SURCONVERGENCE, RAMIFICATION ET MODULARITÉ

par

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

Résumé. — Nous démontrons un théorème de relèvement modulaire pour les représentations galoisiennes de dimension deux, totalement impaires, de poids de Hodge-Tate nuls du groupe de Galois absolu des corps totalement réels. Ce théorème généralise un résultat bien connu de Buzzard et Taylor. Il permet de terminer la démonstration de la conjecture d'Artin pour les représentations impaires de dimension deux des groupes de Galois des corps totalement réels et de démontrer de nouveaux cas de la conjecture de Fontaine-Mazur.

Soit p un nombre premier et F un corps totalement réel de groupe de Galois absolu G_F. Rappelons le cas particulier suivant d'une célèbre conjecture de Fontaine et Mazur.

Conjecture 0.1. — *Soit $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation galoisienne géométrique totalement impaire, irréductible et de poids de Hodge-Tate nuls. Elle provient d'une forme modulaire de Hilbert de poids un propre et cuspidale pour le groupe* GL_2 *sur* F.

Dans cet énoncé et plus généralement dans tout l'article, « géométrique » signifie continu, non ramifié en dehors d'un nombre fini de places et potentiellement semi-stable en les places de F divisant p. Pour toute place v de F divisant p, soit $G_v \subset G_F$ un groupe de décomposition en v et I_v son sous-groupe d'inertie. D'après [**Sen**], la représentation $\rho|_{G_v}$ est potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate nuls si et seulement si $\rho(I_v)$ est un groupe fini. Totalement impair signifie que det $\rho(c_\tau) = -1$ pour toute conjugaison complexe $c_\tau \in G_F$ associée à tout plongement $\tau : F \to \mathbb{R}$.

Les représentations attachées aux formes propres de poids un ont été construites par Deligne et Serre dans [**DS**] pour $F = \mathbb{Q}$ et par Rogawski-Tunnell [**RT**], complété par Wiles [**Wi**], pour tout F. Elles sont d'image finie. En particulier, la conjecture 0.1 prédit qu'un tel ρ a également une image finie.

La conjecture 0.1 est donc une forme renforcée de la conjecture d'Artin dans ce contexte, qui prédit que toute représentation $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ totalement impaire, irréductible est modulaire.

Les résultats principaux de cet article sont les suivants :

Théorème 0.2. — *Soit $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ une représentation galoisienne géométrique totalement impaire, irréductible et de poids de Hodge-Tate nuls. Supposons que :*

1. *p est impair,*
2. *$\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est irréductible, où $\bar{\rho}$ désigne la représentation résiduelle associée à ρ et ζ_p est une racine primitive p-ième de l'unité,*
3. *Si $p = 5$ et $\mathrm{Proj}(\bar{\rho}(G_F)) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, alors $[F(\zeta_5) : F] = 4$.*

Alors ρ provient d'une forme modulaire de Hilbert de poids un propre et cuspidale pour le groupe GL_2 sur F.

Théorème 0.3. — *Soit F un corps totalement réel et $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ une représentation totalement impaire irréductible d'image finie. La représentation ρ est modulaire attachée à une forme propre et cuspidale de poids un. En particulier, la fonction $L(\rho, s)$ admet un prolongement holomorphe à tout le plan complexe.*

Le théorème 0.2 était connu lorsque $F = \mathbb{Q}$ en combinant les travaux de Buzzard-Taylor ([**BT**], [**Bu**], [**Ta2**]) et Khare-Wintenberger et Kisin ([**KW**], [**K2**]) sous l'hypothèse que la restriction de ρ à $G_{\mathbb{Q}_p}$ est la somme de deux caractères résiduellement distincts, ou est non ramifiée.

Le théorème 0.3 a été prouvé par Hecke, Langlands et Tunnell dans le cas d'image résoluble. Nous traitons ici le cas icosahédral, complétant ainsi des résulats antérieurs de Buzzard, Dickinson, Shepherd-Barron, Taylor et d'autres ([**BDST**], [**Ta1**], [**Sa**], [**P2**], [**Ka**] et [**KST**]). Rappelons également que lorsque $F = \mathbb{Q}$, Khare [**Kh**] a prouvé que le théorème 0.3 était une conséquence de la conjecture de modularité de Serre établie dans [**KW**].

L'ingrédient nouveau essentiel pour établir les théorèmes 0.2 et 0.3 est le théorème de relèvement modulaire suivant.

Théorème 0.4. — *Soit F un corps totalement réel et $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ une représentation galoisienne géométrique de poids de Hodge-Tate nuls. Supposons que*

1. *p est impair,*
2. *ρ est totalement impaire,*
3. *$\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est irréductible,*
4. *si $p = 5$ et $\mathrm{Proj}(\bar{\rho}(G_F)) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, alors $[F(\zeta_5) : F] = 4$,*

5. *$\bar{\rho}$ est ordinairement modulaire.*

Alors ρ est modulaire, associée à une forme propre et cuspidale de poids un pour GL_2 *sur* F.

Dans ce théorème et dans tout l'article, une représentation résiduelle $\bar{\rho}$ est ordinairement modulaire si elle admet un relèvement modulaire qui est ordinaire.

Remarque 0.5. — Les complications pour le nombre premier 5 visibles dans l'hypothèse 4 apparaissent naturellement lors de la construction des systèmes de Taylor-Wiles (voir [**K1**], 3.2.3). Remarquons aussi que si la conjecture 0.1 est vraie, l'image projective résiduelle $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ n'est pas possible, car ce groupe ne se relève pas en un sous-groupe fini de $\mathrm{PGL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_5)$. Il est peut-être possible de s'affranchir de l'hypothèse 3 en généralisant les travaux de Skinner et Wiles.

Plusieurs cas particuliers importants de ce théorème ont déjà été prouvés. Lorsque $F = \mathbb{Q}$ et

$$\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \chi_1 \oplus \chi_2$$

où χ_1 et χ_2 sont deux caractères distincts modulo l'idéal maximal de $\bar{\mathbb{Z}}_p$, le théorème est dû à Buzzard et Taylor ([**BT**], [**Bu**]). Lorsque $F = \mathbb{Q}$ et ρ est non ramifiée en p, il est dû à Taylor ([**Ta2**]). La stratégie de tous ces articles consiste à prouver d'abord que ρ est associée à deux formes modulaires p-adiques grâce à la méthode de Taylor-Wiles, puis à prouver que ces formes p-adiques sont classiques en étudiant la courbe modulaire rigide analytique et son action de l'opérateur U_p. Notons que la méthode de Taylor-Wiles ne peut pas être appliquée naïvement aux formes modulaires classiques de poids un, ces dernières se comportant mal vis-à-vis des congruences, mais peut être appliquée aux formes modulaires p-adiques de poids un. C'est la raison de la stratégie en deux étapes esquissée précédemment.

Remarquons que dans le travail récent [**CG**], Calegari et Geraghty ont réussi à prouver le théorème lorsque $F = \mathbb{Q}$ et ρ est globalement minimalement ramifiée et non ramifiée en p en modifiant la stratégie de Taylor et Wiles pour qu'elle puisse s'appliquer aux formes classiques de poids un.

Dans cet article, nous suivons la stratégie originelle de Buzzard et Taylor. En général, les complications de cette stratégie augmentent avec le comportement de p dans F ou la ramification de ρ en les places divisant p.

L'article [**Sa**] traite le cas où p est totalement décomposé dans F et où $\rho|_{G_v}$ est somme de deux caractères distincts modulo l'idéal maximal de $\bar{\mathbb{Z}}_p$ pour tout $v|p$. Le cas où p est non ou modérement ramifié dans F et ρ non ramifiée en p et p-distinguée a été établi dans [**Ka**] et [**P2**]. Finalement, le cas où p est non ramifié dans F et $\rho|_{G_v}$ est somme de deux caractères modérés distincts modulo l'idéal maximal de $\bar{\mathbb{Z}}_p$ pour tout $v|p$ a été résolu dans [**KST**].

D'après la théorie de Langlands et Tunnell (voir le lemme 1.1), il suffit de prouver le théorème après n'importe quel changement de base totalement réel F'/F préservant l'irréductibilité de ρ. On peut évidemement trouver un tel F'/F tel que $\rho|_{G_{F'}}$ devienne non ramifiée en toutes les places divisant p mais bien sûr, p sera en général très ramifié dans F'. Notre tâche ainsi est réduite au cas où ρ est non ramifiée en p mais F arbitrairement ramifié en p.

La première étape vers la modularité, qui consiste à prouver la modularité p-adique de ρ (de 2^r manières où r est le nombre de places au-dessus de p dans F) se généralise facilement aux corps totalement réels arbitraires. Grâce à l'argument non publié de Taylor [**Ta2**], il est même possible d'éliminer l'hypothèse de distinguabilité de ρ en p. D'un autre côté, la classicité des formes p-adiques attachées à ρ est plus difficile à établir, et ceci spécialement lorsque p est très ramifié dans F. Nous avons heureusement réussi à n'imposer aucune hypothèse sur la ramification de p dans F dans cet article.

Expliquons maintenant comment nous déduisons les théorèmes 0.2 et 0.3. Nous utilisons dans un premier temps les travaux de Shepherd-Barron et Taylor ([**SBT**]) qui nous permettent de démontrer la modularité de $\bar{\rho}$ dans les cas d'image projective icosahédrale. En appliquant le théorème 0.4, nous démontrons la conjecture d'Artin dans le cas icosahédral et obtenons donc le théorème 0.3. Il nous reste ensuite à vérifier que toute représentation ρ comme dans le théorème 0.2 est d'image finie, donc justiciable du théorème 0.3. Le théorème de modularité potentielle 3.1.2 de [**BLGGT**] appliqué à $\bar{\rho}$, combiné au théorème 0.4, nous permet de démontrer la modularité potentielle de ρ. La finitude de ρ en découle.

Cet article est divisé en trois parties. La première contient diverses réductions ainsi que les démonstrations des théorèmes 0.2 et 0.3 à partir du théorème 0.4. La seconde aborde la méthode de Taylor-Wiles ; on y prouve le théorème de relèvement modulaire p-adique. Dans la troisième partie, on démontre le théorème de classicité. Voilà à présent le contenu plus détaillé de chacune de ces parties section par section.

Dans la première section, nous vérifions qu'il suffit de montrer le théorème 0.4 dans le cas où ρ est non ramifiée en p et résiduellement modulaire associée à une forme ordinaire de niveau et caractère central bien ajusté vis-à-vis de ρ. Nous utilisons les techniques de changement de base résoluble, d'augmentation ou de diminution du niveau. Dans la seconde section, nous expliquons comment déduire les théorèmes 0.2 et 0.3 à partir du théorème 0.4. Pour cela, nous démontrons que les représentations galoisiennes impaires d'image résiduelle projective icosahédrale deviennent résiduellement modulaires après un changement de base résoluble. Nous reproduisons essentiellement l'argument de [**Ta1**], article lui-même basé sur [**SBT**].

Les sections 3, 4 et 5 traitent de déformation des représentations galoisiennes. Les résultats principaux sont obtenus dans le paragraphe 4.1 où l'on étudie les anneaux de relèvements triangulaires supérieurs. Dans ce paragraphe, nous donnons une interprétation galoisienne en les places divisant p à l'existence de diverses formes modulaires p-adiques attachées à ρ, ceci en suivant [**Ta2**].

Dans la section 6, on introduit les variétés et les formes modulaires de Hilbert utilisées dans cet article. Nous prouvons un théorème de contrôle horizontal (relativement au niveau) utile pour construire plus tard les systèmes de Taylor-Wiles. Ce théorème de contrôle est une conséquence de l'annulation des images directes supérieures du faisceau structural cuspidal entre compactifications toroïdales et minimales des variétés de Hilbert.

Dans la section 7, nous prouvons finalement le théorème de relèvement modulaire p-adique, qui prend la forme suivante. Soit V l'espace des formes modulaires p-adiques, qui sont des fonctions sur la tour d'Igusa du lieu ordinaire de la variété de Hilbert attachée à F, de niveau N premier à p et déterminé par ρ. Rappelons que cet espace contient toutes les formes classiques de poids variable mais de niveau modéré N fixé et que ces formes y sont denses. Il est muni d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathbb{T}^{Np}$ de niveau premier à Np et des opérateurs U_v pour tout $v|p$. Soit $V[\rho]$ le sous-espace ρ-isotypique pour l'action de $\mathbb{T}^{Np}$. Nous démontrons que $V[\rho]$ possède des vecteurs propres simultanés pour les opérateurs $\{U_v\}_{v|p}$ associés à toutes les valeurs propres de $\{\rho(Frob_v)\}_{v|p}$. Ces espaces propres devraient correspondre à l'espace engendré par toutes les p-stabilisations possibles de la forme classique que l'on souhaite attacher à ρ. C'est ce que nous allons prouver dans la troisième partie de cet article, qui commence par la section 8.

Dans cette section 8, nous axiomatisons les données fournies par le théorème de relèvement modulaire. Nous prouvons un théorème général de classicité, caractérisant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'espace M_k des formes classiques de poids k, niveau premier à p, dans l'espace V_k des formes modulaires p-adiques de poids k. Rappelons qu'on dispose d'un opérateur de Frobenius ϕ agissant sur le module V_k.

Théorème 0.6. — *Une forme modulaire p-adique $f \in V_k$ provient d'une forme classique dans M_k si et seulement si $\phi.f$ est une forme surconvergente de pente finie.*

Dans la section 9, nous rassemblons les prérequis nécessaires à la démonstration du théorème 0.6, portant sur les groupes p-divisibles de type Hilbert-Blumenthal. La plupart des résultats obtenus sont des prolongements faciles d'énoncés figurant déjà dans la littérature : théorie des déformations, modèle local, théorie de Dieudonné-Manin... Nous ne cherchons pas à y établir les résultats les plus généraux ou élégants possibles. Le paragraphe 9.5 contient les idées clés nouvelles de la preuve du théorème de classicité dans le cas très ramifié. Le résultat est *grosso modo* le suivant : soit $\mathcal{G}$ un groupe de Barsotti-Tate sur un anneau de valuation $\mathcal{O}_K$ complet de caractéristique mixte équipé d'une action de l'anneau d'entiers $\mathcal{O}_L$ d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de degré g. On suppose que $\mathcal{G}$ a dimension g, hauteur $2g$ et est $\mathcal{O}_L$-polarisé. Ainsi $\mathcal{G}$ est par définition un Barsotti-Tate de Hilbert-Blumenthal (BTHB). Nous prouvons que si $\mathcal{G}$ est connexe et devient non simple comme $\mathcal{O}_L$-module over $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, où $\mathbb{C}$ désigne la complétion d'une clôture algébrique de $K = \mathcal{O}_K[1/p]$), il est déjà non simple sur $\mathcal{O}_K$. De plus, tous les facteurs de Jordan-Hölder de $\mathcal{G}$ sont caractérisés par l'action de $\mathcal{O}_L$ sur leur algèbre de Lie. Cette rigidité des BTHB non simples mène à la définition des sous-groupes spéciaux de $\mathcal{G}$, qui généralisent les sous-groupes canoniques (voir aussi [**PS2**] dans lequel des sous-groupes spéciaux sont définis lorsque L est non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$). Ces sous-groupes spéciaux jouent un rôle clé dans l'article.

Dans la section 10, nous démontrons le théorème 0.6. Soit f et $\phi.f$ comme dans l'énoncé du théorème. La forme $\phi.f$ est surconvergent de pente finie sur la variété de Hilbert $X_0(\mathfrak{p})$ de niveau iwahorique en p. Le fait que $\phi.f$ soit le frobenius de f implique que $\phi.f$ vérifie une donnée de descente vers la variété X de niveau premier à p, sur le lieu ordinaire. Grâce aux opérateurs U_v, on peut étendre $\phi.f$ sur une région de $X_0(\mathfrak{p})$ qui n'est jamais toute la variété, même lorsque $F = \mathbb{Q}$, de part la présence de variétés abéliennes de groupe de Barsotti-Tate non simple. Quand l'indice de ramification de p dans F est inférieur à $p-1$, cette région recouvre essentiellement la variété X de niveau premier à p, et l'on peut réaliser la descente étale de $\phi.f$ pour obtenir une forme classique de niveau premier à p (en fait f), comme dans [**Bu**] pour $F = \mathbb{Q}$ ou dans [**P2**]. Quand l'indice de ramification dépasse p, la région de prolongement n'est plus assez grande. L'astuce est alors de descendre $\phi.f$ sur un ouvert de X puis de la remonter sur $X_0(\mathfrak{p})$. De cette manière, on a défini $\phi.f$ sur une région plus grande de $X_0(\mathfrak{p})$ qui contient beaucoup de points avec un groupe de Barsotti-Tate associé non simple. On peut alors étendre encore plus $\phi.f$ grâce aux opérateurs U_v et l'on obtient enfin un domaine de prolongement qui couvre essentiellement X. On réalise alors une descente étale supplémentaire pour prouver la classicité de $\phi.f$ en niveau premier à p. Toutes ces opérations de prolongement et de descente étale sont délicates et reposent sur la compréhension des variétés de Hilbert rigides analytiques et de leurs familles universelles de groupes de Barsotti-Tate.

Nous remercions David Geraghty, Payman Kassaei, Amaury Thuillier, Yichao Tian et Shu Sasaki pour d'utiles discussions, ainsi que Fred Diamond et Pierre Colmez pour avoir trouvé des erreurs dans une version préliminaire de

ce texte. Cet article n'aurait jamais vu le jour sans les travaux profonds de Richard Taylor sur le sujet, travaux qui ont eu une grande influence sur les auteurs. Nous remercions enfin le programme ArShiFo ANR-BLAN-0114 pour son soutien.

PARTIE I
RÉDUCTIONS ET PREUVE DES COROLLAIRES

1. Une forme faible du théorème

Commençons par rappeler les célèbres résultats de Langlands et Tunnell sur le changement de base résoluble en dimension deux.

Lemme 1.1. — *Soit L/F une extension résoluble de corps de nombres et $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ une représentation galoisienne irréductible. Si ρ est modulaire, il en est de même de sa restriction à G_L. Inversement, si $\rho|_{G_L}$ est irréductible et modulaire, ρ est également modulaire.*

Preuve. La première assertion résulte directement de la théorie de Langlands et Tunnell. Pour prouver la seconde, on se réduit au cas où L/F est abélienne. Soit Π la représentation automorphe cuspidale de GL_2 sur L associée à $\rho|_{G_L}$. On a $\Pi \simeq \Pi \circ \sigma$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$. Par Langlands-Tunnell, il existe une représentation automorphe cuspidale π de GL_2 sur F telle que Π soit le changement de base de π. La représentation galoisienne ρ_π associée à π vérifie $\rho_\pi|_{G_L} \simeq \rho|_{G_L}$. Par le lemme de Schur, il existe un caractère χ de $\mathrm{Gal}(L/F)$ tel que $\rho_\pi \otimes \chi \simeq \rho$. Ainsi ρ est modulaire associée à $\pi \cdot \chi \circ \det$. $\square$

Notre but est maintenant de montrer que le théorème 0.4 résulte de l'énoncé suivant.

Théorème 1.2. — *Soit F un corps de nombres totalement réel. Soit $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ une représentation galoisienne continue non ramifiée hors d'un nombre fini de places Σ. Notons $\Sigma_p = \Sigma \cup \{v, v|p\}$ et supposons que*

1. *p est impair,*
2. *Σ ne contient pas de place divisant p et pour tout $v \in \Sigma$, la représentation $\rho(I_v)$ est unipotente non triviale,*
3. *ρ est totalement impaire,*
4. *$\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est irréductible,*
5. *$\bar{\rho}|_{G_{F_v}} = 1$ pour tout $v \in \Sigma_p$,*

6. *si* $p = 5$ *et* $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(G_F) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$*, alors* $[F(\zeta_5) : F] = 4$*,*
7. $\bar{\rho}$ *a un relèvement modulaire* ρ_f *associé à une forme cuspidale propre ordinaire* f *de poids parallèle,*
8. *la forme modulaire* f *est non ramifiée en tout* $v \notin \Sigma_p$*,*
9. *la représentation automorphe associée à* f *est spéciale en tout* $v \in \Sigma$*,*
10. *la représentation automorphe associée à* f *a un caractère central correspondant à* $\det \rho$ *via la théorie du corps de classe global.*

La représentation ρ *est modulaire associée à une forme de Hilbert de poids un.*

Remarque 1.3. — Ce théorème implique en particulier que $\Sigma = \varnothing$, ce qui n'était pas supposé a priori.

Proposition 1.4. — *Le théorème 1.2 implique le théorème 0.4.*

Preuve. Soit ρ comme dans l'énoncé du théorème 0.4. D'après le lemme 1.1, il suffit de prouver la modularité de ρ après un changement de base résoluble totalement réel F'/F tel que $\rho|_{G_{F'}}$ reste irréductible. On réalise un changement de base résoluble totalement réel F'/F tel que

- $\rho|_{G_{F'}}$ est non ramifiée aux places divisant p et l'inertie agit de manière purement unipotente aux places ne divisant pas p,
- $\bar{\rho}(G_{F'}) = \bar{\rho}(G_F)$,
- $\bar{\rho}|_{G_{F'_v}}$ est trivial pour tout $v|p$ et toutes les places de ramification v de ρ.
- si $p = 5$ et $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(G_F) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, alors $[F'(\zeta_5) : F'] = 4$,

Comme $\bar{\rho}$ est modulaire, $\bar{\rho}|_{G_{F'}}$ reste modulaire par changement de base résoluble.

On ajuste à présent le niveau d'une forme ordinaire cuspidale propre g pour GL_2 sur F' telle que $\bar{\rho}_g = \bar{\rho}|_{G_{F'}}$. Par la théorie de Hida, on peut supposer que g a un poids parallèle. Après un changement de base résoluble totalement réel supplémentaire F''/F' préservant l'irréductibilité de $\bar{\rho}|_{G''_F(\zeta_p)}$ et l'hypothèse 6, on peut supposer que g est non ramifiée ou spéciale aux places ne divisant pas p. On applique les lemmes 3.1.4, 3.5.2 et 3.5.3 (l'astuce de Skinner-Wiles) de [**K1**] et l'on déduit qu'il existe une extension totalement réelle résoluble F'''/F et une forme propre f de poids parallèle pour GL_2 sur F''' qui est ordinaire, vérifie $\bar{\rho}_f = \bar{\rho}|_{G_{F'''}}$, a son caractère central donné par la restriction de $\det(\rho)$ et qui est non ramifiée en toute place hors de Σ_p et spéciale en toute place de Σ. On peut supposer que la représentation

$$\bar{\rho}|_{G_{F'''(\zeta_p)}}$$

reste irréductible et que l'hypothèse 6 est vérifiée si nécessaire. On peut donc appliquer le théorème 1.2 et en déduire la modularité de $\rho|_{G_{F'''}}$ donc de ρ. $\square$

2. Modularité résiduelle

Nous prouvons à présent quelques cas de modularité résiduelle et expliquons la démonstration des théorèmes 0.2 et 0.3 énoncés dans l'introduction.

2.1. Modularité potentielle des représentations icosahédrales. —

Soit $\bar{\rho} : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{F}}_5)$ une représentation galoisienne totalement impaire où F est totalement réel. On suppose que $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(G_F)$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5$.

Lemme 2.1.1. — *Il existe une extension résoluble totalement réelle F'/F et une représentation $\tilde{\rho} : G_{F'} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ équivalente à $\bar{\rho}|_{G_{F'}}$, qui a pour déterminant le caractère cyclotomique modulo 5.*

Preuve. Notons ε le caractère cyclotomique modulo 5 et $\bar{\psi} = \det(\bar{\rho})$. Soit F_1/F l'extension résoluble totalement réelle donnée par le noyau du caractère $\bar{\psi}\varepsilon^{-1}$. Posons $F' = F_1(\sqrt{5})$. C'est bien une extension totalement réelle, résoluble de F. Par ailleurs $\varepsilon(G_{F'}) = \{1, -1\} \subset \mathbb{F}_5^\times$. Il résulte alors de la classification de Dickson des sous-groupes finis de $\mathrm{PGL}_2(\bar{\mathbb{F}}_5)$ que $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(G_F)$ est conjugué à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$. Soit $\tilde{\rho} : G_{F'} \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{F}}_5)$ une représentation conjuguée à $\bar{\rho}|_{G_{F'}}$, telle que $\mathrm{Proj}(\tilde{\rho}(G_{F'})) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$. Donc pour tout $\sigma \in G_{F'}$, $\tilde{\rho}(\sigma) = M.Z$ où $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ et $Z = z.\mathrm{Id}$ est une matrice diagonale. Comme $z^2 = \varepsilon(\sigma) \in \{1, -1\} \subset \mathbb{F}_5^\times$, on en déduit que $z \in \mathbb{F}_5^\times$ et que $\tilde{\rho}$ prend ses valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$.

$\square$

Lemme 2.1.2. — *Il existe une extension totalement réelle résoluble F''/F' et une courbe elliptique $E \to \mathrm{Spec}(F'')$ telle que*

- $E[5] \simeq \tilde{\rho}|_{G_{F''}}$,
- *l'image de $G_{F''}$ dans $\mathrm{Aut}(E[3])$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$,*
- *la courbe E est ordinaire en toutes les places divisant 15.*

Preuve. Soit $X_{\tilde{\rho}} \to \mathrm{Spec}\, F'$ la forme tordue de X_5 introduite page 3 de [**SBT**]. Il y est prouvé que $X_{\tilde{\rho}} \simeq \mathbb{P}^1_{F'}$. Pour toute place $v|15$, choisissons une courbe elliptique ordinaire $E_v \to \mathrm{Spec}\, F'_v$. Il existe une extension totalement réelle, résoluble F''/F' telle que pour tout $v|15$ et toute place v' de F'' divisant v

$$\rho_{E_v[5]}|_{G_{F''_{v'}}} \simeq \tilde{\rho}|_{G_{F''_{v'}}} .$$

On obtient ainsi des points $x_{v'}$ dans $X_{\tilde{\rho}}(F''_{v'})$ pour tout $v'|15$. Soit $U_{v'}$ un voisinage v-adique de $x_{v'}$ consistant en des points ayant bonne réduction ordinaire. Soit $Y_{\tilde{\rho}} \to X_{\tilde{\rho}}$ le revêtement de degré 24 introduit dans la preuve du théorème 1.2 de [**SBT**]. Par approximation faible et le théorème d'irréductibilité d'Ekhedal, on peut trouver un point

$$x \in X_{\tilde{\rho}}(F'') \cap \bigcap_{v'|15} U_{v'}$$

tel que la fibre de x en $Y_{\tilde{\rho}}$ soit le spectre d'une extension de degré 24 de F''. La courbe elliptique correspondant à x convient. □

On en déduit finalement le résultat suivant, qui n'est qu'une variante du théorème 1.2 de [**SBT**]. Rappelons que nous avons supposé que $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(G_F)$ est isomorphe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ et que $\bar{\rho}$ est impaire.

Proposition 2.1.3. — *Il existe une extension totalement réelle résoluble L/F telle que $\bar{\rho}_{|G_L}$ est ordinairement modulaire.*

Preuve. On applique les lemmes 2.1.1 et 2.1.2 et l'on obtient une courbe elliptique E sur une extension totalement réelle résoluble L/F telle que $E[5]$ est isomorphe à $\bar{\rho}|_{G_L}$. Par Langlands-Tunnell, $E[3]$ est modulaire. Par le théorème de relèvement modulaire de Kisin [**K1**], la courbe E est modulaire et il en est de même de $E[5]$ et de $\bar{\rho}|_{G_F}$. La forme modulaire correspondante est ordinaire car E est ordinaire en les places divisant 5. □

2.2. Corollaires. — Expliquons à présent comment déduire les théorèmes de l'introduction.

Corollaire 2.2.1. — *Soit $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_5)$ une représentation galoisienne géométrique totalement impaire de poids de Hodge-Tate nuls. Supposons que $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(G_F) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathrm{A}_5$. La représentation ρ est modulaire.*

Preuve. Grâce au lemme 1.1, on peut montrer la modularité après tout changement de base totalement réel résoluble. Il suffit d'appliquer la proposition 2.1.3 et le théorème 0.4. □

Corollaire 2.2.2. — *Soit F un corps totalement réel et $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ une représentation irréductible totalement impaire d'image finie. Alors ρ est modulaire associée à une forme cuspidale propre de poids un.*

Preuve. D'après la classification des sous-groupes finis de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, on sait que $\mathrm{Proj}(\rho)(G_F)$ est isomorphe à A_4, S_4, A_5 ou au groupe dihédral D_{2r} d'ordre $2r$ avec $r \in \mathbb{N}$. Dans les cas D_{2r}, A_4 et S_4, la modularité de ρ résulte des travaux classiques de Artin, Hecke, Langlands [**La**] et Tunnell [**Tu1**]. Il reste à traiter le cas A_5. On peut choisir un isomorphisme $\mathbb{C} \simeq \bar{\mathbb{Q}}_5$ et voir ρ comme une représentation à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_5)$. On en déduit que $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(G_F)$ est isomorphe à A_5 car le noyau du morphisme de réduction de $\mathrm{PGL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_5)$ dans $\mathrm{PGL}_2(\bar{\mathbb{F}}_5)$ est pro-résoluble. On applique alors le corollaire 2.2.1. □

Corollaire 2.2.3. — *Soit* $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ *une représentation géométrique totalement impaire de poids de Hodge-Tate nuls. Supposons que* $p \geq 3$, *que* $\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ *est irréductible et que si* $p = 5$ *et* $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(G_F) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ *alors* $[F(\zeta_5) : F] = 4$. *Alors* ρ *est d'image finie et donc modulaire.*

Preuve. D'après [**BLGGT**], thm. 3.1.2, on peut trouver une exension de corps totalement réel F'/F telle que $\bar{\rho}|_{G_{F'}}$ est ordinairement modulaire, $\bar{\rho}|_{G'_F(\zeta_p)}$ reste irréductible et si $p = 5$ et $\mathrm{Proj}(\bar{\rho})(G_F) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ alors $[F'(\zeta_5) : F'] = 4$. D'après le théorème 0.4, $\rho|_{G_{F'}}$ est modulaire, donc d'image finie. Il en résulte que ρ est d'image finie et donc que ρ est une représentation d'Artin, à laquelle on peut appliquer le corollaire 2.2.2. □

PARTIE II
DÉFORMATIONS ET MÉTHODE DE TAYLOR-WILES-KISIN

Dans cette partie, considérons ρ comme dans l'énoncé du théorème 1.2. Grâce à la méthode de Taylor-Wiles, nous allons attacher à ρ un espace vectoriel de dimension finie de formes modulaires p-adiques. Cet espace devrait être engendré par les restrictions au lieu ordinaire des diverses p-stabilisations de la forme modulaire classique de poids un recherchée.

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrete de caractéristique mixte $(0, p)$, de corps résiduel $\mathbb{F}$ et de corps des fractions E. Soit π une uniformisante. Supposons que ρ prend ses valeurs dans $\mathcal{O}$. Notons $\bar{\rho}$ la représentation résiduelle associée et ψ le déterminant de ρ. Soit $\mathcal{AR}_{\mathcal{O}}$ la catégorie des $\mathcal{O}$-algèbres artiniennes de corps résiduel $\mathbb{F}$. Pour tout extension E' de E, soit $\mathcal{AR}_{E'}$ la catégorie des E'-algèbres artiniennes de corps résiduel E'. Soit Σ l'ensemble fini de places où ρ est ramifiée (on obtiendra à la fin de la démonstration que Σ est vide) et Σ_p l'union de Σ et des places divisant p.

Pour tout place finie v de F, soit G_v un groupe de décomposition en v et I_v son sous-groupe d'inertie.

3. L'algèbre Λ et les déformations du déterminant

Soit $\chi_p : G_F \to \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p-adique. Notons $H = \chi_p(G_F)$. On a $H = H_t \times H_l$ où l'indice t signifie « torsion » et l « libre ». De plus $H_l \simeq \mathbb{Z}_p$. Soit $\Lambda = \mathcal{O}[[H_l]]$ l' algèbre de groupe complétée. Remarquons que $\Lambda \simeq \mathcal{O}[[T]]$.

Le caractère cyclotomique est un morphisme $\chi_p : G_F \to H$. Sa projection sur H_l, composée avec l'inclusion $H_l \hookrightarrow \Lambda^\times$ fournit ainsi un caractère universel $\chi^{un} : G_F \to \Lambda^\times$. On forme le caractère $\psi\chi^{un} : G_F \to \Lambda^\times$ comme le produit de ψ et de χ^{un}.

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on dispose du caractère $k : H_l \to \mathcal{O}^\times$ qui est l'élévation à la puissance k, suivie par l'inclusion naturelle $H_l \hookrightarrow \mathcal{O}^\times$. On en déduit une application de spécialisation $k : \Lambda \to \mathcal{O}$. On appelle Spec Λ l'espace des poids car il sera la base de nos familles de formes de Hilbert p-adiques ordinaires de poids parallèle. Tout entier $k \in \mathbb{Z}$ définit comme avant un $\mathcal{O}$-point de Spec Λ. On sera tout spécialement intéressé par la spécialisation en 0 de $\psi\chi^{un}$, spécialisation égale à ψ.

Soit $v|p$ une place de F divisant p. Il peut exister un point $x \in \mathrm{Spec}(\Lambda)(\mathcal{O})$ tel que $\psi\chi^{un}_x|_{I_v} = \chi_p|_{I_v}$. Dans une telle situation, $\psi\chi^{un}_x|_{I_v}$ est égal à la spécialisation en 1 de $\psi\chi^{un}$ à un caractère d'ordre fini près car ψ est par hypothèse non ramifié en v. Ce phénomène conduirait à des complications lors de calculs d'anneaux de déformations expliqués dans la section suivante. On l'évite donc de la manière suivante. Soit h un générateur topologique de H_l. Soit $\Lambda \simeq \mathcal{O}[[T]]$ l'isomorphisme envoyant h sur $1+T$. Soit ϕ_1 l'endomorphisme de Λ obtenu en envoyant T sur pT. Soit $\Psi = \phi_1(\psi\chi^{un}) : G_F \to \Lambda^\times$. On pose $W = \mathrm{Spec}(\Lambda)$ qu'on munit du caractère $\Psi : G_F \to \Lambda^\times$. Il est à présent simple de vérifier qu'il n'existe aucun point $x \in W(\mathcal{O})$ tel que $\Psi_x|_{I_v} = \chi_p|_{I_v}$. Géométriquement, nous avons juste remplacé la boule de départ $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ par une autre boule toujours isomorphe à $\mathrm{Spec}(\Lambda)$, centrée en 0 mais de rayon plus petit.

4. Anneaux de déformations locales

4.1. En les places divisant p. — Soit $v|p$ une place de F divisant p. Soit $\mathbb{D}_v^\square$ le foncteur de $\mathcal{AR}_\mathcal{O}$ dans la catégorie ENS des ensembles qui paramètre les déformations cadrées de $\bar\rho|_{G_v}$. Ce foncteur est représentable par un schéma $\mathcal{D}_v^\square = \mathrm{Spec}\ R_v^\square$. Le déterminant fournit une application $\mathcal{D}_v^\square \to Def(1)$ où Def(1) est l'espace de déformation du caractère trivial $\bar\psi|_{G_v}$. Soit $\mathcal{D}_v^{\square,\Psi} = \mathrm{Spec}\ R_v^{\square,\Psi}$ le produit fibré $\mathcal{D}_v^\square \times_{\mathrm{Def}(1)} W$. Soit $\mathcal{L} \to \mathcal{D}_v^{\square,\Psi}$ le schéma relativement projectif qui est le fermé de

$$\mathbb{P}^1_{\mathcal{D}_v^{\square,\Psi}}$$

paramétrant les droites L de la représentation universelle qui sont stables sous l'action du groupe G_v sur lesquelles le sous-groupe I_v agit trivialement. Soit $S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}[[T]]$ l'espace de déformations non ramifiées du caractère trivial de G_v. Le caractère universel envoie alors le Frobenius géométrique sur $1 + T \in \mathcal{O}[[T]]^\times$. Soit $\widehat{\mathrm{GL}_2}$ la complétion formelle de GL_2 sur $\mathcal{O}$ le long de sa section neutre en fibre spéciale.

Sur $\mathcal{D}^{split} = S \times W \times \widehat{\mathrm{GL}_2}$ on définit une déformation verselle scindée et cadrée de $\bar{\rho}$ par la formule $M(\varphi e_1 \oplus \Psi\varphi^{-1}e_2)M^{-1}$ où φ est le caractère universel non ramifié et M la matrice universelle. Cela fournit un morphisme $\mathcal{D}^{split} \to \mathcal{D}_v^{\square,\Psi}$.

Proposition 4.1.1. — *Le schéma $\mathcal{L}[1/p]$ est formellement lisse sur $W[1/p]$ de dimension relative $3 + [F_v : \mathbb{Q}_p]$ et est irréductible.*

Preuve. Montrons d'abord que $\mathcal{L}[1/p]$ est connexe. Considérons le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \times \mathcal{D}^{split} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{L} \arrow[d] \\
\mathcal{D}^{split} \arrow[r] & \mathcal{D}_v^{\square,\Psi}
\end{tikzcd}$$

On affirme tout d'abord que $\mathcal{L} \times \mathcal{D}^{split}$ est formellement lisse sur Spec $\mathcal{O}$. Soit en effet $A' \to A$ une surjection dans $\mathcal{AR}_{\mathcal{O}}$. Clairement, il n'y a aucune obstruction à relever un triplet $(L_A, \varphi_A, \Psi_A, M_A) \in \mathcal{L} \times \mathcal{D}^{split}(A)$ en un triplet $(L_{A'}, \varphi_{A'}, \Psi_{A'}, M_{A'}) \in \mathcal{L} \times \mathcal{D}^{split}(A')$.

On affirme ensuite que $\mathcal{L} \times \mathcal{D}^{split}[1/p]$ est connexe. Soit en effet A l'anneau de fonctions de $\mathcal{D}^{split}$ et $B = \mathrm{H}^0(\mathcal{L} \times \mathcal{D}^{split}, \mathscr{O}_{\mathcal{L}\times\mathcal{D}^{split}})$. Alors B est une A-algèbre finie. Elle est en fait locale car la fibre de f sur le point fermé de $\mathcal{D}^{split}$ est un $\mathbb{P}^1$ donc est connexe. Soit $e \in B[1/p]$ un idempotent. On affirme que $e \in B$, ce qui implique que $e = 1$ puisque B est local. Pour le voir, introduisons $n \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $\pi^n e \in B$. On a alors $\pi^{2n}e^2 = \pi^{2n}e$. Si $n \geq 1$ alors $(\pi^n e)^2 \in \pi B$. Comme $\mathcal{L} \times \mathcal{D}^{split}$ est formellement lisse, sa fibre spéciale est réduite et l'on trouve donc que $\pi^n e \in \pi B$, ce dont l'on déduit que $\pi^{n-1}e \in B$.

On en déduit maintenant que $\mathcal{L}[1/p]$ est connexe. Il suffit de montrer que le morphisme g induit une surjection sur les ensembles de composantes connexes. Soit $x \in \mathcal{L}[1/p]$ un point fermé correspondant à un $\mathcal{O}'$-point de $\mathcal{L}$ où $\mathcal{O}'$ est un anneau de valuation discrète fini et plat sur $\mathcal{O}$. Soit π' une uniformisante de $\mathcal{O}'$. À x correspond une déformation galoisienne cadrée

$$\rho_x = \begin{pmatrix} \varphi & b \\ 0 & \Psi_x\varphi^{-1} \end{pmatrix}$$

munie de la droite stable $\mathcal{O}' \cdot e_1$ et d'un isomorphisme de déformations cadrées $\bar{\rho_x} \simeq \bar{\rho}$. Ce dernier isomorphisme implique que le cocycle b peut s'écrire $\pi' b'$ pour b' un cocyle à valeurs dans $\mathcal{O}'$. On considère alors la déformation cadrée à valeurs dans $\mathcal{O}'[[X]]$

$$\rho_{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \varphi & Xb' \\ 0 & \Psi_x\varphi^{-1} \end{pmatrix}$$

munie de l'isomorphisme $\bar{\rho}_{\tilde{x}} \simeq \bar{\rho}_x \simeq \bar{\rho}$. Soit L la droite stable $\mathcal{O}'[[X]] \cdot e_1$ munie de l'action induite par φ. On obtient donc un morphisme Spec $\mathcal{O}'[[X]] \to \mathcal{L}$ induit par $(\rho_{\tilde{x}}, L)$. En spécialisant en π', on trouve ρ_x alors qu'en spécialisant en 0, on obtient une représentation scindée dans l'image de g.

Soit E' une extension finie de E. Soit $x \in \mathcal{L}[1/p](E')$ et y son image dans W. Montrons que la complétion formelle

$$\widehat{\mathcal{L}[1/p]}^x$$

est formellement lisse sur $\widehat{W[1/p]}^y$. Utilisons pour cela [**K1**], sect. 2.3 et [**Ge**], sect. 3.2 qui fournissent une interprétation modulaire des complétions formelles des espaces de déformations. Par hypothèse, ρ_x est de la forme

$$\begin{pmatrix} \varphi & b \\ 0 & \Psi_x \varphi^{-1} \end{pmatrix}$$

où $E' \cdot e_1$ correspond à la droite stable. Soit B le sous-groupe de Borel de GL_2 sur E' qui stabilise $E' \cdot e_1$. Soit $\mathbb{D}^{\square}_{\mathrm{B},x}$ le foncteur de $\mathcal{AR}_{E'}$ dans ENS qui paramètre les déformations cadrées de ρ_x à valeurs dans B et de premier coefficient diagonal non ramifié. Ce foncteur est représentable par $\mathcal{D}^{\square}_{\mathrm{B},x} = \mathrm{Spec}\ R^{\square}_{\mathrm{B},x}$ où $R^{\square}_{\mathrm{B},x}$ est une E'-algèbre complète nœthérienne de corps résiduel E'. Il existe un morphisme

$$\mathcal{D}^{\square}_{\mathrm{B},x} \longrightarrow \mathrm{Def}(\Psi_x)$$

où $\mathrm{Def}(\Psi_x)$ est l'espace de déformation de Ψ_x. On dispose d'une application $\widehat{W[1/p]}^y \to \mathrm{Def}(\Psi_x)$. Posons alors $\mathcal{D}^{\square,\Psi}_{\mathrm{B},x} = \mathcal{D}^{\square}_{\mathrm{B},x} \times_{\mathrm{Def}(\Psi_x)} \widehat{W[1/p]}^y$. D'après le lemme 4.1.2, on sait que $\mathcal{D}^{\square,\Psi}_{\mathrm{B},x}$ est formellement lisse sur

$$\widehat{W[1/p]}^y$$

de dimension relative $2 + [F_v : \mathbb{Q}_p]$. Soit $\widehat{GR} \to \mathrm{Spec}(E')$ la grassmannienne formelle qui paramètre les droites de E'^2 de réduction $e_1 E'$. Cet espace est formellement lisse de dimension 1. Finalement par [**Ge**], coro. 3.2.2, il existe un isomorphisme naturel

$$\widehat{GR} \times \mathcal{D}^{\square,\Psi}_{\mathrm{B},x} \to \widehat{\mathcal{L}[1/p]}^x$$

et l'on en déduit la proposition. □

Lemme 4.1.2. — *$\mathcal{D}^{\square,\Psi}_{\mathrm{B},x}$ est formellement lisse sur $\widehat{W[1/p]}^y$ de dimension relative $2 + [F_v : \mathbb{Q}_p]$.*

Preuve. Soit $A' \to A$ une surjection dans $\mathcal{AR}_{E'}$ de noyau I tel que $\mathfrak{m}_{A'} \cdot I = 0$. Soit

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \varphi_A & b_A \\ 0 & \Psi_A \varphi_A^{-1} \end{pmatrix}$$

un A-point de $\mathcal{D}_{\mathrm{B},x}^{\square,\Psi}$. Remarquons d'abord qu'il n'y a pas d'obstructions à relever φ_A en un caractère non ramifié $\varphi_{A'} : G_v \to A'^{\times}$ et Ψ_A en

$$\Psi_{A'} \in \widehat{W[1/p]}^y(A') .$$

Ensuite un calcul standard montre que l'obstruction à relever b_A en un cocycle $b_{A'}$ est contenue dans $\mathrm{H}^2(G_v, \Psi_x^{-1}\varphi^2) \otimes_{E'} I$ qui est nul par dualité locale. On a utilisé ici que $\Psi_x^{-1}\varphi^2$ n'est pas le caractère cyclotomique. L'espace tangent à $\mathcal{D}_{\mathrm{B},x}^{\square}$ a pour dimension

$$\begin{aligned} 2 + \dim_{E'} \mathrm{Z}^1(G_v, \Psi_x^{-1}\varphi^2) &= 2 + \dim_{E'} H^1(G_v, \Psi_x^{-1}\varphi^2) - \\ &\quad \dim_{E'} H^0(G_v, \Psi_x^{-1}\varphi^2) + 1 \\ &= 3 + [F_v : \mathbb{Q}_p] + \dim_{E'} H^2(G_v, \Psi_x^{-1}\varphi^2) \\ &= 3 + [F_v : \mathbb{Q}_p]. \end{aligned}$$

□

Notons $\mathcal{D}_v^{\triangle}[1/p] = \mathrm{Spec}\ R_v^{\triangle}[1/p]$ l'image de $\mathcal{L}[1/p]$ dans $\mathcal{D}_v^{\square,\Psi}[1/p]$ et $\mathcal{D}_v^{\triangle} =$ Spec $R_v^{\triangle}$ sa clôture schématique dans $\mathcal{D}_v^{\square,\Psi}$. Ensemblistement, Spec $R^{\triangle}[1/p]$ consiste en les déformations conjuguées à des déformations triangulaires supérieures de premier caractère diagonal non ramifié et de déterminant Ψ.

Proposition 4.1.3. — *Le schéma $\mathcal{D}_v^{\triangle}$ est irréductible, réduit de dimension relative inférieure à $3 + [F_v : \mathbb{Q}_p]$ sur W.*

Preuve. Cela résulte immédiatement de la proposition précédente. □

Suite à une suggestion de Taylor, nous introduisons un revêtement de $\mathcal{D}_v^{\triangle}$. Notons ρ^{un} la déformation universelle. Soit $s \in G_v$ un relèvement du Frobenius. Considérons l'anneau $R_v^{\triangle,U_v}[1/p] =$

$$R_v^{\triangle}[1/p][U_v]/\left(U_v^2 - \mathrm{Tr}\rho^{un}(s)U_v + \Psi(s), \rho^{un}(ts) = \Psi(s)U_v^{-1}(\rho^{un}(t) - 1) + \rho^{un}(s),\ \forall t \in I_v\right)$$

et posons $\mathcal{D}_v^{\triangle,U_v}[1/p] = \mathrm{Spec}\ R_v^{\triangle,U_v}[1/p]$.

Remarque 4.1.4. — Il faut penser à $\mathcal{D}_v^{\triangle,U_v}[1/p] \to \mathcal{D}_v^{\triangle}[1/p]$ comme à l'espace qui paramètre la valeur propre de s apparaissant sur une droite non ramifiée.

Proposition 4.1.5. — *Le morphisme $\mathcal{D}_v^{\triangle,U_v}[1/p] \to \mathcal{D}_v^{\triangle}[1/p]$ est génériquement un isomorphisme. Le schéma $\mathcal{D}_v^{\triangle,U_v}[1/p]$ est irréductible et réduit.*

Preuve. Calculons la fibre du morphisme $f : \mathcal{D}_v^{\triangle,U}[1/p] \to \mathcal{D}_v^{\triangle}[1/p]$ en un point x. Supposons que

$$\rho_x = \begin{pmatrix} \varphi & b \\ 0 & \Psi_x\varphi^{-1} \end{pmatrix}$$

Supposons d'abord que $\rho_x|_{I_v} = 1$. Alors

$$f^{-1}(x) = \mathrm{Spec}\ k(x)[U_v]/\left(U_v^2 - (\varphi(s) + \Psi_x(s)\varphi(s)^{-1})U_v + \Psi_x(s)\right).$$

Ceci est un revêtement étale de degré deux si $\varphi(s) \neq \Psi_x\varphi^{-1}(s)$ et un revêtement ramifié de degré deux sinon. Supposons maintenant que $\rho_x|_{I_v} \neq 1$. On a $U_v = \varphi(s)$. Donc f est un isomorphisme sur l'ouvert où $\rho^{un}|_{I_v} \neq 1$. En effet, l'application $\mathcal{L}[1/p] \to \mathcal{D}_v^{\triangle}[1/p]$ est un isomorphisme sur le lieu où $\rho^{un}|_{I_v} \neq 1$ et U_v est la valeur propre de $\rho^{un}(s)$ sur la droite stable non ramifiée. Pour prouver les autres assertions, il est suffisant de montrer que tout point fermé

$$x \in \mathcal{D}_v^{\triangle,U_v}[1/p]$$

avec $\rho_x|_{I_v} = 1$ admet une générisation $\tilde{x} \in \mathcal{D}_v^{\triangle,U_v}[1/p]$ avec $\rho_{\tilde{x}}|_{I_v} \neq 1$. Supposons donc

$$\rho_x = \begin{pmatrix} \varphi & b \\ 0 & \Psi_x\varphi^{-1} \end{pmatrix}$$

avec b un cocycle dont la restriction à l'inertie est triviale et $\Psi_x = \psi$ est non ramifiée. Soit b' un cocycle ramifié (cela existe bien !). Pour terminer la démonstration, il suffit de considérer la déformation cadrée

$$\rho_{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \varphi & b + Xb' \\ 0 & \Psi_x\varphi^{-1} \end{pmatrix}$$

sur $\mathcal{O}'[[X]]$ et de poser $U_v = \varphi(s)$. □

Remarque 4.1.6. — On a vu que le revêtement $\mathcal{D}_v^{\triangle,U}[1/p] \to \mathcal{D}_v^{\triangle}[1/p]$ est de degré deux exactement aux points non ramifiés et de degré un autrement. C'est une explication galoisienne locale pour l'existence de formes compagnons dans le cas non ramifié.

Remarque 4.1.7. — Il est possible d'avoir une intuition géométrique pour le morphisme $\mathcal{D}_v^{\triangle,U}[1/p] \to \mathcal{D}_v^{\triangle}[1/p]$ en considérant l'exemple analogue suivant. Soit $f : X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ une famille de courbes singulières dont chaque fibre a un unique point singulier. Supposons que ce point soit une noeud si $t \neq 0$ et un cusp si $t = 0$. Soit $\pi : Y \to X$ la famille des normalisations des $f^{-1}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. Alors π est fini, birationnel et un isomorphisme sur le lieu lisse de f, un revêtement étale de degré deux sur le lieu singulier de $f|_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}}$ et un revêtement ramifié de degré deux sur l'unique cusp.

Soit $\mathcal{D}_v^{\triangle,U_v} = \mathrm{Spec}\ R_v^{\triangle,U_v}$ l'adhérence schématique de $\mathcal{D}_v^{\triangle,U_v}[1/p]$ dans

$$\mathrm{Spec}\ R_v^{\triangle}[U_v]/\left(U_v^2 - \mathrm{Tr}\rho^{un}(s)U_v + \Psi(s), \rho^{un}(ts) = \Psi(s)U_v^{-1}(\rho^{un}(t) - 1) + \rho^{un}(s),\ \forall t \in I_v\right).$$

C'est donc un schéma intègre. Posons $R_{p-loc}^{\square,\Psi} = \hat{\otimes}_{v|p} R_v^{\square,\Psi}$, $R_{p-loc}^{\triangle} = \hat{\otimes}_{v|p} R_v^{\triangle}$, $R_{p-loc}^{\triangle,U} = \hat{\otimes}_{v|p} R_v^{\triangle,U_v}$ où tous les produits tensoriels sont pris au-dessus de Λ.

4.2. En les places de Taylor-Wiles. — Soit v une place de F qui n'est pas dans Σ_p. Supposons de plus que $N_{F/\mathbb{Q}}(v) = 1 \mod p$ et que $\bar{\rho}(Frob_v)$ a deux valeurs propres distinctes $\bar{\alpha}_v$ et $\bar{\beta}_v$. Soit R_v l'anneau de déformation de $\bar{\rho}|_{G_v}$. Le déterminant fournit une application $\mathrm{Spec}(R_v) \to \mathrm{Def}(\bar{\psi}|_{G_v})$ vers l'anneau de déformations de $\bar{\psi}$. Notons

$$R_v^{\Psi} = R_v \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Def}(\bar{\psi}|_{G_v})}} \Lambda\,.$$

Soit Δ_v le sous-groupe de p-Sylow de $k(v)^{\times}$ et $\delta_v : I_v \to \mathcal{O}[\Delta_v]^{\times}$ le caractère obtenu par la théorie du corps de classe local. Définissons maintenant une application formellement lisse $\mathrm{Spec}\ R_v \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}[\Delta_v]$. Soit $A \in \mathcal{AR}_{\mathcal{O}}$. Toute déformation de $\bar{\rho}$ à A est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \alpha_v & 0 \\ 0 & \beta_v \end{pmatrix}$$

où α_v et β_v sont des caractères modérément ramifiés relevant $\bar{\alpha}_v$ et $\bar{\beta}_v$. Le caractère $\alpha_v|_{I_v}$ définit un A-point de $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}[\Delta_v]$ et nous obtenons bien une application $\mathrm{Spec}\ R_v \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}[\Delta_v]$. Par extension des scalaires, on obtient également une application $\Lambda[\Delta_v] \to R_v^{\Psi}$.

4.3. Représentations spéciales. — Rappelons que χ_p désigne le caractère cyclotomique p-adique. Notons comme d'habitude $V(1)$ le twist d'une représentation V par χ_p. Soit $v \in \Sigma$ une place de F. Par hypothèse, $\bar{\rho}|_{G_{F_v}}$ et $\bar{\chi}_p|_{G_{F_v}}$ sont triviaux. Notons $\mathbb{D}_v^{\square}$ le foncteur de $\mathcal{AR}_{\mathcal{O}}$ dans ENS qui paramètre les déformations cadrées de $\bar{\rho}|_{G_{F_v}}$ de déterminant non ramifié. Il est représentable par un schéma $\mathcal{D}_v^{\square} = \mathrm{Spec}\ R_v^{\square}$. Rappelons des résultats de Kisin [**K1**, sec.2.6] sur la structure de cet anneau de déformations. Notons comme précédemment $\mathrm{Def}(1)$ l'espace de déformations non ramifiées du caractère trivial. Il existe une application déterminant $\mathcal{D}_v^{\square} \to \mathrm{Def}(1)$.

Le schéma $\mathcal{D}_v^{\square}$ a deux composantes irréductibles notées $\mathcal{D}_v^{sp} = \mathrm{Spec}\ R_v^{sp}$ et $\mathcal{D}_v^{ur} = \mathrm{Spec}\ R_v^{ur}$. Elles sont plates sur $\mathcal{O}$ et sont formellement lisses sur $\mathrm{Def}(1)[1/p]$ de dimension relative 3. Pour toute extension finie E' de E, la composante $\mathcal{D}_v^{sp}(E')$ paramètre les déformations cadrées extensions de η par $\eta(1)$ où η est un caractère non ramifié de $G_v \to \mathcal{O}^{\times}$ de réduction triviale. Pour toute extension finie E' de E, la composante $\mathcal{D}_v^{ur}(E')$ correspond aux déformations cadrées non ramifiées.

Notons $R_v^{sp,\Psi} = R_v^{sp} \otimes_{\mathrm{Def}(1)} \Lambda$ et $R_v^{ur,\Psi} = R_v^{ur} \otimes_{\mathrm{Def}(1)} \Lambda$. Notons aussi $\mathcal{D}_v^{\Psi} = \mathcal{D}_v^{sp,\Psi} \cup \mathcal{D}_v^{ur,\Psi} = \mathrm{Spec}\ R_v^{\Psi}$ qui est un sous-schéma fermé de $\mathcal{D}_v^{\square} \times_{\mathrm{Def}(1)} W$. Nous noterons enfin

$$R_{\Sigma}^{sp,\Psi} = \hat{\otimes}_{v|\Sigma} R_v^{sp,\Psi}\,,$$

$R_{\Sigma}^{ur,\Psi} = \hat{\otimes}_{v|\Sigma} R_v^{ur}$ et $R_{\Sigma}^{\Psi} = \hat{\otimes}_{v|\Sigma} R_v^{\Psi}$ où tous les produits tensoriels sont pris au-dessus de Λ.

Soit s un relèvement de l'élément de Frobenius. On vérifie aisément que

$$R^{ur,\Psi,U_v} = R_v^{ur,\Psi}[U_v]/(U_v^2 - \mathrm{Tr}(\rho^{un}(s))U_v + \Psi(s))$$

est irréductible. D'un autre côté, l'anneau $R_v^{sp,\Psi}[1/p][U_v]/(U_v^2 - \mathrm{Tr}(\rho^{un}(s))U_v + \Psi(s))$ a clairement deux composantes connexes, l'une donnée par l'équation $U_v^2\Psi(s)^{-1} = N(v)$ et l'autre par $U_v^2\Psi(s)^{-1} = N(v)^{-1}$. Nous appellerons R^{sp,Ψ,U_v} l'adhérence schématique dans

$$R_v^{sp,\Psi}[U_v]/(U_v^2 - \mathrm{Tr}(\rho^{un}(s))U_v + \Psi(s))$$

de la composante en fibre générique d'équation $U_v^2\Psi(s)^{-1} = N(v)$. Notons $\mathrm{Spec}\, R_v^{\Psi,U_v}$ le sous-schéma fermé de

$$\mathrm{Spec}\, R_v^{\Psi}[U_v]/(U_v^2 - \mathrm{Tr}(\rho^{un}(s))U_v + \Psi(s))$$

égal à $\mathrm{Spec}\, R^{sp,\Psi,U_v} \cup \mathrm{Spec}\, R^{ur,\Psi,U_v}$. Notons enfin

$$R_\Sigma^{sp,\Psi,U} = \hat{\otimes}_{v|\Sigma} R_v^{sp,\Psi,U_v}\ ,$$

$R_\Sigma^{ur,\Psi,U} = \hat{\otimes}_{v|\Sigma} R_v^{ur,\Psi,U_v}$ et $R_\Sigma^{\Psi,U} = \hat{\otimes}_{v|\Sigma} R_v^{\Psi,U_v}$ où tous les produits tensoriels sont pris au-dessus de Λ.

5. Anneaux de déformations globales

5.1. Notations et définitions. — Notons $\mathbb{D}$ le foncteur de $\mathcal{AR}_\mathcal{O}$ dans ENS qui paramètre les déformations de $\bar{\rho}$ non ramifiées hors de Σ_p et de déterminant non ramifié hors des places divisant p. Comme $\bar{\rho}$ est irréductible, ce foncteur est pro-représentable par un schéma $\mathcal{D} = \mathrm{Spec}\, R$. Notons également $\mathrm{Def}(\bar{\psi}) = \mathrm{Spec}\, \Lambda_0$ l'anneau de déformations de $\bar{\psi}$ non ramifiées hors de p.

Soit $\mathbb{D}^\square$ le foncteur de $\mathcal{AR}_\mathcal{O}$ dans ENS qui envoie un objet A de $\mathcal{AR}_\mathcal{O}$ dans les classes d'isomorphismes de familles $(\rho, M_v\ v|\Sigma_p)$ où ρ est une déformation de $\bar{\rho}$ non ramifiée hors de Σ_p de déterminant non ramifié hors de p, et où M_v est un cadrage pour tout v dans Σ_p. Ce foncteur est représentable par $\mathcal{D}^\square = \mathrm{Spec}\, R^\square$. Le morphisme $\mathcal{D}^\square \to \mathcal{D}$ est un torseur sous

$$\widehat{\mathrm{GL}_2}^{|\Sigma_p|} / \widehat{\mathbb{G}_m}$$

où $|\Sigma_p|$ est le cardinal de Σ_p. De plus, il existe un morphisme canonique $\mathcal{D}^\square \to \prod_{v|p} \mathcal{D}_v^\square$.

Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des places v de $\mathcal{O}_F$ vérifiant $N_{F/\mathbb{Q}}(v) = 1 \mod p$. On note $\mathbb{D}_\mathcal{Q}$ le foncteur des déformations de $\bar{\rho}$ qui sont non ramifiées hors de $\mathcal{Q}\Sigma_p$ et de déterminant non ramifié hors de p. Ce foncteur est pro-représentable par $\mathcal{D}_\mathcal{Q} = \mathrm{Spec}\, R_\mathcal{Q}$. La restriction aux places de $\mathcal{Q}$ fait de $R_\mathcal{Q}$ une algèbre sur $\prod_{v\in\mathcal{Q}} \mathcal{O}[\Delta_v] = \mathcal{O}[\Delta_\mathcal{Q}]$. On a alors

$$R_\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_\mathcal{Q}]} \mathcal{O} \simeq R.$$

De manière similaire, soit $\mathbb{D}_{\mathcal{Q}}^{\square}$ le foncteur des déformations de $\bar{\rho}$ qui sont non ramifiées hors de $\mathcal{Q}\Sigma_p$ de déterminant non ramifié hors de p, munies d'un cadrage en les places $v|\Sigma_p$. Ce foncteur est pro-représentable par

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}^{\square} = \mathrm{Spec}\ R_{\mathcal{Q}}^{\square}\ .$$

Remarquons que $R^{\square}$ et $R_{\mathcal{Q}}^{\square}$ sont des Λ_0-algèbres. On dispose d'une application naturelle $\Lambda_0 \to \Lambda$ donnée par Ψ. Notons $R^{\square,\Psi}$ et $R_{\mathcal{Q}}^{\square,\Psi}$ les produits tensoriels de $R^{\square}$ et de $R_{\mathcal{Q}}^{\square}$ avec Λ au-dessus de Λ_0. Il existe également un morphisme naturel $\Lambda \to \mathcal{O}$ donné par ψ. Notons

$$R^{\square,\psi}$$

et $R_{\mathcal{Q}}^{\square,\psi}$ les produits tensoriels de $R^{\square}$ et de $R_{\mathcal{Q}}^{\square}$ avec $\mathcal{O}$ au-dessus de Λ_0. Remarquons que $R^{\square,\Psi}$ et $R_{\mathcal{Q}}^{\square,\Psi}$ sont des algèbres sur

$$\hat{\bigotimes}_{v|p} R_v^{\square,\Psi} \hat{\otimes} \hat{\bigotimes}_{v|\Sigma} R_v^{\square,\Psi} = R_{loc}^{\square,\Psi}$$

où tous les produits tensoriels sont pris au-dessus de Λ. Notons $R_{loc}^{\triangle,\Psi} = R_{\Sigma}^{\Psi} \otimes R_{p-loc}^{\triangle}$ et $R_{loc}^{\triangle,\Psi,U} = R_{\Sigma}^{\Psi,U} \otimes R_{p-loc}^{\triangle,U}$. Notons enfin $R_?^{\triangle,\Psi} = R_?^{\square,\Psi} \otimes_{R_{loc}^{\square,\Psi}} R_{loc}^{\triangle,\Psi}$ et

$$R_?^{\triangle,\Psi,U} = R_?^{\square} \otimes_{R_{loc}^{\square,\Psi}} R_{loc}^{\triangle,\Psi,U}$$

pour ? remplaçant les symboles $\emptyset$ ou $\mathcal{Q}$. Toutes ces algèbres sont des Λ-algèbres. Par convention, lorsqu'on les tensorisera par $\mathcal{O}$ au-dessus de Λ, ce qui correspond à les spécialiser en 0 grâce à ψ, nous changerons l'exposant Ψ et ψ.

5.2. Calculs d'espaces tangents. — Pour tout ensemble fini de places S, notons $G_{F,S}$ le groupe de Galois de l'extension maximale de F non ramifiée hors de S. Soit

$$\mathrm{H}^1 = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{H}^1(G_{F,\Sigma_p}, \mathrm{Ad}^0\bar{\rho}) \to \oplus_{v|\Sigma_p}\mathrm{H}^1(G_v, \mathrm{Ad}^0\bar{\rho})\big).$$

Posons $h^1 = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^1$. On a alors le résultat classique suivant (voir [**K1**], lem. 3.2.2).

Proposition 5.2.1. — *L'algèbre $R^{\square,\psi}$ est engendrée sur $R_{loc}^{\square,\psi}$ par $h^1+|\Sigma_p|-1$ éléments et l'algèbre $R^{\square,\Psi}$ est engendrée sur $R_{loc}^{\square,\Psi}$ par $h^1+|\Sigma_p|-1$ éléments.*

Pour tout ensemble $\mathcal{Q}$ de places de Taylor-Wiles, notons

$$\mathrm{H}_{\mathcal{Q}}^1 = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{H}^1(G_{F,\Sigma_p\mathcal{Q}}, \mathrm{Ad}^0\bar{\rho}) \to \oplus_{v|\Sigma_p}\mathrm{H}^1(G_v, \mathrm{Ad}^0\bar{\rho})\big).$$

Posons $h_{\mathcal{Q}}^1 = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}_{\mathcal{Q}}^1$.

Proposition 5.2.2. — *L'algèbre $R_{\mathcal{Q}}^{\square,\Psi}$ est engendrée sur $R_{loc}^{\square,\Psi}$ par $h_{\mathcal{Q}}^1+|\Sigma_p|-1$ éléments.*

Soit $\mathrm{H}^1_\perp = \mathrm{H}^1(G_{F,\Sigma_p}, \mathrm{Ad}^0\bar\rho(1))$ et pour tout ensemble $\mathcal{Q}$ de places de Taylor-Wiles, notons

$$\mathrm{H}^1_{\perp,\mathcal{Q}} = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^1(G_{F,\mathcal{Q}\Sigma_p}, \mathrm{Ad}^0\bar\rho(1)) \to \oplus_{v|\mathcal{Q}}\mathrm{H}^1(G_v, \mathrm{Ad}^0\bar\rho(1))\right).$$

Posons $h^1_\perp = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^1_\perp$ et $h^1_{\perp,\mathcal{Q}} = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^1_{\perp,\mathcal{Q}}$. Par la formule de Poitou-Tate, il vient

$$h^1_{\mathcal{Q}} - h^1_{\perp,\mathcal{Q}} = h^0(G_F, \mathrm{Ad}^0\bar\rho) - h^0(G_F, \mathrm{Ad}^0\bar\rho(1)) + \sum_{v|\mathcal{Q}} h^2(G_v, \mathrm{Ad}^0\bar\rho) - \sum_{v|\infty} h^0(G_v, \mathrm{Ad}^0\bar\rho).$$

Ici,
- $h^0(G_F, \mathrm{Ad}^0\bar\rho) = 0$,
- $h^0(G_F, \mathrm{Ad}^0\bar\rho(1)) = 0$,
- $h^0(G_v, \mathrm{Ad}^0\bar\rho) = 1$ si $v|\infty$.
- $h^2(G_v, \mathrm{Ad}^0\bar\rho) = 1$ si $v|\mathcal{Q}$.

On en déduit que $h^1_{\mathcal{Q}} - h^1_{\perp,\mathcal{Q}} = -[F:\mathbb{Q}] + \sharp\mathcal{Q}$.

***Proposition 5.2.3* ([K1],3.2.3)**. — *Sous les hypothèses précédentes sur $\bar\rho$, il eiste une suite d'ensembles $\{\mathcal{Q}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de places de Taylor-Wiles de F telle que*

1. *$\sharp\mathcal{Q}_n = h^1_\perp$,*
2. *$h^1_{\perp,\mathcal{Q}_n} = 0$,*
3. *$N_{F/\mathbb{Q}}(v) = 1 \mod p^n$ pour tout $v \in \mathcal{Q}_n$.*

Corollaire 5.2.4. — *$R^{\square,\Psi}_{\mathcal{Q}_n}$ est engendré par $|\Sigma_p| - 1 - [F:\mathbb{Q}] + h^1_\perp$ éléments sur $R^{\square,\Psi}_{loc}$.*

6. Variétés de Hilbert

6.1. Variétés abéliennes de Hilbert polarisées. — Par définition, une variété abélienne de Hilbert-Blumenthal A sur un schéma S est une variété abélienne de genre $[F:\mathbb{Q}]$ sur S munie d'un morphisme $\mathcal{O}_F \to \mathrm{End}(A)$. Pour tout variété abélienne de Hilbert-Blumenthal A sur S, on note $\mathcal{P}(A)$ le faisceau étale sur S des morphismes symétriques $\mathcal{O}_F$-linéaires de A dans sa duale A^t. On note $\mathcal{P}(A)^+$ le cône des polarisations dans $\mathcal{P}(A)$. Ainsi $\mathcal{P}(A)$ est un faisceau en $\mathcal{O}_F$-modules projectifs de rang un muni d'une notion de positivité définie par $\mathcal{P}(A)^+$.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_F$ au-dessus d'un nombre premier $\ell \geq 3$ différent de p. Faisons les hypothèses suivantes :

1. $\mathfrak{n}$ n'est pas dans Σ,

2. ℓ décompose totalement dans $\mathcal{O}_F$,
3. $\ell \neq 1 \mod p$,
4. $\rho(Frob_{\mathfrak{n}})$ a des valeurs propres $\alpha_{\mathfrak{n}}, \beta_{\mathfrak{n}}$ telles que $\alpha_{\mathfrak{n}} \neq \ell^{\pm 1}\beta_{\mathfrak{n}} \mod p$.

Remarque 6.1.1. — L'existence d'un tel idéal $\mathfrak{n}$ résulte de [**DT**], lemma 3.

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_F$ et $\mathfrak{c}^+$ le cône de ses élements totalement positifs. Soit $X(\mathfrak{c}) \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ la variété modulaire de Hilbert pour des $\mathfrak{c}$-polarisations strictes qui paramètre les classes d'isomorphismes de données :

1. une variété abélienne A de Hilbert-Blumenthal,
2. une structure de niveau $i : \delta^{-1}\mu_{\mathfrak{n}} \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$ où δ est la différente de F,
3. pour tout $\mathfrak{M} \in \Sigma$, un sous-groupe fini étale $H_{\mathfrak{M}} \hookrightarrow A[\mathfrak{M}]$ qui est localement pour la topologie étale isomorphe à $\mathcal{O}_F/\mathfrak{M}$,
4. une $\mathfrak{c}$-polarisation $\Phi : (\mathfrak{c}, \mathfrak{c}^+) \simeq (P(A), P(A)^+)$ telle que l'application induite $A \otimes \mathfrak{c} \to A^t$ soit un isomorphisme.

La condition intervenant dans la dernière de ces données est nommée condition de Deligne-Pappas (voir [**DP**], condition 2.1.3). La troisième donnée est celle d'une structure de niveau Iwahori en Σ. On la notera parfois Iw.

D'après un lemme de Serre (voir [**Mu**], p. 191 par exemple), les données précédentes n'ont pas d'automorphisme non trivial. On en déduit que $X(\mathfrak{c})$ est représentable par un schéma. Notons $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi)$ les objets universels. Soit $\{\mathfrak{c}_1, ..., \mathfrak{c}_s\}$ un système de représentants premiers à p de Cl^+, le groupe de classe strict de $\mathcal{O}_F$. On pose $X = \coprod_i X(\mathfrak{c}_i)$.

Soit $\mathfrak{X}$ la complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale et $\mathfrak{X}^{ord}$ le sous-schéma formel ouvert formé du lieu ordinaire.

6.2. Le faisceau des formes modulaires.

— Si $A \to S$ est une variété abélienne de section neutre e, on note ω_A le faisceau conormal

$$e^\star \Omega^1_{A/X}$$

le long de cette section neutre. On note ω^1_A son déterminant. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Le faisceau des formes modulaires de Hilbert de poids k sur W est la puissance k-ième ω^k_A pour $A \to X$ le schéma abélien universel. On le notera plus simplement ω^k. Soit M un $\mathcal{O}$-module. Le module des formes modulaires de Hilbert de poids k à coefficients dans M est $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes_{\mathcal{O}} M)$. Une forme modulaire f de poids k est donc une règle fonctorielle définie sur les familles $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \omega)$ où $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi) \in X$ et $\omega \in \omega^1_A$ telle que $f(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \lambda.\omega) = \lambda^{-k} f(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \omega)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{G}_m$.

6.3. Action du centre. — Soient $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ deux idéaux fractionnaires et $\lambda \in F^{\times,+}$ un élément totalement positif induisant un isomorphisme positif $\lambda : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}'$. On a un morphisme $\lambda : X(\mathfrak{c}) \to X(\mathfrak{c}')$ qui envoie $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi)$ sur $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi \circ \lambda^{-1})$. Cela induit en particulier une action de $\mathcal{O}_F^{\times,+}$ sur $X(\mathfrak{c})$. Cette action s'étend sur $\mathrm{H}^0(X, \omega^k)$ de la manière suivante.

Si $\varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times,+}$ et $f \in \mathrm{H}^0(X, \omega^k)$, on pose $(\varepsilon \cdot f)(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \omega) = f(A, i, \mathrm{Iw}, \varepsilon\Phi, \omega)$. Soit $\mathcal{O}_{F,\mathfrak{n}}^\times$ le sous-groupe de $\mathcal{O}_F^\times$ formé des unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{n}$. Pour tout quadruplet $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi) \in X$ et

$$\varepsilon \in \mathcal{O}_{F,\mathfrak{n}}^\times ,$$

le morphisme $\varepsilon : A \to A$ induit un isomorphisme entre $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi)$ et $(A, i, \mathrm{Iw}, \varepsilon^2\Phi)$. Sa différentielle $\varepsilon^\star : \omega_A^1 \to \omega_A^1$ est la multiplication par $N_{F/\mathbb{Q}}(\varepsilon)$ donc est triviale. Cela implique que l'élément ε identifie les quadruplets $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \omega)$ et $(A, i, \mathrm{Iw}, \varepsilon^2\Phi, \omega)$.

Notons $\Delta = \mathcal{O}_F^{\times,+}/(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{n}}^\times)^2$, où $(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{n}}^\times)^2$ désigne le sous-groupe des carrés de $\mathcal{O}_{F,\mathfrak{n}}^\times$. L'action définie précédemment de $\mathcal{O}_F^{\times,+}$ sur $\mathrm{H}^0(X, \omega^k)$ se factorise par Δ. Nous utiliserons plus tard le lemme suivant.

Lemme 6.3.1. — *Le groupe Δ est d'ordre premier à p.*

Preuve. Le groupe $\mathcal{O}_F^{\times,+}/(\mathcal{O}_F^\times)^2$ est un 2-groupe. L'ordre du groupe $(\mathcal{O}_F^\times)^2/\big(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{n}}^\times \cap (\mathcal{O}_F^\times)^2\big)$ divise $\ell - 1$. Le groupe $\big(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{n}}^\times \cap (\mathcal{O}_F^\times)^2\big)/(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{n}})^2$ est un 2-groupe. $\square$

Soit M un $\mathcal{O}$-module. Notons $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes_{\mathcal{O}} M)^\Delta$ le sous-module de $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes_{\mathcal{O}} M)$ des invariants sous Δ. Une forme modulaire f de poids k dans $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)^\Delta$ est bien sûr une règle fonctorielle définie sur les familles $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \omega)$ où $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi) \in X$ et $\omega \in \omega_A^1$ telle que $f(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \lambda.\omega) = \lambda^{-k} f(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \omega)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{G}_m$ et $f(A, i, \mathrm{Iw}, \varepsilon\Phi, \omega) = f(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \omega)$ pour tout $\varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times,+}$.

Remarque 6.3.2. — Le module $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes_{\mathcal{O}} M)$ est relié aux formes automorphes pour le sous-groupe de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_2$ des matrices de déterminant réduit dans $\mathbb{G}_m$. Prendre les invariants par Δ permet d'isoler le sous-module qui est relié aux formes automorphes pour $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_2$.

Notons $\mathrm{I}(\mathfrak{n})$ le groupe des idéaux fractionnaires premiers à $\mathfrak{n}$. Soit $F_\mathfrak{n}^{\times,+}$ le sous-groupe de $F^{\times,+}$ formé des éléments congrus à 1 modulo $\mathfrak{n}$. Le quotient $\mathrm{I}(\mathfrak{n})/F_\mathfrak{n}^{\times,+}$ n'est autre que $Cl^+(\mathfrak{n})$, le groupe de classe strict de rayon $\mathfrak{n}$. Ce groupe est extension

$$0 \to (\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}\mathcal{O}_F)^\times/\mathcal{O}_F^{\times,+} \to Cl^+(\mathfrak{n}) \to Cl^+ \to 0.$$

Notons $\mathrm{I}(\mathfrak{n}\Sigma)$ le sous-groupe des idéaux fractionnaires premiers à $\mathfrak{n}\Sigma$. Notons $F^{\times,+}_{\mathfrak{n},\Sigma}$ le sous-groupe de $F^{\times,+}$ formé des éléments congrus à 1 modulo $\mathfrak{n}$ et premiers à toutes les places de Σ. L'inclusion naturelle $\mathrm{I}(\mathfrak{n}\Sigma) \hookrightarrow \mathrm{I}(\mathfrak{n})$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{I}(\mathfrak{n}\Sigma)/F^{\times,+}_{\mathfrak{n},\Sigma} \simeq Cl^+(\mathfrak{n}).$$

Soit $\mathfrak{m} \in \mathrm{I}(\mathfrak{n}\Sigma)$ un idéal entier et $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire. On définit un morphisme

$$[\mathfrak{m}] : X(\mathfrak{c}) \to X(\mathfrak{m}^{-2}\mathfrak{c})$$

de la manière suivante. Soit $(A, i, \mathrm{Iw}, \phi)$ un point de $X(\mathfrak{c})$. Il existe une isogénie $\psi_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \otimes A \to A$ obtenue en tensorisant l'inclusion $\mathfrak{m} \hookrightarrow \mathcal{O}_F$ par A au-dessus de $\mathcal{O}_F$. Notons $[\mathfrak{m}](A, i, \mathrm{Iw}, \Phi)$ la donnée $(\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{O}_F} A, i', \mathrm{Iw}', \Phi')$ où i', Iw' sont obtenus par image inverse de i, Iw par l'isogénie $\psi_{\mathfrak{m}}$ et où Φ' est la $\mathfrak{m}^{-2}\mathfrak{c}$-polarisation de $\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{O}_F} A$ déduite de Φ.

Définissons à présent une action de $\mathfrak{m}$ sur $\mathrm{H}^0(X, \omega^k)^{\Delta}$. Soit $\mathfrak{c}_i$ un des représentants du groupe de classe strict. Soit $\lambda_i : \mathfrak{m}^2\mathfrak{c}_i \to \mathfrak{c}_j$ un isomorphisme positif où j désigne un indice bien choisi.

Supposons d'abord que $\mathfrak{m}$ est premier à p. Pour tout $f \in \mathrm{H}^0(X(\mathfrak{c}_i), \omega^k)^{\Delta}$, on définit $[\mathfrak{m}] \cdot f \in \mathrm{H}^0(X(\mathfrak{c}_j), \omega^k)^{\Delta}$ par $[\mathfrak{m}] \cdot f(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \omega) = f(\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{O}_F} A, i', \mathrm{Iw}', \lambda_i\phi', N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})^{-1}\psi^\star_{\mathfrak{m}}\omega)$. Cette définition est indépendante du choix de λ_i et a un sens puisque $N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})^{-1}\psi^\star_{\mathfrak{m}}\omega$ est un générateur de $\omega^1_{\mathfrak{m}\otimes A}$.

Soit maintenant $(x) \in \mathrm{I}(\mathfrak{n}\Sigma)$ un idéal peut-être non premier à p. On va vérifier que la définition précédente a également un sens pour (x). Comme X est plat sur $\mathcal{O}$, il suffit pour cela de vérifier le lemme suivant.

Lemme 6.3.3. — *Soit R une $\mathcal{O}$-algèbre plate et $A \to \operatorname{Spec} R$ une variété abélienne de Hilbert-Blumenthal munie d'une polarisation qui vérifie la condition de Deligne-Pappas. Notons $x \in \mathcal{O}_F$ et $\psi_{(x)} : (x) \otimes A \to A$ l'isogénie canonique obtenue en tensorisant l'inclusion $(x) \to \mathcal{O}_F$ par A. Alors l'application $N^{-1}_{F/\mathbb{Q}}((x)) \cdot \psi^\star_{(x)} : \omega^1_A[1/p] \to \omega^1_{(x)\otimes A}[1/p]$ induit un isomorphisme de ω_A dans $\omega_{(x)\otimes A}$.*

Preuve. Notons $x : A \to (x) \otimes A$ l'isomorphisme induit par $x : \mathcal{O}_F \to (x)$. D'après [**Vo**], thm. 1, l'application $\psi^\star_{(x)} \circ x^\star : \omega^1_A \to \omega^1_A$ est la multiplication par $N_{F/\mathbb{Q}}(x)$. Cela implique que l'application

$$N^{-1}_{F/\mathbb{Q}}((x)) \cdot \psi^\star_{(x)} \ : \ \omega^1_A \longrightarrow \omega^1_{(x)\otimes A}$$

est un isomorphisme. □

Comme les idéaux entiers premiers à $\mathfrak{n}\Sigma_p$ et les idéaux entiers principaux premiers à $\mathfrak{n}\Sigma$ engendrent $\mathrm{I}(\mathfrak{n}\Sigma)$, on a finalement bien défini une action du groupe $\mathrm{I}(\mathfrak{n}\Sigma)$ sur l'espace des formes modulaires.

Si l'on suppose que $x \in F^{\times,+}_{\mathfrak{n},\Sigma}$, on peut identifier A et $(x) \otimes A$ par l'isomorphisme $x : \mathcal{O}_F \to (x)$. Soit

$$f \in \mathrm{H}^0(X, \omega^k)^\Delta \, .$$

Sous l'identification précédente,

$$[(x)]f(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, \omega) = f(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, N_{F/\mathbb{Q}}(x) N_{F/\mathbb{Q}}((x))^{-1}\omega) \, .$$

Comme x est totalement positif, $N_{F/\mathbb{Q}}(x) = N_{F/\mathbb{Q}}((x))$. Ainsi l'action de $\mathrm{I}(\mathfrak{n}\Sigma)$ se factorise par $Cl^+(\mathfrak{n})$. Soit $\chi : Cl^+(\mathfrak{n}) \to \mathcal{O}^\times$ un caractère et M un $\mathcal{O}$-module. Notons

$$\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)^{\Delta,\chi}$$

le sous-module de $\mathrm{H}^0(X, \omega^k)^\Delta$ des formes χ-équivariantes sous l'action de $Cl^+(\mathfrak{n})$.

Lemme 6.3.4. — *Pour tout $\mathcal{O}$-module M et tout caractère $\chi : Cl^+(\mathfrak{n}) \to \mathcal{O}^\times$, le module $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)^{\Delta,\chi}$ est un facteur direct de $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)$.*

Preuve. Remarquons d'abord que $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)^\Delta$ est un facteur direct de $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)$ car Δ est d'ordre premier à p. Notons $Cl^+[2]$ la 2-torsion de Cl^+ et $Cl^+[2](\mathfrak{n})$ l'image inverse de $Cl^+[2]$ dans $Cl^+(\mathfrak{n})$. Ce dernier groupe est d'ordre premier à p. On fait agit Cl^+ sur lui-même par $\mathfrak{m}.\mathfrak{c} = \mathfrak{m}^2.\mathfrak{c}$. Cette action se factorise par $Cl^+/Cl^+[2]$. Soient $\{\mathfrak{c}'_1, ..., \mathfrak{c}'_j\} \subset \{\mathfrak{c}_1, ..., \mathfrak{c}_s\}$ des idéaux fractionnaires représentants les diverses orbites pour cette action. Le module

$$\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)^{\Delta,\chi}$$

est isomorphe au module

$$\oplus_{k=1}^j \mathrm{H}^0(X(\mathfrak{c}'_k), \omega^k \otimes M)^{\Delta,\chi|_{Cl^+[2](\mathfrak{n})}}.$$

Dans ces formules, l'exposant $\chi|_{Cl^+[2](\mathfrak{n})}$ signifie qu'on se restreint aux formes χ-équivariantes pour l'action de $Cl^+[2](\mathfrak{n})$. Comme ce groupe est d'ordre premier à p,

$$\mathrm{H}^0(X(\mathfrak{c}_i), \omega^k \otimes M)^{\Delta,\chi|_{Cl^+[2](\mathfrak{n})}}$$

est un facteur direct de $\mathrm{H}^0(X(\mathfrak{c}_i), \omega^k \otimes M)^\Delta$. □

Remarque 6.3.5. — Ce lemme est peut-être faux si $p = 2$ et c'est pourquoi nous avons fait l'hypothèse $p \neq 2$ dans le théorème 1.2.

Les sous-modules des formes cuspidales dans $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)$, $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)^\Delta$ et $\mathrm{H}^0(X, \omega^k \otimes M)^{\Delta,\chi}$ seront notés $\mathrm{H}^0_{cusp}(X, \omega^1 \otimes M)$, $\mathrm{H}^0_{cusp}(X, \omega^k \otimes M)^\Delta$ et $\mathrm{H}^0_{cusp}(X, \omega^k \otimes M)^{\Delta,\chi}$. Le lemme précédent reste valable pour les formes cuspidales.

Dans la suite, nous étudierons également les formes modulaires p-adiques de poids k. Par définition, une forme modulaire p-adique de poids k à coefficients dans M est un élément du module $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^k \otimes M)$. Comme on l'a fait pour les formes classiques, on peut définir un sous-module $\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^k \otimes M)^{\Delta,\chi}$. Il existe enfin un projecteur d'ordinarité noté e qui est défini sur les formes modulaires p-adiques. L'espace des formes p-adiques cuspidales ordinaires de poids k que nous étudierons est $e \cdot \mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^k \otimes M)^{\Delta,\chi}$.

6.4. Ajout de niveau en les places de Taylor-Wiles. — Soit q une place de F qui ne divise pas p. Notons $X_0(q) \to X$ le schéma qui paramètre les sous-groupes $H \subset A[q]$ localement pour la topologie étale isomorphes à $\mathcal{O}_F/q\mathcal{O}_F$. Soit $X_{11}(q) \to X_0(q)$ le torseur sous $(\mathcal{O}_F/q\mathcal{O}_F)^\times \oplus (\mathcal{O}_F/q\mathcal{O}_F)^\times$ qui paramètre les générateurs de H et de $A[q]/H$. Notons $h : (\mathcal{O}_F/q\mathcal{O}_F)^\times \to \Delta_q$ la projection vers le p-sous-groupe de Sylow et K le noyau de du morphisme

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{O}_F/q\mathcal{O}_F)^\times \oplus (\mathcal{O}_F/q\mathcal{O}_F)^\times & \to & \Delta_q \\ (a,b) & \mapsto & h(ab^{-1}) \end{array}$$

Posons $X_q = X_{11}(q)/K$. L'application $X_q \to X_0(q)$ est finie étale de groupe Δ_q. Notons $\mathfrak{X}_0(q)$ la complétion formelle de $X_0(q)$ le long de sa fibre spéciale et $\mathfrak{X}_0(q)^{ord}$ le sous-schéma formel ouvert égal au lieu ordinaire. Notons $\mathfrak{X}_q$ la complétion formelle de X_q le long de sa fibre spéciale et $\mathfrak{X}_q^{ord}$ le sous-schéma formel ouvert ordinaire.

Dans le paragraphe suivant, nous utiliserons des compactifications de variétés de Hilbert. Soit $\bar{X}_0(q)$ une compactification toroïdale de $X_0(q)$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ construite par Rapoport dans [**Ra**].

Lemme 6.4.1. — *Il existe une compactification $X_{11}(q) \hookrightarrow \bar{X}_{11}(q)$ et un morphisme fini étale $\bar{X}_{11}(q) \to \bar{X}_0(q)$ prolongeant le morphisme $X_{11}(q) \to X_0(q)$.*

Preuve. Notons H le sous-groupe universel sur $X_0(q)$ et H^D son dual de Cartier. Nous affirmons que les groupes H et H^D s'étendent en des schémas en groupes finis étales sur $\bar{X}_0(q)$. Sur les pointes non ramifiées en q, le groupe H s'étend clairement et par conséquent son dual aussi. Sur les pointes ramifiées en q, le groupe H^D s'étend et donc aussi son dual H. On défini alors $\bar{X}_{11}(q)$ comme le torseur des isomorphismes $H \oplus H^D \simeq \mathcal{O}_F/q\mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F/q\mathcal{O}_F$ sur $\bar{X}_0(q)$.
□

On pose alors $\bar{X}_q = \bar{X}_{11}(q)/K$. Le morphisme $f : \bar{X}_q \to \bar{X}_0(q)$ est fini étale de groupe Δ_q. Pour tout caractère $\eta : \Delta_q \to \mathcal{O}^\times$, le faisceau

$$\mathscr{O}_{\bar{X}_0(q)}(\eta) = f_\star \mathscr{O}_{\bar{X}_q}[\eta]$$

est un faisceau inversible. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent sur $\bar{X}_0(q)$, on notera désormais $\mathscr{F}(\eta)$ son produit tensoriel par $\mathscr{O}_{\bar{X}_0(q)}(\eta)$.

Remarque 6.4.2. — Il est possible de montrer que $\bar{X}_q$ est en fait une compactification de X_q construite par Rapoport.

Si l'on remplace la place q par un ensemble fini de places $\mathcal{Q}$, on peut définir $X_{\mathcal{Q}}$, $X_0(\mathcal{Q})$ et ainsi de suite d'une manière évidente, en remplaçant juste la structure de niveau en q par un produit de structures de niveau en toutes les places de $\mathcal{Q}$. L'analogue du lemme 6.4.1 est toujours vrai dans ce cadre plus général.

6.5. Algèbres de Hecke. — Dans ce paragraphe, $\mathcal{Q}$ sera un ensemble de places de Taylor-Wiles comme dans la proposition 5.2.3. Notons $\mathbb{T}_{\Sigma_p}$ l'algèbre de Hecke abstraite à coefficient dans $\mathcal{O}$. C'est donc l'algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke en les places premières à $\mathfrak{n}\Sigma_p$, l'opérateur $U_{\mathfrak{n}}$ habituel et les opérateurs diamants en $\mathfrak{n}$. Notons $\mathbb{T}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}}$ l'algèbre de Hecke abstraite engendrée par les opérateurs de Hecke en les places premières à $\mathfrak{n}\Sigma_p\mathcal{Q}$, l'opérateur $U_{\mathfrak{n}}$ et les opérateurs diamants en $\mathfrak{n}$, ainsi que les opérateurs U_v pour $v|\mathcal{Q}$ et les opérateurs diamants dans Δ_Q. Posons $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\Sigma_p}[U_v, v \in \Sigma_p]$ et $\mathbb{T}_{\mathcal{Q}} = \mathbb{T}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}}[U_v, v \in \Sigma_p]$.

Ces algèbres de Hecke agissent sur les modules $e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^k)^{\Delta,\psi}$ et $e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}^{ord}_q, \omega^k)^{\Delta,\psi}$ où ψ est le déterminant de ρ vu par la théorie du corps de classe. Par hypothèse, $\bar{\rho} = \bar{\rho}_f$ où f est une forme propre dans

$$e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^k)^{\Delta,\psi}$$

ou, plus précisément, f est une $\mathfrak{n}$-stabilisation d'une forme de niveau premier à $\mathfrak{n}$. Notons $\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}$ l'idéal maximal correspondant à f dans $\mathbb{T}$. On définit de même un idéal maximal toujours noté $\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}$ de $\mathbb{T}_{\mathcal{Q}}$ en considérant les $\mathcal{Q}$-stabilisations de f correspondants aux racines $\bar{\alpha}_v$ de $\bar{\rho}(Frob_v)$ pour $v|\mathcal{Q}$.

6.6. Théorie de Hida. — Considérons le sous-groupe $N_{F/\mathbb{Q}}\mathcal{O}^{\times}_{F,p} = H$ de $G = \mathbb{Z}_p^{\times}$ et notons $\mathcal{O}[[H]]$ son algèbre de groupe complétée. Cette algèbre est isomorphe à $\mathcal{O}[[T]][H_t]$ où H_t est le sous-groupe fini maximal de H, qui est également un sous-groupe de $\mathbb{F}_p^{\times}$. Posons $\Lambda = \mathcal{O}[[T]]$ que l'on voit comme une sous-algèbre de $\mathcal{O}[[H]]$.Tout entier $k \in \mathbb{Z}$ défini un caractère de G et un morphisme $k : \mathcal{O}[[H]] \to \mathcal{O}$. Notons $\mathbb{Z}'$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ formé des caractères triviaux sur H_t.

Rappelons à présent quelques résultats familiers de la théorie de Hida (voir [**Hi**], sect. 4). Bien que des résultats similaires existent dans le cas des poids quelconques, nous nous contenterons du cas des poids parallèles.

Théorème 6.6.1. — *Il existe un $\Lambda \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{T}$-module M^{ord} qui est libre de rang fini comme Λ-module et tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}'$, il existe des isomorphismes de $\mathbb{T}$-modules,*

$$M^{ord} \otimes_{\Lambda,k} \mathcal{O} \simeq \mathrm{Hom}(e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^{k+1})^{\Delta,\psi}, \mathcal{O})$$

De plus, pour tout entier $k \geq 3$, on a un isomorphisme de contrôle

$$e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^k)^{\Delta,\psi} \simeq e\mathrm{H}^0_{cusp}(X, \omega^k)^{\Delta,\psi}.$$

Remarque 6.6.2. — Dans l'énoncé précédent, nous utilisons la normalisation galoisienne des poids. Par exemple la spécialisation en poids 0 au-dessus de Λ permet d'obtenir des formes de poids un.

Notons $\mathbb{T}^{ord}$ et $\mathbb{T}^{ord}_{\Sigma_p}$ les images de $\Lambda \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{T}$ et de $\Lambda \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{T}_{\Sigma_p}$ dans $\mathrm{End}_\Lambda(M^{ord})$. Il existe un isomorphisme de Λ-modules

$$\mathbb{T}^{ord} \simeq M^{ord}$$

induit par le premier coefficient $C(1,\cdot)$ du q-développement et l'algèbre de Hecke $\mathbb{T}^{ord}$ est libre de rang fini sur Λ. Il existe une autre description de $\mathbb{T}^{ord}$. En effet, $\mathbb{T}^{ord} \simeq \lim_n \mathbb{T}^{ord}_n$ où $\mathbb{T}^{ord}_n$ est l'image de $\mathbb{T}$ dans

$$\bigoplus_{k=2,\, k\in\mathbb{Z}'}^{n} e\mathrm{H}^0_{cusp}(X,\omega^k)^{\Delta,\psi}\ .$$

Il est clair sur cette description que $\mathbb{T}^{ord}$ est réduite, étant une limite projective d'algèbres réduites puisque semi-simples après inversion de p d'après le produit scalaire de Petersson.

6.7. Les modules. — Définissons diverses localisations de l'espace des formes p-adiques ordinaires.

6.7.1. Le module $\mathcal{M}$. — Posons $\mathcal{M} = M^{ord}_{\mathfrak{m}_{\bar\rho}}$ où $\mathfrak{m}_{\bar\rho}$ est défini dans le paragraphe 6.5. C'est un module libre de rang fini sur Λ en tant que facteur direct de M^{ord}.

6.7.2. Les modules $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$.— Soit $\mathcal{Q}$ un ensemble de places v de F telles que $N_{F/\mathbb{Q}}(v) \equiv 1 \mod p$. Une variante du théorème 6.6.1 est également valable sur $X_{\mathcal{Q}}$. Posons

$$M^{ord}_{\mathcal{Q}}$$

l'espace correspondant des familles de formes p-adiques ordinaires ; c'est un module sur $\Lambda[\Delta_{\mathcal{Q}}]$. La proposition suivante sera essentielle pour appliquer la méthode de Taylor-Wiles.

Proposition 6.7.3. — *Le module $M^{ord}_{\mathcal{Q}}$ est libre de rang fini sur $\Lambda[\Delta_{\mathcal{Q}}]$.*

Preuve. Remarquons qu'il suffit de prouver que pour tout $k \in \mathbb{Z}' + 1$,

$$\mathrm{Hom}(e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}^{ord}_{\mathcal{Q}},\omega^k)^{\Delta,\psi},\mathcal{O})$$

est un $\mathcal{O}[\Delta_{\mathcal{Q}}]$-module libre. D'après une variante du lemme 6.3.4, il suffit de prouver que $N = \mathrm{Hom}(e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}(\mathfrak{c}_i)^{ord}_{\mathcal{Q}},\omega^k),\mathcal{O})$ est libre sur $\mathcal{O}[\Delta_{\mathcal{Q}}]$-module pour tout i.

Nous affirmons d'abord que pour tout caractère $\eta : \Delta_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{O}^\times$, l'application de réduction

$$e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}(\mathfrak{c}_i)^{ord}_0(\mathcal{Q}),\omega^k(\eta)) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F} \to e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}(\mathfrak{c}_i)^{ord}_0(\mathcal{Q}),\omega^k(\eta)\otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F})$$

est un isomorphisme. Pour prouver cela, choisissons $\bar{X}(\mathfrak{c}_i)_0(q)$ une compactification toroïdale de $X(\mathfrak{c}_i)_0(q)$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ et notons D son bord. Notons $\bar{\mathfrak{X}}(\mathfrak{c}_i)_0^{ord}(\mathcal{Q})$ le lieu ordinaire de la complétion formelle de $\bar{X}(\mathfrak{c}_i)_0(q)$ le long de sa fibre spéciale. Par le principe de Koecher,

$$\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}(\mathfrak{c}_i)_0^{ord}(\mathcal{Q}), \omega^k(\eta)) = \mathrm{H}^0(\bar{\mathfrak{X}}(\mathfrak{c}_i)_0^{ord}(\mathcal{Q}), \omega^k(\eta)(-D)).$$

Notons $X^\star(\mathfrak{c}_i)_0(\mathcal{Q})$ la compactification minimale de $X(\mathfrak{c}_i)_0(\mathcal{Q})$ et $\mathfrak{X}^\star(\mathfrak{c}_i)_0^{ord}(\mathcal{Q})$ le lieu ordinaire de la complétion formelle de $X^\star(\mathfrak{c}_i)_0(\mathcal{Q})$ le long de sa fibre spéciale. Il est bien connu que ce lieu ordinaire de la compactification minimale est un schéma formel affine. Notons $g : \bar{\mathfrak{X}}(\mathfrak{c}_i)_0^{ord}(\mathcal{Q}) \to \mathfrak{X}^\star(\mathfrak{c}_i)_0^{ord}(\mathcal{Q})$ la projection de la compactification toroïdale vers la minimale. D'après [**AIP**], on sait que $R^i g_\star \omega^k(\eta)(-D) = 0$ pour $i \geq 1$. On en déduit que $\mathrm{H}^i(\bar{\mathfrak{X}}(\mathfrak{c}_i)_0^{ord}(\mathcal{Q}), \omega^k(\eta)(-D)) = 0$ pour $i \geq 1$ d'où l'assertion par suite exacte longue de cohomologie.

Il résulte de tout cela que

$$N_\eta = N \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_\mathcal{Q}],\eta} \mathcal{O} = \mathrm{Hom}(e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}(\mathfrak{c}_i)_0^{ord}(\mathcal{Q}), \omega^k(\eta)), \mathcal{O})$$

et que

$$N_\eta \otimes_\mathcal{O} \mathbb{F} = \mathrm{Hom}(e\mathrm{H}^0_{cusp}(\mathfrak{X}(\mathfrak{c}_i)_0^{ord}(\mathcal{Q}), \omega^k(\eta) \otimes_\mathcal{O} \mathbb{F}), \mathbb{F}).$$

Comme $\omega^k(\eta) \otimes_\mathcal{O} \mathbb{F} = \omega^k \otimes_\mathcal{O} \mathbb{F}$, on obtient que $N_\eta \otimes_\mathcal{O} \mathbb{F} \simeq N_1 \otimes_\mathcal{O} \mathbb{F}$. Cela permet de conclure la démonstration de la proposition. Soit en effet $e_1, .., e_n \in N$ le relèvement d'une base de N_1 sur $\mathcal{O}$. L'application $G : \mathcal{O}[\Delta_\mathcal{Q}]^n \stackrel{e_1,...,e_n}{\to} N$ est surjective par le lemme de Nakayama. De plus, pour tout caractère $\eta : \Delta_\mathcal{Q} \to \mathcal{O}^\times$, le morphisme $G_\eta : \mathcal{O}^n \to N_\eta$ est surjectif entre $\mathcal{O}$-modules libres de même rang, donc est un isomorphisme. On en déduit que $\mathrm{Ker}(G)$ est trivial et que G est un isomorphisme. □

Remarque 6.7.4. — Nous avons utilisé l'existence de compactifications toroïdales et minimales de variétés de Hilbert sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ lorsque p est ramifié dans le corps totalement réel. Ces compactifications ont en effet été construites par Rapoport et Chai. Les variétés de Hilbert sont en fait les seules variétés de Shimura dont on sache construire des modèles entiers de compactifications dans le cas ramifié.

On définit à présent le module $\mathcal{M}_\mathcal{Q} = (M_\mathcal{Q}^{ord})_{\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}}$ où $\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}$ est l'idéal maximal défini précédemment. En tant que facteur direct de $M_\mathcal{Q}^{ord}$, c'est un module libre sur $\Lambda[\Delta_\mathcal{Q}]$.

Proposition 6.7.5. — *Il existe un isomorphisme $\mathcal{M}_\mathcal{Q} \otimes_{\Lambda[\Delta_\mathcal{Q}]} \Lambda \simeq \mathcal{M}$ compatible à l'action des opérateurs de Hecke de niveau premier à $\mathcal{Q}$.*

Preuve. Cela résulte de [**Di**], prop. 5.8. □

6.7.6. Multiplicité un. — Notons T^{ord} et $\mathrm{T}^{ord}_{\Sigma_p}$ les images de $\Lambda\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{T}$ et $\Lambda\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{T}_{\Sigma_p}$ dans $\mathrm{End}_\Lambda(\mathcal{M})$. Notons $\mathrm{T}^{ord}_{\mathcal{Q}}$ et $\mathrm{T}^{ord}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}}$ les images de $\Lambda\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{T}_{\mathcal{Q}}$ et $\Lambda\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{T}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}}$ dans $\mathrm{End}_\Lambda(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}})$. La proposition suivante (voir [**Hi**] section 4) sera utile pour améliorer les théorèmes de modularité.

Proposition 6.7.7. — *Il existe des isomorphismes équivariants sous l'action des opérateurs de Hecke*

$$\mathrm{T}^{ord}\simeq\mathcal{M}\quad \textit{and}\ \ \mathrm{T}^{ord}_{\mathcal{Q}}\simeq\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}.$$

induits par le premier coefficient $C(1,\cdot)$ du q-développement.

7. La méthode de Taylor-Wiles-Kisin

7.1. Représentations galoisiennes. — Les techniques usuelles permettent de construire les représentations galoisiennes modulaires universelles à partir des résultats de [**Wi**].

Proposition 7.1.1. — *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Il existe des représentations galoisiennes canoniques $\rho^{mod}: G_F\to\mathrm{GL}_2(\mathrm{T}^{ord}_{\Sigma_p})$ et $\rho^{mod}_{\mathcal{Q}}: G_F\to\mathrm{GL}_2(\mathrm{T}^{ord}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}})$ non ramifiées hors de Σ_p et de $\Sigma_p\mathcal{Q}$ telles que $\mathrm{Tr}\rho^{mod}(Fob_v)=T_v$ et $\mathrm{Tr}\rho^{mod}_{\mathcal{Q}}(Fob_v)=T_v$ pour tout $v\nmid\Sigma_p$ et $v\nmid\Sigma_p\mathcal{Q}$.*
2. *Le déterminant de ces représentations est $\psi\chi^{un}$.*
3. *Pour tout $v|\mathcal{Q}$, on a $\rho^{mod}_{\mathcal{Q}}|_{I_v}\simeq\delta_v\oplus\delta_v^{-1}$.*

Preuve. L'utilisation de pseudo-représentations permet de construire ρ^{mod} et $\rho^{mod}_{\mathcal{Q}}$. Ces représentations vérifient toutes les propriétés voulues aux points classiques de Spec $\mathrm{T}^{ord}_{\Sigma_p}$ et de Spec $\mathrm{T}^{ord}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}}$ (voir [**Di**], lem. 4.7 et [**Di**], lem. 5.7). Cela suffit pour conclure puisque ces schémas sont réduits. $\square$

On obtient ainsi des surjections $R\to\mathrm{T}_{\Sigma_p}$ et $R_{\mathcal{Q}}\to\mathrm{T}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}}$, la dernière de ces applications étant $\mathcal{O}[\Delta_{\mathcal{Q}}]$-linéaire. L'exposant $\square$ ajouté aux diverses algèbres de Hecke signifiera désormais que ces algèbres sont tensorisées par $R^{\square}$ au-dessus de R ou par $R^{\square}_{\mathcal{Q}}$ au-dessus de $R_{\mathcal{Q}}$. On rajoute ainsi aux représentations galoisiennes des cadrages en les places divisant Σ_p. On obtient des surjections

$$R^{\square}\to\mathrm{T}^{ord,\square}_{\Sigma_p}$$

et

$$R^{\square}_{\mathcal{Q}}\to\mathrm{T}^{ord,\square}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}}\,.$$

On ajoute finalement l'exposant Ψ aux algèbres de Hecke pour signifier qu'on les tensorise par Λ au-dessus de Λ via l'application ϕ_1 donnée $T \to pT$ (voir sect. 3). Notons également

$$\mathcal{M}^{\Psi} = \mathcal{M} \otimes_{\Lambda,\phi_1} \Lambda$$

et $\mathcal{M}^{\Psi}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{M}_{\mathcal{Q}} \otimes_{\Lambda,\phi_1} \Lambda$. Ce sont des modules libres sur $\mathrm{T}^{ord,\Psi}$ et $\mathrm{T}^{ord,\Psi}_{\mathcal{Q}}$.

Proposition 7.1.2. — *Les surjections $R^{\square,\Psi} \to \mathrm{T}^{ord,\square,\Psi}_{\Sigma_p}$ et $R^{\square,\Psi}_{\mathcal{Q}} \to \mathrm{T}^{ord,\square,\Psi}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}}$ se factorisent par $R^{\Delta,\Psi} \to \mathrm{T}^{ord,\Delta,\Psi}_{\Sigma_p}$ et $R^{\Delta,\Psi}_{\mathcal{Q}} \to \mathrm{T}^{ord,\Delta,\Psi}_{\Sigma_p,\mathcal{Q}}$.*

Preuve. Cela résulte encore une fois des propriétés connues aux points classiques. □

Proposition 7.1.3. — *Il existe une surjection $R^{\Delta,\Psi,U} \to \mathrm{T}^{ord,\Delta,\Psi}_{\Sigma}$ définie en envoyant $U_v \in R^{\Delta,\Psi,U}$ sur l'opérateur de Hecke $U_v \in \mathrm{T}^{ord,\Delta,\Psi}_{\Sigma}$ pour tout $v \in \Sigma_p$. De même, il existe une surjection $R^{\Delta,\Psi,U}_{\mathcal{Q}} \to \mathrm{T}^{ord,\Delta,\Psi}_{\Sigma,\mathcal{Q}}$.*

Preuve. Il suffit de voir que la surjection $R^{\Delta,\Psi}[U_v, v \in \Sigma_p] \to \mathrm{T}^{ord,\Delta,\Psi}_{\Sigma}$ se factorise par $R^{\Delta,\Psi,U}$. Cela résulte des propriétés connues aux points classiques. □

7.2. Un théorème de relèvement modulaire. — Nous suivons la méthode de Taylor-Wiles et Kisin.

7.2.1. Version faible. — Définissons les nombres

$$h = h^1_{\perp}, \quad j = 4|\Sigma_p| - 1, \quad g = h + j - 3|\Sigma_p| - [F : \mathbb{Q}].$$

Pour tout anneau local $(A, \mathfrak{m})$ et tout entier s, notons $\mathfrak{m}^{(s)}$ l'idéal engendré par les éléments de $\mathfrak{m}$ qui sont des puissances s-ièmes. Soit $\{\mathcal{Q}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de Taylor-Wiles comme dans la proposition 5.2.3. Fixons des surjections $\Lambda[[y_1, ..., y_h]] \to \Lambda[\Delta_{\mathcal{Q}_n}]$ définies en envoyant $y_1 + 1, ..., y_h + 1$ sur des générateurs de Δ_{Q_n}. Fixons aussi des isomorphismes

$$R^{\square} \simeq R[[y_{h+1}, ..., y_{h+j}]]$$

et

$$R^{\square}_{\mathcal{Q}_n} \simeq R_{\mathcal{Q}_n}[[y_{h+1}, ..., y_{h+j}]] \,.$$

Posons $M = \mathcal{M}^{\Psi}[[y_{h+1}, ..., y_{h+j}]]$ et $M_n = \mathcal{M}^{\Psi}_{\mathcal{Q}_n}[[y_{h+1}, ..., y_{h+j}]]$. Notons que M est un module libre sur $\Lambda[[y_{h+1}, ..., y_{h+j}]]$ dont on note r le rang.

Pour tout entier n, le module M_n est un $\Lambda[[y_1, ..., y_{h+j}]]$-module et son annihilateur est un idéal $I_n \subset \big((y_1 + 1)^{p^n} - 1, ..., (y_h + 1)^{p^n} - 1\big)$. De plus, M_n/I_n est libre sur $\Lambda[[y_1, ..., y_{h+j}]]/I_n$ de rang r et $M_n/(y_1, ..., y_h) \simeq M$. Il existe donc des morphismes naturels

$$\Lambda[[y_1, .., y_{h+j}]] \to R^{\Delta,\Psi,U}_{\mathcal{Q}_n}$$

et

$$R^{\triangle,\Psi,U} = R^{\triangle,\Psi,U}_{\mathcal{Q}_n}/(y_1, ..., y_h) .$$

L'anneau $R^{\triangle,\Psi,U}$ agit sur M et $R^{\triangle,\Psi,U}_{\mathcal{Q}_n}$ agit sur M_n. Ces actions sont compatibles aux structures de $\Lambda[[y_1, ..., y_{h+j}]]$-module définies au-dessus. Finalement, pour tout entier n il existe une surjection de Λ-algèbres

$$R^{\triangle,\Psi,U}_{loc}[[x_1, ..., x_g]] \to R^{\triangle,\Psi,U}_{\mathcal{Q}_n} .$$

Pour simplifier les notations, on posera dans cette partie $R^{\triangle,\Psi,U}_{loc} = B$, $R^{\triangle,\Psi,U}_{\mathcal{Q}_n} = R_n$ et $R^{\triangle,\Psi,U} = R_0$. Recollons à présent ces données comme dans [**K1**], 3.3. Notons

$$\mathfrak{c}_n = (\mathfrak{m}_\Lambda^{(n)}, (y_1 + 1)^{p^n} - 1, ..., (y_h + 1)^{p^n} - 1, y_{h+1}^{p^n}, ..., y_{h+j}^{p^n})$$

et $r_n = rnp^n(h + j)$. Pour tout $n \geq m$, considérons la donnée de recollement $Patch(n, m)$ de niveau m qui consiste en

1. le $\Lambda[[y_1, ..., y_{h+j}]]/\mathfrak{c}_m$ module $M_n/\mathfrak{c}_m$ libre de rang r,
2. la $\Lambda[[y_1, ..., y_{h+j}]]/\mathfrak{c}_m$-algèbre $R_n/(\mathfrak{c}_m, \mathfrak{m}_{R_n}^{(r_m)})$ agissant sur $M_n/\mathfrak{c}_m$,
3. la surjection $R_n/(\mathfrak{c}_m, \mathfrak{m}_{R_n}^{(r_m)}) \to R_0/(\mathfrak{c}_m, \mathfrak{m}_{R_0}^{(r_m)})$,
4. la surjection $B[[x_1, ..., x_g]] \to R_n/(\mathfrak{c}_m, \mathfrak{m}_{R_n}^{(r_m)})$,
5. la surjection $M_n/\mathfrak{c}_m \to M/\mathfrak{c}_m$ entre $B[[x_1, ..., x_g]]$-modules .

Comme il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de données de recollement de niveau m, à réindexation des indices près on peut supposer que $Patch(m, m)$ se réduit sur $Patch(n, n)$ pour tout $n \leq m$.

Posons $M_\infty = \lim M_n/\mathfrak{c}_n$. C'est un $\Lambda[[y_1, ..., y_{h+j}]]$-module libre de rang r. De plus, $M_\infty/(y_1, ..., y_h) \simeq M$.

Posons $R_\infty = \lim R_n/(\mathfrak{c}_m, \mathfrak{m}_{R_n}^{(r_m)})$. C'est une $\Lambda[[y_1, ..., y_{h+j}]]$-algèbre qui agit non trivialement sur M_∞. Il existe de plus des surjections $B[[x_1, ..., x_g]] \to R_\infty \to R_0$.

Soit R'_∞ l'image de R_∞ dans $\mathrm{End}(M_\infty)$. C'est une $\Lambda[[y_1, ..., y_{h+j}]]$-algèbre finie sans torsion. Elle est donc équidimensionnelle de dimension $2 + h + j$. Il existe une suite de surjections $B[[x_1, ..., x_g]] \to R_\infty \to R'_\infty$ et, comme Spec $B[[x_1, ..., x_g]]$ est une union de composantes irréductibles de dimension $g + 3|\Sigma_p| + [F : \mathbb{Q}] + 2 = h + j + 2$, on déduit que l'image de Spec R'_∞ dans Spec $B[[x_1, ..., x_g]]$ est une union de composantes irréductibles. Considérons à présent la composante irréductible

$$\mathrm{Spec} R^{sp,\Psi,U}_\Sigma \hat{\otimes} R^{\triangle,\Psi,U}_{p-loc}[[x_1, ..., x_g]]$$

de Spec $B[[x_1, ..., x_g]]$ qui correspond aux représentations spéciales en Σ. Par hypothèse, le point modulaire $f \in$ Spec R'_∞ s'envoie sur cette composante et sur aucune autre. Cela prouve que $\mathrm{Spec} R_{\Sigma}^{sp,\Psi,U} \hat{\otimes} R_{p-loc}^{\triangle,\Psi,U}[[x_1, ..., x_g]]$ est modulaire isomorphe à R'_{∞}/I pour un idéal minimal I de R'_{∞}.

On en déduit que M_{∞}/I est un module fidèle de type fini sur

$$R_{\Sigma}^{sp,\Psi,U} \hat{\otimes} R_{p-loc}^{\triangle,\Psi,U}[[x_1, ..., x_g]] .$$

Soit E' une extension finie de E et $x \in \mathrm{Spec}\ R_0(E')$ une déformation spéciale en les places divisant Σ. Alors $M_{\infty} \otimes k(x) = M \otimes k(x)$ n'est pas nul donc x est modulaire.

7.2.2. Multiplicité un et version forte. — Notre démarche diffère maintenant de [**K1**]. Supposons que

$$R_{\Sigma}^{sp,\Psi,U} \hat{\otimes} R_{p-loc}^{\triangle,\Psi,U}[1/p]$$

soit formellement lisse. On déduirait alors du lemme 3.3.4 de [**K1**] que $M_{\infty}/I[1/p]$ est projectif et fidèle sur R'_{∞}/I. Cela impliquerait que $M/I[1/p]$ est fidèle sur

$$R^{\triangle,\Psi,U} \otimes_{R_{\Sigma}^{\Psi,U}} R_{\Sigma}^{sp,\Psi,U} .$$

Malheureusement,

$$R_{\Sigma}^{sp,\Psi,U} \hat{\otimes} R_{p-loc}^{\triangle,\Psi,U}[1/p]$$

n'est probablement pas formellement lisse dans notre cas, et tout spécialement en les points où l'inertie agit trivialement et les valeurs propres du Frobenius sont les mêmes (voir la remarque 4.1.7). Mais c'est précisément en ces points que la fidélité de $M/I[1/p]$ nous serait utile pour démontrer le théorème 1.2.

Au lieu d'utiliser la formelle lissité, nous allons argumenter de la manière suivante. L'énoncé de multiplicité un rappelé dans la proposition 6.7.7 montre que si R'_n est l'image de R_n dans $\mathrm{End}(M_n)$ alors M_n est projectif sur R'_n de rang un. Ainsi, M_{∞} est projectif sur R'_{∞} de rang un donc M_{∞}/I est projectif sur R'_{∞}/I de rang un et M/I est un module fidèle et projectif de rang un sur $R^{\triangle,\Psi,U} \otimes_{R_{\Sigma}^{\Psi,U}} R_{\Sigma}^{sp,\Psi,U}$.

7.2.3. Application. — Prenons ρ comme dans l'énoncé du théorème 1.2. Elle fournit une application $R \to E$. Fixons des cadrages de ρ en toutes les places $v|\Sigma_p$. On obtient alors une application $R^{\square,\Psi} \to E$ et comme la restriction de ρ en toutes les places $v|\Sigma$ est spéciale et sa restriction en toutes les places $v|p$ est conjuguée à des représentations triangulaires supérieures, cette application se factorise en un morphisme

$$R^{\triangle,\Psi} \otimes_{R_{\Sigma}^{\Psi}} R_{\Sigma}^{sp,\Psi} \to E$$

qui s'étend uniquement en

$$R^{\triangle,\Psi} \otimes_{R_{\Sigma}^{\Psi}} R_{\Sigma}^{sp,\Psi,U} \to E.$$

On souhaite étendre ce dernier morphisme à l'anneau
$$R^{\triangle,\Psi,U}\otimes_{R_\Sigma^{\Psi,U}}R_\Sigma^{sp,\Psi,U}\ .$$
Cela revient à fixer les différentes valeurs possibles de U_v pour tout $v|p$. Le choix universel est représentable par la E-algèbre finie
$$\big(R^{\triangle,\Psi,U}\otimes_{R_\Sigma^{\Psi,U}}R_\Sigma^{sp,\Psi,U}\big)\otimes_{(R^{\Psi,U}\otimes_{R_\Sigma^{\Psi,U}}R_\Sigma^{sp,\Psi,U})}E.$$
Pour tout $v|p$, notons $P_v[X_v]\in E[X_v]$ le polynôme caractéristique $\rho(Frob_v)$. Il suit de la définition que
$$\big(R^{\triangle,\Psi,U}\otimes_{R_\Sigma^{\Psi,U}}R_\Sigma^{sp,\Psi,U}\big)\otimes_{(R^{\Psi,U}\otimes_{R_\Sigma^{\Psi,U}}R_\Sigma^{sp,\Psi,U})}E\simeq E[X_v,\ \forall v|p]/(P_v(X_v),\ \forall v|p)$$
où l'isomorphisme est obtenu en envoyant U_v sur X_v.

Soit $e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord},\omega^1)_E^{\Delta,\psi}[\rho]$ le sous-E-espace vectoriel de $e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord},\omega^1)_E^{\Delta,\psi}$ consistant en les formes propres pour l'action de $\mathbb{T}_{\Sigma_p}$ dont le système de valeurs propres correspond à ρ. Le théorème de promodularité que les résultats précédents permettent de démontrer est le suivant.

Théorème 7.2.4. — *Le E-espace vectoriel*
$$e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord},\omega^1)_E^{\Delta,\psi}[\rho]$$
est un module libre de rang un sur $E[X_v,\ \forall v|p]/(P_v(X_v),\ \forall v|p)$ où X_v agit via U_v. De plus, le premier coefficient de Fourier du q-développement fournit un isomorphisme canonique
$$\begin{array}{rcl} E[X_v,v|p]/(P_v(X_v),\ \forall v|p) & \to & e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord},\omega^1)_E^{\Delta,\psi}[\rho]^\vee \\ T & \mapsto & [f\mapsto C(1,T\cdot f)] \end{array}$$

Remarque 7.2.5. — Nous démontrerons dans la partie suivante de l'article que l'espace
$$e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord},\omega^1)_E^{\Delta,\psi}[\rho]$$
consiste en des formes classiques qui sont les p-stabilisations de la forme de niveau premier à p que nous associerons à ρ.

Preuve. Soit $N=e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord},\omega^1)_E^{\Delta,\psi}$ et $N^\vee$ son dual. Notons que $N^\vee$ est un quotient de $M/I\otimes_{\mathcal{O}}E$ où l'on a employé les notations du paragraphe 7.2.2. On en déduit que $N^\vee$ est un $R^{\Delta,\Psi,U}$-module. Il résulte du paragraphe 7.2.2 que $V^\vee:=N^\vee\otimes_{R^{\Delta,\Psi,U}}E[X_v,v|p]/(P_v,v|p)$ est un module libre de rang un sur $E[X_v,v|p]/(P_v,v|p)$. Notons V l'unique sous-module de N tel que l'on ait $N^\vee/V^\perp=V^\vee$ sous l'accouplement $N\times N^\vee\to E$. C'est un sous $E[X_v,v|p]/(P_v,v|p)$-module libre de N qui est égal à $e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord},\omega^1)_E^{\Delta,\psi}[\rho]$. La dernière assertion du théorème résulte de la proposition 6.7.7. $\square$

Ce théorème nous permet de construire des vecteurs privilégiés dans
$$e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^1)^{\Delta,\psi}_E[\rho]\,.$$
Soit S_1 l'ensemble des places $v|p$ telles que $\rho(Frob_v)$ a des valeurs propres distinctes et S_2 son complémentaire dans l'ensemble des places divisant p. Soit $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des familles $\underline{a} = (a_v, v \in S_1)$ où a_v est une valeur propre de $\rho(Frob_v)$. Pour tout $v \in S_2$, notons a_v la valeur propre de $\rho(Frob_v)$. Soit $\mathcal{S}_2 = \{0,1\}^{S_2}$. Si $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_v) \in \mathcal{S}_2$ et $v_0 \in S_2$, notons $w_{v_0}\underline{\varepsilon} \in \mathcal{S}_2$ l'élément tel que $\varepsilon'_v = \varepsilon_v$ pour $v \neq v_0$ et $\varepsilon'_{v_0} = 1 - \varepsilon_{v_0}$. Considérons la base $\{f_{\underline{a},\underline{\varepsilon}}\}$ de $e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^1)^{\Delta,\psi}_E[\rho]$ définie par

- $C(1, f_{\underline{a},\underline{\varepsilon}}) = 1$,
- $U_v f_{\underline{a},\underline{\varepsilon}} = a_v f_{\underline{a},\underline{\varepsilon}}$ pour $v \in S_1$,
- $U_v f_{\underline{a},\underline{\varepsilon}} = a_v f_{\underline{a},\underline{\varepsilon}} + \varepsilon_v f_{\underline{a},w_v\underline{\varepsilon}}$ pour $v \in S_2$.

Construisons à présent des combinaisons linéaires adéquates de ces vecteurs de base.

Proposition 7.2.6. — *Il existe deux vecteurs H et G de $e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}^{ord}, \omega^1)^{\Delta,\psi}_E[\rho]$ qui vérifient*

- *$C(1, H) = 1$,*
- *$C(\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{-1}, H) = C(\mathfrak{m}, G)$ pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_F$.*

Remarque 7.2.7. — Dans le reste de l'article, nous démontrerons que H est une forme modulaire classique de niveau premier à p. Pour avoir une meilleure intuition sur la démonstration qui suit, le lecteur est invité à supposer l'existence de H classique de niveau premier à p, et à construire les p-stabilisations $f_{\underline{a},\underline{\varepsilon}}$ en partant de H.

Preuve. Soit $S_1 = \{v_1, ..., v_k\}$ et $S_2 = \{v_{k+1}, ..., v_{k+t}\}$. Notons $S^{(r)} = \{v_1, ..., v_r\}$ pour $1 \leq r \leq k+t$. Soit $\mathcal{S}^{(r)}$ l'ensemble des r-uplets $(b_1, ..., b_r)$ où $b_i \in \{\alpha_{v_i}, \beta_{v_i}\}$ pour $i \leq k$ et $b_i \in \{0,1\}$ pour $i \geq k+1$.

Construisons par récurrence des formes $H_{\underline{b},r}$ et $G_{\underline{b},r}$ pour $0 \leq r \leq k+t$ et $\underline{b} \in \mathcal{S}^{(r)}$. Posons $H_{\underline{b},k+t} = G_{\underline{b},k+t} = f_{\underline{a},\underline{\varepsilon}}$ où $\underline{a} = (b_1, ..., b_k)$ et $\underline{\varepsilon} = (b_{k+1}, ..., b_{k+t})$. Si $r \geq k$, posons
$$H_{\underline{b},r} = a_{v_{r+1}} H_{(\underline{b},1),r+1} + (1 - a_{v_{r+1}}) H_{(\underline{b},0),r+1}$$
et
$$G_{\underline{b},r} = G_{(\underline{b},1),r+1} - G_{(\underline{b},0),r+1}.$$
Si $r \leq k-1$, posons
$$H_{\underline{b},r} = \frac{\alpha_{v_{r+1}} H_{(\underline{b},\alpha_{v_{r+1}}),r+1} - \beta_{v_{r+1}} H_{(\underline{b},\beta_{v_{r+1}}),r+1}}{\alpha_v - \beta_v}$$

et

$$G_{\underline{b},r} = \frac{G_{(\underline{b},\alpha_{v_{r+1}}),r+1} - G_{(\underline{b},\beta_{v_{r+1}}),r+1}}{\alpha_v - \beta_v}.$$

On vérifie aisément que $G_{\varnothing,0} = G$ et $H_{\varnothing,0} = H$ conviennent, en utilisant les formules reliant valeur propre de Hecke et q-développement (voir [**P2**], coro. 2.4.1 par exemple). □

PARTIE III
CLASSICITÉ DE FORMES MODULAIRES SURCONVERGENTES

Cette partie forme le coeur technique de l'article. Nous y prouvons que les formes modulaires p-adiques dont l'image par Frobenius est surconvergente de pente finie sont classiques.

8. Énoncé du critère de classicité

Notons $p \cdot \mathcal{O}_F = \prod_{i=1}^r \pi_i^{e_i}$ la décomposition du nombre premier p comme produit d'idéaux premiers distincts de $\mathcal{O}_F$. Appelons f_i le degré résiduel de π_i et définissons l'idéal $\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^r \pi_i$ de $\mathcal{O}_F$.

Remarque 8.1. — Le cas où $p = 2$ ne pose pas de problème particulier dans cette partie.

Rappelons que $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ est une union disjointe de variétés modulaires de Hilbert de niveau premier à p, et plus spécifiquement de niveau supporté en les places divisant $\mathfrak{n} \cdot \Sigma$. Ces variétés de Hilbert sont indexées par leur idéal de polarisation $\mathfrak{c}_i$ pour $1 \leq i \leq s$. Notons A le schéma abélien universel.

Notons $X_0(\mathfrak{p}) \to X$ l'espace de modules des structures iwahoriques de niveau $\Gamma_0(\mathfrak{p})$ en p. Il paramètre donc les groupes finis et plats $H \hookrightarrow A[\mathfrak{p}]$ stables sous $\mathcal{O}_F$ et qui se décomposent comme produit $H = \prod_i H[\pi_i]$ où $H[\pi_i]$ est un schéma en groupes de Raynaud pour tout $1 \leq i \leq r$. Il existe sur $X_0(\mathfrak{p})$ une isogénie universelle $\psi : A \to A'$ de noyau le sous-groupe universel $H = \operatorname{Ker}\psi$. Il existe une première projection évidente $p_1 : X_0(\mathfrak{p}) \to X$ qui envoie (A, H) sur A et si l'on choisit des isomorphismes positifs $\mathfrak{c}_i\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{c}_{j_i}$ pour tout $1 \leq i \leq s$ où $1 \leq j_i \leq s$ dépend de i, on obtient une seconde projection $p_2 : X_0(\mathfrak{p}) \to X$ qui envoie (A, H) sur A/H.

Rappelons que ω^1 désigne le déterminant du faisceau conormal

$$e^\star \Omega^1_{A/X}$$

et que ω^k est sa puissance tensorielle k-ième pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Rappelons aussi que $\mathrm{H}^0(X, \omega^k)$ est le module des formes de Hilbert classiques de poids k.

Soient X_{rig} (resp. $X_0(\mathfrak{p})_{rig}$) l'espace rigide associé à X (resp. à $X_0(\mathfrak{p})$) et X_0 (resp. $X_0(\mathfrak{p})_0$) la fibre spéciale de X (resp. de $X_0(\mathfrak{p})$). Notons X_{ord} le tube ordinaire dans X_{rig} ; il est égal à la fibre générique rigide de $\mathfrak{X}^{ord}$. Une forme modulaire p-adique de poids k entier est un élément de $\mathrm{H}^0(X_{ord}, \omega^k)$. Elle est surconvergente si elle s'étend en une section de ω^k sur un voisinage strict de X_{ord} dans X_{rig}. Notons $M_k^\dagger$ l'espace des formes surconvergentes de poids k.

Notons $X_{ord,mult}$ le lieu ordinaire multiplicatif de $X_0(\mathfrak{p})_{rig}$. D'après la théorie du sous-groupe canonique, $p_1 : X_{ord,mult} \to X_{ord}$ est un isomorphisme et cet isomorphisme s'étend sur des voisinages stricts. Cela implique qu'il y a une action de l'opérateur $U_\mathfrak{p}$ sur $\mathrm{H}^0(X_{ord}, \omega^k)$ ou $M_k^\dagger$. L'opérateur $U_\mathfrak{p}$ agissant sur $M_k^\dagger$ est complétement continu. Notons $M_k^{\dagger pf}$ le sous-module de $M_k^\dagger$ constitué des formes de pente finie pour $U_\mathfrak{p}$. Rappelons qu'une forme $G \in M_k^\dagger$ est de pente finie si il existe un polynôme P vérifiant $P(0) \neq 0$ et $P(U_\mathfrak{p})(G) = 0$

On dispose en outre d'un opérateur ϕ de « Frobenius » sur $\mathrm{H}^0(X_{ord}, \omega^k)$ ou $M_k^\dagger$. En effet le composé

$$p_2 \circ p_1^{-1} : X_{ord} \xrightarrow{p_1^{-1}} X_{ord-mult} \xrightarrow{p_2} X_{ord}$$

induit $\phi : \mathrm{H}^0(X_{ord}, \omega^k) \to \mathrm{H}^0(X_{ord}, \omega^k)$. De plus, comme le sous-groupe canonique surconverge, cette définition s'étend aux formes surconvergentes.

On dispose bien sûr d'une suite d'inclusions

$$\mathrm{H}^0(X, \omega^k) \hookrightarrow M_k^{\dagger pf} \hookrightarrow M_k^\dagger \hookrightarrow \mathrm{H}^0(X_{ord}, \omega^k)$$

et le théorème qui suit caractérise le sous-espace $\mathrm{H}^0(X, \omega^k)$ dans $\mathrm{H}^0(X_{ord}, \omega^k)$.

Théorème 8.2. — *Une forme modulaire p-adique $H \in \mathrm{H}^0(X_{ord}, \omega^k)$ provient du module $\mathrm{H}^0(X, \omega^k)$ si est seulement si $\phi.H$ est une forme modulaire surconvergente de pente finie.*

Preuve. [*Dans le sens facile*] Soit $H \in \mathrm{H}^0(X, \omega^k)$. Alors $\phi.H \in \mathrm{H}^0(X_{ord}, \omega^k)$ est la restriction de $p_2^\star H \in \mathrm{H}^0(X_0(\mathfrak{p}), \omega^k)$ au lieu ordinaire multiplicatif. Elle est donc bien surconvergente, de pente finie. □

La démonstration de l'autre implication fait l'objet de la suite de l'article.

Remarque 8.3. — Si p est non ramifié dans F, G est une forme surconvergente de pente finie annulée par un polynôme P et si la valuation de $P(0)$ est petite par rapport à k, on déduit de [**PS2**] que G est classique sans qu'il soit nécessaire de supposer l'existence d'une forme H telle que $\phi.H = G$.

Corollaire 8.4. — *Les formes G et H construites dans la proposition 7.2.6 sont classiques.*

Preuve. Ces formes sont ordinaires donc surconvergentes. D'autre part $\phi.H = G$ d'après le lemme 4.1.2 de [**P2**]. $\square$

9. Préliminaires sur les schémas en groupes

9.1. Groupes de Hilbert-Blumenthal Barsotti-Tate. — Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de degré g, d'indice de ramification e et de degré résiduel f. Notons $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers, k_L son corps résiduel et ϕ l'automorphisme de Frobenius de k_L. Choisissons ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}_L$. Soit E le polynôme minimal de ϖ sur $W(k_L)[\frac{1}{p}]$. C'est donc un polynôme d'Eisenstein. Posons

$$E(T) = T^e + a_{e-1}T^{e-1} + ... + a_0 .$$

Définition 9.1.1. — *Soit S un schéma. Un groupe de Hilbert-Blumenthal Barsotti-Tate (abrégé en BTHB) $\mathcal{G}$ sur S est un groupe de Barsotti-Tate $\mathcal{G} \to S$ de hauteur $2g$ et de dimension g muni d'une action de $\mathcal{O}_L$, tel qu'il existe un isomorphisme $\mathcal{O}_L$-linéaire $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}^D$.*

Définition 9.1.2. — *Soit S un schéma. Un groupe de Lubin-Tate $\mathcal{H}$ sur S est un groupe de Barsotti-Tate sur S de hauteur g et de dimension 1 muni d'une action de $\mathcal{O}_L$.*

Si $\mathcal{H} \to S$ est un groupe de Lubin-Tate, son caractère est par définition l'application $\mathcal{O}_L \to \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S)$ donnant l'action de $\mathcal{O}_L$ sur l'algèbre de Lie $Lie(\mathcal{H})$.

9.2. Généralités sur les BTHB en caractéristique p. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Notons $\Gamma_0 = \{\sigma : k_L \hookrightarrow k\}$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_0$, posons $\mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}_L \otimes_{W(k_L),\sigma} W(k) = W(k)[T]/E^\sigma(T)$. C'est une extension totalement ramifiée de $W(k)$. Appelons v la valuation p-adique sur $\mathcal{O}_\sigma$ normalisée par $v(p) = 1$. Par abus de notation, nous noterons encore ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}_\sigma$. L'anneau $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} W(k)$ se décompose comme somme directe

$$\bigoplus_\sigma \mathcal{O}_\sigma.$$

De même, tout module D sur $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} W(k)$ admet une décomposition similaire $\oplus_\sigma D_\sigma$. Le Frobenius de $W(k)$ induit un morphisme de Frobenius relatif

$$\phi : \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(k) \to \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} W(k)$$

qui se décompose en applications $\phi : \mathcal{O}_\sigma \to \mathcal{O}_{\sigma\circ\phi}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_0$.

Lorsque $G \to \mathrm{Spec}\, k$ est un schéma en groupes fini et plat, on note $D(G)$ son module de Dieudonné contravariant. Rappelons que $\mathrm{Ker}(F) \subset D$ s'identifie au faisceau conormal ω_G et que $\mathrm{Ker}(V)$ s'identifie à $\omega^\vee_{G^D} = Lie\ G^D$ où G^D est le dual de Cartier de G.

De même, lorsque $G \to \operatorname{Spec} k$ est un groupe de Barsotti-Tate, on note $D(G)$ son module de Dieudonné contravariant qui un $W(k)$-module liibre de rang fini. Dans ce cas, $\operatorname{Ker}(F) : D/pD \to D/pD$ s'identifie au faisceau conormal ω_G. Notons G^D le groupe de Barsotti-Tate dual de G.

9.2.1. Sur les groupes de Barsotti-Tate de hauteur g. — Soit $\mathcal{H} \to \operatorname{Spec} k$ un groupe de Barsotti-Tate de hauteur g muni d'une action de $\mathcal{O}_L$. Notons D son module de Dieudonné contravariant, qui est libre de rang un sur $\mathcal{O}_L \otimes W(k)$. Il existe une décomposition $D = \oplus_\sigma D_\sigma$ où D_σ est un $\mathcal{O}_\sigma$-module libre de rang un. On obtient une application ϕ-linéaire $F : D \to D$ et une application ϕ^{-1}-linéaire $V : D \to D$ qui vérifient $FV = VF = p$. Elles se décomposent en applications $F_\sigma : D_\sigma \to D_{\sigma\circ\phi}$ et $V_\sigma : D_\sigma \to D_{\sigma\circ\phi^{-1}}$. Si l'on choisit une base de tous les D_σ, on peut représenter F_σ par un élément de $\mathcal{O}_{\sigma\circ\phi}$. Notons $v(F_\sigma)$ sa valuation qui est indépendante du choix de la base. Par la proposition 4.8 de [**AG1**], la classe d'isomorphisme de D est déterminée par les éléments $\{v(F_\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma}$. Cela permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 9.2.2. — *Il existe une bijection entre les classes d'isomorphisme de groupes de Barsotti-Tate de hauteur g sur* Spec k *munis d'une action de $\mathcal{O}_L$ et les familles de g éléments $(v_\sigma)_{\sigma\in\Gamma_0} \in (\frac{1}{e}\mathbb{Z} \cap [0,1])^g$.*

On en déduit le lemme suivant.

Lemme 9.2.3. — *Le foncteur $\mathcal{H} \mapsto \operatorname{Lie} \mathcal{H}$ de la catégorie des groupes de Lubin-Tate sur k vers la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension un munis d'une action de k_L est une équivalence de catégorie. Il existe donc une bijection entre les classes d'isomorphismes de groupes de Lubin-Tate sur k et l'ensemble* Γ_0

Preuve. Soit D le module de Dieudonné d'un groupe de Lubin-Tate $\mathcal{H}$ sur k. La dimension de $\mathcal{H}$ est $e\sum_\sigma v(F_\sigma)$. Si $\mathcal{H}$ est de dimension un, il existe un unique $\sigma_0 \in \Gamma_0$ tel que $v(F_{\sigma_0}) = \frac{1}{e}$ et que F_σ soit invertible lorsque $\sigma \neq \sigma_0$. L'élément σ_0 détermine donc la classe d'isomorphisme de $\mathcal{H}$. Enfin $\omega_{\mathcal{H}} = \operatorname{Ker}(F : D/pD \to D/pD)$ où $\omega_{\mathcal{H}} = \oplus_\sigma \omega_{\mathcal{H}_\sigma}$ où $\omega_{\mathcal{H},\sigma} = 0$ et $\omega_{\mathcal{H},\sigma_0} \simeq k$. □

9.2.4. Polygones de Newton. — Commençons par une généralisation facile du paragraphe 5.2 de [**GO**]. Soit $\mathcal{G}/k$ un BTHB et $D(\mathcal{G})$ son module de Dieudonné, qui est libre sur $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} W(k)$. D'après la théorie de Dieudonné-Manin, $D(\mathcal{G})[1/p]$ admet une décomposition en pentes. Étant fonctorielle, cette décomposition est stable sous l'action de $\mathcal{O}_L$. Ainsi on obtient soit deux pentes de même multiplicité $(r/g, (g-r)/g)$ pour $r \in \mathbb{Z} \cap [0, \frac{g}{2}[$ soit l'unique pente $1/2$. Indiquons à présent comment calculer les pentes de l'isocristal associé à $\mathcal{G}$.

Lemme 9.2.5. — *Les pentes du ϕ-isocristal $D(\mathcal{G})[1/p]$ sont f^{-1} multiplié par les pentes du ϕ^f-isocristal $D(\mathcal{G})_\sigma[1/p]$ pour tout $\sigma \in \Gamma_0$.*

Preuve. Les pentes du ϕ^f-isocristal $D(\mathcal{G})[1/p]$ sont égales à f multipliée par les pentes du ϕ-isocristal $D(\mathcal{G})[1/p]$. Mais le ϕ^f-isocristal $D(\mathcal{G})[1/p]$ est la somme directe de f isocristaux avec ϕ^f tous isomorphes à $D(\mathcal{G})_\sigma[1/p]$ pour n'importe quel $\sigma \in \Gamma_0$. $\square$

Le lemme suivant généralise [**GO**], lem. 5.3.1 et [**AG1**], thm. 9.2.

Lemme 9.2.6. — *Supposons que le ϕ^f-cristal $D(\mathcal{G})_\sigma$ sur $\mathcal{O}_\sigma$ a un Frobenius de matrice*

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

Alors la première pente de $D(\mathcal{G})$ est

$$\inf\{\frac{1}{2}, \frac{1}{f}v(\phi^f(m_1) + m_4\frac{\phi^f(m_3)}{m_3})\} = \inf\{\frac{1}{2}, \frac{1}{f}v(m_1 + \phi^f(m_4)\frac{m_2}{\phi^f(m_2)})\}$$

avec la convention $0/0 = 1$.

Preuve. Par symétrie et grâce au lemme précédent, il suffit de montrer que la première pente du ϕ^f-cristal est $\lambda = \inf\{\frac{f}{2}, v(\phi^f(m_1) + m_4\frac{\phi^f(m_3)}{m_3})\}$. Dans le cas où $m_3 = 0$, la formule claire. Supposons donc que $m_3 \neq 0$. Soit e_1, e_2 une base de $D(\mathcal{G})_\sigma$. Pour calculer les pentes on peut remplacer $D(\mathcal{G})_\sigma$ par le sous-cristal engendré par e_1 et $F \cdot e_1$. Le Frobenius de ce sous-cristal est donné dans la base e_1, Fe_1 par

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\phi^f(m_3)}{m_3}(m_1m_4 - m_2m_3) \\ 1 & \phi^f(m_1) + m_4\frac{\phi^f(m_3)}{m_3} \end{pmatrix}.$$

Ce sous-cristal est donc isomorphe à

$$\mathcal{O}_\sigma[F^f]/F^{2f} - (\phi^f(m_1) + m_4\frac{\phi^f(m_3)}{m_3})F^f - \frac{\phi^f(m_3)}{m_3}(m_1m_4 - m_2m_3).$$

À la manière de [**AG1**], lem. 9.1, lorsque $\lambda e \in \mathbb{Z}$ on construit une factorisation

$$F^{2f} - (\phi^f(m_1) + m_4\frac{\phi^f(m_3)}{m_3})F^f - \frac{\phi^f(m_3)}{m_3}(m_1m_4 - m_2m_3) = (b_0F^f + b_1)(F^f - \varpi^{e\lambda})u$$

avec $b_0, b_1, u \in \mathcal{O}_\sigma$ et u une unité. Cela fournit une application non nulle

$$\mathcal{O}_\sigma[F^f]/F^{2f} - (\phi^f(m_1) + m_4\frac{\phi^f(m_3)}{m_3})F^f - \frac{\phi^f(m_3)}{m_3}(m_1m_4 - m_2m_3) \to \mathcal{O}_\sigma[F^f]/(F^f - \varpi^{e\lambda}).$$

Le cas où $\lambda = \frac{f}{2}$ et g est impair est similaire, et nous renvoyons le lecteur à [**AG1**], lem. 9.1 et thm. 9.2. $\square$

9.2.7. Groupes de Barsotti-Tate de pentes $(1/g, (g-1)/g)$. — Soit $\mathcal{G}$ un BTHB sur $\mathrm{Spec}(k)$ dont le polygone de Newton a pour pentes $(1/g, (g-1)/g)$. Dans cette section, nous supposons que $g \geq 3$. L'hypothèse $g \geq 3$ garantit que les deux pentes sont distinctes.

Proposition 9.2.8. — *Le BTHB $\mathcal{G}$ possède un unique sous-groupe de Lubin-Tate $\mathcal{H}$ et un unique quotient de Lubin-Tate $\mathcal{H}'$.*

Preuve. Soit D le module de Dieudonné de $\mathcal{G}$. D'après la classification de Dieudonné-Manin,

$$D[1/p] \simeq D[1/p]_{1/g} \oplus D[1/p]_{(g-1)/g}$$

où $D[1/p]_{1/g}$ et $D[1/p]_{(g-1)/g}$ sont les isocristaux simples de pentes $\frac{1}{g}$ et $\frac{g-1}{g}$. Cette décomposition est stable sous l'action de $\mathcal{O}_L$. Notons $D_{1/g}$ le quotient de D qui est l'image de D dans $D[1/p]_{1/g}$. Il correspond à l'unique sous-groupe de Lubin-Tate $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$. Notons $D'_{1/g}$ le sous-module de D intersection de D et de $D[1/p]_{1/g}$. Il correspond à l'unique Lubin-Tate $\mathcal{H}'$ quotient de $\mathcal{G}$. On en déduit que $\mathcal{G}$ se dévisse en deux suites exactes courtes équivariantes sous $\mathcal{O}_L$

$$0 \to \mathcal{H} \to G \to \mathcal{H}^D \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to \mathcal{H}'^D \to G \to \mathcal{H}' \to 0.$$

$\square$

9.2.9. Extension d'un groupe de Lubin-Tate par son dual. — Dans cette section nous supposons $g \geq 2$ et étudions le groupe des extensions comme $\mathcal{O}_L$-module d'un groupe de Lubin-Tate $\mathcal{H}$ par son dual.

Lemme 9.2.10. — *Soit $\mathcal{H} \to \mathrm{Spec}\ k$ un groupe de Lubin-Tate . Il existe un isomorphisme naturel $Ext^1(\mathcal{H}^D, \mathcal{H}) \simeq k$. Une extension scinde si et seulement si elle scinde sur la ϖ-torsion.*

Preuve. Soit D le module de Dieudonné de $\mathcal{G} \in Ext^1(\mathcal{H}^D, \mathcal{H})$. Il se dévisse en

$$0 \to D(\mathcal{H}^D) \to D \to D(\mathcal{H}) \to 0$$

Comme précédemment, on a $D = \oplus_\sigma D_\sigma$. Choisissons une base $D_\sigma = < e_\sigma, f_\sigma >$ où e_σ est une base de $D(\mathcal{H}^D)_\sigma$ et f_σ relève une base de $D(\mathcal{H})_\sigma$. Il existe un unique σ_0 tel que

$$F_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \varpi^{e-1} & x_{\sigma_0} \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$$

et si $\sigma \neq \sigma_0$ on a

$$F_\sigma = \begin{pmatrix} \varpi^e & x_\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quitte à remplacer $f_{\sigma\circ\phi}$ par $F_\sigma(f_\sigma)$ pour $\sigma \neq \sigma_0$, on peut supposer que $x_\sigma = 0$ pour $\sigma \neq \sigma_0$. Posons $x_{\sigma_0} = x$. On peut voir F^f comme un endomorphisme de $D_{\sigma_0\circ\phi}$ de matrice

$$\begin{pmatrix} \varpi^{fe-1} & x \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}.$$

En utilisant la proposition 4.8 de [**AG1**], on voit que $x \mod \varpi$ détermine la classe de l'extension. En particulier, si $v(x) > 0$ on peut choisir $f_{\sigma_0\circ\phi}$ de telle manière à avoir

$$F^f = \begin{pmatrix} \varpi^{fe-1} & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}.$$

On peut alors remplacer f_σ par $F^{r-1}(f_{\sigma_0\circ\phi})$ pour $\sigma = \sigma_0 \circ \phi^r$ et $1 \leq r \leq f$. Dans cette nouvelle base, F_σ est diagonal pour tout $\sigma \in \Sigma$. Ainsi, $D = D(\mathcal{H}) \oplus D(\mathcal{H}^D)$ et l'extension scinde. □

Remarque 9.2.11. — Le cas $g = 1$ est trivial car le groupe de Lubin-Tate est alors le groupe multiplicatif, son dual est étale et toute extension est scindée.

Lemme 9.2.12. — *1. Un extension $\mathcal{G} \in Ext^1(\mathcal{H}^D, \mathcal{H})$ est scindée si est seulement si* $\dim_k \mathrm{Hom}(\alpha_p, \mathcal{G}) = 2$. *Si elle ne scinde pas,* $\dim_k \mathrm{Hom}(\alpha_p, \mathcal{G}) = 1$.

2. Supposons $e \geq 2$. Si $\mathcal{G} \in Ext^1(\mathcal{H}^D, \mathcal{H})$ alors $\omega_{\mathcal{G}}$ est libre de rang un sur $\mathcal{O}_L \otimes k$ si et seulement si l'extension est non triviale. On dit dans ce cas que $\mathcal{G}$ vérifie la condition de Rapoport.

Preuve. C'est évident sur la description du module de Dieudonnée. □

9.2.13. Sous-groupes remarquables. — Dans cette section nous supposons que $g \geq 3$. Soit $\mathcal{H} \to \mathrm{Spec}\ k$ un groupe de Lubin-Tate.

Disons qu'un sous-groupe fini et plat H_N de $\mathcal{G} \in Ext^1(\mathcal{H}^D, \mathcal{H})$ est libre de rang un sur $\mathcal{O}_L/\varpi^N\mathcal{O}_L$ si les suites courtes

$$0 \to H_N[\varpi^n] \to H_N[\varpi^m] \xrightarrow{\varpi^n} H_N[\varpi^{n-m}] \to 0$$

sont exactes pour tout $m \geq n$.

Lemme 9.2.14. — *Supposons $N \geq 2$. Soit H_N un sous-groupe de $\mathcal{G}$ libre de rang un sur $\mathcal{O}_L/\varpi^N\mathcal{O}_L$. Le sous-groupe $H_N[\varpi^{N-2}]$ est égal à ${\mathcal{H}'}^D[\varpi^{N-2}]$ ou à $\mathcal{H}[\varpi^{N-2}]$.*

Preuve. Soit D le module de Dieudonné de $\mathcal{G}$. On a $D = \oplus_\sigma D_\sigma$. Si l'extension définissant $\mathcal{G}$ scinde, on peut munir D_σ d'une base $< e_\sigma, f_\sigma >$ telle qu'il existe un unique σ_0 tel que

$$F_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \varpi^{e-1} & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$$

et pour tout $\sigma \neq \sigma_0$,

$$F_\sigma = \begin{pmatrix} \varpi^e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'extension est non triviale, on peut munir D_σ d'une base $< e_\sigma, f_\sigma >$ telle qu'il existe un unique σ_0 vérifiant

$$F_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \varpi^{e-1} & x \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$$

avec $v(x) = 0$ et pour tout $\sigma \neq \sigma_0$

$$F_\sigma = \begin{pmatrix} \varpi^e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul facile montre que la matrice de F^f sur $D_{\sigma_0 \circ \phi^r}$ dans la base $< e_{\sigma_0 \circ \phi^r}, f_{\sigma_0 \circ \phi^r} >$ pour $1 \leq r \leq f$ est

$$\begin{pmatrix} \varpi^{fe-1} & \varpi^{e(r-1)} \phi^{r-1}(x) \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$$

où x est une unité dans le cas non scindé et où $x = 0$ dans le cas scindé. Notons D_N la réduction de D modulo ϖ^N. Soit L le sous-module de D_N correspondant au sous groupe de $\mathcal{G}$ libre de rang un sur $\mathcal{O}_L/\varpi^N \mathcal{O}_L$. La σ-partie L_σ est libre de rang un sur $\mathcal{O}_\sigma/\varpi^N$ pour tout $\sigma \in \Gamma_0$.

Soit $\lambda_r e_{\sigma_0 \circ \phi^r} + \mu_r f_{\sigma_0 \circ \phi^r}$ un générateur de $L_{\sigma_0 \circ \phi^r}$ pour $1 \leq r \leq f$. Il est nécessairement vecteur propre de F^f et l'on obtient la relation suivante dans $\mathcal{O}_{\sigma_0 \circ \phi}/\varpi^N$

$$\varpi^{fe-1} \mu_r \phi^f(\lambda_r) + \varpi^{e(r-1)} \phi^{r-1}(x) \phi^f(\mu_r) \mu_r - \varpi \lambda_r \phi^f(\mu_r) = 0$$

Pour tout $\sigma \in \Gamma_0$, on peut définir la valuation tronquée d'un élément $x \in \mathcal{O}_\sigma/\varpi^N$ en posant $v(x) = \inf\{v(\hat{x}), \frac{N}{e}\}$ où $\hat{x} \in \mathcal{O}_\sigma$ relève x.

Cherchons une solution de l'équation précédente avec $\lambda_r = 1$. Cela force à avoir soit $v(\mu_r) \geq \frac{N-1}{e}$ soit $r = 1$ puis x est une unité et $\mu_r = \varpi u$ avec u une unité. L'équation sur u s'écrit alors

$$\varpi^{fe} u + x \varpi^2 \phi^f(u) u - \varpi^2 \phi^f(u) = 0\,.$$

Cette équation admet une unique solution $\mod \varpi^{N-2}$ d'après un argument d'approximation standard.

Cherchons maintenant une solution avec $\mu_r = 1$. On voit que $r = 1$, ce qui force $x = 0$ et $v(\lambda_r) \geq \frac{N-1}{e}$. Pour $r \geq 2$ il existe une unique solution modulo ϖ^{N-1} notée λ_r^0. Cette solution a valuation $r - 1 - \frac{1}{e} + v(x)$ et est l'unique racine de l'équation

$$\varpi^{fe-2} \phi^f(\lambda_r^0) + \varpi^{e(r-1)-1} \phi^{r-1}(x) - \lambda_r^0 = 0.$$

Résumons la situation

- Si $r = 1$ et $x \neq 0$, on a soit $(\lambda_r, \mu_r) = (1, 0) \mod \varpi^{N-2}$ ou $(\lambda_r, \mu_r) = (1, \varpi u) \mod \varpi^{N-2}$ avec u une unité.
- Si $r \geq 2$ et $x \neq 0$ on a soit $(\lambda_r, \mu_r) = (1, 0) \mod \varpi^{N-2}$ ou $(\lambda_r, \mu_r) = (\lambda_r^0, 1) \mod \varpi^{N-2}$ avec $v(\lambda_r^0) = r - 1 - \frac{1}{e}$.
- Si $1 \leq r \leq f$ et $x = 0$, on a soit $(\lambda_r, \mu_r) = (1, 0) \mod \varpi^{N-2}$ ou $(\lambda_r, \mu_r) = (0, 1) \mod \varpi^{N-2}$.

Comme $F_\sigma(L_\sigma) \subset L_\sigma$, on en déduit que les seules solutions possibles modulo ϖ^{N-2} sont bien

1. $L_\sigma =< e_\sigma > \mod \varpi^{N-2}$ pour tout σ,
2. $L_\sigma =< f_\sigma > \mod \varpi^{N-2}$ pour tout σ si $x = 0$,
3. $L_{\sigma_0 \circ \phi} =< e_{\sigma_0 \circ \phi} + \varpi u f_{\sigma_0 \circ \phi} >$ et $L_{\sigma_0 \circ \phi^r} =< \lambda_r^0 e_{\sigma_0 \circ \phi^r} + f_{\sigma_0 \circ \phi^r} >$ pour $2 \leq r \leq f$ si $x \neq 0$.

Dans la liste précédente, le cas 1 correspond au sous-groupe $\mathcal{H}[\varpi^{N-2}]$ et les cas 2 et 3 à $\mathcal{H}'^D[\varpi^{N-2}]$. □

9.2.15. Familles de sous-groupes remarquables. — Dans cette section, nous maintenons l'hypothèse $g \geq 3$.

Soit S un schéma de type fini réduit sur Spec $\mathbb{F}_p$ et $\mathcal{G} \to S$ un BTHB sur S. Supposons qu'il existe $\sigma \in \Gamma_0$ tel que pour tout point géométrique $\bar{x}$: Spec $k(\bar{x}) \to S$, le BTHB $\mathcal{G}_{\bar{x}}$ soit isomorphe à la somme directe $\mathcal{H}_{\bar{x}} \oplus \mathcal{H}_{\bar{x}}^D$ où $\mathcal{H}_{\bar{x}} \to$ Spec $k(\bar{x})$ est le groupe de Lubin-Tate de caractère σ. Soit $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Pour tout $\bar{x} \in S$, le sous-groupe $\mathcal{H}_{\bar{x}}[p^N]$ est remarquable parmi les sous-groupes de $\mathcal{G}_{\bar{x}}$. Il est naturel de se demander s'il existe un sous-groupe fini et plat $\mathcal{H}[p^N] \hookrightarrow \mathcal{G}$ sur S qui interpole les divers sous-groupes $\mathcal{H}_{\bar{x}}[p^N]$. Des questions similaires ont été étudiées dans [**OZ**] pour tous crans quelconques de la stratification de Newton. La preuve de la proposition suivante est directement inspirée par cet article.

Proposition 9.2.16. — *Il existe un morphisme fini surjectif $S' \to S$ et un schéma en groupes fini et plat $\mathcal{H}[p^N] \hookrightarrow \mathcal{G}_{S'}$ stable sous l'action de $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{H}[p^N]_{\bar{x}}$ soit le sous-groupe $\mathcal{H}_{\bar{x}}[p^N]$ pour tout $\bar{x} \in S'$.*

Preuve. Notons $\phi^r : S \to S$ la puissance r-ième du Frobenius absolu, qui est un morphisme fini surjectif. Soit $\mathcal{G}^{(p^r)}$ le changement de base de $\mathcal{G}$ selon ce morphisme. Soit $V^r : \mathcal{G}^{(p^r)} \to \mathcal{G}$ la puissance r-ième du morphisme de Verschiebung. Un calcul point par point sur le module de Dieudonné montre que $\mathcal{G}^{(p^f)}[\varpi] \subset \mathrm{Ker}(V^f)$. Ainsi la quasi-isogénie

$$\frac{V^f}{\varpi} : \mathcal{G}^{(p^f)} \to \mathcal{G}$$

est une isogénie. Un calcul élémentaire sur le module de Dieudonné montre que pour tout $\bar{x} \in S$, la fibre en $\bar{x}$ du noyau de cette isogénie est $\mathcal{H}_{\bar{x}}[p^f \varpi^{-2}]$.

Il suffit alors de prendre $r = fN$,

$$S' = S \xrightarrow{\phi^{fr}} S$$

et $\mathcal{H}[p^N] = (\mathrm{Ker}\frac{V^{fN}}{\varpi^N})[p^N]$. $\square$

9.2.17. Familles de Moret-Bailly. — Dans cette section, nous maintenons l'hypothèse $g \geq 3$. Considérons $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^D$ sur Spec$k$ où $\mathcal{H}$ est un groupe de Lubin-Tate correspondant à $\sigma_0 \in \Gamma_0$ et étudions le schéma propre GR qui paramètre les sous-groupes de Raynaud de $\mathcal{G}$ tués par le Frobenius.

Lemme 9.2.18. — *Supposons $f \geq 2$. On a $GR(k) \simeq \mathbb{P}^1(k)$. De plus, $GR(k)$ possède deux points distingués, un correspondant à $\mathcal{H}^D[\varpi]$ et l'autre à un sous-groupe noté H_0. Pour tout sous-groupe $H \in GR(k)$ distinct de H_0, on a $\omega_{H^D,\sigma} = 0$ si $\sigma \neq \sigma_0$ et $\omega_{H^D,\sigma_0} \neq 0$. On a $\omega_{H_0^D,\sigma} = 0$ si $\sigma \neq \sigma_0$ ou $\sigma_0 \circ \phi$ et $\omega_{H_0^D,\sigma_0}, \omega_{H_0^D,\sigma_0\circ\phi} \neq 0$. Supposons $f = 1$. On a $GR(k) \simeq \mathbb{P}^1(k)$ qui a deux points distingués sur $GR(k)$ correspondants à $\mathcal{H}[\varpi]$ et $\mathcal{H}^D[\varpi]$.*

Preuve. Notons D le module de Dieudonné de $\mathcal{G}$. Si $f \geq 2$, la famille de sous-modules de Dieudonné correspondant à la famille universelle de sous-groupes sur $GR(k)$ est donnée par $L(\mu,\lambda)_\sigma =< \varpi e_\sigma, f_\sigma >$ si $\sigma \neq \sigma_0 \circ \phi$ et $L(\mu,\lambda)_{\sigma_0\circ\phi} =< \mu e_{\sigma_0\circ\phi} + \lambda f_{\sigma_0\circ\phi}, \varpi e_{\sigma_0\circ\phi}, \varpi f_{\sigma_0\circ\phi} >$ où $(\mu,\lambda) \in \mathbb{P}^1(k)$. Le groupe $\mathcal{H}^D[\varpi]$ correspond à $(0,1)$ et H_0 à $(1,0)$. Si $f = 1$ on a $\Gamma_0 = \{\sigma_0\}$ et la famille de sous-modules de Dieudonné est donnée par $L(\mu,\lambda)_{\sigma_0} =< \mu e_{\sigma_0} + \lambda f_{\sigma_0}, \varpi e_{\sigma_0}, \varpi f_{\sigma_0} >$ avec $(\mu,\lambda) \in \mathbb{P}^1(k)$. Le groupe $\mathcal{H}^D[\varpi]$ correspond à $(0,1)$ et $\mathcal{H}[\varpi]$ à $(1,0)$. $\square$

À chaque point $(\mathcal{G}, H)$ de $GR(k)$ on peut associer $(\mathcal{G}/H, \mathcal{G}[\varpi]/H) = w(\mathcal{G}, H)$. L'automorphisme w ainsi obtenu est appelé « involution de Weil ».

Lemme 9.2.19. — *Supposons $f \geq 2$. Soit $\mathcal{H}'$ le groupe de Lubin-Tate correspondant à $\sigma_0 \circ \phi \in \Gamma_0$. Sous l'isomorphisme précédent $GR(k) \simeq \mathbb{P}^1(k)$, l'involution w identifie $k^\times \hookrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ avec l'ensemble des extensions non triviales de $Ext^1(\mathcal{H}^D, \mathcal{H})$. Pour ces extensions non triviales, $\mathcal{G}[\varpi]/H = Ker(V : (\mathcal{G}/H)[\varpi] \to (\mathcal{G}/H)[\varpi])$. Dans les autres cas $w(\mathcal{G}, \mathcal{H}^D[\varpi]) \simeq (\mathcal{G}, \mathcal{H}[\varpi])$ et $w(\mathcal{G}, H_0) \simeq (\mathcal{H}' \oplus (\mathcal{H}')^D, H_0')$ où H_0' est le seul sous-groupe de Raynaud de $(\mathcal{H}' \oplus (\mathcal{H}')^D)[\varpi]$ tué par V tel que $\omega_{H_0',\sigma_0} \neq 0$.*

Preuve. Indiquons simplement les calculs à réaliser lorsque $H = H_0$. Soit $L = \oplus L_\sigma$ le sous-module de Dieudonné de D tel que le quotient D/L soit le module de Dieudonné de H_0. Donc L est le module de Dieudonné de $\mathcal{G}/H_0$. On vérifie aisément que $F_\sigma : L_\sigma \to L_{\sigma\circ\phi}$ est donné dans la base naturelle par la matrice

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si $\sigma \neq \sigma_0 \circ \phi$ et par la matrice

$$\begin{pmatrix} \varpi^{e-1} & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$$

si $\sigma = \sigma_0 \circ \phi$. Le module de Dieudonné de $\mathcal{G}[\varpi]/H_0$ s'identifie à $L/\varpi D$. Il est facile de voir que $V = 0$ dans $L/\varpi D$ et que $F_\sigma : (L/\varpi D)_\sigma \to (L/\varpi D)_{\sigma\circ\phi}$ est nul si et seulement si $\sigma = \sigma_0$ ou $\sigma = \sigma_0 \circ \phi$. $\square$

Lemme 9.2.20. — *Supposons $f = 1$. Sous l'isomorphisme précédent $GR(k) \simeq \mathbb{P}^1(k)$, l'involution w identifie $k^\times \hookrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ avec l'ensemble des extensions non triviales de $Ext^1((\mathcal{H})^D, \mathcal{H})$. Pour ces extensions non triviales, $\mathcal{G}[\varpi]/H = Ker(V : (\mathcal{G}/H)[\varpi] \to (\mathcal{G}/H)[\varpi])$. Dans les autres cas, $w(\mathcal{G}, \mathcal{H}^D[\varpi]) \simeq (\mathcal{G}, \mathcal{H}[\varpi])$ et $w(\mathcal{G}, \mathcal{H}[\varpi]) \simeq (\mathcal{G}, \mathcal{H}^D[\varpi])$.*

9.3. Déformations de BTHB. — Le but de ce paragraphe est de démontrer quelques résultats sur les déformations de groupes de Barsotti-Tate de polygone de Newton ou de a-nombre prescrits. Des résultats similaires figurent déjà dans [**GO**] et [**AG1**] et nous empruntons les méthodes de ces articles.

9.3.1. Déformations en a-nombre un. — Soit $\mathcal{G}/k$ un groupe de Barsotti-Tate. Son a-nombre est par définition $\dim_k \mathrm{Hom}(\alpha_p, \mathcal{G})$. Si D est le module de Dieudonné de $\mathcal{G}$ on a $a(\mathcal{G}) = \dim_k D/(FD + VD)$. La proposition suivante généralise [**GO**], thm. 5.3.3.

Proposition 9.3.2. — *Soit $\mathcal{G}/k$ de a-nombre un. Il existe une k-algèbre locale intègre S de corps résiduel k, de corps des fractions K et un BTHB $\tilde{G} \to$ Spec S tel que $\tilde{G}|_k \simeq G$ et $\tilde{G}|_K$ ait un polygone de Newton de pentes $(\frac{1}{g}, \frac{g-1}{g})$.*

Preuve. Déterminons d'abord une base convenable du module de Dieudonné D de $\mathcal{G}$. Par hypothèse, il existe un unique σ_0 tel que $D_{\sigma_0} \neq FD_{\sigma_0\circ\phi^{-1}} + VD_{\sigma_0\circ\phi}$. On peut comme dans la démonstration du théorème 5.3.3 de [**GO**] trouver un élément $x \in D_{\sigma_0}$ tel que pour tout $0 \leq i \leq g-1$, la famille $\{F^i x, V^{g-i} x\}$ soit une base de $D_{\sigma_0\circ\phi^i}$ et $F^g x = ax - V^g x$ avec $a \in \mathcal{O}_{\sigma_0}$ et $v(a) > 0$. Notons que la première pente du polygone de Newton de $\mathcal{G}$ est $\inf\{v(a)/f, 1/2\}$ Dans la base précédente, la matrice du morphisme $F_\sigma : D_\sigma \to D_{\sigma\circ\phi}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

si $\sigma \neq \sigma_0 \circ \phi^{-1}$ et par

$$\begin{pmatrix} a & p \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si $\sigma = \sigma_0 \circ \phi^{-1}$. Notons $R = k[[c_{0,\sigma}, ..., c_{e-1,\sigma}, \sigma \in \Sigma]]$. D'après la section 5.4 de [**AG2**], le schéma formel Spf R est l'espace de déformation équi-caractéristique de G. D'après le théorème 5.6.1 de [**AG2**] le display universel sur R est une famille $(P, Q, F, V^{-1}, <,>)$ où $P = \oplus_\sigma P_\sigma$ est un module libre de rang deux sur $W(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L$ et $F : P \to P$ est une application ϕ-linéaire. Après tensorisation par le morphisme $R \to k$, le module P se spécialise sur D et il existe une base e_1^σ, e_2^σ relevant la base précédente de D telle que $F_\sigma : P_\sigma \to P_{\sigma\circ\phi}$ est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\phi(C_\sigma) \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

si $\sigma \neq \sigma_0 \circ \phi^{-1}$ et par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & p - a\phi(C_{\sigma_0\circ\phi^{-1}}) \\ -1 & -\phi(C_{\sigma_0\circ\phi^{-1}}) \end{pmatrix}$$

autrement, où $C_\sigma = [c_{0,\sigma}] + [c_{1,\sigma}]T + ... + [c_{e-1,\sigma}]T^{e-1} \in W(R) \otimes \mathcal{O}_\sigma$ et $[.]$ désigne le relèvement de Teichmüller. Posons

$$C = \sum_{i=-1}^{f-2} C_{\sigma_0\circ\phi^i} p^{i+1} .$$

L'endomorphisme de P_{σ_0} donné par F^f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} a & -aC + p^f \\ -1 & C \end{pmatrix}$$

Posons $S = R/c_{0,\sigma_0\circ\phi^{-1}}$. La spécialisation de P sur une clôture algébrique du point générique de S est bien le module de Dieudonné d'un groupe de Barsotti-Tate de pentes $(\frac{1}{g}, \frac{g-1}{g})$ d'après le lemme 9.2.6. $\square$

9.3.3. Déformation du a-nombre. — Soit S un schéma de caractéristique p et $\mathcal{G} \to S$ un BTHB. Supposons que $\omega_{\mathcal{G}}$ est libre de rang un sur $\mathcal{O}_L \otimes \mathscr{O}_S$, autrement dit qu'il vérifie la condition de Rapoport. Le Verschiebung $\mathcal{G}^{(p)} \to \mathcal{G}$ a une différentielle

$$V : \omega_{\mathcal{G}} \to \omega_{\mathcal{G}^{(p)}}$$

qui se décompose en morphismes

$$V_\sigma : \omega_{\mathcal{G},\sigma} \to \omega_{\mathcal{G},\sigma\circ\phi^{-1}}.$$

Pour tout $\sigma \in \Gamma_0$ et tout $1 \leq i \leq e$ notons

$$V_{i,\sigma} : \omega_{\mathcal{G}[\varpi^i],\sigma} \to \omega_{\mathcal{G}[\varpi^i],\sigma\circ\phi^{-1}}.$$

L'application $V_{1,\sigma}$ est souvent appelée invariant de Hasse partiel (voir [**AG3**], déf. 7.12). Si $S = \mathrm{Spec}\, k$, le a-nombre de $\mathcal{G}$ est juste $\sum_\sigma \dim_k KerV_\sigma$. Introduisons le a-nombre raffiné de $\mathcal{G}$ qui est la fonction $A(\mathcal{G}) : \Gamma_0 \to [0, e]$ définie

par
$$A(\mathcal{G})(\sigma) = \sup_i \{V_{i,\sigma} = 0\}.$$
Remarquons que $a(\mathcal{G}) = \sum_\sigma A(\mathcal{G})(\sigma)$.

Soit $\mathcal{G}/k$ un BTHB tel que $\omega_{\mathcal{G}}$ soit libre sur $\mathcal{O}_L \otimes k$. Notons $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},0}$ l'espace de déformations équicaractéristiques de $\mathcal{G}$. Cet espace est formellement lisse de dimension g. Pour tout $A : \Gamma_0 \to [0, e]$ notons $\mathrm{Def}^A_{\mathcal{G},0}$ le sous-schéma formel localement fermé où le a-nombre raffiné est A. La proposition suivante améliore le corollaire 8.18 de [**AG3**].

Proposition 9.3.4. — *La stratification* $\{\mathrm{Def}^A_{\mathcal{G},0}\}_A$ *est pure donc*

- *les strates sont formellement lisses,*
- *l'adhérence d'une strate est union de strates,*
- *l'intersections de deux strates est une strate,*
- *si* $A, B : \Gamma_0 \to [0, e]$ *alors* $\mathrm{Def}^A_{\mathcal{G},0} \subset Adh(\mathrm{Def}^B_{\mathcal{G},0})$ *si et seulement si* $B(\sigma) \leq A(\sigma)$ *pour tout* $\sigma \in \Gamma_0$.

Preuve. Soit D le module de Dieudonné de $\mathcal{G}$ et D_0 sa réduction modulo p. Il existe une suite exacte
$$0 \to \omega_{\mathcal{G}} \to D_0 \to \omega^\vee_{\mathcal{G}} \to 0.$$
Notons $R = k[x_{0,\sigma}, ..., x_{e-1,\sigma}, \sigma \in \Gamma_0]/(x_{0,\sigma}, ..., x_{e-1,\sigma}, \sigma \in \Gamma_0)^2$. Soit $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},0}(1) \simeq \mathrm{Spec}\ R$ le voisinage infinitésimal au second ordre du point fermé de $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},0}$. Notons $\tilde{\mathcal{G}}$ le BTHB universel sur $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},0}(1)$. Par évaluation du cristal D sur $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},0}(1)$, on obtient une suite exacte
$$0 \to \omega_{\tilde{\mathcal{G}}} \to D_0 \otimes_k R \to \omega^\vee_{\tilde{\mathcal{G}}} \to 0.$$
Soit $\sigma_0 \in \Gamma_0$. Supposons $A(\mathcal{G})(\sigma_0) = i$. Le morphisme
$$V_{\sigma_0} : \omega_{\mathcal{G},\sigma_0} \simeq k[T]/T^e \to \omega_{\mathcal{G},\sigma_0\circ\phi^{-1}} \simeq k[T]/T^e$$
est donné par la multiplication par T^i. Il existe donc des bases e_1, e_2 de D_{0,σ_0} et f_1, f_2 de $D_{0,\sigma_0\circ\phi^{-1}}$ dans lesquelles V_{σ_0} soit donné par la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et par $\omega_{\mathcal{G},\sigma_0} =< T^i e_1 + e_2 >$. Sous des isomorphismes convenables, $\omega_{\tilde{\mathcal{G}},\sigma_0}$ est donné par $< T^i e_1 + e_2 + x_{0,\sigma_0} e_1 + ... x_{e-1,\sigma_0} T^{e-1} e_1 >$ où l'on rappelle que $\omega_{\tilde{\mathcal{G}},\sigma_0}$ est la déformation universelle de $\omega_{\mathcal{G},\sigma_0}$ dans D_{0,σ_0}). Soit $j \leq i$. L'équation du lieu où $A(\sigma_0) \geq j$ dans $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},0}$ est donnée par $V_{j,\sigma_0} = 0$. Cette équation devient $x_{0,\sigma_0} = ... = x_{j,\sigma_0} = 0$ après projection dans l'espace tangent. On en déduit que l'union de strates données par l'équation $A(\sigma_0) \geq j$ est formellement lisse

d'équations données par une suite régulière. On en déduit également la formule annoncée pour l'adhérence d'une strate, ce qui démontre la proposition. □

9.4. Théorie du modèle local. — Dans ce paragraphe nous ferons l'hypothèse que $g \geq 3$. Nous étudions les espaces de déformations de BTHB qui sont extension d'un Lubin-Tate par leur dual et qui sont munis de structures de niveau iwahoriques. Rappelons d'abord un invariant fondamental des schémas en groupes finis et plats sur un trait de caractéristique mixte, leur fonction degré.

Soit S un schéma et $G \to S$ un schéma en groupes fini et plat de section neutre $e : S \to G$. Notons

$$\omega_G = e^\star \Omega^1_{G/S}$$

le faisceau conormal de G le long de sa section unité. Supposons que $S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ est le spectre d'un anneau de valuation discrète de caractéristique mixte $(0,p)$, de valuation v associée normalisée par $v(p) = 1$. Alors $\omega_G \simeq \oplus_{i=1}^t \mathcal{O}_K/x_i\mathcal{O}_K$ et le degré de G est par définition $\deg(G) = \sum v(x_i)$.

Supposons que G soit muni d'une action de k_L, ce qui est par exemple le cas si G est un schéma en groupes de Raynaud. Alors ω_G est un $k_L \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$-module. Supposons que $\mathcal{O}_K$ soit une $W(k)$-algèbre. Rappelons que par notation $\Gamma_0 = \{\sigma : k_L \hookrightarrow k\}$. Ainsi $\omega_G = \oplus_\sigma \omega_{G,\sigma}$ où $\omega_{G,\sigma}$ est le facteur direct de ω_G sur lequel k_L agit par le plongement $\sigma : k_L \hookrightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$. On a alors $\omega_{G,\sigma} \simeq \oplus_{i=1}^t \mathcal{O}_K/x_i\mathcal{O}_K$ et l'on pose $\deg_\sigma(G) = \sum v(x_i)$. Clairement $\deg(G) = \sum \deg_\sigma(G)$. Lorsque G est un schéma en groupes de Raynaud, la donnée de la famille $(\deg_\sigma(G))_{\sigma\in\Gamma_0}$ détermine la classe d'isomorphisme de $G|_{\bar{\mathcal{O}}_K}$ où $\bar{\mathcal{O}}_K$ désigne l'anneau d'entiers d'une clôture algébrique de $\mathcal{O}_K[1/p]$.

Soit $\mathcal{G} \to \mathrm{Spec}\ k$ un BTHB extension de $\mathcal{H}^D$ par $\mathcal{H}$ avec $\mathcal{H}$ un groupe de Lubin-Tate. Soit $H \subset \mathcal{G}[\varpi]$ un sous-groupe de Raynaud de $\mathcal{G}$ tué par le Frobenius. Notons $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/H$ l'isogénie canonique. Soit $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi} \to \mathrm{Spf}\, W(k)$ l'espace de déformation du couple $(\mathcal{G}, \psi)$ et

$$\mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi}$$

sa fibre générique rigide dans le sens de la géométrie de Berkovich. Notons

$$\tilde{H} \longrightarrow \mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi}$$

le sous-groupe de Raynaud universel, qui est le noyau de l'isogénie universelle. Soit

$$\deg : \mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi} \longrightarrow [0, f]$$

l'application fournie par le degré de $\tilde{H}$. La proposition suivante est le résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 9.4.1. — *Pour tout $d \in]0,1[$, le sous-espace*

$$\mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi}(d) = \{x \in \mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi}, \deg(x) \geq f - d\}$$

est connexe et l'application $deg|_{Def^{rig}_{\mathcal{G},\psi}(d)}$ envoie surjectivement $Def^{rig}_{\mathcal{G},\psi}(d)$ sur $[f-d, f[\cap\mathbb{Q}$.

Preuve. Traitons d'abord le cas où $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^D$. Grâce à l'involution de Weil,

$$Def^{rig}_{\mathcal{G},\psi}$$

s'identifie avec l'espace de déformations de $\psi^D : \mathcal{G}/H \to \mathcal{G}$. Les différents sous-groupes H possibles sont classifiés dans le lemme 9.2.18. D'après les lemmes 9.2.19 et 9.2.20, la proposition résulte alors des propositions 9.4.6 et 9.4.8. Dans le cas où $\mathcal{G}$ est une extension non scindée et vérifie donc la condition de Rapoport, la proposition résulte de la proposition 9.4.10. □

9.4.2. Modèle local sans niveau. — Soit $\mathcal{H}$ un groupe de Lubin-Tate sur k correspondant à un élément $\sigma_0 \in \Sigma$. Posons $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^D$ et notons $i : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ l'immersion canonique du premier facteur. Soit $\mathrm{Def}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Spf}\ W(k)$ l'espace de déformations de $\mathcal{G}$. Nous allons donner une description explicite de cet espace de déformation grâce à la théorie du modèle local. Remarquons que cette description n'est pas utile pour prouver la proposition 9.4.1, mais servira d'exemple pour les calculs plus compliqués effectués dans les paragraphes suivants.

Proposition 9.4.3. — *Le schéma formel* $\mathrm{Def}_{\mathcal{G}}$ *a dimension relative g et il existe un morphisme formellement lisse*

$$\mathrm{Def}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Spf}\ W(k)[[\alpha,\beta,x]]/E^{\sigma_0}(\alpha) + \beta x.$$

Preuve. Soit M un module libre de rang deux sur $\mathcal{O}_L \otimes W(k)$ muni d'une base e_1, e_2 et de l'accouplement alterné non dégénéré standard $M \otimes M \to \mathcal{O}_L \otimes W(k)$. On a $M = \oplus M_\sigma$. Notons e_1^σ et e_2^σ la $\mathcal{O}_\sigma$-base induite sur M_σ. Notons ω_σ le sous-module libre sur $\mathcal{O}_\sigma \otimes_{W(k)} k$ de $M_\sigma \otimes_{W(k)} k$ de base e_1^σ pour tout $\sigma \neq \sigma_0$. Notons ω_{σ_0} le sous-module sur $\mathcal{O}_{\sigma_0} \otimes_{W(k)} k$ de $M_{\sigma_0} \otimes_{W(k)} k$ engendré par $Te_1^{\sigma_0}$ et $T^{e-1}e_2^{\sigma_0}$. Notons $\omega = \oplus_\sigma \omega_\sigma \subset M \otimes_{W(k)} k$. Soit M_{loc} le schéma formel paramétrant les déformations de ω en un facteur direct local isotrope de M qui soit stable sous l'action de $\mathcal{O}_L$. Notons $\mathcal{G}^{univ}$ le BTHB universel sur $\mathrm{Def}_{\mathcal{G}}$ et $E((\mathcal{G}^{univ})^D) = E(\mathcal{G}^{univ})$ son extension vectorielle universelle. Passant aux algèbres de Lie, on obtient une suite exacte

$$0 \to \omega_{\mathcal{G}^{univ}} \to Lie(E(\mathcal{G}^{univ})) \to \omega^\vee_{\mathcal{G}^{univ}} \to 0$$

Fixons un isomorphisme $\alpha : M \otimes \mathscr{O}_{M_{loc}} \simeq Lie(E(\mathcal{G}^{univ}))$, ce qui fournit une application $\mathrm{Def}_{\mathcal{G}} \to M_{loc}$ qui est un isomorphisme d'après la théorie de modèle local. Posons $R_\sigma = W(k)[[x_1^\sigma, ..., x_e^\sigma]]$ si $\sigma \neq \sigma_0$ et $R_{\sigma_0} =$

$W(k)[[\alpha,\beta,x_1,...,x_{e_{i-1}},]]/E^{\sigma_0}(\alpha)+\beta x_1$. On voit alors que $M_{loc}\simeq\hat{\otimes}_\sigma R_\sigma$ et que le sous-module universel est donné par

$$\omega_\sigma^{univ}=\mathcal{O}_\sigma.(e_1^\sigma+x_1^\sigma e_2^\sigma+x_2^\sigma Te_2^\sigma+...x_e^\sigma T^{e-1}e_2^\sigma)$$

si $\sigma\neq\sigma_0$ et

$$\omega_{\sigma_0}^{univ}=\mathcal{O}_{\sigma_0}(-\alpha e_1^\sigma+T.e_1+x_1e_2^{\sigma_0}+x_2Te_2^{\sigma_0}+...+x_{e-1}T^{e-2}e_2^{\sigma_0})$$
$$+\mathcal{O}_{\sigma_0}(\beta e_1^\sigma+y_1e_2^{\sigma_0}+y_2Te_2^{\sigma_0}+...+y_{e-1}T^{e-2}e_2^{\sigma_0}+T^{e-1}e_2^{\sigma_0})$$

Les conditions d'isotropie de $\omega_{\sigma_0}^{univ}$ mènent aux équations suivantes.

$$\begin{aligned}0&=x_1\beta+a_0+\alpha y_1\\ y_1&=x_2\beta+a_1+\alpha y_2\\ &\cdots\\ y_{e-1}&=a_{e-1}+\alpha\end{aligned}$$

Prenons $\alpha,\beta,x_1,x_2,...,x_{e-1}$ comme système de paramètres. On obtient alors une unique relation donnée par

$$\beta(x_1+\alpha x_2+...+\alpha^{e-2}x_{e-1})+E^{\sigma_0}(\alpha)=0\,.$$

Posons enfin $x=x_1+\alpha x_2+...+\alpha^{e-2}x_{e-1}$. □

9.4.4. Modèle local en niveau iwahorique. — Soit $\mathcal{H}$ un groupe de Lubin-Tate sur k correspondant à un élément $\sigma_0\in\Sigma$. Posons $\mathcal{G}=\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}^D$. Dans ce paragraphe, on considère l'isogénie $\psi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}/\mathcal{H}[\varpi]$ et son espace de déformation universel $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}$.

Proposition 9.4.5. — *Le schéma formel* $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}$ *a dimension relative g et est formellement lisse sur*

$$\mathrm{Spf}\,W(k)[[\alpha,\beta,t,x]]/(E^{\sigma_0}(\alpha)-\beta^2tx-\beta t(E^{\sigma_0}(\alpha)-a_0)\alpha^{-1}+\beta\alpha x)\,.$$

Preuve. Soient M' et M deux modules libres de rang deux sur $\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbb{Z}}W(k)$ de base f_1,f_2 et e_1,e_2. Notons $\Psi:M'\to M$ l'application de matrice

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&T\end{pmatrix}$$

Notons $\omega\subset M\otimes_{W(k)}k$ le sous-module défini dans la preuve de la proposition 9.4.3 et $\omega'\subset M'\otimes_{W(k)}k$ le sous-module de M' défini de la même manière, en remplaçant e_1 et e_2 par f_1 et f_2. Soit N_{loc} l'espace de déformations des sous-modules ω' et ω de M' et M en des sous-$\mathcal{O}_L\otimes W(k)$-modules isotropes localement facteurs directs tels que $\Psi(\omega')\subset\omega$. Pour tout $\sigma\neq\sigma_0$, posons $R_\sigma=W(k)[[x_1^\sigma,...,x_e^\sigma]]$. Posons également

$$R_{\sigma_0}=W(k)[[\alpha,\beta,t,x,x_3,...,x_{e-1}]]/(E^{\sigma_0}(\alpha)-\beta^2tx-\beta t(E^{\sigma_0}(\alpha)-a_0)\alpha^{-1}+\beta\alpha x).$$

Nous affirmons que $N_{loc} = \hat{\otimes}_\sigma R_\sigma$. En effet, si $\sigma \neq \sigma_0$,

$$\omega_\sigma^{\prime univ} = \mathcal{O}_\sigma.(e_1^\sigma + x_1^\sigma e_2^\sigma + x_2^\sigma T e_2^\sigma + ... x_e^\sigma T^{e-1} e_2^\sigma)$$

et $\omega_\sigma^{univ} = \Psi(\omega_\sigma^{\prime univ})$. Au contraire,

$$\omega_{\sigma_0}^{univ} = \mathcal{O}_{\sigma_0}(-\alpha e_1^\sigma + T.e_1 + x_1 e_2^{\sigma_0} + x_2 T e_2^{\sigma_0} + ... + x_{e-1} T^{e-2} e_2^{\sigma_0}) + \mathcal{O}_{\sigma_0}(\beta e_1^\sigma + y_1 e_2^{\sigma_0} + y_2 T e_2^{\sigma_0} + ... + y_{e-1} T^{e-2} e_2^{\sigma_0} + T^{e-1} e_2^{\sigma_0})$$

et

$$\omega_{\sigma_0}^{\prime univ} = \mathcal{O}_{\sigma_0}(-\gamma e_1^\sigma + T.e_1 + t_1 e_2^{\sigma_0} + t_2 T e_2^{\sigma_0} + ... + t_{e-1} T^{e-2} e_2^{\sigma_0}) + \mathcal{O}_{\sigma_0}(\delta e_1^\sigma + z_1 e_2^{\sigma_0} + z_2 T e_2^{\sigma_0} + ... + z_{e-1} T^{e-2} e_2^{\sigma_0} + T^{e-1} e_2^{\sigma_0})$$

Les équations données par la condition d'isotropie sont

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & x_1\beta + a_0 + \alpha y_1 \\ y_1 & = & x_2\beta + a_1 + \alpha y_2 \\ & ... & \\ y_{e-1} & = & a_{e-1} + \alpha \quad \text{et} \\ 0 & = & t_1\delta + a_0 + \gamma z_1 \\ z_1 & = & t_2\delta + a_1 + \gamma z_2 \\ & ... & \\ z_{e-1} & = & a_{e-1} + \gamma \end{array}$$

La relation $\Psi(\omega_{\sigma_0}^{\prime univ}) \subset \omega_{\sigma_0}^{univ}$ donne les équations suivantes

$$\begin{array}{rcl} -\gamma & = & -\alpha + t_{e-1}\beta \\ 0 & = & x_1 + t_{e-1} y_1 \\ t_1 & = & x_2 + t_{e-1} y_2 \\ & ... & \\ t_{e-2} & = & x_{e-1} + t_{e-1} y_{e-1} \quad \text{and} \\ -a_0 & = & \gamma y_1 \\ z_1 - a_1 & = & \gamma y_2 \\ z_2 - a_2 & = & \gamma y_3 \\ & ... & \\ z_{e-2} - a_{e-2} & = & \gamma y_{e-2} \end{array}$$

Prenons $\alpha, \beta, t_{e-1}, x_2, ..., x_{e-1}$ comme système de paramètres et posons $t = t_{e-1}$ et $x = x_2 + \alpha x_3 + ... + \alpha^{e-3} x_{e-1}$. On obtient l'unique relation

$$E^{\sigma_0}(\alpha) - \beta^2 t_{e-1} x - \beta t (E^{\sigma_0}(\alpha) - a_0)\alpha^{-1} + \beta\alpha x = 0.$$

$\square$

Notons $\mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi}$ la fibre générique rigide de $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}$, qui est un espace rigide lisse de dimension g. Il exister un sous-groupe de Raynaud universel $H = \mathrm{Ker}\,\psi$ sur $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}$. Le faisceau conormal ω_H se décompose selon l'action de k_L en $\oplus_\sigma \omega_{H,\sigma}$. Chaque $\omega_{H,\sigma}$ est monogène, isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}}/(f_\sigma)$ avec $f_\sigma \in \mathscr{O}_{\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}}$. Notons A la couronne ouverte à une variable dont la coordonnée z vérifie $v(z) \in]0,1[$. La fonction f_σ induit une application

$$F_\sigma : \mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi} \to A\,.$$

Notons $\deg_\sigma : \mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi} \to]0,1[$ la composée de cette application avec la valuation v. Cette fonction $\deg_\sigma$ est indépendante du choix de f_σ.

Proposition 9.4.6. — *On a* $\deg_\sigma = 0$ *si* $\sigma \neq \sigma_0$ *et* $\deg_{\sigma_0} = v(\alpha - t\beta)$. *L'application* $\mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi} \to A$ *induite par* $(\alpha,\beta,t) \mapsto \alpha - t\beta$ *est lisse hors du sous-espace fermé pour la topologie de Zariski d'équation* $\beta = 0$, *surjective et de fibres connexes. L'ouvert de* $\mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi}$ *défini par* $\deg_{\sigma_0} \leq d$ *pour tout* $d \in]0,1[$ *est connexe et s'envoie surjectivement sur la sous-couronne définie par* $v(z) \leq d$ *de* A.

Preuve. D'après la théorie du modèle local, $\omega_{H,\sigma} \simeq \omega^{univ}_\sigma/\Psi(\omega'^{univ}_\sigma)$ ce dont on déduit la première assertion de la proposition. Posons $R = W(k)[[\alpha,\beta,t,x]]/(E^{\sigma_0}(\alpha) - \beta^2 tx - \beta t(E^{\sigma_0}(\alpha) - a_0)\alpha^{-1} + \beta\alpha x)$ et considérons le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spf}\, R & \to & \mathrm{Spf} W(k)[[\alpha,\beta,\gamma,x]]/\big(a_0 + \gamma(\beta x + (E^{\sigma_0}(\alpha) - a_0)\alpha^{-1})\big) \\ (\alpha,\beta,t,x) & \mapsto & (\alpha,\beta,\alpha - \beta t, x) \end{array}$$

qui est un isomorphisme lorsque $\beta \neq 0$. Soit Z la fibre générique rigide de

$$\mathrm{Spf}\, W(k)[[\alpha,\beta,\gamma,x]]/\big(a_0 - \gamma(\beta x + (E^{\sigma_0}(\alpha) - a_0)\alpha^{-1})\big)\,.$$

Notons D le disque ouvert de rayon un et de coordonnée α et $D^\star$ le disque ouvert épointé de rayon un de coordonnée β. Soit A la sous-couronne ouverte de rayon intérieur $|p|$ et de rayon extérieur 1 de coordonnée z. Posons $P(\alpha) = (E^{\sigma_0}(\alpha) - a_0)\alpha^{-1})$. Soit W l'ouvert de $A \times D \times D^\star$ donné par l'inéquation $|\beta| > |P(\alpha) + z|$.. Le morphisme $W \to A \times D$ est une fibration en couronnes ouvertes de rayon intérieur $|P(\alpha) - \lambda|$ et de rayon externe 1. Le morphisme $W \to Z$ qui envoie (z,α,β) sur $(\alpha,\beta,-a_0 z^{-1},(z - P(\alpha))\beta^{-1})$ induit un isomorphisme de W sur l'ouvert de Z où $\beta \neq 0$. Cela démontre la seconde assertion de la proposition. On en déduit le reste car les composantes connexes d'un espace rigide lisse sont inchangées après retrait d'un fermé Zariski de codimension un.
$\square$

9.4.7. Modèle local en niveau iwahorique, bis. — Soit H_0 l'unique sous-groupe de $\mathcal{G}[\varpi]$ tué par V et vérifiant $\omega_{H_0,\sigma_0\circ\phi^{-1}} \neq 0$ et $\omega_{H_0,\sigma_0} \neq 0$. Dans ce paragraphe, nous considérons l'isogénie $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/H_0$.

Au niveau des modules de Dieudonné, on a $D(H_0) = D(\mathcal{G})/D(\mathcal{G}/H_0)$ où $D(\mathcal{G}/H_0)$ est le sous-module de $D(\mathcal{G})$ donné par $D(\mathcal{G}/H_0)_\sigma =< e_1, \varpi e_2 >$ si $\sigma \neq \sigma_0$ et $D(\mathcal{G}/H_0)_{\sigma_0} =< \varpi e_1, e_2 >$. On voit aisément que $\mathcal{G}/H_0 = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'^D$ où $\mathcal{H}'$ est un groupe de Lubin-Tate correspondant à $\sigma_0 \circ \phi^{-1}$. Notons $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}$ l'espace de déformations de $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/H_0$.

Proposition 9.4.8. — *Le schéma formel* $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}$ *a dimension relative g et est formellement lisse sur*

$$\mathrm{Spf}\ W(k)[[W,X,Y,Z]]/(WX-p, YZ-p).$$

Si H^{univ} désigne le noyau de l'isogénie universelle, on a

$$\omega_{H^{univ}_{\sigma_0}} \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}}/X$$

et $\omega_{H^{univ}_{\sigma_0\circ\phi^{-1}}} \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}}/Y$.

Preuve. Soient M' et M deux modules libres de rang deux sur $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} W(k)$ de bases f_1, f_2 et e_1, e_2. Notons $\Psi = \oplus \Psi_\sigma : M' \to M$ l'application linéaire de matrice

$$\Psi_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

si $\sigma \neq \sigma_0$ et par

$$\Psi_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\omega \subset M \otimes_{W(k)} k$ le sous-module défini dans la démonstration de la proposition 9.4.3. Notons $\omega' \subset M' \otimes_{W(k)} k$ le sous-module défini par $\omega_\sigma =< f_1 >$ si $\sigma \neq \sigma_0 \circ \phi^{-1}$ et $\omega_{\sigma_0\circ\phi^{-1}} =< \varpi f_1, \varpi^{e-1} f_2 >$. Soit N_{loc} le schéma formel paramétrant les déformations de ω et de ω' en des sous-$\mathcal{O}_L$-modules isotropes localement facteurs directs tels que $\Psi(\omega') \subset \omega$. Soit $N_{loc,\sigma}$ le schéma formel paramétrant les déformations de ω_σ et de ω'_σ en des sous-$\mathcal{O}_L$-modules isotropes localement facteurs directs tels que $\Psi_\sigma(\omega'_\sigma) \subset \omega_\sigma$. Ainsi $N_{loc} = \prod_\sigma N_{loc,\sigma}$. On vérifie aisément que $N_{loc,\sigma}$ est formellement lisse si $\sigma \neq \sigma_0, \sigma_0 \circ \phi^{-1}$.

Nous affirmons que $N_{loc,\sigma_0} \simeq \mathrm{Spf}\ W(k)[[a_0 + \beta x_0]]$ et que les sous-modules universels sont donnés par

$$\omega'^{univ}_{\sigma_0} =< f_1^{\sigma_0} + x_0 f_2^{\sigma_0} + ... + x_{e-1} T^{e-1} f_2^{\sigma_0} >$$

et

$$\omega^{univ}_{\sigma_0} =$$

$$< Te_1^{\sigma_0} + x_0 e_2^{\sigma_0} + ... + x_{e-1} T^{e-1} e_2^{\sigma_0}, \beta e_1^{\sigma_0} + (a_1 + \beta x_1) e_2^{\sigma_0} + ... + (a_{e-1} + \beta x_{e-1}) T^{e-2} e_2^{\sigma_0} + T^{e-1} e_2^{\sigma_0} >$$

On a $\omega_{L^{univ}_{\sigma_0}} = \omega^{univ}_{\sigma_0}/\omega'^{univ}_{\sigma_0}$. Notons $E_1 = Te_1^{\sigma_0} + x_0 e_2^{\sigma_0} + ... + x_{e-1}T^{e-1}e_2^{\sigma_0}$ et $E_2 = \beta e_1^{\sigma_0} + (a_1 + \beta x_1)e_2^{\sigma_0} + ... + (a_{e-1} + \beta x_{e-1})T^{e-1}e_2^{\sigma_0}$. De la relation $-a_0E_1 = x_0TE_2$ on obtient la relation

$$T^{e-1}E_1 + ... + a_2TE_1 + a_1E_1 = x_0E_2$$

qui est minimale parmi celles exprimant E_2 sur le sous-module engendré par E_1. On en déduit que $\omega_{H^{univ}_{\sigma_0}} \simeq E_2/x_0E_2$. Le calcul est dual pour $N_{loc,\sigma_0\circ\phi^{-1}}$ et nous le laissons au soin du lecteur. □

9.4.9. Modèle local dans le cas non scindé. — Supposons à présent que $\mathcal{G}$ soit extension non scindée de $\mathcal{H}^D$ par $\mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est un groupe de Lubin-Tate correspondant à $\sigma_0 \in \Sigma$. Dans ce cas $\mathcal{G}$ vérifie la condition de Rapoport d'après le lemme 9.2.12, ce qui simplifie la théorie des déformations. En particulier $\mathrm{Def}_{\mathcal{G}}$ est formellement lisse de dimension g sur Spf $W(k)$.

Soit $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}[\varpi]$ et $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}$ les espaces de déformations universels de $(\mathcal{G}, \psi)$. Notons comme précédemment

$$\deg_{\sigma_0} : \mathrm{Def}^{rig}_{\mathcal{G},\psi} \to]0, 1[$$

le morphisme donné par le paramètre de Raynaud de Ker ψ.

***Proposition 9.4.10* ([P2], Appendix B).** — *L'espace* $\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi}$ *est de dimension g et il existe un morphisme formellement lisse*

$$\mathrm{Def}_{\mathcal{G},\psi} \to \mathrm{Spf}\, W(k)[[X, Y]]/(XY - p)$$

tel que $\deg_{\sigma_0} = v(X)$.

9.5. Rigidité de certains BTHB non simples. — Soit $\mathcal{O}_K$ un anneau de valuation complet de caractéristique mixte $(0, p)$. Notons K son corps des fractions et $\mathbb{C}$ la complétion d'une clôture algébrique de K. Supposons que tous les plongements $L \to \mathbb{C}$ se factorisent par K et posons $\Gamma = \mathrm{Hom}(L, K)$. Le but de cette section est d'étudier des BTHB $\mathcal{G} \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ qui deviennent non simples comme $\mathcal{O}_L$-module sur Spec $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Nous verrons que dans beaucoup de cas, $\mathcal{G}$ est déjà non simple comme $\mathcal{O}_L$-module sur Spec $\mathcal{O}_K$. Nous nous restreindrons ensuite à la strate de Newton de pentes $(\frac{1}{g}, \frac{g-1}{g})$ et étudierons les différentes sous-objets possibles de $\mathcal{G}$. Nous étudierons le comportement par isogénie de BTHB non simples paramétrés par cette strate et définirons des sous-groupes spéciaux dans la ϖ-torsion de ces groupes de Barsotti-Tate.

9.5.1. Rationalité. — Dans ce paragraphe, nous montrons que dans le cas non ordinaire si un BTHB $\mathcal{G} \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ devient extension de groupes de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, l'extension est déjà définie sur $\mathcal{O}_K$. Rappelons d'abord le résultat classique suivant.

Théorème 9.5.2. — *Notons $p-div-0$ la catégorie des groupes de Barsotti-Tate connexes sur* Spec $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. *Le foncteur*

$$Lie_{\mathbb{C}} : p - div - 0 \to \mathbb{C} - Vect$$

qui associe à un groupe de Barsotti-Tate connexe son algèbre de Lie tensorisée avec $\mathbb{C}$ est fidèle.

Preuve. Soient $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ deux groupes de Barsotti-Tate et $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ un morphisme de différentielle $d\phi : Lie(\mathcal{G}) \to Lie(\mathcal{G}')$. Il suffit de montrer que si dϕ est nul, il en est de même de ϕ. Soit $\mathcal{G}_{rig}$ le groupe de Barsotti-Tate fibre générique rigide de $\mathcal{G}$. Rappelons que $p-div-0$ est équivalente à la catégorie des groupes de Lie formels sur Spec $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Si d est la dimension de $\mathcal{G}$ alors $\mathcal{G}$ est donné par des séries formelles en d variables : l'addition $+ \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}[[T_i, T'_j, 1 \leq i, j \leq d]]$ et l'inverse $i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}[[T_i, 1 \leq i \leq d]]$. Ainsi $\mathcal{G}_{rig}$ est un polydisque ouvert de dimension d et de rayon 1 d'addition donnée par $+$ et d'inverse par i. Il existe un logarithme $log : \mathcal{G}_{rig} \to Lie(\mathcal{G})$ où $Lie(\mathcal{G})$ est isomorphe à $(\mathbb{G}_a)^d_{rig}$. Ce logarithme est un isomorphisme dans un voisinage de l'identité donc si dϕ est nul, il en est de même de ϕ dans un voisinage de l'identité. Mais des séries formelles nulles dans un voisinage de l'identité sont identiquement nulles donc ϕ est nul partout. $\square$

La conséquence suivante de ce théorème nous sera cruciale.

Proposition 9.5.3. — *Soit $\mathcal{G}$ un BTHB connexe sur* Spec $\mathcal{O}_K$ *et $i : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}|_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}$ un sous-groupe de Barsotti-Tate stable par $\mathcal{O}_L$. Alors $\mathcal{H}$ et i sont définis sur* Spec $\mathcal{O}_K$. *De plus, $\mathcal{H}$ est uniquement déterminé par l'action de L sur $Lie(\mathcal{H})_K$.*

Preuve. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) = G_K$. Notons $i^\sigma : \mathcal{H}^\sigma \hookrightarrow G$ le sous-groupe de Barsotti-Tate obtenu par torsion par σ. Il suffit de vérifier que le morphisme $\mathcal{H}^\sigma \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ est nul car cela forcera i^σ à se factoriser par $\mathcal{H}$ et l'application factorisée sera un isomorphisme par égalité des hauteurs. Soit Γ l'ensemble des plongements $L \to \mathbb{C}$ et $\Gamma_{\mathcal{H}}$ le sous-ensemble des plongements intervenant dans la décomposition du module $Lie(H)$, et de même pour $\Gamma_{\mathcal{H}^\sigma}$ et $\Gamma_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}$. Notre hypothèse sur K assure que $\Gamma_{\mathcal{H}^\sigma} = \Gamma_{\mathcal{H}}$. D'un autre côté, $\Gamma_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} = \Gamma \setminus \Gamma_{\mathcal{H}}$. Donc $\Gamma_{\mathcal{H}^\sigma} \cap \Gamma_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} = \emptyset$ et cela impose $Hom_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{H}^\sigma, \mathcal{G}/\mathcal{H}) = 0$ par le théorème précédent. $\square$

9.5.4. Des BTHB non simples de pentes $(\frac{1}{g}, \frac{g-1}{g})$. — Supposons que $g \geq 2$ dans cette section.

Soit $\gamma \in \Gamma = \mathrm{Hom}(L, K)$. Notons $\mathcal{LT}(\gamma)$ le groupe de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_K$ de multiplication par ϖ donnée par le polynôme $\gamma(\varpi)T + T^{p^f}$. L'action de L sur l'algèbre de Lie de $\mathcal{LT}(\gamma)$ se réalise par le caractère γ. Notons K^{nr} la complétion de l'extension non ramifiée maximale de K. Sur $\mathcal{O}_{K^{nr}}$ tout groupe de Lubin-Tate est isomorphe à $\mathcal{LT}(\gamma)|_{\mathcal{O}_{K^{nr}}}$ où γ est le caractère de l'algèbre de Lie.

Définition 9.5.5. — *Soit $\mathcal{G}$ un BTHB. Notons $\Gamma(\mathcal{G}) \subset \Gamma$ le sous-ensemble des γ tel qu'il existe un groupe de Lubin-Tate $\mathcal{H}$ de caractère γ et une immersion fermée $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$.*

D'après la proposition 9.5.3, le sous-groupe $\mathcal{H}$ est uniquement déterminé par γ et nous le noterons $\mathcal{H}(\gamma)$.

Disons dans ce cas que $\mathcal{H}(\gamma)[\varpi] = H_{spe}(\gamma)$ est un sous-groupe spécial de $\mathcal{G}$ de type γ.

Lemme 9.5.6. — *On a* $\deg(H_{spe}(\gamma)) = \frac{1}{e}$.

Preuve. Nous utilisons les résultats de la section 3 de [**Fa**]. D'une part on a $\deg\mathcal{H}(\gamma)[p] = 1$ car $\mathcal{H}(\gamma)$ est de dimension 1. D'autre part, $\mathcal{H}(\gamma)[p]$ est filtré par les noyaux de la multiplication par ϖ^i pour $0 \leq i \leq e$ et chacun des gradués est isomorphe à $H_{spe}(\gamma)$. □

Proposition 9.5.7. — *Supposons que la valuation de K soit discrète et que $g \geq 3$. Soit $\mathcal{G}$ un BTHB. L'ensemble $\Gamma(\mathcal{G})$ est de cardinal au plus un.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux éléments distincts $\gamma, \gamma' \in \Gamma(\mathcal{G})$. On obtient une application $\mathcal{H}(\gamma) \oplus \mathcal{H}(\gamma') \to \mathcal{G}$ qui est un isomorphisme sur les modules de Tate rationnels. Comme la dimension de $\mathcal{H}(\gamma) \oplus \mathcal{H}(\gamma')$ est deux, cela contredit le théorème de comparaison de Tate [**Ta**]. □

Remarque 9.5.8. — Il paraît possible que $\Gamma(\mathcal{G})$ soit de cardinal supérieur à un dans le cas de valuation non discrète lorsque $g \geq 3$.

9.5.9. Comportement par isogénies. — Nous supposons toujours que $g \geq 2$. Étudions le comportement de $\Gamma(\mathcal{G})$ par certaines isogénies.

Lemme 9.5.10. — *Soit $\mathcal{G} \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ un BTHB et $H \subset \mathcal{G}[\varpi]$ un sous-groupe de Raynaud de degré $\leq \frac{1}{e}$. Le sous-ensemble $\Gamma(\mathcal{G}/H) \subset \Gamma(\mathcal{G})$ consiste en les $\gamma \in \Gamma(\mathcal{G})$ tels que $H = H_{spe}(\gamma)$.*

Preuve. Posons $\mathcal{G}' = \mathcal{G}/H$ et $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ l'isogénie canonique. Soit $\gamma \in \Gamma(\mathcal{G}')$ et désignons par $\mathcal{H}'(\gamma) \hookrightarrow \mathcal{G}'$ le sous-groupe de Lubin-Tate correspondant. Remarquons que $\deg G[\varpi]/H \geq f - \frac{1}{e}$. Comme $\deg \mathcal{H}'(\gamma)[\varpi] = \frac{1}{e}$, on a une décomposition $\mathcal{H}'(\gamma)[\varpi] \oplus \mathcal{G}[\varpi]/H = \mathcal{G}'[\varpi]$ en facteurs directs sur $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ et $\deg \mathcal{G}[\varpi]/H = f - \frac{1}{e}$. Cela implique que sous l'isogénie duale $\phi^D : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ de noyau $\mathcal{G}[\varpi]/H$, le sous-groupe $\mathcal{H}'(\gamma)$ s'envoie isomorphiquement sur son image dans $\mathcal{G}$. Cela prouve que $\gamma \in \Gamma(\mathcal{G})$. On obtient alors un digramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(\gamma) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{H}(\gamma)^D \arrow[d] \\
\mathcal{H}'(\gamma) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}' \arrow[r] \arrow[d, "\phi^D"] & (\mathcal{H}'(\gamma))^D \arrow[d] \\
\mathcal{H}(\gamma) \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{H}(\gamma)^D
\end{tikzcd}$$

où $\phi^D \circ \phi = \varpi$. Comme $\phi^D|_{\mathcal{H}'(\gamma)}$ est un isomorphisme sur $\mathcal{H}(\gamma)$, on en déduit que Ker $\phi = \mathcal{H}(\gamma)[\varpi]$. Inversement, pour tout $\gamma \in \Gamma(\mathcal{G})$ tel que $H_{spe}(\gamma) = H$ l'isogénie ϕ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}(\gamma)$ vers son image dans $\mathcal{G}'$ donc $\gamma \in \Gamma(\mathcal{G}')$. □

Lemme 9.5.11. — *Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et H un sous-groupe de $\mathcal{G}[\varpi^n]$ tel que $H(\bar{K}) \simeq \mathcal{O}_L/\varpi^n$ et* deg *$H[\varpi] \leq \frac{1}{e}$. Alors $\Gamma(\mathcal{G}/H)$ est l'ensemble des γ dans $\Gamma(\mathcal{G})$ tels que $H = \mathcal{H}(\gamma)[\varpi^n]$.*

Preuve. Le cas où $n = 1$ résulte du lemme précédent. Traitons le cas général par récurrence sur n. Il existe une suite exacte

$$0 \to H[\varpi^{n-1}] \to H \to H/H[\varpi^{n-1}] \to 0$$

de schémas en groupes sur Spec $\mathcal{O}_K$. Notons que la multiplication par ϖ^{n-1} induit un isomorphisme générique $H/H[\varpi^{n-1}] \to H[\varpi]$ ce qui implique deg $H/H[\varpi^{n-1}] \leq \frac{1}{e}$ et permet de conclure. □

Soit N_0 un entier tel que les groupes $\{\mathcal{LT}(\gamma)[\varpi^{N_0}], \gamma \in \Gamma\}$ soient tous distincts comme schémas en groupes sur $\mathcal{O}_{K^{nr}}$ avec action de $\mathcal{O}_L$.

Remarque 9.5.12. — Il suffit de prendre N_0 tel que les éléments $\{\gamma(\varpi), \gamma \in \Gamma\}$ soient tous distincts modulo $p^{\frac{N_0}{e}}$ dans $\mathcal{O}_{K^{nr}}$.

Lemme 9.5.13. — *Soit H un sous-groupe de $\mathcal{G}[\varpi^{N_0}]$ tel que $H(\bar{K}) \simeq \mathcal{O}_L/\varpi^{N_0}$ et* deg *$H[\varpi] \leq \frac{1}{e}$. Alors $\Gamma(\mathcal{G}/H)$ est vide ou consiste en un unique élément $\gamma \in \Gamma(\mathcal{G})$ avec $H = \mathcal{H}(\gamma)[\varpi^{N_0}]$.*

Preuve. D'après le lemme précédent, $\Gamma(\mathcal{G}/H)$ consiste en tous les $\gamma \in \Gamma(\mathcal{G})$ tels que $H = \mathcal{H}(\gamma)[\varpi^{N_0}]$ et il existe au plus un tel γ d'après notre choix de N_0. □

9.5.14. Groupes de Lubin-Tate tronqués. — Nous aurons besoin d'une variante de la théorie précédente dans le cas tronqué.

Définition 9.5.15. — *Soit S un schéma. Un groupe de Lubin-Tate tronqué d'échelon N est un groupe de Barsotti-Tate $\mathcal{H}_N \to S$ tronqué d'échelon N, de hauteur g et de dimension 1 muni d'une action de $\mathcal{O}_L$ tel que $\mathcal{H}_N$ soit plat comme $\mathcal{O}_L/p^N\mathcal{O}_L$-module.*

À tout groupe de Lubin-Tate tronqué d'échelon N est associé le morphisme $\mathcal{O}_L \to \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S/p^n\mathscr{O}_S)$ donnant l'action de $\mathcal{O}_L$ sur l'algèbre de Lie.

Proposition 9.5.16. — *Soit $\mathcal{O}_K$ un anneau de valuation complet de caractéristique mixte $(0,p)$ et $\mathcal{H}_N \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ un groupe de Lubin-Tate tronqué. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe un groupe de Lubin-Tate $\mathcal{H} \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ tel que $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}[p^N]$,*
2. *Il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que le caractère $\mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$ donnant l'action de $\mathcal{O}_L$ sur l'algèbre de Lie de $\mathcal{H}_N$ soit $\gamma \mod p^N$.*

Preuve. Le premier point implique clairement le second. Si on suppose la seconde condition vérifiée, $\mathcal{H}_N$ est un $\mathcal{O}_L$-module strict dans le sens de [**F**]. Les résultats de cet article montrent qu'il n'y a pas d'obstruction à le relever en un groupe de Barsotti-Tate tronqué dans la catégorie des $\mathcal{O}_L$-modules stricts. □

Le lemme suivant est évident, et le corollaire est une conséquence du résultat précédent.

Lemme 9.5.17. — *Soit $\lambda : \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_K/p^N\mathcal{O}_K$ un morphisme d'anneaux. Il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\lambda = \gamma \mod p^{[\frac{N}{e}]}$. Supposons $n > v(E'(\varpi))$. Tous les caractères $\gamma \in \Gamma$ sont distincts modulo p^n.*

Corollaire 9.5.18. — *Soit $\mathcal{H}_N \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ un groupe de Lubin-Tate tronqué d'échelon N. Le sous-groupe $\mathcal{H}_N[p^{[\frac{N}{e}]}]$ se relève en un groupe de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_K$.*

Soit $\mathcal{H}_N \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ un groupe de Lubin-Tate tronqué. Lorsque $N > ev(E'(\varpi))$ il existe un unique $\gamma \in \Gamma$ tel que le caractère de $\mathcal{O}_L$ sur *Lie* $\mathcal{H}_N$ coïncide avec γ modulo $p^{[\frac{N}{e}]}$. On dit alors que $\mathcal{H}_N$ est de type γ.

Lemme 9.5.19. — *Pour tout entier $c \geq 0$ et tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un entier $N(c) \geq c$ tel que pour tout $N \geq N(c)$, tout morphisme $\mathcal{O}_L$-linéaire $\phi : \mathcal{LT}(\gamma)[p^N]|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}} \to \mathcal{LT}(\gamma)^D[p^N]|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}$ vérifie $\mathcal{LT}(\gamma)[p^c]|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}} \subset \mathrm{Ker}\phi$.*

Preuve. Comme Γ est un ensemble fini, il suffit de prouver l'assertion pour $\gamma \in \Gamma$ fixé. Pour tout entier n, notons

$$I_N = \{\phi : \mathcal{LT}(\gamma)[p^N]|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}} \to \mathcal{LT}(\gamma)^D[p^N]|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}\ \mathcal{O}_L\text{−lin. tq Ker}\phi \subset \mathcal{LT}(\gamma)[p^{c-1}]|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}\}.$$

On obtient une application $I_N \to I_{N-1}$ en restreignant un élément $\phi \in I_N$ à $\mathcal{LT}(\gamma)[p^{N-1}]|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}$. La limite projective $\lim_N I_N$ est vide car sinon l'on pourrait construire une application non nulle $\mathcal{O}_L$-linéaire $\mathcal{LT}(\gamma)|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}} \to \mathcal{LT}(\gamma)^D|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}$, ce qui contredirait le théorème 9.5.2. Cela implique que I_N est vide pour N assez grand, d'où le lemme. □

Proposition 9.5.20. — *Soit $\mathcal{G}$ un BTHB sur $\mathcal{O}_K$ et $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $N \geq e \cdot \inf\{N(c), v(E'(\varpi))\}$ des entiers. Soit $i : \mathcal{H}_N \hookrightarrow \mathcal{G}|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}$ un groupe de Lubin-Tate tronqué de type γ. Le sous-groupe $\mathcal{H}_N[\varpi^c]$ est défini sur $\mathcal{O}_K$ et est uniquement déterminé dans le sens où si $i' : \mathcal{H}'_N \hookrightarrow \mathcal{G}|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}$ est un autre groupe de Lubin-Tate tronqué de type γ, on a $\mathcal{H}'_N[\varpi^c] = \mathcal{H}_N[\varpi^c]$.*

Preuve. Soit $\sigma \in Gal(\bar{K}/K)$. Notons $i^\sigma : \mathcal{H}_N^\sigma \hookrightarrow \mathcal{G}|_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}$ l'inclusion tordue par σ. D'après le lemme précédent, $\mathcal{H}_N^\sigma[p^c]$ est le noyau du morphisme $\mathcal{H}_N^\sigma \to \mathcal{G}[p^N]/\mathcal{H}_N \simeq \mathcal{H}_N^D$ donc $\mathcal{H}_N^\sigma[p^c] = \mathcal{H}_N[p^c]$. La démonstration de la seconde assertion est similaire. □

On dit dans la situation de la proposition que $\mathcal{H}_N[\varpi] = H_{spe}(\gamma)$ est le sous-groupe spécial de type γ. Il est de degré $\frac{1}{e}$. Il nous paraît remarquable que $H_{spe}(\gamma)$ ne soit pas distingué parmi les autres sous-groupes de $\mathcal{G}[\varpi]$ simplement par son degré, mais ne devienne réellement distingué que lorsqu'on considère tout le groupe de Barsotti-Tate. Cela peut s'illustrer de la manière suivante dans le cas où $e = g$ et l'on est donc dans le cas totalement ramifié. Considérons $\mathcal{G} = \mathcal{LT}(\gamma) \oplus \mathcal{LT}(\gamma)^D$ pour $\gamma \in \Gamma$. Il est facile de voir qu'il existe deux classes d'isomorphisme de sous-groupes d'ordre p dans $\mathcal{G}$, classes représentées par $\mathcal{LT}(\gamma)[\varpi]$ et $\mathcal{LT}(\gamma)^D[\varpi]$. Il y a p sous-groupes dans la première classe d'isomorphisme et $\mathcal{LT}(\gamma)^D[\varpi]$ est seul dans la seconde, donc est déjà distingué parmi les sous-groupes de ϖ-torsion. Mais si l'on considère le groupe de Barsotti-Tate total, il existe un unique plongement $\mathcal{LT}(\gamma) \hookrightarrow \mathcal{G}$ et le sous-groupe $\mathcal{LT}(\gamma)[\varpi] = H_{spe}(\gamma)$ devient distingué.

9.5.21. Familles de sous-groupes spéciaux. — Soit $\mathfrak{S}$ un schéma formel topologiquement de type fini de fibre générique rigide S dans le sens de Berkovich. Soit $\mathfrak{G} \to \mathfrak{S}$ un BTHB. Notons $\mathcal{G} \to S$ le groupe de Barsotti-Tate associé sur S.

Proposition 9.5.22. — *Soit $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble des points $x \in S$ tels que $\gamma \in \Gamma(x)$ est un sous-ensemble compact $S_{spe}(\gamma)$ qui est intersection décroissante de sous-domaines spéciaux. Il existe de plus un sous-domaine spécial V contenant $S_{spe}(\gamma)$ tel qu'il existe un sous-groupe spécial universel de type γ sur V.*

Preuve. Pour tout $N > ev(E'(\varpi))$, notons $\mathfrak{GR}_N \to \mathfrak{S}$ la grassmanienne des sous-groupes de $\mathcal{G}$ de rang p^{gN} stables sous $\mathcal{O}_L$. Notons $\tilde{GR}_N \to S$ l'application rigide-analytique associée. Soit GR_N la composante de $\tilde{GR}_N$ où le sous-groupe universel H_N^{univ} est localement libre de rang un sur $\mathcal{O}_L/p^N$. L'application $f_N : GR_N \to S$ est fini étale. Le lieu où H_N^{univ} est un groupe de Barsotti-Tate tronqué (plus précisément le lieu des $x \in S$ d'anneau de valuation $\mathcal{O}_{K(x)}$, où le groupe $H_N^{univ}|_{\mathcal{O}_{K(x)}}$ soit un Barsotti-Tate tronqué), est un sous-domaine spécial. Il est en effet donné par les égalités

$$\deg H_N^{univ}[p^s] = \deg H_N^{univ}[p^r] + \deg H_N^{univ}[p^{s-r}],\ 0 \leq r \leq s \leq N$$

et le degré est localement la valuation d'une fonction analytique sur S.

Le lieu où H_N^{univ} est un groupe de Lubin-Tate tronqué est donné par la condition supplémentaire $\deg H_N^{univ}[p] = 1$. Finalement, le lieu où H_N^{univ} est un groupe de Lubin-Tate est stratifié par le caractère de l'algèbre de Lie et donc par l'ensemble Γ puisque $N > ev(E'(\varpi))$.

Notons V_N le sous-domaine spécial de GR_N où H_N est un groupe de Lubin-Tate tronqué de type γ. Alors $S_{spe}(\gamma) = \cap_N f_N(V_N)$ est bien intersection de sous-domaines spéciaux. De plus, d'après la proposition 9.5.20, le groupe $H_N[\varpi]|_{V_N}$ descend au sous-domaine spécial $f_N(V_N)$ de S pour tout $N \geq eN(1)$. $\square$

La remarque qui suit sera utilisé dans la preuve de la proposition 10.5.12.

Remarque 9.5.23. — Notons $f : Gr \to S$ la grassmanienne des sous-groupes finis stables sous $\mathcal{O}_L$ de $\mathcal{G}[\varpi]$, qui sont localement libres de rang 1 comme $\mathcal{O}_L/\varpi$-modules. Le morphisme f est fini étale et le groupe spécial fournit donc une section s du morphisme f sur V. Il existe un voisinage strict V' de V et une section $s' : V' \to Gr$ étendant s' (c'est là un fait général sur les sections d'un morphisme étale, voir [**PS2**], prop. 2.2.4 par exemple). Par conséquent, le sous-groupe spécial surconverge sur V'.

On peut voir ces sous-groupes spéciaux comme des généralisations du sous-groupe canonique. Une grande différence est que l'analogue du lieu $S_{spe}(\gamma)$ dans la théorie du sous-groupe canonique est le lieu ordinaire, qui est un sous-domaine spécial. La structure de $S_{spe}(\gamma)$ nous paraît assez mystérieuse. Nous ne savons pas s'il admet une structure analytique et c'est pourquoi nous le voyons simplement comme un sous-espace topologique compact. L'utilisation de la théorie de Berkovich paraît indispensable car il n'est pas certain que les points classiques soient denses dans $S_{spe}(\gamma)$. Néanmoins, puisque $S_{spe}(\gamma)$ est intersection de sous-domaines spéciaux sur lesquels le sous-groupe spécial existe, il devrait être possible d'éviter le recours à la géométrie de Berkovich en considérant systématiquement la suite des sous-domaines spéciaux $\{f_N(V_N)\}$ au lieu de $S_{spe}(\gamma)$.

10. Classicité

10.1. Une stratification. — On a posé $p \cdot \mathcal{O}_F = \prod_i \pi_i^{e_i}$ où les π_i sont des idéaux premiers, et $\mathfrak{p} = \prod_i \pi_i$. On a noté f_i le degré résiduel de π_i.

Pour tout $1 \leq i \leq r$, nous dirons qu'un premier π_i est *peu ramifié* si $e_i \leq p-1$ ou $e_i = p$ et $f_i = 1$. Nous dirons qu'il est *très ramifié* dans le cas contraire. Notons que si π_i est très ramifié, $e_i f_i \geq 3$.

Rappelons que $X_0 \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}$ désigne la fibre spéciale de la variété modulaire de Hilbert de niveau premier à p.

La restriction à $\operatorname{Spec} \mathbb{F}$ du schéma abélien universel est $A_0 \to X_0$ et l'on a une décomposition $A_0[p^\infty] = \oplus_{i=1}^r A_0[\pi_i^\infty]$. Notons $X_{0,ord}$ le sous-schéma ouvert de X_0 sur lequel $A[p^\infty]$ est ordinaire.

Pour $1 \leq i \leq r$ et $e_i f_i \geq 2$, notons $X_{0,i}$ le sous-schéma localement fermé de X_0 sur lequel $A[\pi_i^\infty]$ a un polygone de Newton de pentes $(\frac{1}{e_i \cdot f_i}, 1 - \frac{1}{e_i \cdot f_i})$ et $A[\pi_j^\infty]$ est ordinaire pour tout $j \neq i$. Pour $1 \leq i \leq r$ et $e_i f_i = 1$, notons $X_{0,i}$ le sous-schéma localement fermé de X_0 sur lequel $A[\pi_i^\infty]$ a un polygone de Newton de pentes $\frac{1}{2}$ et $A[\pi_j^\infty]$ est ordinaire pour tout $j \neq i$.

Le sous-schéma $Y_0 = X_{0,ord} \cup_i X_{0,i}$ est ouvert dans X_0 d'après le théorème de Grothendieck de spécialisation des groupes de Barsotti-Tate (voir [**De**], p. 91).

Le lieu de Rapoport de X_0, noté X_0^R, est le lieu où le faisceau conormal ω_{A_0} de A_0 est localement libre de rang un sur $\mathscr{O}_{X_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_F$. Le complémentaire de X_0^R dans X_0 est de codimension deux d'après [**DP**].

Pour tout $1 \leq i \leq r$, notons $U_{0,i,NS}$ l'ouvert de $X_{0,i}$ où la condition de Rapoport est vérifiée et le a-nombre vaut 1. Notons $U_{0,i,S}$ le complémentaire de $U_{0,i,NS}$ dans $X_{0,i}$.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Supposons le premier π_i très ramifié. Un point géométrique $x : \operatorname{Spec} k \to X_{0,i}$ se factorise par $U_{0,i,NS}$ si et seulement si $A[\pi_i^\infty]_x$ est extension non scindée stable par $\mathcal{O}_F$ de deux groupes de Barsotti-Tate de pentes $\frac{1}{e_i f_i}$ et $1 - \frac{1}{e_i f_i}$, alors qu'il se factorise par $U_{0,i,S}$ si et seulement si $A[\pi_i^\infty]_x$ est une extension scindée (voir le lemme 9.2.12).

Proposition 10.1.1. — *Le complémentaire de $X_{0,ord} \cup_i U_{0,i,NS}$ dans X_0 est de codimension au moins deux.*

Preuve. On sait que le complémentaire du lieu Rapoport est de codimension deux d'après [**DP**]. On sait également que $\cup_i X_{0,i}$ est de codimension un dans X_0. Il suffit donc de prouver que tout point non ordinaire du lieu de Rapoport est dans l'adhérence Zariski de $\cup_i X_{0,i}$. On sait qu'un tel point est dans l'adhérence de la strate où le a-nombre est un d'après la proposition 9.3.4 et il suffit alors d'appliquer la proposition 9.3.2. $\square$

Notons X_{rig} l'espace rigide associé à X dans le sens de Berkovich et $Y, X_{ord}, U_{i,S}, U_{i,NS}, X_i$ les tubes de $Y_0, X_{0,ord}, U_{0,i,S}, U_{0,i,NS}, X_{0,i}$ dans X_{rig}.

Corollaire 10.1.2. — *On a pour tout $k \in \mathbb{Z}$ l'égalité*

$$\mathrm{H}^0(X_E, \omega^k) = \mathrm{H}^0(Y, \omega^k) = \mathrm{H}^0(]X_{0,ord} \cup_i U_{0,i,NS}[, \omega^k).$$

Preuve. On montre d'abord que $\mathrm{H}^0(X_{rig}, \omega^k) = \mathrm{H}^0(Y, \omega^k) = \mathrm{H}^0(]X_{0,ord} \cup_i U_{0,i,NS}[, \omega^k)$ grâce au lemme 7.1.1 de [**P1**] et au corollaire précédent. Soit $X^{tor} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ une compactification toroïdale de X. D'après le principe de Koecher, on a $\mathrm{H}^0(X^{tor}_{rig}, \omega^k) = \mathrm{H}^0(X_{rig}, \omega^k)$. Par le principe GAGA, on a $\mathrm{H}^0(X^{tor}_{rig}, \omega^k) = \mathrm{H}^0(X_E, \omega^k)$. □

Ainsi, si l'on veut construire une forme modulaire sur X_E, il suffit de la construire sur Y ou sur $]X_{0,ord} \cup_i U_{0,i,NS}[$. Remarquons que Y est stable sous l'action des opérateurs de Hecke puisque les isogénies conservent le polygone de Newton. Pour ces deux raisons, on se restreindra à Y pour prouver la classicité.

10.2. Dynamique des opérateurs de Hecke. —

10.2.1. L'application degré. — Le groupe fini et plat universel sur $X_0(\mathfrak{p})_{rig}$ est $H = \prod_i H[\pi_i]$ où $H[\pi_i]$ est un schéma en groupes de Raynaud pour tout i. Il existe donc une application donnée par les valuations des paramètres de Raynaud (voir [**Ray**], coro. 1.5.2) :

$$DEG : X_0(\mathfrak{p})_{rig} \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} [0,1]^{f_i}$$

Notons DEG_i la projection de DEG sur le i-ème facteur $[0,1]^{f_i}$ et $\deg_i$ la somme des degrés de DEG_i. Notons que $\deg_i$ est simplement le degré de $H[\pi_i]$ au sens de [**Fa**].

10.2.2. Dynamique de $U_\mathfrak{p}$. — Pour tout $1 \leq i \leq r$, définissons $C(\pi_i) \to \operatorname{Spec} E$ comme l'espace de modules paramétrant les quintuplets $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, H) \in X_0(\mathfrak{p})$ et un sous-groupe $L \subset A[\pi_i]$ localement isomorphe à $\mathcal{O}_F/\pi_i$ pour la topologie étale et tel que $H \cap L = \{0\}$. Il existe une projection évidente $p_1 : C(\pi_i) \to X_0(\mathfrak{p})$ obtenue en oubliant le groupe L. Choisissons pour tout $1 \leq k \leq s$ un isomorphisme positif $\pi_i \mathfrak{c}_k \simeq \mathfrak{c}_{l(k)}$ où $l(k)$ dépend de k. Cela permet de définir une seconde projection $p_2 : C(\pi_i) \to X_0(\mathfrak{p})$ en envoyant $(A, i, \mathrm{Iw}, \Phi, H, L)$ sur $(A/L, i', \mathrm{Iw}', \Phi', H')$ où i', Iw' et H' sont les images de i, Iw et H dans A/L et où si Φ est une $\mathfrak{c}_k$-polarisation sur A, alors Φ' est la $\pi_i \mathfrak{c}_k$-polarisation induite sur A/L, vue comme $\mathfrak{c}_{l(k)}$-polarisation grâce à nos choix. Notons U_{π_i} l'opérateur de Hecke associé à cette correspondance (p_1, p_2). Nous considèrerons l'action ensembliste de U_{π_i} sur les points de $X_0(\mathfrak{p})_{rig}$ obtenue en envoyant $x \in X_0(\mathfrak{p})_{rig}$ sur l'ensemble fini $p_2 p_1^{-1}(x) := U_{\pi_i}(x)$. Nous considèrerons également l'action habituelle de U_{π_i} sur les formes modulaires :

si U est un sous-domaine spécial de $X_0(\mathfrak{p})_{rig}$, il existe pour tout $k \in \mathbb{Z}$ un morphisme

$$U_{\pi_i} : \mathrm{H}^0(p_2 p_1^{-1}(U), \omega^k) \to \mathrm{H}^0(U, \omega^k).$$

Remarquons enfin que la correspondance U_{π_i} respecte la stratification de Newton. Si l'on note $Y_0(\mathfrak{p})$ l'image inverse de Y dans $X_0(\mathfrak{p})_{rig}$, la correspondance U_{π_i} agit donc sur $Y_0(\mathfrak{p})$.

On a $U_{\pi_i} U_{\pi_j} = U_{\pi_j} U_{\pi_i}$ à un automorphisme près (qui dépend du choix des identifications $\pi_i \mathfrak{c}_k \simeq \mathfrak{c}_{l(k)}$) pour tout i, j. Notons $U_{\mathfrak{p}} = \prod_i U_{\pi_i}$. Pour tout $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ notons $U_{\pi_i^N}$ l'itération N-ième de U_{π_i}. Le résultat suivant résume quelques propriétés dynamiques de ces opérateurs.

Proposition 10.2.3. — *Soit $x = (A, H) \in Y_0(\pi)$ tel que x soit défini sur une extension valuée complète K de E de clôture algébrique $\bar{K}$. Pour tout $y \in U_{\pi_i}(x)$, on a* $\deg_j(x) = \deg_j(y)$ *pour $j \neq i$ et* $\deg_i(y) \geq \deg_i(x)$. *Supposons qu'il existe $y \in U_{\pi_i^{Ne_i}}(x)$ où $N \geq 3$ tel que* $\deg_i(y) = \deg_i(x)$. *Une des conditions suivantes est alors vérifiée :*

1. *$A[\pi_i^\infty]$ est ordinaire,*
2. *$x \in U_{i,S}$, on a $DEG_i(x) = (0, ..., 0, \frac{1}{e_i}, 0, ..., 0)$ et il existe un groupe de Barsotti-Tate tronqué $\mathcal{H}_N$ d'échelon N, dimension $e_i f_i - 1$, hauteur $e_i f_i$, plat comme $\mathcal{O}_{F_{\pi_i}}/p^N$-module tel que sur* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$,
$$\mathcal{H}_N \hookrightarrow A[\pi_i^\infty] \quad \textit{et} \quad \mathcal{H}_N \oplus H.$$
3. *$x \in U_{i,S}$, on a $DEG_i(x) = (1, ..., 1, 1 - \frac{1}{e_i}, 1, ..., 1)$ et il existe un groupe de Lubin-Tate tronqué $\mathcal{H}_N$ d'échelon N tel que sur* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$,
$$\mathcal{H}_N \hookrightarrow A[\pi_i^\infty] \quad \textit{et} \quad \mathcal{H}_N \oplus H.$$

Preuve. Pour la première partie de la proposition, on renvoie à la proposition 4.2.2 de [**P2**]. Supposons qu'il existe $y \in U_{\pi_i^{Ne_i}}(x)$ où $N \geq 3$ tel que $\deg_i(y) = \deg_i(x)$. D'après la même référence, il existe $\mathcal{H}_N$, un groupe de Barsotti-Tate d'échelon N tel que

$$\mathcal{H}_N \hookrightarrow A[\pi_i^\infty] \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_N \oplus H$$

et il nous suffit de déterminer la dimension de ce groupe. En effet, si $\mathcal{H}_N$ est de dimension 1, nécéssairement, $DEG(\mathcal{H}_N[\varpi]) = (0, ..., 0, \frac{1}{e_i}, 0, ..., 0)$, si il est de dimension $e_i f_i - 1$, alors, $DEG(\mathcal{H}_N[\varpi]) = (1, ..., 1, 1 - \frac{1}{e_i}, 1, ..., 1)$. En outre, la polarisation entraîne $\mathcal{H}_N[\varpi]^D \simeq H$. Supposons pour commencer $e_i f_i \geq 3$ On peut aussi supposer que nous ne sommes pas dans le cas ordinaire. D'après le lemme 9.2.14 on sait alors que la fibre spéciale de $\mathcal{H}_N[\pi_i^{e_i N - 2}]$ coincide avec la $\pi_i^{e_i N - 2}$-torsion d'un groupe de Lubin-Tate ou de son dual. Ceci détermine la dimension de $\mathcal{H}_N$. Si $e_i = f_i = 1$ on est forcément dans le cas ordinaire.

Si $e_i = 2, f_i = 1$ ou $e_i = 1, f_i = 2$, et que nous ne sommes pas dans le cas ordinaire, alors forcément $\mathcal{H}_N$ est de hauteur 2 et de dimension 1. Enfin, il est clair que dans les cas 2. et 3., le a-nombre vaut au moins 2.

□

On obtient la proposition suivante en passant à la limite sur N.

Proposition 10.2.4. — *Supposons que pour tout $N \geq 1$, il existe $y \in U_{\pi_i^N}(x)$ tel que $\deg_i(y) = \deg_i(x)$. Une des conditions suivantes est alors vérifiée :*

1. *$A[\pi_i^\infty]$ est ordinaire,*
2. *$x \in U_{i,S}$, on a $DEG_i(x) = (0, ..., 0, \frac{1}{e_i}, 0, ..., 0)$ et il existe un groupe de Barsotti-Tate $\mathcal{H}$ de dimension $e_i f_i - 1$, hauteur $e_i f_i$, plat comme $\mathcal{O}_{F_{\pi_i}}$-module, tel que sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$,*
$$\mathcal{H} \hookrightarrow A[\pi_i^\infty] \quad et \quad \mathcal{H} \oplus H.$$
3. *$x \in U_{i,S}$, on a $DEG_i(x) = (1, ..., 1, 1 - \frac{1}{e_i}, 1, ..., 1)$ et il existe un groupe de Lubin-Tate $\mathcal{H}$ tel que sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$,*
$$\mathcal{H} \hookrightarrow A[\pi_i^\infty] \quad et \quad \mathcal{H} \oplus H.$$

De plus, si $x = (A, H)$ est défini sur $\mathrm{Spec}(K)$, dans les situations 2 et 3, l'extension est également définie sur $\mathrm{Spec}(K)$.

Preuve. Le dernier point résulte de la proposition 9.5.3. □

Soit $1 \leq i \leq r$ et $\delta \in [0, f_i]$. Posons $Y_0(\mathfrak{p})_{i,\delta} = \{x \in Y_0(\mathfrak{p}), \deg_i \geq \delta\}$.

Proposition 10.2.5. — *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Soit $f_i - \frac{1}{e_i} < \varepsilon \leq \delta < f_i$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_{\pi_i}^N(Y_0(\mathfrak{p})_{i,\varepsilon}) \subset Y_0(\mathfrak{p})_{i,\delta}$.*
2. *Supposons que π_i est très ramifié. Soit $\frac{1}{e_i} < \delta$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_{\pi_i}^N(Y_0(\mathfrak{p})_{i,\delta}) \subset Y_0(\mathfrak{p})_{i,f_i - \frac{1}{e_i}}$.*

Preuve. Le premier point est classique (voir [**P1**], prop. 3.9). Prouvons le second. Soit $X_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i}) \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}$ l'espace de modules qui paramètre les familles $(A, i, \mathrm{Iw}, \phi, H) \in X_0(\mathfrak{p})$ et un sous-groupe L de A qui est stable sous $\mathcal{O}_F$ de rang $\sharp\mathcal{O}_F/\pi_i^{3e_i}$. Notons $X_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})_0 \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}$ sa fibre spéciale et $Y_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})_0 \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}$ l'ouvert où $A \in Y_0$.

Soit $S \subset Y_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})_0$ le sous-schéma fermé réduit dont les points géométriques correspondent à $(A, i, \mathrm{Iw}, \phi, H, L)_{/k}$ avec A dans $U_{i,0,S}$ et $L[\pi_i^{e_i}] = \mathcal{H}[\pi_i^{e_i}]$ si $\mathcal{H} \hookrightarrow A[\pi_i^\infty]$ désigne le sous-Lubin-Tate de $A[\pi_i^\infty]$. Vérifions d'abord que S est bien un sous-schéma fermé.

Notons $GR \to U_{0,i,S}$ la grassmanienne qui paramétrise les sous-groupes finis et plats $G \subset A[\pi_i^{e_i}]$ de rang $\sharp\mathcal{O}_F/\pi_i^{e_i}$, stables sous l'action de $\mathcal{O}_F$. Notons G^{univ} le sous-groupe universel. Nous devons montrer que l'ensemble X

des $x \in GR$ tels que $G^{univ}|_{\bar{k}(x)} = \mathcal{H}_{\bar{x}}[\pi_i^{e_i}]$ est fermé, où $\mathcal{H}_{\bar{x}} \hookrightarrow A[\pi_i^{\infty}]|_{\bar{k}(x)}$ est l'unique sous-Lubin-Tate de $A[\pi_i^{\infty}]|_{\bar{k}(x)}$. D'après la proposition 9.2.16, il existe un morphisme fini surjectif $h : T \to U_{0,i,S}$ et un schéma en groupes fini et plat $\mathcal{H}[p] \hookrightarrow A[\pi_i^{e_i}]|_T$ qui interpole les différentes $\mathcal{H}_{\bar{x}}[p]$ pour $x \in T$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & GR \arrow[d] \\ & U_{0,i,S} \end{tikzcd}$$

où le morphisme f est donné par le sous-groupe $\mathcal{H}[p]$. L'image de T dans GR est fermée puisque h est fini, et coïncide avec X.

Notons $Y_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})$ le tube de $Y_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})_0$ dans l'espace rigide associé à $X_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})$. Soit $\tilde{Y}_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})$ l'union des composantes connexes de $Y_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})$ où

— $L \cap H = \{0\}$,

— L est localement libre comme $\mathcal{O}_F/\pi_i^{3e_i}$-module.

Ainsi $\tilde{Y}_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})$ est l'espace de modules donnant naissance à l'opérateur de Hecke $U_{\pi_i^{3e_i}}$ sur $Y_0(\mathfrak{p})$.

Soit T' le sous-espace rigide compact de $\tilde{Y}_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})$ intersection du complémentaire du tube de S et du lieu où $\deg_i H \in [\delta, f_i - \frac{1}{e_i}]$. Il existe une application $Y_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i}) \to Y_0(\mathfrak{p})$ définie par $(A, H, L) \mapsto (A/L, A[\pi]/L)$. Nous affirmons que sur T', on a $\deg_i A[\pi]/L > \deg_i H$. Dans le cas contraire, L serait un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon deux et (A, H, L) se spécialiserait sur S d'après la proposition 10.2.3 et le lemme 9.2.14. Par compacité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\deg_i A[\pi]/L \geq \deg_i H + \varepsilon$ uniformément sur T'. D'un autre côté, soit $(A, H, L) \in \tilde{Y}_0(\mathfrak{p}, \pi_i^{3e_i})$ dans le tube de S. Comme $L[\pi_i^{e_i}]$ se spécialise sur un Barsotti-Tate tronqué d'échelon un, on sait d'après un résultat de Fargues ([**PS1**], prop. 4.3.2.5) que $L[\pi_i^{e_i}]$ est déjà un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un. Comme $L[\pi_i^{e_i}]$ est de dimension un, cela implique que $L[\pi_i]$ a degré $\frac{1}{e_i}$. Mais alors $\deg_i A[\pi]/L[\pi_i] = f_i - \frac{1}{e_i}$ ce qui conclut la preuve de la proposition puisque $\deg_i A[\pi]/L \geq \deg_i A[\pi]/L[\pi_i]$. □

10.3. Première étape du prolongement. — Soit G une forme surconvergente vérifiant les hypothèses du théorème 8.2. Il existe donc un polynôme $P = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_0$ de terme constant non nul tel que $P(U_\mathfrak{p})(G) = 0$.

Proposition 10.3.1. — *Pour tout $\epsilon > 0$, la forme G peut être prolongée sur le lieu $\{x \in Y_0(\mathfrak{p}), \forall i \ \deg_i(x) \geq f_i - \frac{1}{e_i} + \epsilon\}$.*

Preuve. On prolonge analytiquement G grâce à son équation fonctionnelle $G = -b_0^{-1} \sum_{k=1}^n b_k(U_\mathfrak{p})^k G$ et aux résultats de la section 10.2.2 $\square$

Pour tout $1 \leq i \leq r$, notons $Y_0(\mathfrak{p}, i)$ l'image inverse de $X_{ord} \cup X_i$ dans $Y_0(\mathfrak{p})$. Ainsi, $Y_0(\mathfrak{p}) = \cup_i Y_0(\mathfrak{p}, i)$.

Lemme 10.3.2. — *Le recouvrement $Y_0(\mathfrak{p}) = \cup_i Y_0(\mathfrak{p}, i)$ est admissible.*

Preuve. Remarquons que $X_{0,ord} \cup X_{0,i}$ est ouvert dans Y_0 et que $\cup_i(X_{0,ord} \cup X_{0,i})$ est un recouvrement ouvert de Y_0. Son tube est donc un recouvrement admissible de Y et son image inverse dans $Y_0(\mathfrak{p})$ est admissible. $\square$

Pour tout $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, notons alors $Y_0(\mathfrak{p}, i)_\eta = \{x \in Y_0(\mathfrak{p}, i), \deg_i(x) \geq \eta\}$. Par définition

$$\{x \in Y_0(\mathfrak{p}), \forall i \ \deg_i(x) \geq f_i - \frac{1}{e_i} + \epsilon\} = \cup_i Y_0(\mathfrak{p}, i)_{f_i - \frac{1}{e_i} + \epsilon}$$

et le recouvrement est admissible.

Si π_i est peu ramifié, le domaine de prolongement sur $Y_0(\mathfrak{p}, i)$ est suffisamment gros pour qu'on puisse terminer l'argument de classicité (voir [**P2**]). Si π_i est très ramifié, il nous faut en revanche travailler un peu plus.

10.4. Le mauvais lieu. — Soit π_i un premier très ramifié. Notons $\Gamma_i = \mathrm{Hom}(F_{\pi_i}, K)$. Pour tout point $x \in X_{ord} \cup X_i$ correspondant à un schéma abélien A sur un anneau de valuation $\mathcal{O}_K$, notons $\Gamma(x)$ le sous-ensemble de Γ_i formé des γ tel qu'il existe un sous-groupe de Lubin-Tate $\mathcal{H}(\gamma) \hookrightarrow A[\pi^\infty]$ de caractère γ. Ce groupe $\mathcal{H}(\gamma)$ est uniquement déterminé par γ d'après la proposition 9.5.3 .

Nous appelons $\mathcal{H}(\gamma)[\pi_i]$ un sous-groupe spécial de $A[\pi_i]$, ou plus précisément le sous-groupe spécial de type γ, et nous le noterons $H_{spe}(\gamma)$.

Comme nous l'avons vu dans la section 9.5.14, on peut définir les sous-groupes spéciaux si l'on suppose juste que $A[\pi_i^\infty]$ contient un sous-groupe de Lubin-Tate tronqué d'échelon N assez grand. Il existe plus précisément une constante N_0 ne dépendant que de F_{π_i} telle que si $x \in X_{ord} \cup X_i$ correspond à un schéma abélien A sur un anneau de valuation $\mathcal{O}_K$ et s'il existe un groupe de Lubin-Tate tronqué $\mathcal{H}_N \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{\bar{K}}$ d'échelon $N \geq N_0$ et une immersion fermée $\mathcal{H}_N \hookrightarrow A|_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}$, alors $\mathcal{H}_N[\varpi]$ est un sous-groupe de A défini sur $\mathcal{O}_K$, toujours appelé sous-groupe spécial.

D'après la proposition 9.5.22, on sait que l'ensemble des $x \in X_{ord} \cup X_i$ tels que $\gamma \in \Gamma(x)$ forme un sous-ensemble compact Y_γ intersection dénombrable décroissante de sous-domaines spéciaux. Il existe de plus un sous-domaine spécial contenant Y_γ et une famille de sous-groupes spéciaux $H_{spe}(\gamma)$ sur ce sous-domaine spécial.

Soit $Z_N(\mathfrak{p}, i)$ le sous-domaine spécial de $Y_0(\mathfrak{p}, i)$ consistant en les points (A, H) vérifiant la situation 3 de la proposition 10.2.3 et tels que $H[\pi_j]$ soit multiplicatif pour tout $j \neq i$. Notons $Z_\infty(\mathfrak{p}, i) = \cap_N Z_N(\mathfrak{p}, i)$ que l'on voit comme sous-espace topologique de l'espace de Berkovich.

La première projection $Y_0(\mathfrak{p}, i) \to X_{ord} \cup X_i$ envoie $Z_\infty(\mathfrak{p}, i)$ sur $\cup_{\gamma \in \Gamma_i} Y_\gamma$.

On peut commencer par raffiner un peu la proposition 10.3.1.

Proposition 10.4.1. — *Pour tout $N \geq 0$, la forme G peut être prolongée sur le lieu $Y_0(\mathfrak{p}, i)_{f_i - \frac{1}{e_i}} \setminus Z_N(\mathfrak{p}, i)$.*

Preuve. Cela résulte à nouveau de la section 10.2.2 □

10.5. Prolongement sur $Z_\infty(\mathfrak{p}, i)$. — La proposition suivante est cruciale et sa démonstration fait l'objet de cette section.

Proposition 10.5.1. — *La forme G s'étend sur le lieu $Y_0(\mathfrak{p}, i)_{f_i - \frac{1}{e_i}}$.*

Fixons d'abord quelques points de terminologie. Soit S l'espace analytique de Berkovich associé à un espace rigide quasi-compact dans le sens de Tate. Si $T \hookrightarrow S$ est un sous-domaine spécial (ouvert quasi-compact dans la terminologie de Tate), on dit qu'un sous-domaine spécial U est un voisinage strict de T si U contient un voisinage de tout point $x \in T$. Dans la terminologie de Tate, cela signifie que U contient T et que le recouvrement $\{U, S \setminus T\}$ de S est admissible. Soit $T = \cap_N T_N$ un sous-ensemble compact de S intersection dénombrable décroissante de sous-domaines spéciaux $\{T_N\}_N$ de S. Une fonction sur $S \setminus T$ sera par convention une suite de fonctions sur $S \setminus T_N$ pour tout N, compatibles aux restrictions induites par les inclusions $S \setminus T_N \hookrightarrow S \setminus T_{N'}$ pour $N' \geq N$. Un voisinage strict de T est par définition un sous-domaine spécial U qui contient un voisinage de tout point de T. Notons que U sera également un voisinage strict de T_N pour N assez grand.

Si S est un espace analytique associé à un espace rigide de Tate, on dit que S est connexe si il n'y pas de fonction idempotente non-triviale sur S ([**Be**], def. 0.1.12). En fait, S est connexe si et seulement si l'espace topologique de Berkovich sous-jacent est connexe ([**Bk**], thm. 3.2.1). Par conséquent, les composantes connexes au sens topologique sont aussi les composantes connexes au sens analytique.

Si S est un espace topologique, on note $\Pi_0(S)$ l'ensemble de ses composantes connexes.

Lemme 10.5.2. — *Soit S un espace analytique associé à un espace rigide quasi-compact de Tate. Soit $p_1, p_2 : R \rightrightarrows S$ une correspondance finie étale.*

1. *Pour tout sous-domaine spécial $T \subset S$, $p_2 p_1^{-1}(T)$ est un sous-domaine spécial.*

2. Si $T' \subset T \subset S$ sont des sous-domaines spéciaux et $\Pi_0(T') \to \Pi_0(T)$ est surjective, alors $\Pi_0\big(p_2p_1^{-1}(T')\big) \to \Pi_0\big(p_2p_1^{-1}(T)\big)$ est surjective.

Preuve. Le premier point résulte de [**Bo**], coro. 2, p. 182. Vérifions le second point. Commençons par voir que $\Pi_0\big(p_1^{-1}(T')\big) \to \Pi_0\big(p_1^{-1}(T)\big)$ est surjectif. Soit C une composante connexe de $p_1^{-1}(T)$. Le morphisme $p_1 : C \to T$ est fini étale, donc son image est une composante connexe de T qui, par hypothèse, intersecte non trivialement T'. Donc $C \cap p_1^{-1}(T') \neq \varnothing$. Soit $C_1, ..., C_m$ les composantes connexes de $p_1^{-1}(T)$. Alors $p_2p_1^{-1}(T) = \cup_i p_2(C_i)$ est un recouvrement admissible par des sous-domaines spéciaux connexes et pour tout i, $p_2(C_i) \cap p_2p_1^{-1}(T') \neq \varnothing$. □

Choisissons un entier n_0 tel que tous les plongements $\mathcal{O}_{F_{\pi_i}} \hookrightarrow \mathcal{O}_K$ sont distincts modulo p^{n_0}. Posons $\Delta_0(\mathfrak{p}, i) = U_{\mathfrak{p}}^{e_in_0}(Y_0(\mathfrak{p}, i)_{f_i - \frac{1}{e_i}})$, $\Lambda_0(\mathfrak{p}, i) = U_{\mathfrak{p}}^{e_in_0}(Z_\infty(\mathfrak{p}, i)) \cap Z_\infty(\mathfrak{p}, i) = \Delta_0(\mathfrak{p}, i) \cap Z_\infty(\mathfrak{p}, i)$, la dernière égalité résultant du lemme 9.5.13. Notons $\Delta_i = p_2(\Delta_0(\mathfrak{p}, i))$, $\Lambda_i = p_2(\Lambda_0(\mathfrak{p}, \mathfrak{i}))$.

Corollaire 10.5.3. — *Les espaces $\Delta_0(\mathfrak{p}, i)$ et Δ_i sont des sous-domaines spéciaux qui contiennent respectivement $X_{ord-mult}$ et X_{ord}. Les sous-espaces $\Lambda_0(\mathfrak{p}, i) \subset \Delta_0(\mathfrak{p}, i)$ et $\Lambda_i \subset \Delta_i$ sont des compacts, intersection dénombrable décroissante des sous-domaines spéciaux. De plus, les application $\Pi_0(X_{ord-mult}) \to \Pi_0(\Delta_0(\mathfrak{p}, i))$ et $\Pi_0(X_{ord}) \to \Pi_0(\Delta_i)$ sont surjectives.*

Preuve. La première partie du lemme est une application du 1 du lemme 10.5.2. Toutes les composantes connexes de $Y_0(\mathfrak{p}, i)_{f_i - \frac{1}{e_i}}$ rencontrent le lieu ordinaire multiplicatif $X_{ord-mult}$ de $Y_0(\mathfrak{p}, i)$ par la proposition 9.4.1. On peut appliquer le 2 du lemme 10.5.2. □

Lemme 10.5.4. — *Si G s'étend sur $\Delta_0(\mathfrak{p}, i)$, elle s'étend également sur $Y_0(\mathfrak{p}, i)_{f_i - \frac{1}{e_i}}$.*

Preuve. Supposons que G s'étende sur $\Delta_0(\mathfrak{p}, i)$. Nous affirmons que $P(U_{\mathfrak{p}})(G) = 0$ sur $\Delta_0(\mathfrak{p})$. D'après le lemme précédent, toutes les composantes connexes de $\Delta_0(\mathfrak{p}, i)$ rencontrent le lieu ordinaire multiplicatif de $Y_0(\mathfrak{p}, i)$. Puisque la relation $P(U_{\mathfrak{p}})(G) = 0$ est vérifiée sur le lieu ordinaire multiplicatif, elle l'est donc partout sur $\Delta_0(\mathfrak{p}, i)$. Ainsi, G s'étend, par la méthode de prolongemenent de la proposition 10.3.1, de $\Delta_0(\mathfrak{p}, i)$ à $Y_0(\mathfrak{p}, i)_{f_i - \frac{1}{e_i}}$. □

Lemme 10.5.5. — *Soit $x \in \Delta_0(\mathfrak{p}, i)$. Alors $\Gamma(x)$ est de cardinal au plus* 1.

Preuve. Cela résulte du lemme 9.5.13 et de notre choix de n_0. □

Remarque 10.5.6. — Le lemme précédent est la raison pour laquelle nous avons remplacé $Y_0(\mathfrak{p},i)_{f_i-\frac{1}{e_i}}$ par $\Delta_0(\mathfrak{p},i)$. Cela simplifie la géométrie du problème.

Considérons le diagramme de descente par p_2

$$\Delta_0(\mathfrak{p},i)\times_{\Delta_i}\Delta_0(\mathfrak{p},i)\overset{q_1,q_2}{\rightrightarrows}\Delta_0(\mathfrak{p},i)\overset{p_2}{\to}\Delta_i\,.$$

Décrivons la stratégie pour étendre G à $\Delta_0(\mathfrak{p},i)$. Pour l'instant, G est définie sur $\Delta_0(\mathfrak{p},i)\setminus\Lambda_0(\mathfrak{p},i)$ et nous allons prouver qu'elle descend à $p_2(\Delta_0(\mathfrak{p},i)\setminus\Lambda_0(\mathfrak{p},i))$. Nous montrerons que $p_2(\Delta_0(\mathfrak{p},i)\setminus\Lambda_0(\mathfrak{p},i))=\Delta_i$. Nous obtiendrons alors par image inverse un prolongement de G sur $\Delta_0(\mathfrak{p},i)$.

Décrivons plus précisément le diagramme de descente précédent. Il est commode d'utiliser l'involution de Weil $w: Y_0(\mathfrak{p},i)\to Y_0(\mathfrak{p},i)$ induite par $(A,H)\mapsto(A/H,A[\mathfrak{p}]/H)$.

Soit $(A,H)\in Y_0(\mathfrak{p},i)$ et $(A/L,A[\mathfrak{p}]/L)$ un point de $\Delta_0(\mathfrak{p},i)$, où L est un sous-module de $A[\mathfrak{p}^{e_in_0}]$ localement libre de rang un sur $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}^{e_in_0}$ et $H\cap L=\{0\}$. On a $p_2(A/L,A[\mathfrak{p}]/L)=A/L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}]$.

La fibre de $\Delta_0(\mathfrak{p},i)$ en $A/L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}]$ est en bijection avec les sous-modules L' de $A[\mathfrak{p}^{e_in_0}]$ localement libres de rang un sur $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}^{e_in_0}$ tels que $L'[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}]=L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}]$.

Ces sous-groupes sont en bijection avec les sous-groupes L'' de $(A/L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}])[\mathfrak{p}]$ qui sont localement libres sur $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$ tels que $L''[\pi_i]\neq A[\pi_i]/L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}]$. Nous dirons dans ce cas que $A[\pi_i]/L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}]$ est le sous-groupe canonique de $(A/L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}])[\pi_i]$ et le noterons $H_{can,i}$. Cette définition est motivée par le fait que $\deg H_{can,i}\geq f_i-\frac{1}{e_i}$ alors que le degré de tout supplémentaire de $H_{can,i}$ dans $(A/L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}])[\pi_i]$ est inférieur à $\frac{1}{e_i}$.

Remarquons de plus que d'après le lemme 9.5.13 et notre choix de n_0, l'ensemble $\Gamma(A/L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}])$ est vide ou réduit à un unique élément $\gamma\in\Gamma_i$. Dans ce cas, $L[\pi_i^{e_in_0-1}]=\mathcal{H}(\gamma)[\pi_i^{e_in_0-1}]$ où $\mathcal{H}(\gamma)$ est le sous-groupe de Lubin-Tate de A de caractère γ. Un élément $(A/L',A[\mathfrak{p}]/L')$ dans la fibre de $A/L[\mathfrak{p}^{e_in_0-1}]$ est dans $\Lambda_0(\mathfrak{p})$ si et seulement si $L'[\pi_i^{e_in_0}]=\mathcal{H}(\gamma)[\pi_i^{en_0}]$.

Résumons. Soit $A\to\Delta_i$ le schéma abélien universel. L'image $w\Delta_0(\mathfrak{p},i)$ de $\Delta_0(\mathfrak{p},i)$ par l'involution de Weil est la grassmanienne des sous-groupes L de $A[\mathfrak{p}]$ qui sont localement libres de rang un sur $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$ tels que $L[\pi_j]\neq H_{can,j}$ pour tout $1\leq j\leq r$ (bien sûr, si $j\neq i$, $H_{can,j}$ désigne le sous-groupe canonique usuel). Le morphisme $p_2:\Delta_0(\mathfrak{p},i)\to\Delta_i$ est en particulier fini étale de degré $\prod_{j=1}^r p^{f_j}$.

Pour tout $x\in\Delta_i$, l'ensemble $\Gamma(x)$ est soit vide si $x\notin\Lambda_i$, soit de cardinal un si $x\in\Lambda_i$.

Si $x\in\Lambda_i$ correspond à un schéma abélien A et si $\Gamma(x)=\{\gamma\}$, la fibre de p_2 en x dans $w\Lambda_0(\mathfrak{p},i)$ consiste en les sous-groupes $L\subset A[\mathfrak{p}]$ tels que $L[\pi_j]\neq$

$H_{can,j}$ pour tout j et $L[\pi_i] = H_{spe}(\gamma)$. Comme il n'y a pas d'ambiguïté, on notera H_{spe} au lieu de $H_{spe}(\gamma)$. En particulier, le morphisme $\Lambda_0(\mathfrak{p}, i) \to \Lambda_i$ est fini étale de degré $\prod_{j \neq i} p^{f_j}$.

En comparant les degrés des morphismes $\Delta_0(\mathfrak{p}, i) \to \Delta_i$ et $\Lambda_0(\mathfrak{p}, i) \to \Lambda_i$, on trouve le lemme suivant.

Lemme 10.5.7. — *On a l'égalité*

$$p_2(\Delta_0(\mathfrak{p}, i) \setminus \Lambda_0(\mathfrak{p}, i)) = \Delta_i.$$

Remarque 10.5.8. — Cette égalité est démontré pour les points de Berkovich et pas seulement pour les points rigides de Tate. Comme on peut écrire $\Lambda_0(\mathfrak{p}, i)$ comme intersection décroissante de sous-domaines spéciaux $\{\Lambda_0(\mathfrak{p}, i)_N\}$, on en déduit grâce à la compacité de Δ_i que pour N assez grand on a encore $p_2(\Delta_0(\mathfrak{p}, i) \setminus \Lambda_0(\mathfrak{p}, i)_N) = \Delta_i$.

Nous allons a présent énumérer les composantes connexes de Λ_i selon leur "proximité" au lieu ordinaire.

Lemme 10.5.9. — *Il existe une unique partition finie $\Lambda_i = \coprod_{k=1}^{m} \Lambda^k$ où Λ^k est une union de composantes connexes de Λ_i et la propriété suivante est vérifiée : Une composante connexe $C \subset \cup_{k'=k}^{m} \Lambda^{k'}$ appartient à Λ^k si et seulement si tout voisinage strict V de C rencontre une composantes connexes de $\Delta_i \setminus (\cup_{k'=k}^{m} \Lambda^{k'})$ qui contient un point ordinaire.*

Preuve. La construction de la partition se fait par récurrence sur l'entier k. Supposons $\Lambda^1, \cdots, \Lambda^{k-1}$ construits. La propriété demandée détermine uniquement Λ^k et il suffit de vérifier que Λ^k n'est pas vide car Λ_i n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Supposons donc que Λ^k est vide. Posons $T = \Lambda_i \setminus (\cup_{k'=1}^{k-1} \Lambda^{k'})$ pour alléger les notations. Il existe alors, pour toute composante connexe $C \subset T$, un voisinage strict V_C de C tel que V_C ne rencontre aucune composantes connexes de $\Delta_i \setminus T$ qui rencontre le lieu ordinaire. Soit $V = \cup V_C$. On a un recouvrement $\Delta_i = (\Delta_i \setminus T) \cup V$. Posons aussi $\Delta_i \setminus T = (\Delta_i \setminus T)^{or} \cup (\Delta_i \setminus T)^{nor}$ où $(\Delta_i \setminus T)^{or}$ est la réunion de composantes connexes qui rencontrent le lieu ordinaire et $(\Delta_i \setminus T)^{nor}$ est son complémentaire. On a donc un recouvrement : $\Delta_i = V \cup (\Delta_i \setminus T)^{or} \cup (\Delta_i \setminus T)^{nor}$ et $V \cup (\Delta_i \setminus T)^{nor}$ est une réunion de composantes connexes qui ne rencontrent pas le lieu ordinaire. C'est absurde d'après le corollaire 10.5.3. □

Jusqu'à la fin de cette section, nous noterons simplement p_2 pour le morphisme $p_2|_{\Delta_0(\mathfrak{p},i)} : \Delta_0(\mathfrak{p}, i) \to \Delta_i$. Notons $\Lambda_0(\mathfrak{p}, i)^k$ la réunion des composantes connexes de $\Lambda_0(\mathfrak{p}, i)$ qui s'envoient sur Λ^k. Supposons par récurrence que nous avons prolongé G à $\Delta_0(\mathfrak{p}, i) \setminus (\cup_{k'=k}^{m} \Lambda_0(\mathfrak{p}, i)^{k'})\big)$ et démontrons qu'on peut prolonger G à $\Delta_0(\mathfrak{p}, i) \setminus (\cup_{k'=k+1}^{m} \Lambda_0(\mathfrak{p}, i)^{k'})\big)$. Notons $\Delta_{i,k} = \Delta_i \setminus (\cup_{k'=k}^{m} \Lambda^{k'})$ et $\Delta_{i,k}^{or}$

la réunion des composantes connexes de $\Delta_{i,k}$ qui rencontrent le lieu ordinaire, $\Delta_{i,k}^{nor}$ son complémentaire. Rappelons que $\cup_{k'=k}^{m}\Lambda^{k'}$ est une intersection décroissante dénombrable de sous-domaines spéciaux T_N. Posons $\Delta_{i,k,N} = \Delta_i \setminus T_N$ et notons $\Delta_{i,k,N}^{or}$ la réunion des composantes connexes de $\Delta_{i,k,N}$ qui rencontrent le lieu ordinaire.

Lemme 10.5.10. — *On a* $\Delta_{i,k}^{or} = \cup_N \Delta_{i,k,N}^{or}$.

Preuve. Il est clair que $\cup_N \Delta_{i,k,N}^{or} \subset \Delta_{i,k}^{or}$. Inversement, soit $x \in \Delta_{i,k}^{or}$. Il existe un point x' dans le lieu ordinaire et une application continue $\delta : [0,1] \to \Delta_{i,k}^{or}$ tel que $\delta(0) = x$ et $\delta(1) = x'$ ([**Bk**], thm. 3.2.1). Par compacité, cette application se factorise par $\Delta_{i,k,N}$ pour N suffisamment grand. □

Lemme 10.5.11. — *Pour tout voisinage strict U de Λ^k suffisamment petit, il existe $N(U) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que pour tout $N \geq N(U)$, $U \cup \Delta_{i,k,N}$ et $U \cup \Delta_{i,k,N}^{or}$ sont des espaces analytiques et les recouvrements $\{U, \Delta_{i,k,N}\}$ et $\{U, \Delta_{i,k,N}^{or}\}$ sont admissibles.*

Preuve. Posons $T_N = T'_N \cup T''_N$ où T'_N est la réunion des composantes connexes de T'_N qui rencontrent Λ^k et T''_N est le complémentaire. Choisissons un voisinage strict U de Λ^k tel que $U \cap \Lambda^{k'} = \varnothing$ pour $k' \geq k+1$. Alors, pour N suffisamment grand, $U \cap T''_N = \varnothing$ et U est un voisinage strict de T'_N. Par conséquent, $U \cup \Delta_{i,k,N} = \Delta_i \setminus T''_N$ est un ouvert admissible et le recouvrement $\{U, \Delta_{i,k,N}\}$ est admissible. Choisissons un recouvrement admissible $\Delta_{i,k,N} = \cup_n \Delta_{i,k,N,n}$ par des sous-domaines spéciaux (ouverts quasi-compact dans le sens de Tate). Posons $\Delta_{i,k,N,n}^{or} = \Delta_{i,k,N}^{or} \cap \Delta_{i,k,N,n}$. C'est encore un sous-domaine spécial. Nous affirmons que $U \cup \Delta_{i,k,N}^{or}$ est un espace analytique et qu'un recouvrement admissible par des sous-domaines spéciaux est donné par $U \cup (\cup_n \Delta_{i,k,N,n}^{or})$. En effet, soit S le spectre d'un affinoide et soit $\phi : S \to U \cup \Delta_{i,k,N}^{or}$ un morphisme. Alors ce morphisme se factorise par $\Delta_{i,k,N,n} \cup U$ pour n assez grand et donc par $\Delta_{i,k,N,n}^{or} \cup U$. □

Proposition 10.5.12. — *Il existe un voisinage strict U de Λ^k tel que G s'étend à $p_2^{-1}(U \cup \Delta_{i,k,N}^{or})$ pour tout N.*

Preuve. Choisissons un voisinage strict U de Λ^k assez petit et un entier $N(U)$ assez grand pour que :
- le lemme 10.5.11 soit valable pour U et $N \geq N(U)$,
- le sous-groupe spécial H_{spe} surconverge sur U (voir la remarque 9.5.23),
- Le morphisme $\Pi_0(\Lambda^k) \to \Pi_0(U)$ est une bijection,
- Le morphisme $\Pi_0(X_{ord}) \to \Pi_0(U \cup \Delta_{i,k,N}^{or})$ est surjectif.

Notons $T = U \cup \Delta_{k,N}$. Soit C l'union des composantes connexes de $p_2^{-1}(U)$ telles que $w \cdot C$ consiste en les sous-groupes $L \subset A[\mathfrak{p}]$ avec $L[\pi_j] \neq H_{can,j}$ pour tout j et $L\cap H_{spe}\neq\varnothing$. En d'autres termes, C est l'ensemble des composantes connexes qui rencontrent $\Lambda_0(\mathfrak{p},i)$. Posons $T'=p_2^{-1}(T)\setminus C$. Considérons le diagramme de descente

$$T'\times_T T' \overset{q_1,q_2}{\rightrightarrows} T' \overset{p_2}{\to} T.$$

On a

- $w(p_2^{-1}T)=\{A\in T, L\subset A[\pi],\ \forall\ j\ L[\pi_j]\neq H_{can,j}\}$.
- $wT'=\{A\in T, L\subset A[\pi],\ \forall\ j\ L[\pi_j]\neq H_{can,j}$ et $L\cap H_{spe}=\{0\}$ si $A\in U^1\}$.

Il existe donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} p_2^{-1}(U)\setminus C \arrow[r] \arrow[d] & T' \arrow[d] & p_2^{-1}(T\setminus U) \arrow[l] \arrow[d, "p_2"] \\ U \arrow[r] & T & T\setminus U \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Le morphisme $p_2:p_2^{-1}(T\setminus U)\to T\setminus U^1$ est fini et plat de degré $\prod_j p^{f_j}$. Le morphisme $p_2:p_2^{-1}(U)\setminus C\to U$ est fini et plat de degré $\prod_{j\neq i}p^{f_j}$. On en déduit l'énoncé de surjectivité $p_2(T')=T$.

La fonction G est bien définie sur $\Delta_0(\mathfrak{p},i)\setminus\big(\cup_{k'=k}^m\Lambda_0(\mathfrak{p},i)^{k'}\big)$ par hypothèse de récurrence et donc sur T'. Il nous reste à vérifier qu'elle descend. Par hypothèse, il existe une section H sur X_{ord} telle que $p_2^\star H=G$ sur $X_{ord,mult}$. Ainsi sur $X_{ord,mult}\times_{X_{ord}}X_{ord,mult}$ on a la relation $q_1^\star G=q_2^\star G$ et nous allons montrer que cette relation s'étend.

Le morphisme

$$\Pi_0(X_{ord,mult}\times_{X_{ord}}X_{ord,mult})\to\Pi_0(p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}\times_{\Delta_{k,N}^{or}}p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or})$$

est surjectif. En effet, l'application $p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}\times_{\Delta_{k,N}^{or}}p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}\to\Delta_{k,N}^{or}$ est finie étale et les composantes connexes de $p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}\times_{\Delta_{k,N}^{or}}p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}$ s'envoient donc surjectivement sur les composantes connexes de $\Delta_{k,N}^{or}$. On en déduit que toutes les composantes connexes de $p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}\times_{\Delta_{k,N}^{or}}p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}$ contiennent des points ordinaires. La donnée de descente s'étend bien sur $p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}\times_{\Delta_{k,N}^{or}}p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}$. Posons $U'=U\cap\Delta_{k,N}^{or}$ et $U''=(p_2^{-1}U')\setminus C$. Ainsi, U'' est la fibre de U' dans T'. Par définition, $U''\times_{U'}U''$ est un ouvert de $p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}\times_{\Delta_{k,N}^{or}}p_2^{-1}\Delta_{k,N}^{or}$ et on possède donc la donnée de descente sur $U''\times_{U'}U''$. Il nous reste à voir que $\Pi_0(U''\times_{U'}U'')\to\Pi_0((p_2^{-1}U\setminus C)\times_U(p_2^{-1}U\setminus C))$ est surjectif. Ceci résulte du caractère fini étale du morphisme $(p_2^{-1}U\setminus C)\times(p_2^{-1}U\setminus C)\to U$ et du fait que $\Pi_0(U')\to\Pi_0(U)$ est surjectif, car $\Pi_0(\Lambda^k)\to\Pi_0(U)$ est une bijection et $\Pi_0(X_{ord})\to\Pi_0(U\cup\Delta_{i,k,N}^{or})$ est surjectif. On a donc vérifié que la donnée de descente s'étend également sur $p_2^{-1}U\setminus C\times p_2^{-1}U\setminus C$. $\square$

Lemme 10.5.13. — *On a la stabilité suivante :*

$$U_{\mathfrak{p}}(p_2^{-1}(\Lambda^k \cup \Delta_{i,k}^{or})) \subset p_2^{-1}(\Lambda^k \cup \Delta_{i,k}^{or}) \quad et \quad U_{\mathfrak{p}}(p_2^{-1}\Delta_{i,k}^{or}) \subset p_2^{-1}\Delta_{i,k}^{or}.$$

Preuve. Supposons par récurrence que la propriété est vraie pour $\Lambda^{k'} \cup \Delta_{i,k'}^{or}$ pour tout $k' < k$. Soit C une composante connexe de $p_2^{-1}(\Delta_{i,k'}^{or})$. Alors $U_{\mathfrak{p}}(C)$ est une union de composantes connexes contenant toutes des points ordinaires. De plus, si $y \in \Delta_0(\mathfrak{p}, i) \setminus \Lambda_0(\mathfrak{p}, i) = p_2^{-1}(\Delta_{i,1})$ (ou ce qui revient au même, $\Gamma(y) = \varnothing$) alors $U_{\mathfrak{p}}(y) \subset \Delta_0(\mathfrak{p}, i) \setminus \Lambda_0(\mathfrak{p}, i)$ d'après le lemme 9.5.10. Au contraire, si $y \in p_2^{-1}(\Lambda^{k'})$, alors $U_{\mathfrak{p}}(y) \in p_2^{-1}(\Lambda^{k'} \cup \Delta_{i,k'}^{or})$ par hypothèse de récurrence. Il en résulte que $U_{\mathfrak{p}}(C) \subset \Delta_{i,k}$ et donc $U_{\mathfrak{p}}(C) \subset \Delta_{i,k}^{or}$.

Soit Z une composante connexe de Λ^k. On peut écrire $Z = \cap_N Z_N$ comme intersection de voisinages stricts. Pour tout N, on a $Z_N \cap \Delta_{i,k}^{or} \neq \varnothing$. Soit C une composante connexe de $p_2^{-1}(Z)$ et C_N la composante connexes de $p_2^{-1}(Z_N)$ qui contient C. On a $\cap_N C_N = C$ et C_N est un voisinage strict de C qui rencontre $p_2^{-1}\Delta_{i,k}^{or}$. On en déduit que toutes les composantes connexes de $U_{\mathfrak{p}}(C_N)$ intersectent $U_{\mathfrak{p}}(p_2^{-1}(\Delta_{i,k}^{or}))$ et que toutes les composantes connexes de $p_2(U_{\mathfrak{p}}(C_N))$ intersectent $\Delta_{i,k}^{or}$. Cela prouve bien que $p_2 U_{\mathfrak{p}}(C) \subset \Delta_{i,k}^{or} \cup \Lambda^k$. □

Corollaire 10.5.14. — *Pour un voisinage strict adéquat $V \subset U$ de Λ^k, on a $U_{\mathfrak{p}}^r(p_2^{-1}(V \cup \Delta_{i,k}^{or})) \subset p_2^{-1}(U \cup \Delta_{i,k}^{or})$ pour $0 \leq r \leq n$. De plus, on peut choisir V tel qu'on ait $P(U_{\mathfrak{p}})(G) = 0$ sur $p_2^{-1}V \cup \Delta_{i,k}^{or}$.*

Preuve. Soit $\{V_N\}$ un système de voisinages stricts décroissant de Λ^k. On a $\cap_N U_{\mathfrak{p}}(V_N) \subset U \cup \Delta_{i,k}^{or}$ et par compacité, il existe N tel que $U_{\mathfrak{p}}(V_N) \subset U$. On pose $V = V_N$. Pour montrer la seconde partie, comparons la section $P(U_{\mathfrak{p}})(G)$ et la section nulle sur $p_2^{-1}(V \cup \Delta_{i,k}^{or})$. Elles coïncident sur le lieu ordinaire multiplicatif. On conclut puisqu'on peut choisir V tel que le morphisme $\Pi_0(\Delta_{i,k}^{or}) \to \Pi_0(V \cup \Delta_{i,k}^{or})$ soit surjectif. □

Corollaire 10.5.15. — *La fonction G sur $p_2^{-1}(V \cup \Delta_{i,k}^{or})$ se prolonge à $\Delta_0(\mathfrak{p}, i) \setminus (\cup_{k'=k}^m \Lambda_0(\mathfrak{p}, i)^{k'})$.*

Preuve. On recommence les opérations de prolongement analytique des sections 10.3 et 10.4 en démarrant avec $p_2^{-1}(V \cup \Delta_{i,k}^{or})$ au lieu d'un voisinage du lieu ordinaire. Noter que $p_2^{-1}(V \cup \Delta_{i,k}^{or})$ contient un voisinage du lieu ordinaire. Pour éviter tout problème d'admissibilité, on peut remplacer $\Delta_{i,k}^{or}$ par un sous-domaine spécial $T \subset \Delta_{i,k}^{or}$ qui contient un voisinage strict de $\Lambda^{k'}$ pour tout $k' \leq k - 1$ et un voisinage strict du lieu ordinaire dans $Y_0(\mathfrak{p}, i)$. Notons alors $S_0 = T \cup V$. Définissons par récurrence sur n des sous-domaines spéciaux $S_n = U_{\mathfrak{p}}^{-r}(S_{n-1}) \cap \cdots \cap U_{\mathfrak{p}}^{-1}(S_{n-1})$. Alors on peut utiliser l'équation fonctionnelle pour prolonger G à $\cup_{n=0}^{l} S_n$ pour tout l. Il est clair que $\Delta_0(\mathfrak{p}, i) \setminus (\cup_{k'=k}^{m} \Lambda_0(\mathfrak{p}, i)^{k'}) \subset \cup_{n=0}^{\infty} S_n$. □

10.6. Fin de la preuve. — Pour terminer l'argument nous allons procéder comme dans la section 4.6 de [**P2**]. On peut commencer par améliorer sensiblement la proposition 10.5.1.

Proposition 10.6.1. — *Pour tout $1 \leq i \leq r$ tel que π_i est très ramifié, la forme G se prolonge à $Y_0(\mathfrak{p}, i)_{\frac{1}{e_i}+\delta}$ pour tout $\delta > 0$.*

Preuve. C'est une conséquence des propositions 10.5.1 et 10.2.5. □

Pour tout $1 \leq i \leq r$, fixons $a_i \in]\frac{p^{f_i}-1}{(p-1)(p^{f_i}+1)}, 1[$ tel que :
— $f_i - a_i > f_i - \frac{1}{e_i}$ si π_i est peu ramifié,
— $f_i - a_i > \frac{1}{e_i}$ si π_i est très ramifié.

On note $\tilde{S}_a = \cup_i Y_0(\mathfrak{p}, i)_{f_i - a_i}$.

Lemme 10.6.2. — *La forme G se prolonge à $\tilde{S}_a$.*

Preuve. Le recouvrement $\cup_i Y_0(\mathfrak{p}, i)_{f_i - a_i}$ est admissible d'après le lemme 10.3.2 et l'intersection de deux ouverts distincts vaut le lieu ordinaire multiplicatif. La forme G est définie sur chacun des ouverts par la proposition précédente dans le cas très ramifié et la proposition 10.3.1 dans le cas peu ramifié. La restriction de G au lieu ordinaire multiplicatif ne dépend pas de l'ouvert choisi. □

On note S_a l'intersection de $\tilde{S}_a$ avec $p_2^{-1}(]X_{ord} \cup_i U_{0,i,NS}[)$.

Lemme 10.6.3. — *Le morphisme $p_2 : S_a \to]X_{ord} \cup_i U_{0,i,NS}[$ est surjectif.*

Preuve. Les calculs de [**P2**], sect. 3 (en particulier la proposition 3.2.6) montrent que si $\mathcal{G}$ est un BTHB pour $\mathcal{O}_{F_{\pi_i}}$ qui vérifie la condition de Rapoport et qui est de a-nombre 1, alors $\mathcal{G}[\pi_i]$ possède un sous-groupe de degré inférieur ou égal à $\frac{p^{f_i}-1}{(p-1)(p^{f_i}+1)}$. □

On considère alors le diagramme de descente

$$S_a \times_{p_2(S_a)} S_a \overset{q_1, q_2}{\rightrightarrows} S_a \to p_2(S_a)$$

Lemme 10.6.4. — *On a la condition de descente $q_1^{\star} G = q_2^{\star} G$.*

Preuve. Par la proposition 4.5.1 de [**P2**], toutes les composantes connexes de $S_a \times S_a$ rencontrent $X_{ord,mult} \times_{p_2(S_a)} X_{ord,mult}$. La relation $q_1^\star G = q_2^\star G$ est vérifiée sur $X_{ord,mult} \times_{p_2(S_a)} X_{ord,mult}$ car $G = \phi.H$ par hypothèse. On conclut par le principe de prolongement analytique des identités. □

Par descente étale il existe donc une section H sur $p_2(S_a)$ telle que $p_2^\star H = G$. Comme $p_2(S_a) =]X_{ord} \cup_i U_{0,i,NS}[$, d'après le corollaire 10.1.2, la section H s'étend en une forme classique sur X_E.

Références

[AG1] F.Andreatta and E.Z. Goren, *Geometry of Hilbert modular varieties over totally ramified primes*, Internat. Math. Res. Notices, **33** (2003).

[AG2] F.Andreatta and E.Z. Goren, *Hilbert modular varieties of low dimension*, in Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, 113–175, de Gruyter, Berlin, 2004. Alan Adolphson, Francesco Baldassarri, Pierre Berthelot, Nicholas Katz, and Francois Loeser (Eds.).

[AG3] F. Andreatta and E. Z. Goren, *Hilbert modular forms : mod p and p-adic aspects.* Mem. Amer. Math. Soc. **173** (2005), no. 819.

[AIP] F. Andreatta, A. Iovita, V. Pilloni, *p-adic families of Hilbert modular forms*, prépublication.

[BLGGT] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty and R. Taylor, *Potential modularity and change of weight*, à paraître à Ann. of Math.

[Be] P.Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication 96-03, 1996, disponible sur `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`.

[Bk] V. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical surveys and monographs, Vol. **33**, AMS, 1990.

[Bo] S. Bosch, *Lectures on formal and rigid geometry*, LNM, vol. **2105**, 2014.

[Bu] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Am. Math. Soc. **16**, n. 1, p. 29 –55, 2002.

[BDST] K. Buzzard, M. Dickinson, N. Shepherd-Barron and R. Taylor, *On Icosahedral Artin representations*, Duke Math. J. **109** (2001), 283-318.

[BT] K. Buzzard and R. Taylor, *Companion forms and weight* 1 *forms*, Annals of Math. **149**, 1999.

[Ch] C.L. Chai, *Arithmetic minimal compactification of the Hilbert-Blumenthal moduli spaces*, Appendix to *The Iwasawa conjecture for totally real fields* by A. Wiles, Ann. of Math. **131**, no. 3 (1990), pp. 541-554.

[CG] F. Calegary and D. Geraghty, *Modularity lifting beyond the Taylor-Wiles method*, prépublication.

[DP] P. Deligne and G. Pappas, *Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant*, Compositio Math. **90** (1994), pp. 59-79.

[DS] P. Deligne and J-P Serre, *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4ème série **7**, n. 4 (1974), p. 507-530.

[De] M. Demazure, *Lectures on p-divisible groups*, Lecture Notes in Mathematics, Springer (1972), Volume 302.

[DT] F. Diamond, R. Taylor, *Lifting modular* mod ℓ *representations*, Duke Math. J. **74**, (1994), 253-269.

[Di] M. Dimitrov. *On Ihara's lemma for Hilbert Modular Varieties*, Comp. Math. **145** no. 5 (2009).

[F] G. Faltings, *Group schemes with strict $\mathcal{O}$-action*, Moscow Math. J. **2**, no. 2 (2002), p. 249-279.

[Fa] L.Fargues, *La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, J. Reine Angew. Math. **645** (2010), 1-39.

[GO] E. Z. Goren and F. Oort, *Stratifications of Hilbert modular varieties*, J. Algebraic Geom. **9** (2000), 111-154.

[Ge] D. Geraghty, *Modularity lifting theorems for ordinary Galois representations*, prépublication.

[Hi] H. Hida, *Control theorems for coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*, Jour. Inst. Math. Jussieu **1**, 2002.

[Ka] P. Kassaei, *Modularity lifting in parallel weight one*, J. Amer. Math. Soc. **26** (2013), no. 1, 199–225.

[KST] P. Kassaei, S. Sasaki, Y. Tian, *modularity lifting results in parallel weight one and applications to the Artin conjecture : the tamely ramified case*, prépublication.

[Kh] C. Khare, *Remarks on mod p forms of weight one*, Internat. Math. Res. Notices **3** (1997), 127–133.

[KW] C. Khare and J.P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture. I.* Invent. Math. **178** (2009), no. 3, 485–504.

[K1] M. Kisin, *Moduli of finite flat group schemes and modularity*, Annals of Math. **170** (3) (2009), 1085-1180.

[K2] M. Kisin, *Modularity of* 2*-adic representations* Invent. Math. **178** (3) (2009), 587-634.

[La] R. Langlands, *Base Change for GL(2)*, Annals of Math. Studies 96, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[Mu] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, 5. (2008).

[OZ] F. Oort and T. Zink, *Families of p-divisible groups with constant Newton polygon*, Documenta Math. **7** (2002) p. 183 ?201.

[P1] V. Pilloni, *Prolongement analytique sur les variétés de Siegel*, Duke Math. J. **175** (2011), p. 167-222.

[P2] V. Pilloni, *Formes modulaires p-adiques de Hilbert de poids* 1, à paraître dans Invent. Math.

[PS1] V. Pilloni and B. Stroh, *Surconvergence et classicité : le cas déployé*, prépublication.

[PS2] V. Pilloni and B. Stroh, *Surconvergence et classicité : le cas Hilbert*, prépublication.

[Ra] M. Rapoport, *Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal*, Compositio Math. **36** no. 3 (1978), p. 255-335.

[Ray] M. Raynaud, *Schémas en groupe de type (p,p, ...,p)*, Bull. Soc. Math. de France **102** (1974), p. 241–280.

[RT] J. Rogawski and J. Tunnell, *On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight 1*, Invent. Math. **74** (1983), 1–42.

[Sa] S. Sasaki, *On Artin representations and nearly ordinary Hecke algebras over totally real fields, II*, preprint.

[Sen] S. Sen, *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules*, Ann. of Math., **97** (1973), p. 160-170.

[Se] J.P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, 5ème éd., Hermann (1998).

[SBT] N.Shepherd-Barron and R.Taylor, *Mod* 2 *and mod* 5 *icosahedral representations*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), p. 283-298.

[Ta] J. Tate, *p-divisible groups*, in "Proceedings of a conference on local fields", Springer (1967), p. 158-183.

[Ta1] R. Taylor, *On icosahedral Artin representations, II* , American Journal of Math. **125** (2003), p. 549-566.

[Ta2] R. Taylor, lettre non-publiée.

[Tu1] J. Tunnell, *Artin conjecture for representations of octahedral type*, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1981), p. 173-175.

[Tu2] J. Tunnell, *On the local Langlands conjecture for GL(2)*, Invent. Math. **46** (1978), p. 179-200.

[Vo] I. Vollaard, *On the Hilbert-Blumenthal moduli problem.* J. Inst. Math. Jussieu **4** (2005), no. 4, p. 653–683.

[Wi] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. math. **94** (1988), p. 529-573.

Vincent Pilloni et Benoît Stroh,