour tout $1 \leq k \leq h$ et $j(k)$ fonction de k. Considérons la correspondance de Hecke $C(\pi_i) \to \mathrm{Spec}\ K$ dont les points sont des quintuplets (A, i, ϕ, H, H_i') ou (A, i, ϕ, H) est un point de $X_K \simeq X_K'$ et $H_i' \subset A[\pi_i]$ est un sous-groupe de Raynaud vérifiant $H_i' \cap H = \{0\}$ dans $A[\pi_i]$. On a une projection $q_1 : C(\pi_i) \to X_K$ d'oubli de H_i' et une projection $q_2 : C(\pi_i) \to X_K$ induite par $(A, H, H_i') \mapsto (A/H_i', \mathrm{Im}H)$ où $\mathrm{Im}H$ est l'image de H dans A/H_i'. On note U_{π_i} l'opérateur de Hecke ensembliste $q_2.q_1^{-1}$ agissant sur les points de X_K. La proposition qui suit est une généralisation de la section 4 de **[P-S]**.

Proposition 4.2.2. — *Soit $x = (A, i, \Phi, H) \in X(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. Pour tout $y \in U_{\pi_i}(x)$, $\deg_i(y) \geq \deg_i(x)$. Supposons qu'il existe $y \in U_{\pi_i^{2e_i}}(x)$ tel que $deg_i(y) = deg_i(x)$.*

Alors $DEG_i(x) = (\frac{k_1}{e_i}, ..., \frac{k_{d_i}}{e_i})$ où $0 \leq k_i \leq e_i$ est un entier.

De plus, il existe un sous-groupe de Raynaud H' de $A[\pi_i]$ tel que comme schéma en groupes sur Spec $\mathcal{O}_{\bar{K}}$*, on a $A[\pi_i] = H \oplus H'$ où*

$$DEG(H') = (\frac{e_i - k_1}{e_i}, ..., \frac{e_i - k_{d_i}}{e_i}).$$

Si x est dans le lieu de Rapoport, alors $k_i \in \{0, e_i\}$.

Démonstration. — Pour le premier point, voir **[P-S]**, section 4. Supposons donc qu'il existe $y \in U_{\pi_i^{2e_i}}(x)$ tel que $deg_i(y) = deg_i(x)$. Il existe alors un sous-schéma en groupes $G \subset A[\pi_i^{2e_i}]|_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{\bar{K}}}$ dont la fibre générique est isomorphe à $\mathcal{O}_F/{\pi_i}^{2e_i}$ comme $\mathcal{O}_F$-module et tel que $G \oplus H$ dans $A[\pi_i^{2e_i}]|_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{\bar{K}}}$. Posons $Fil_k = G[\pi_i^k]$ et $Gr_k = Fil_k/Fil_{k-1}$. On a $(A/Fil_k)[\pi_i] = Gr_k \oplus H$ comme schémas en groupes sur Spec $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. (On identifie H avec son image via l'isogénie $A \to A/Fil_k$). Il en résulte que $\deg Gr_k = \deg(A/Fil_k)[\pi_i] - \deg H = d_i - \deg H$ ne dépend pas de k. Par conséquent (voir **[Far]**, coro. 3), on a une suite exacte de schémas en groupes sur Spec $\mathcal{O}_{\bar{K}}$:

$$0 \to Fil_k \to Fil_{k+r} \overset{\pi_i^k}{\to} Fil_r \to 0$$

En faisant $r = k = e_i$, on obtient que G est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 2. En particulier $\omega_{G[\pi_i^{e_i}]}$ est un $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ module libre de rang fini. Rappelons que $\omega_{G[\pi_i^{e_i}]}$ est aussi un $\mathcal{O}_{F_{\pi_i}}$-module. Notons $\mathcal{O}_{F^0_{\pi_i}}$ l'anneau d'entiers de la sous-extension maximale non-ramifiée sur $\mathbf{Q}_p$ de F_{π_i}. Pour tout plongement $\tau : \mathcal{O}_{F^0_{\pi_i}} \to \mathcal{O}_{\bar{K}}$, on peut définir un facteur direct $\omega_{G[\pi_i^{e_i}],\tau}$ de $\omega_{G[\pi_i^{e_i}]}$ qui est encore un $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$-module libre. On a une action de l'opérateur nilpotent π_i sur ce module et la suite exacte au dessus entraîne l'exactitude des suites

$$0 \to \omega_{G[\pi_i^{e_i}],\tau}[\pi_i^k] \to \omega_{G[\pi_i^{e_i}],\tau}[\pi_i^{k+r}] \overset{\pi_i^k}{\to} \omega_{G[\pi_i^{e_i}],\tau}[\pi_i^r] \to 0$$

Par conséquent, on trouve que $\deg \omega_{G[\pi_i],\tau} = \frac{1}{e_i} \deg \omega_{G[\pi_i^{e_i}],\tau} \in \frac{1}{e_i}\mathbf{Z}$.

Comme H s'identifie au dual de $G[\pi_i]$, on déduit les deux premiers points de la proposition. Enfin, rappelons que sur le lieu de Rapoport, chaque $\omega_{A[\pi_i],\tau}$ est un $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ module libre de rang 1. Ceci permet de déduire le dernier point.

Comme U_{π_i} stabilise X_{ord-m}, il définit un opérateur de Hecke sur les formes surconvergentes encore noté de la même manière. On pose $U_\pi = \prod_i U_{\pi_i}$.

Corollaire 4.2.3. — *Toute forme surconvergente f propre pour l'opérateur U_π, de pente finie, se prolonge sur l'ouvert d'équation* $\deg_i > d_i - \frac{1}{e_i}, 1 \leq i \leq r$.

Démonstration. — On cherche à étendre f par la formule $f = a_\pi^{-1} U_\pi f$ où a_π est la valeur propre de U_π agissant sur f. C'est alors une application classique de la proposition précédente et du principe du maximum (voir **[P-S]**, 6.2).

4.3. La descente : une première tentative inaboutie. — Ce paragraphe esquisse une démonstration incomplète du résultat suivant qui est un cas particulier de la proposition **4.6.1** démontrée au numéro **4.6**. On utilise les notations du numéro **4.1**.

Supposons $p > 2$ inerte. Alors les formes modulaires p-adiques f_a de poids $\underline{1}$ sont des formes classiques de poids $\underline{1}$ sur X et la forme F est une forme classique de poids $\underline{1}$ sur Y.

Nous espérons que cette démonstration incomplète éclaire la stratégie générale de cet article et motive les sections techniques qui suivent. Nous avons supposé p inerte pour alléger le plus possible les notations, p peu ramifié dans F suffirait.

On commence par améliorer un peu le corollaire **4.2.3**.

Lemme 4.3.1. — *Toute forme surconvergente f propre pour l'opérateur U_p, de pente finie, se prolonge à l'ouvert $V = \{x, \quad DEG(x) \in [1 - \frac{1}{p-1}, 1]^d\} \subset X_{rig}$.*

Démonstration. — Soit $x \in V$. On vérifie que le seul sommet du cube $[0,1]^d$ inclus dans la pyramide d'équation $(\delta_1, ..., \delta_d) \geq DEG(x)$ est le sommet $(1, 1, ..., 1)$. La proposition **4.2.2** entraine que pour tout $y \in X_{rig}$ qui vérifie $DEG(y) \geq DEG(x)$ et $\deg(y) \neq d$, et tout $z \in U_{p^2}(y)$, on a $\deg(z) > \deg(y)$. On peut donc prolonger f à V en utilisant **[P-S]**, 6.2.

Comme les $\{f_a\}$ sont des formes modulaires p-adiques ordinaires, elles surconvergent. Posons $V' = \{x \in X'_{rig}, \quad DEG(x) \in [1 - \frac{1}{p-1}, 1]^d\} \subset X'_{rig}$. Par le lemme précédent, on peut prolonger les $\{f_a\}$ ainsi que F et G à V'. Posons $U = w.V'$, c'est l'ouvert $\{x, \quad DEG(x) \in [0, \frac{1}{p-1}]^d\}$ de X_{rig}. Voyons G comme une section de $\omega^{\underline{1}}$ sur U grâce à w. On voit également F comme une section sur Y_{ord}. Considérons le diagramme :

$$U \times_{Y_{rig}} U \overset{p_{1,1}, p_{1,2}}{\rightrightarrows} U \overset{p_1}{\to} Y_{rig}$$

d'espaces rigides quasi-compacts où p_1 est un morphisme étale surjectif d'après le corollaire **3.1.8** donc de descente effectif d'après **[B-G]**.

Soit X_{ord-et} le tube ordinaire-étale de X_{rig}. La formule **4.1.2** signifie que $p_1^\star\psi(\pi)^{-1}F = G|_{X_{ord-et}}$. On veut vérifier que $p_{1,2}^\star G = p_{1,1}^\star G$ sur $U \times_{Y_{rig}} U$. Cette relation est vérifiée sur $X_{ord-et} \times_{Y_{rig}} X_{ord-et}$ car $p_{1,2}^\star p_1^\star = p_{1,1}^\star p_1^\star$. On ne sait pas si l'application $\Pi_0(X_{ord-et} \times_{Y_{rig}} X_{ord-et}) \to \Pi_0(U \times_{Y_{rig}} U)$ est surjective. Si c'est vrai, alors la donnée de descente se propage à $U \times_{Y_{rig}} U$ et on peut descendre G en une forme sur Y_{rig} dont la restriction à Y_{ord} vaut F. Par le principe de Koecher et GAGA, cette forme serait classique.

Dans les sections qui suivent, nous allons introduire des ouverts de Y_{rig} et X_{rig} convenables pour lesquels on saura démontrer le résultat de connexité manquant et achever la démonstration.

4.4. Stratification. — On note Y_0 la fibre spéciale de Y. Rappelons que Y_0 est normal. On a $Y_0 = Y_0^R \coprod Y_0^{DP}$ où Y_0^R est le lieu de Rapoport et Y_0^{DP} est son complémentaire. On sait que Y_0^R est lisse. Au dessus de Y_0^R, les groupes $A[\pi_i]$ sont des BTTHB (voir la remarque **3.3.2**). On peut leur associer les applications de Hasse-Witt :

$$HW_i : \omega_{A[\pi_i]} \to \omega_{A[\pi_i]^{(p)}}$$

et pour tout $1 \leq k \leq d_i$, on a un invariant de Hasse partiel :

$$HW_{i,k} : \omega_{A[\pi_i],k} \to \omega_{A[\pi_i],k-1}.$$

Notons $D_{i,k}$ le diviseur d'équation $HW_{i,k} = 0$. Ce sont des diviseurs lisses à croisement normaux d'après [**A-G**], corollaire 8.18. On peut stratifier Y_0^R par les intersections successives des $\{D_{i,k}\}$. Posons $Z_0 = \{x \in Y_0^R, \sharp\{(i,k), HW_{i,k}(x) = 0\} \leq 1\}$. C'est un ouvert de Y_0 de complémentaire de codimension 2. Posons $Y_{0,i,k} = Z_0 \cap D_{i,k+1}$. On a $Z_0 = Y_{0,ord} \coprod_{i,k} Y_{0,i,k}$. Posons $Z =]Z_0[$, $Y_{i,k} =]Y_{0,i,k}[$. On a $Z = Y_{ord-m} \coprod_{i,k} Y_{i,k}$.

Proposition 4.4.1. — *L'application de restriction :*

$$\mathrm{H}^0(Y_{rig}, \omega^\kappa) \to \mathrm{H}^0(Z, \omega^\kappa)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Cela résulte du fait que Y_0 est normal et que Z_0 est un ouvert de complémentaire de codimension 2.

4.5. Variation des composantes connexes. — Posons $X_{ord-et} = DEG^{-1}((0,0,..,0))$. Notons aussi $X_{i,k}$ l'intersection du lieu de Rapoport avec l'image inverse par DEG de l'arrête d'équation $(0,..,0,t,0,..,0)$ où $0 < t < 1$ est la k-ième coordonnée du i-ème cube. On note également $X_{0,i,k}$ la spécialisation de $X_{i,k}$. L'ouvert rigide $X_{i,k}$ de X_{rig} paramètre des quadruplets (A, i, ϕ, H) où $A \in Y_{i,k}$ (voir le corollaire **3.2.3**) et $H = \oplus H_i \subset A[\pi] = \oplus_i A[\pi_i]$ est une structure de niveau $\Gamma_0^1(\pi)$ et vérifie $DEG(H_j) = (0,...,0)$ si $j \neq i$ (et donc H_j est étale) et $DEG(H_i) = (0,..,0,t,0,..,0)$ avec $0 < t < 1$ en $k-$ième position.

Notons E l'anneau rigide Spec $K < T, U > /TU - p$. Considérons $t : E \to [0,1]$ la fonction valuation de T. Posons $\mathcal{A}_1 = \{x \in E, t(x) \in]0,1[\}$. Notons aussi $\mathcal{B}$ la boule unité ouverte centrée en 0. Par la théorie du modèle local (voir la proposition **B.1** de l'appendice), le tube d'un point de $X_{0,i,k}$ est isomorphe à $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{B}^{d-1}$ et la fonction t sur $X_{0,i,k}$ obtenue via DEG et qui donne la coordonnée sur l'arrête s'identifie à la fonction t sur l'anneau $\mathcal{A}_1$.

Pour tout interval $I \subset]0,1[$, on note $X_{i,k,I} = \{x \in X_{i,k}, t(x) \in I\}$.

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Proposition 4.5.1. — *Pour tout* $0 < a < \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)} < a' < 1$*, les applications :*

$$\Pi_0(X_{i,k,]0,a]} \times_{Y_{i,k}} X_{i,k,]0,a]}) \to \Pi_0(X_{i,k,]0,a']} \times_{Y_{i,k}} X_{i,k,]0,a']})$$

sont surjectives.

Remarque 4.5.2. — Cet énoncé entraîne par exemple que tout triplet $(A, H, H') \in X_{i,k} \times_{Y_{i,k}} X_{i,k}$ peut se déformer dans $X_{i,k} \times_{Y_{i,k}} X_{i,k}$ en un triplet $(\tilde{A}, \tilde{H}, \tilde{H}') \in X_{i,k} \times_{Y_{i,k}} X_{i,k}$ où $\tilde{H}$ et $\tilde{H}'$ sont des groupes de degré arbitrairement petit.

Introduisons l'espace rigide $W_{i,k} \to Y_{i,k}$. Il paramètre les quadruplets $(A, i, \phi, H_i \subset A[\pi_i])$ avec $DEG(H_i) = (0, 0, .., t, 0, ..., 0)$, $t \in]0, 1[$ en $k-$ième position. On définit de façon évidente $W_{i,k,I}$ pour tout interval $I \subset]0, 1[$. On a une application naturelle $X_{i,k} \to W_{i,k}$ qui est un revêtement étale. Nous allons commencer par étudier la projection $q : X_{i,k} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k} \to X_{i,k}$. On note (A, i, ϕ, H, H_i') l'objet universel sur $X_{i,k} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k}$. On pose aussi $t(H) = \deg(H)$ et $t(H_i') = \deg(H_i)$. Voici une traduction de la proposition **3.2.6** (et de **3.2.4** si $d_i = 1$).

Proposition 4.5.3. — *Soit* $x = (A, i, \phi, H) \in X_{i,k}$.

i. *Si* $t(H) \in]0, \frac{p^{d_i-1}-1}{(p-1)p^{d_i-1}}]$, *alors* $t(H_i') = t(H)$ *pour tout* $(A, i, \phi, H, H_i') \in q^{-1}(x)$. *De plus,* $\sharp q^{-1}(x) = p^{d_i}$.

ii. *Si* $t(H) \in]\frac{p^{d_i-1}-1}{(p-1)p^{d_i-1}}, \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}[$, *alors* $\sharp q^{-1}(x) = p^{d_i}+1$. *Il existe un unique* $(A, i, \phi, H, H_i') \in q^{-1}(x)$ *tel que* $t(H_i') = \frac{p^{d_i}-1}{p-1} - p^{d_i}t(H)$. *Sinon,* $t(H_i') = t(H)$ *pour tout* $(A, i, \phi, H, H_i') \in q^{-1}(x)$.

iii. *Si* $t(H) = \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}$ *alors* $\sharp q^{-1}(x) = p^{d_i} + 1$ *et pour tout* $(A, i, \phi, H, H_i') \in q^{-1}(x)$ *on a* $t(H_i') = \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}$.

iv. *Si* $t(H) \in]\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}, 1[$, *alors* $\sharp q^{-1}(x) = p^{d_i}+1$. *Il existe un unique* $(A, i, \phi, H, H_i') \in q^{-1}(x)$ *tel que* $t(H_i') = t(H)$. *Sinon,* $t(H_i') = \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}} - \frac{t(H)}{p^{d_i}}$ *pour tout* $(A, i, \phi, H, H_i') \in q^{-1}(x)$.

Démonstration. — Le point i correspond à la situation iii de la proposition **3.2.6** lorsque $t(H) \geq \frac{1}{p}$. Lorsque $t(H) < \frac{1}{p}$, il y a un sous-groupe canonique et le point résulte de la discussion précédent le corollaire **3.2.5**. Les points ii et iv correspondent à la situation ii de la proposition **3.2.6** (et également i de la proposition **3.2.4** lorsque $d_i = 1$). Le point iii correspond à la situation i de la proposition **3.2.6** (et également ii de la proposition **3.2.4** lorsque $d_i = 1$).

Lemme 4.5.4. — *Pour tout* $0 < a \leq a' < \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}$, *les applications :*

$$\Pi_0(X_{i,k,]0,a]} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k,]0,a]}) \to \Pi_0(X_{i,k,]0,a']} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k,]0,a']})$$

sont surjectives.

Démonstration. — On remarque que le morphisme :

$$X_{i,k,[a,b]} \times W_{i,k,[a,b]} \to X_{i,k,[a,b]}$$

est fini étale de degré p^{d_i} si $[a, b] \subset]0, \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}[$. En effet, on est soit dans la situation i de la proposition **4.5.3**, ou dans la situation ii, mais sous la contrainte $t(H_i') = t(H)$. Toute composante connexe C de $X_{i,k,[a,b]} \times W_{i,k,[a,b]}$ se surjecte sur $X_{i,k,[a,b]}$. Tout point $(A, i, \phi, H) \in X_{i,k,[a,b]}$ possède une image inverse (A, i, ϕ, H, H_i') dans C qui vérifie nécéssairement $t(H) = t(H_i')$.

Lemme 4.5.5. — *Pour tout* $\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)} < a < 1$, *toute composante connexe de*

$$X_{i,k,[\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}}-p^{-d_i}a,a]} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k}$$

rencontre une composante connexe de $X_{i,k,]0,\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}}-p^{-d_i}a]} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k,]0,\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}}-p^{-d_i}a]}$.

Démonstration. — La projection $X_{i,k,[\frac{p^{d_i}-1}{p^{d_i}(p-1)}-p^{-d_i}a,a]} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k} \to X_{i,k,[\frac{p^{d_i}-1}{p^{d_i}(p-1)}-p^{-d_i}a,a]}$ est un revêtement étale de degré $p^{d_i} + 1$ car on est dans l'une des situations ii, iii ou iv de la proposition **4.5.3**. Soit C une composante connexe de $X_{i,k,[\frac{p^{d_i}-1}{p^{d_i}(p-1)}-p^{-d_i}a,a]} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k}$. Supposons qu'il n'y ait pas dans C de point (A, i, ϕ, H, H_i') avec $t(H) = t(H_i') = \frac{p^{d_i}-1}{p^{d_i}(p-1)} - p^{-d_i}a$. Cela signifie que l'application $C|_{X_{i,k,\{\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}}-p^{-d_i}a\}}} \to X_{i,k,\{\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}}-p^{-d_i}a\}}$ est un isomorphisme (on voit le singleton

$\{\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}} - p^{-d_i}a\}$ comme un interval de $]0,1[$). C'est donc que C est étale finie de degré 1 sur $X_{i,k,[\frac{p^{d_i}-1}{p^{d_i}(p-1)} - p^{-d_i}a, a]}$. En particulier, l'application $C|_{X_{i,k,]\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)},a]}} \to X_{i,k,]\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)},a]}$ est un isomorphisme. De plus, pour tout $(A,i,\phi,H) \in X_{i,k,]\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)},a]}$, d'antécédant $(A,i,\phi,H,H'_i) \in C$, on a forcément $t(H) \neq t(H'_i)$ car sinon C serait la diagonale donnée par $H'_i = H[\pi_i]$. On a donc une règle qui à tout quadruplet $(A,i,\phi,H) \in X_{i,k,]\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)},a]}$ associe un groupe $H'_i \subset A[\pi_i]$ qui vérifie $t(H) + p^{d_i}t(H'_i) = \frac{p^{d_i}-1}{p-1}$. Soit L une extension finie de K. La règle précédente entraîne que pour tout élément $x \in L$ tel que $v(x) \in]\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}, a]$, il existe un élément x' tel que $v(x') = \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}} - \frac{v(x)}{p^{d_i}}$. Quitte à étendre les scalaires, on peut toujours supposer qu'une uniformisante π de L vérifie $p^{d_i}v(\pi) \in]0, a - \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}]$. Il n'y a pas de mal à supposer que cette uniformisante vérifie aussi $v(\pi) = \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}\alpha}$ pour un entier α convenable. Il en résulte que pour tout $x \in L^\times$, il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $v(\pi^{p^{d_i}m}x) \in]\frac{p^{d_i}-1}{p-1(p^{d_i}+1)}, a]$. Il existe alors $x' \in L$ tel que $v(x') = \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}} - \frac{v(x)}{p^{d_i}} - v(\pi^m)$ et il en résulte que $v(\pi^{m-\alpha}x') = -\frac{v(x)}{p^{d_i}}$. Ceci entraîne que le groupe $v(L^\times)$ est p-divisible, ce qui contredit le fait que la valuation de L est discrète.

Il résulte des deux lemmes précédents que pour tout $0 < a < \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)} < a' < 1$, les applications :

$$\Pi_0(X_{i,k,]0,a]} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k,]0,a]}) \to \Pi_0(X_{i,k,]0,a']} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k,]0,a']})$$

sont surjectives.

En effet, soit C une composante connexe de $X_{i,k,]0,a']} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k,]0,a']}$. Si celle-ci rencontre $X_{i,k,]0,\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}[} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k,]0,\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}[}$, on conclût grâce au lemme **4.5.4**. Par le lemme **4.5.5**, c'est nécessairement le cas puisque $\frac{p^{d_i}-1}{(p-1)p^{d_i}} - p^{-d_i}a' < \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}$.

Pour tout $a \in]0,1[$, les morphismes $X_{i,k,]0,a]} \times_{Y_{i,k}} X_{i,k,]0,a]} \to X_{i,k,]0,a]} \times_{Y_{i,k}} W_{i,k,]0,a]}$ sont des revêtements étales et on en déduit aisément la proposition **4.5.1**.

4.6. La descente. — On reprend les notations du numéro **4.1**.

Proposition 4.6.1. — *Supposons que pour* $1 \leq i \leq r$, *on a*

$$e_i < \frac{(p-1)(p^{d_i}+1)}{p^{d_i}-1}.$$

Alors les formes modulaires p-adiques f_a de poids $\underline{1}$ sont des formes classiques de poids $\underline{1}$ sur X et la forme F est une forme classique de poids $\underline{1}$ sur Y.

Démonstration. — On va démontrer que F est une forme classique sur Y. Cela entraîne la classicité des autres formes par des raisonnements standards (G est une vieille forme qui provient de F et les formes $\{f_a\}$ sont les p-stabilisations de F). Posons $S = X_{ord-et} \cup_{i,k} X_{i,k}$. Soit $v = (v_i)_{1\leq i\leq r} \in [0,1[^r$. On pose $S_{[0,v]} = \{x \in S, \deg_i(x) \leq v_i\}$. Dès que $v_i \geq \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}$, le morphisme $S_{[0,v]} \to Z$ est surjectif. Rappelons le fait classique que les formes modulaires p-adiques ordinaires $\{f_a\}$ sont surconvergentes. Considérons $w.S \subset X'_{rig}$ l'image de S par l'involution de Weil. D'après le corollaire **4.2.3** et vu les hypothèses sur e_i, il existe $v = (v_i)_{1\leq i\leq r}$, avec $v_i > \frac{p^{d_i}-1}{(p-1)(p^{d_i}+1)}$ tel que les formes modulaires $\{f_a\}$ se prolongent à $wS_{[0,v]}$. Il en va de même de F et G qui sont des combinaisons linéaires des $\{f_a\}$. On peut alors voir G comme une forme définie sur $S_{[0,v]}$ en identifiant S et $w.S$ via l'involution de Weil. On voit également F comme une section sur Y_{ord}. Considérons le diagramme :

$$S_{[0,v]} \times_Z S_{[0,v]} \overset{p_{1,1},p_{1,2}}{\rightrightarrows} S_{[0,v]} \overset{p_1}{\to} Z$$

d'espaces rigides quasi-compacts où p_1 est un morphisme étale surjectif donc de descente effectif d'après [**B-G**].

La formule **4.1.2** signifie que $p_1^\star\psi(\pi)^{-1}F = G|_{S_{[0,0]}}$. On veut vérifier que $p_{1,2}^\star G = p_{1,1}^\star G$ sur $S_{[0,v]} \times_Z S_{[0,v]}$. Cette relation est vérifiée sur $S_{[0,0]}$ car $p_{1,2}^\star p_1^\star = p_{1,1}^\star p_1^\star$. D'après la proposition **4.5.1**, l'application $\Pi_0(S_{[0,0]} \times_Z S_{[0,0]}) \to \Pi_0(S_{[0,v]} \times_Z S_{[0,v]})$ est surjective. La donnée de descente sur $S_{[0,0]} \times_Z S_{[0,0]}$ se propage donc à $S_{[0,v]} \times_Z S_{[0,v]}$ par le principe du prolongement analytique des identités et donc G descend sur Z. Comme $\mathrm{H}^0(Z, \omega^{\underline{1}}) = \mathrm{H}^0(Y_{rig}, \omega^{\underline{1}})$ d'après la proposition **4.4.1**, on conclût par le principe de Koecher et GAGA.

4.7. Application aux théorèmes de relèvement modulaire. — Nous sommes en mesure de démontrer notre résultat principal.

Théorème 4.7.1. — *Soit F un corps totalement réel et p un nombre premier impair. On pose $(p) = \prod_{i=1}^r \pi_i^{e_i}$ la décomposition de p en idéaux premier. On note d_i le degré résiduel en π_i. Soit*

$$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbf{Z}}_p)$$

une représentation galoisienne. On fait les hypothèses suivantes :

i. *ρ est continue, ramifiée en un nombre fini de places,*

ii. *En toute place $\pi_i \mid p$, il existe deux éléments $\alpha_i, \beta_i \in \bar{\mathbf{Z}}_p^\times$, tels que $\alpha_i \neq \beta_i \mod \mathfrak{m}_{\bar{\mathbf{Z}}_p}$ et $\rho|_{D_{\pi_i}} \simeq \psi_{\alpha_i} \oplus \psi_{\beta_i}$ où ψ_{α_i} et ψ_{β_i} sont les caractères non ramifiés qui appliquent $Frob_{\pi_i}$ sur α_i et β_i,*

iii. *$\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est absolument irreductible,*

iv. *$\bar{\rho}$ est ordinairement modulaire : il existe g une forme modulaire ordinaire propre et un plongement $i : \bar{\mathbf{Q}} \to \bar{\mathbf{Q}}_p$ tel que $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}_{g,i}$.*

v. *pour $1 \leq i \leq r$, on a $e_i \leq p-1$ si $d_i \geq 2$ et $e_i \leq p$ si $d_i = 1$,*

vi. *si $p \neq 3$, $[F(\zeta_p) : F] > 3$,*

Il existe alors une forme modulaire de Hilbert cuspidale f de poids $\underline{1}$, propre à coefficients dans $\bar{\mathbf{Q}}$ et un plongement $i_p : \bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$ tel que $\rho_{f,i_p} = \rho$. En particulier, ρ est d'image finie.

Démonstration. — On est sous les hypothèses du théorème 2.1 de [**Ge**]. On peut donc construire 2^r formes modulaires compagnons $\{g_a\}$ pour $a = (a_i)_{1\leq i\leq r} \in \{\alpha_i, \beta_i\}_{1\leq i\leq r}$. Ce sont des formes modulaires cuspidales propres ordinaires de poids $\underline{p}$ qui vérifient $\bar{\rho}_{g_a} \simeq \bar{\rho}$ et $U_{\pi_i} g_a = a_i' g_a$ avec $a_i' = a_i \mod \mathfrak{m}_{\bar{\mathbf{Z}}_p}$. On montre alors un théorème $R^{red} = T$ en famille ordinaire dans la veine du théorème 3.5.5 de [**Ki**] (et dans l'esprit de [**G**] thm. 4.3.1). Spécialisant en poids $\underline{1}$, ceci permet de construire 2^r formes modulaires p-adiques ordinaires $\{f_a\}$ de poids $\underline{1}$ vérifiant $\rho_{f_a} = \rho$ et $U_{\pi_i} f_a = a_i f_a$. On applique alors la proposition **4.6.1** à des renormalisations convenables des $\{f_a\}$ comme expliqué au début du numéro **4.1**.

On peut souvent alléger une peu les hypothèses sur $\bar{\rho}$.

Théorème 4.7.2. — *Soit F un corps totalement réel et $p \geq 7$ un nombre premier. On pose $(p) = \prod_{i=1}^r \pi_i^{e_i}$ la décomposition de p en idéaux premier. On note d_i le degré résiduel en π_i. Soit*

$$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbf{Z}}_p)$$

une représentation galoisienne. On fait les hypothèses suivantes :

i. *ρ est continue, ramifiée en un nombre fini de places,*

ii. *En toute place $\pi_i \mid p$, il existe deux éléments $\alpha_i, \beta_i \in \bar{\mathbf{Z}}_p^\times$, tels que $\alpha_i \neq \beta_i \mod \mathfrak{m}_{\bar{\mathbf{Z}}_p}$ et $\rho|_{D_{\pi_i}} \simeq \psi_{\alpha_i} \oplus \psi_{\beta_i}$ où ψ_{α_i} et ψ_{β_i} sont les caractères non ramifiés qui appliquent $Frob_{\pi_i}$ sur α_i et β_i,*

iii. *$\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est absolument irreductible,*

iv. *$\bar{\rho}$ est modulaire.*

v. *pour $1 \leq i \leq r$, on a $e_i \leq p-1$ si $d_i \geq 2$ et $e_i \leq p$ si $d_i = 1$,*

vi. $[F(\zeta_p):F] > 4$,

Il existe alors une forme modulaire de Hilbert cuspidale f de poids $\underline{1}$, propre à coefficients dans $\bar{\mathbf{Q}}$ et un plongement $i_p : \bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$ tel que $\rho_{f,i_p} = \rho$. En particulier, ρ est d'image finie.

Démonstration. — Grâce au théorème 6.1.10 de [**BLGG**], on peut supposer que $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}_g$ où g est une forme modulaire de Hilbert de poids 2, ordinaire et potentiellement Barsotti-Tate aux places divisant p. On est ramené au théorème précédent.

4.8. Application à la conjecture d'Artin. — On va démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.8.1. — *Soit F un corps totalement réel et $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ une représentation continue. On suppose que :*

i. *ρ est totalement impaire,*

ii. $\mathrm{Proj}\rho(G_F) \simeq \mathrm{A}_5$,

iii. *ρ est non ramifiée en toute place $v \mid 5$ et $\mathrm{Proj}\rho(\mathrm{Frob}_v)$ est d'ordre 2,*

iv. $[F(\zeta_5):F] = 4$,

v. *Soit $(5) = \prod_{i=1}^r \pi_i^{e_i}$ la décomposition de 5 en idéaux premiers dans F et soit d_i le degré résiduel en π_i. On suppose que $e_i \leq 4$ si $d_i \geq 2$ et que $e_i \leq 5$ si $d_i = 1$.*

Alors il existe une forme de Hilbert f de poids $\underline{1}$, cuspidale, à coefficients dans $\bar{\mathbf{Q}}$ et un plongement $i : \bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$ telle que $\rho_{f,i} \simeq \rho$.

Fixons un isomorphisme de $\mathbf{C}$ avec une clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}_5$ de $\mathbf{Q}_5$. Au moyen de cet isomorphisme, et quitte à faire une conjuguaison, on peut supposer que ρ est à valeur dans $\mathrm{GL}_2(\bar{\mathbf{Z}}_5)$. Soit $\bar{\rho}$ sa réduction. Comme A_5 est simple, $\mathrm{Proj}\bar{\rho}(G_F) \simeq \mathrm{A}_5$. Au vu du théorème **4.7.1**, il suffit de démontrer la proposition suivante qui est une généralisation directe du théorème 2.4 de [**Tay**].

Proposition 4.8.2. — *Soit F un corps totalement réel et $\bar{\rho} : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbf{F}}_5)$ une représentation telle que :*

i. *$\bar{\rho}$ est totalement impaire,*

ii. $\mathrm{Proj}\bar{\rho}(G_F) \simeq \mathrm{A}_5$,

iii. *$\bar{\rho}$ est non ramifiée en toute place $v \mid 5$ et $\mathrm{Proj}\bar{\rho}(\mathrm{Frob}_v)$ est d'ordre 2,*

iv. $[F(\zeta_5):F] = 4$.

Alors $\bar{\rho}$ est ordinairement modulaire.

Lemme 4.8.3. — *Il existe une extension totalement réelle F' biquadratique de F telle que $F(\sqrt{5}) \subset F'$ et $\sqrt{5}$ est totalement décomposé dans F', et une représentation $\tilde{\rho} : G_{F'} \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$ de déterminant le caractère cyclotomique modulo 5, telle que $\tilde{\rho}$ est isomorphe à une tordue de $\bar{\rho}|_{G_{F'}}$.*

Démonstration. — On a un isomorphisme classique $\mathrm{A}_5 \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$. On vérifie facilement que tout sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\bar{\mathbf{F}}_5)$ isomorphe à A_5 est conjugué à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$ et on suppose donc que $\mathrm{Proj}\bar{\rho}(G_F) = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$. On peut également supposer que $\bar{\rho}(G_F) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ où q est une puissance convenable de 5. Munissons les groupes $\mathbf{F}_q^\times$ et $(\mathbf{F}_q^\times)^2 = \{x^2, x \in \mathbf{F}_q^\times\}$ d'une action triviale de G_F. Considérons la suite exacte :

$$\mathrm{H}^1(G_F, \mathbf{F}_q^\times) \to \mathrm{H}^1(G_F, (\mathbf{F}_q^\times)^2) \xrightarrow{d} \mathrm{H}^2(G_F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

Comme $\mathrm{Proj}\bar{\rho}(G_F) = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$, $\mathrm{dét}\bar{\rho}$ prend ses valeurs dans $(\mathbf{F}_q^\times)^2$ et définit donc une classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^1(G_F, (\mathbf{F}_q^\times)^2)$. Il existe une extension quadratique F_0/F totalement réelle dans laquelle toute place divisant 5 est totalement décomposée et toutes les obstructions locales $d(\mathrm{dét}_v)$ en les places finies v de F deviennent nulles dans $\mathrm{H}^2(G_{F_{0,v}}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Remarquons que les obstructions locales à l'infini sont toutes non triviales car $\bar{\rho}$ est totalement impaire. Posons $F' = F_0(\sqrt{5})$. Soit $\epsilon : G_{F'} \to (\mathbf{F}_q^\times)^2$ le caractère cyclotomique modulo 5. Toutes les obstructions locales $d(\epsilon_v)$ en les places finies v de F' sont nulles dans $\mathrm{H}^2(G_{F'_v}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Remarquons que les obstructions locales à l'infini sont toutes non triviales car ϵ est totalement impaire. Il en résulte que $d(\epsilon.\text{dét}) = 0$ dans $\mathrm{H}^2(G_{F'}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Il existe donc un caractère $\chi : G_{F'} \to \mathbf{F}_q^\times$ tel que $\epsilon\text{dét}\bar{\rho} = \chi^2$. La représentation $\bar{\rho}|_{G_{F'}}(\chi^{-1})$ a pour déterminant ϵ. Soit $\sigma \in G_{F'}$. On a $\bar{\rho}|_{G_{F'}}(\chi^{-1})(\sigma) = Z.M$ où $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_5)$ et $Z = z\mathrm{Id}$ avec $z \in \mathbf{F}_q^\times$. Comme $z^2 = \epsilon(\sigma)$, on voit que $z \in \mathbf{F}_5^\times$. On peut donc prendre $\tilde{\rho} = \bar{\rho}|_{G_{F'}}(\chi^{-1})$.

Lemme 4.8.4. — *Il existe un extension galoisienne totalement réelle résoluble F''/F et une courbe elliptique $E \to \mathrm{Spec}\ F''$ telle que :*
- *pour toute place $v \mid 5$ de F et $v'' \mid v$ de F'', l'extension $F''_{v''}/F_v$ est totalement ramifiée,*
- *$\bar{\rho}_{E,5}$ est isomorphe à une tordue de $\bar{\rho}|_{G_{F''}}$,*
- *$\bar{\rho}_{E,3}(G_{F''}) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$,*
- *E a bonne réduction ordinaire en toute place au dessus de 3 et potentiellement bonne réduction ordinaire en toute place divisant 5.*

Démonstration. — Soit F''/F' une extension galoisienne résoluble telle que toute place $v \mid 5$ de F' est totalement décomposée dans F'' et $\tilde{\rho}|_{G_{F''_v}} = 1$ en toute place $v \mid 3$. Soit $X_{\tilde{\rho}} \to \mathrm{Spec}\ F''$ la tordue de X_5 introduite dans [**SBT**] et $Y_{\tilde{\rho}} \to X_{\tilde{\rho}}$ la tordue de X_{15} introduite également dans *loc. cit.*. On sait que $X_{\tilde{\rho}} \simeq X_5$ est un espace projectif, que $Y_{\tilde{\rho}} \to X_{\tilde{\rho}}$ est un morphisme fini de degré 24 et que $Y_{\tilde{\rho}}$ est géométriquement irréductible. On va définir des ouverts convenables de $X_{\tilde{\rho}}$. Comme $X_5 \simeq \mathbb{P}_1$, on peut trouver une courbe elliptique $E_0 \to \mathbf{Q}_3$ telle que $E_0[5] \simeq \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mu_5$ et E_0 a bonne réduction ordinaire. Pour tout $v \mid 3$, fixons une isomorphisme symplectique $\psi_v : E_0[5](F''_v) \simeq \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$. Soit U_v un voisinage v-adique de $(E_0|_{F''_v}, \psi_v) \in X_{\tilde{\rho}}(F''_v)$ constitué de courbes ayant bonne réduction ordinaire en 3. Pour tout $v \mid 5$, on a

$$\tilde{\rho}|_{G_{F''_v}} \simeq \chi_1\chi \oplus \chi_1^{-1}\chi$$

où χ_1 est un caractère non ramifié d'ordre 4 (car $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(\mathrm{Frob}_v)$ est d'ordre 2) et χ est un caractère modérément ramifié dont la restriction à l'inertie est d'ordre 4 (car $\chi^2 = \epsilon$). Soit par ailleurs la courbe $C : y^2 = x^3 + x$ qui a multiplication complexe par $\mathbf{Z}[i]$. Dans une base convenable, la représentation $\mathbf{Z}[i]^\times \to \mathrm{Aut}C[5](\bar{F}''_v) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$ envoit i sur $\mathrm{diag}(2,3)$. La représentation galoisienne $\bar{\rho}_{C,5}$ vaut $\epsilon\chi_{nr} \oplus \chi_{nr}^{-1}$ où χ_{nr} est un caractère non ramifié. Pour tout caractère $\psi : G_{F''_v} \to \mathbf{Z}[i]^\times \simeq \mathbf{F}_5^\times$ on peut considérer la tordue $C(\psi) \to \mathrm{Spec}\ \ F''_v$ de C. La représentation galoisienne $\bar{\rho}_{C(\psi),5}$ vaut $\epsilon\chi_{nr}\psi \oplus \chi_{nr}^{-1}\psi^{-1}$. On cherche alors ψ tel que :

$$\begin{aligned} \chi_1\chi &= \epsilon\chi_{nr}\psi \\ \chi_1^{-1}\chi &= \chi_{nr}^{-1}\psi^{-1} \end{aligned}$$

On vérifie que $\psi = \chi^{-1}\chi_1\chi_{nr}$ est solution. Il existe donc un isomorphisme symplectique $\psi_v : \bar{\rho}_{C(\psi),5} \simeq \tilde{\rho}|_{G_{F''_v}}$. Soit U_v un voisinage v-adique de $(C(\psi), \psi_v)$ dans $X_{\tilde{\rho}}(F''_v)$ constitué de courbes ayant potentiellement bonne réduction ordinaire. Par le théorème d'irreductibilité de Hilbert (version d'Ekhedal), on peut trouver $x \in X_{\tilde{\rho}}(F'') \cap_{v|15} U_v$ tel que $Y_{\tilde{\rho}}|_x$ est le spectre d'une extension de degré 24 de F''. Le point x correspond à une courbe elliptique ayant les propriétés requises.

On termine la démonstration de la proposition comme dans [**Tay**] (en utilisant l'amélioration de [**Sa**]). Par Langlands-Tunnell, $\bar{\rho}_{E,3}$ est ordinairement modulaire. Le théorème principal de [**Ki**] entraine que E est modulaire. Il en résulte que $\bar{\rho}|_{G_{F''}}$ est modulaire. En utilisant la méthode de Ramakrishna (voir [**Ge**], thm. 3.4 inspiré par [**Tay**], thm. 1.3), on trouve un relèvement $\rho' : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbf{Z}}_5)$ de $\bar{\rho}$ qui est potentiellement Barsotti-Tate et ordinaire. Comme $\rho'|_{G_{F''}}$ est ordinairement résiduellement modulaire, $\rho'|_{G_{F''}}$ est modulaire par [**Ki**]. Par descente automorphe, ρ' est ordinairement modulaire et $\bar{\rho}$ est donc ordinairement modulaire.

Appendice A
Une démonstration locale d'un lemme de Goren-Kassaei

Soit K une extension valuée complète de $\mathbf{Q}_p$, $h \geq 1$ un entier et $\mathbf{F}_q$ le corps fini à p^h élément qu'on suppose plongé dans l'anneau $R := \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$. On identifie $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_q/\mathbf{F}_p)$ avec $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$. Soit

$H_{(\delta_k,\gamma_k)} \to \mathrm{Spec}\ R$ un schéma en $\mathbf{F}_q$-vectoriels de rang 1 (pour les notations, se reporter au théorème **3.1.6**). Le lemme suivant ne pose pas de problèmes.

Lemme A.1. — *Le vershibung $V : H^{(p)}_{(\delta_k,\gamma_k)} \to H_{(\delta_k,\gamma_k)}$ est donné par $X_{i+1} \to \gamma_{i+1}X_i$ au niveau des algèbres.*

On a une décomposition du faisceau conormal $\omega_{H_{(\delta_k,\gamma_k)}} = \oplus_{i\in\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}\omega_{H_{(\delta_k,\gamma_k)},i}$. Pour tout $i \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, on a donc un "invariant de Hasse partiel" :

$$V_i^\star : \omega_{H_{(\delta_k,\gamma_k)},i} \to \omega_{H_{(\delta_k^p,\gamma_k^p)},i-1}$$

qui s'identifie à l'application :

$$\times\gamma_i : R/\delta_i \to R/\delta_{i-1}^p$$

Cette application est non nulle si et seulement si $1 < v(\delta_i) + pv(\delta_{i-1})$ où $v : R \to [0,1]$ désigne la valuation tronquée.

Soit G un BTTHB défini sur $\mathcal{O}_K$ et $H_{(\delta_k,\gamma_k)} = H \subset G$ un sous-groupe. On a une suite exacte :

$$0 \to \omega_{H^D} \to \omega_G \to \omega_H \to 0$$

On a alors un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \omega_{H^D} \arrow[r] \arrow[d] & \omega_G \arrow[r] \arrow[d, "V^\star"] & \omega_H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \omega_{H^{D(p)}} \arrow[r] & \omega_{G^{(p)}} \arrow[r] & \omega_{H^{(p)}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pour $i \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, prenons la i-partie au dessus. Le diagramme s'identifie à :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R/\gamma_i R \arrow[r, "\times\delta_i"] \arrow[d, "\times\delta_i"] & R \arrow[r] \arrow[d, "\times h_i"] & R/\delta_i \arrow[r] \arrow[d, "\times\gamma_i"] & 0 \\
& R/\gamma_{i-1}^p \arrow[r, "\times\delta_{i-1}^p"] & R \arrow[r] & R/\delta_{i-1}^p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On a noté h_i pour l'invariant de Hasse partiel au milieu. On en déduit la proposition suivante (qui est la proposition **3.2.2** du texte principal) :

Proposition A.2 **([G-K], lemma. 2.3)**. — *On est dans l'un des cas suivants*
- $v(\delta_i) + pv(\delta_{i-1}) > 1$ *et* $v(h_i) = 1 - v(\delta_i)$,
- $v(\delta_i) + pv(\delta_{i-1}) < 1$ *et* $v(h_i) = pv(\delta_{i-1})$,
- $v(\delta_i) + pv(\delta_{i-1}) = 1$ *et* $v(h_i) \geq pv(\delta_{i-1})$.

Appendice B
Sur les singularités de la variété de Hilbert de niveau $\Gamma_0(\pi)$

Soit F un corps totalement réel. Nous étudions certaines singularités de la variété de Hilbert sur Spec $\mathbf{Z}_p$ pour le corps F, de niveau $\Gamma_0^1(\pi)$.

On suppose que $p = (\pi)^e$ dans $\mathcal{O}_F$ pour simplifier les notations. Nous laissons le soin au lecteur de formuler les énoncés "produit" du cas général. On note d le degré de F sur $\mathbf{Q}$ et f le degré résiduel en π. Soit $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_F$ premier à p et N un entier premier à p. On adopte les notations suivantes : $X := Y_{\Gamma_1^1(N,\ \mathfrak{c})\cap\Gamma_0^1(\pi)} \to \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}_p$ et $Y := Y_{\Gamma_1^1(N,\ \mathfrak{c})} \to \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}_p$. On note X^R et Y^R les ouverts de Rapoport de X et Y. On pose $X_0 = X \times \mathrm{Spec}\ \mathbf{F}_p$ et $Y_0 = Y \times \mathrm{Spec}\ \mathbf{F}_p$. On désigne par X_{rig} l'espace rigide sur Spec $\mathbf{Q}_p$ associé à X. Rappelons qu'on a une fonction :

$$DEG : X_{rig} \to [0,1]^f$$

et par spécialisation une fonction

$$SPDEG : X_0(\bar{\mathbf{F}}_p) \to \{\text{Strates du cube}\}$$

Posons $A_r = \mathbf{Z}_p[[X_i, Y_i, 1 \leq i \leq r]]/(X_iY_i - p)$ et $B = \mathbf{Z}_p[[X]]$. On note $\mathcal{A}_r$ et $\mathcal{B}$ les espaces rigides associés qui sont respectivement un produit d'anneaux et une boule. On note $\underline{t} = (t_1, ..., t_r)$ la coordonnée $(v(X_1), ..., v(X_r))$ sur l'anneau.

Proposition B.1. — **i**. *Soit $x \in X_0^R$ un point fermé. Soit r la dimension réelle de la strate $SPDEG(x)$. Il existe un isomorphisme :*

$$\widehat{\mathscr{O}_{X,x}} \simeq W(k(x))\hat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} A_r \hat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} B^{d-r}$$

ii. *Cet isomorphisme peut être choisi tel que la fonction DEG restreinte au tube $]x[\subset X_{rig}$ coincide avec la coordonnée $\underline{t}$ sur $\mathcal{A}_r \times \mathcal{B}^{d-r}$.*

La proposition est bien connue dans le cas où $e = 1$, par la théorie du modèle local (voir [**St**] par exemple). On va se ramener à ce cas. Soit F' un corps totalement réel avec p inerte dans F'. Supposons qu'il existe un isomorphisme $\mathcal{O}_F/\pi \simeq \mathcal{O}_{F'}/p$. On note X' et Y' les variétés de Hilbert pour F' correspondant à X et Y. Soit $\mathcal{BTTHB}$ le champs des BTTHB sur Spec $\mathbf{Z}_p$ (voir définition **3.1.5**) et $\mathcal{BTTHB}_{Iw}$ le champ des BTTHB munis d'une structure Iwahorique, c'est à dire pour tout schéma S, $Ob(\mathcal{BTTHB}_{Iw}(S)) = \{G \to \text{Spec } S, H \hookrightarrow G\}$ où G est un BTTHB et H est un sous-schéma en groupes de Raynaud de G.

On a deux projections évidents $Y' \to \mathcal{BTTHB}$ et $Y^R \to \mathcal{BTTHB}$ et, par définition, on a des diagrammes cartésiens :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ \mathcal{BTTHB}_{Iw} \arrow[r] & \mathcal{BTTHB} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X^R \arrow[r] \arrow[d] & Y^R \arrow[d] \\ \mathcal{BTTHB}_{Iw} \arrow[r] & \mathcal{BTTHB} \end{tikzcd}$$

Lemme B.2. — *Les morphismes $Y^R \to \mathcal{BTTHB}$ et $Y' \to \mathcal{BTTHB}$ vérifient le critére de lissité formel de* [**Sch**] *déf. 2.2, pour les algèbres locales artiniennes de corps résiduel de caractéristique p.*

Démonstration. — Démontrons que $Y^R \to \mathcal{BTTHB}$ vérifie le critère. Soit donc $B \to A$ une petite surjection (voir [**Sch**], déf. 1.2) d'algèbres locales artiniennes. On note $k(B) = B/\mathfrak{m}_B$ le corps résiduel de B. On pose $S_0 = \text{Spec } k(B)$, $S = \text{Spec } A$ et $S' = \text{Spec } B$. On note tB l'ideal de S dans S'. C'est un $k(B)$-espace vectoriel. Soit $(A, i, \phi) \in Y^R(S)$. On note $A_0 = A \times_S S_0$. D'après [**Il**], théorème A, 1.1, les classes d'isomorphismes de déformation du SAHB A polarisé en un SAHB $A' \to \text{Spec } S'$ polarisé s'identifient à

$$\text{Hom}_{Sym, \mathcal{O}_F \otimes k(B)}(\omega_{A_0}, \omega_{A_0}^\vee) \otimes_{k(B)} tB$$

où Sym désigne les homomorphismes symétriques, c'est à dire égaux à leur transposé. Cette condition est en fait inutile ici car ω_{A_0} est un $\mathcal{O}_F \otimes k(B)$ module libre de rang 1. De même, d'après [**Il**], théorème 4.4, les classes d'isomorphismes de déformation du BTTHB $A[\pi]$ en un $BTTHB$ $A'[\pi] \to \text{Spec } S'$ s'identifient à

$$\text{Hom}_{Sym, \mathbf{F}_q \otimes k(B)}(\omega_{A_0[\pi]}, \omega_{A_0[\pi]}^\vee) \otimes_{k(B)} tB$$

L'application de réduction :

$$\text{Hom}_{Sym, \mathcal{O}_F \otimes k(B)}(\omega_{A_0}, \omega_{A_0}^\vee) \otimes_{k(B)} tB \to \text{Hom}_{Sym, \mathbf{F}_q \otimes k(B)}(\omega_{A_0[\pi]}, \omega_{A_0[\pi]}^\vee) \otimes_{k(B)} tB$$

évidente est bien surjective.

On considère alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X^R \times_{\mathcal{BTTHB}} Y' = Y^R \times_{\mathcal{BTTHB}} X' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X^R & & X' \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les morphismes vérifient le critère de lissité formel pour les algèbres locales artiniennes de corps résiduel de caractéristique p. Soit alors $(x, y') = (x', y) \in X_0^R \times_{\mathcal{BTTHB}} Y_0' = Y_0^R \times_{\mathcal{BTTHB}} X_0'$ un point fermé. Notons

$$R = \widehat{\mathscr{O}_{X \times_{\mathcal{BTTHB}} Y', (x,y')}}, \quad S = \widehat{\mathscr{O}_{X,x}}, \quad T = \widehat{\mathscr{O}_{X',x'}}.$$

On a alors $R = S \hat{\otimes} B^{d'} = T \hat{\otimes} B^d$. On conclût alors par lemme 4.7 de [**dJ**].

Références

[A-G] F. Andreatta et E. Z. Goren, *Hilbert modular forms, mod p and p-adic aspects*, Mem. Amer. Math. Soc. **173** (2005), no. 819, vi+100 pp.

[BLGG] T. Barnet-Lamb, T. Gee et D. Geraghty, *Congruences between Hilbert modular forms : constructing ordinary lifts in parallel weight two*, prépublication.

[Ber] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication 96-03, (1996), disponible sur `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`.

[Buz] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Am. Math. Soc. **16** (2003), n. 1, p. 29 à 55.

[B-T] K. Buzzard et R. Taylor, *Companion forms and weight* 1 *forms*, Annals of Math. **149** (1999), no. 3, p. 905 à 919.

[B-G] S. Bosch et U. Görtz, *Coherent modules and their descent on relative rigid spaces*, J. reine angew. Math. (1998), p. 119 à134.

[dJ] A. J. de Jong, *The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with* $\Gamma_0(p)$*-level structure*, J. Algebraic Geom. **2** (1993), n^o 4, p. 667 à 688.

[D-P] P. Deligne et G. Papas, *Singularité des espaces de modules de Hilbert, en les places divisant le discrimant*, Compositio. Math. **90**, 1994, 1, p. 59 à 79.

[D-T] M. Dimitrov et J. Tilouine, *Variétés et formes modulaires de Hilbert arithmétiques pour* $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$. Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, p. 555 à 614, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.

[Far] L. Fargues, *La Filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, J. Reine Angew. Math. **645** (2010), p. 1 à 39.

[Ge] T. Gee, *Companion forms over totally real fields, II*, Duke Math. Journal **136** (2007), no. 2, p. 275 à 284.

[G] D. Geraghty, *Modularity lifting theorems for ordinary Galois representations*, prépublication.

[G-K] E. Z. Goren et P. Kassaei, *Sous-groupes canoniques sur les varietes modulaires de Hilbert*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347 (2009), no. 17-18, p. 985 à 990.

[G-K2] E. Z. Goren et P. Kassaei, *Canonical subgroups of Hilbert modular varieties*, J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal). 63 pp. 2011. DOI : 10.1515/CRELLE.2011.149.

[Il] L. Illusie, *Déformation des groupes de Barsotti-Tate d'après A. Grothendieck*, Astérisque **127** (1985), p 151 à 198.

[Kas] P. Kassaei, *A gluing lemma and overconvergent modular forms*, Duke Math. Journal **132** (2006), no. 3, p. 509 à 529.

[Ka] N. Katz, *P-adic properties of modular schemes and modular forms*, Modular functions of one variable III, SLN, **350**, p. 69 à 190.

[Ki] M. Kisin, *Modularity of finite flat group schemes and modularity*, Annals of Math. **170** (3) (2009), p. 1085 à 1180.

[O-T] F.Oort et J. Tate, *Group schemes of prime order*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t.3, 1970, p. 1 à 21.

[P-S] V.Pilloni et B. Stroh, *Surconvergence et classicité : le cas Hilbert*, prépublication.

[Ra] M. Rapoport, *Compactification de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal*, Comp. Math. **36** (1978), 3, p. 255 à 335.

[Ray] M.Raynaud, *Schémas en groupe de type* $(p, p, ..., p)$, Bull. Soc. Math. de France **102** (1974), p. 241 à 280.

[Sa] S. Sasaki, *On Artin representations and nearly ordinary Hecke algebras over totally real fields, II*, prépublication.

[Sch] M. Schlessinger, *Functors on Artin rings*, Trans. Am. Math. Soc. **130** (1968), p 208 à 222.

[SBT] N. I. Shepherd-Barron et R. Taylor, *Mod* 2 *et Mod* 5 *icosahedral representations*, J. Amer. Math. Soc, **10** (1997), p. 283 à 298.

[Shi] G. Shimura, *The special value of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. **45** (1978), no. 3, p. 637 à 679.

[St] H. Stamm, *On the reduction of the Hilbert–Blumenthal-moduli scheme with* $\Gamma_0(p)$*-level structure*, Forum Math. **9** (4) (1997), p. 405 à 455.

[Tay] R. Taylor, *On Icosahedral Artin representations II*, Amer. Jour. of Math. **125** (2003), p. 549 à 566.

[Ti] Y.Tian, *Classicality of certain overconvergent p-adic hilbert modular forms*, prépublication.

Vincent Pilloni