MODULARITÉ, FORMES DE SIEGEL ET SURFACES ABÉLIENNES

par

Vincent Pilloni

Résumé. — Dans ce travail nous établissons, sous certaines hypothèses, qu'une représentation $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GSp}_4(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ congrue à une représentation provenant d'une forme modulaire de Siegel est la représentation associée à une forme modulaire p-adique ordinaire. Sous une hypothèse supplémentaire sur les poids de Hodge-Tate de ρ, cela entraîne même sa modularité. Nous en déduisons en particulier que certaines surfaces abéliennes définies sur $\mathbb{Q}$, ordinaires en p, et résiduellement modulaires sont associées à des formes modulaires p-adiques ordinaires.

Table des matières

1. Introduction

Soit Γ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et G le groupe GSp_4. Dans ce travail nous établissons, sous certaines hypothèses, qu'une représentation $\rho : \Gamma \to \mathrm{G}(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ congrue à une représentation provenant d'une forme modulaire de Siegel est la représentation associée à une forme modulaire p-adique ordinaire. Ceci signifie en particulier que la représentation ρ est limite de représentations modulaires. Sous une hypothèse supplémentaire sur les poids de Hodge-Tate de ρ, cela entraîne même sa modularité.

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5 - le nombre premier 5 n'est pas exclu par ce travail, mais pour la simplicité de l'introduction nous supposerons $p \geq 7$. Soit N un entier premier à p et $K \subset \mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$ un sous-groupe compact contenant le sous-groupe de congruence principal de niveau N. Soit f une forme de Siegel cuspidale de genre 2, de poids $\kappa = (k_1, k_2)$, $k_1 \geq k_2$, de niveau K, propre pour les opérateurs de Hecke d'indice premier à N. Choisissons un plongement $i : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$. Soit F une extension de $\mathbb{Q}_p$ contenant les valeurs propres des opérateurs de Hecke, $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers et $\mathbb{F}$

le corps résiduel. Si $k_2 \geq 3$, il existe, d'après [**Weis**], [**Tay**], [**Lau**], un homomorphisme continu

$$\rho_f : \Gamma \to \mathrm{GL}_4(\mathcal{O})$$

attaché à f. Cette représentation est non ramifiée hors de Np et le polynôme caractéristique d'un Frobenius géométrique en un nombre premier ℓ ne divisant pas Np est le polynôme de Hecke de f en ℓ.

Hida a introduit dans [**Hi02**] l'algèbre des formes modulaires p-adiques. Il s'agit de fonctions sur la tour d'Igusa. Il existe un plongement naturel, d'image dense, du module des formes modulaires de Siegel cuspidales dans celui des formes modulaires p-adiques cuspidales. Ce dernier fournit un cadre naturel pour étudier les congruences entre formes modulaires de Siegel. Un projecteur d'ordinarité permet de définir un facteur direct dans le module des formes modulaires p-adiques cuspidales. Ce sous-module jouit d'excellentes propriétés, il contrôle la famille des formes ordinaires classiques cuspidales de poids variable et est étudié en détail dans [**Hi02**] et dans [**Pi1**]. En particulier, toute forme modulaire p-adique, cuspidale, ordinaire, propre pour l'action de l'algèbre de Hecke, est membre d'une famille de Hida de formes propres, paramétrée par un espace de poids. L'ensemble des poids classiques (c'est-à-dire l'ensemble des poids où la spécialisation de la famille définit une forme modulaire de Siegel) est Zariski-dense dans l'espace des poids (voir [**Pi1**], thm 1.1 pour un énoncé général, et [**Pi2**] pour un énoncé plus précis dans le cas de genre 2). Ceci permet d'associer à toute forme modulaire p-adique f, cuspidale, ordinaire, propre une pseudo-représentation ρ_f^{ps} ainsi qu'une représentation résiduelle (éventuellement non unique) $\bar{\rho}_f$. Lorsque $\bar{\rho}_f$ est absolument irréductible, elle est uniquement définie et la pseudo-représentation ρ_f^{ps} provient d'une représentation ρ_f (voir [**Rou**] cor. 5.2 pour un énoncé général sur les pseudo-représentations et [**T-U**], thm. 7.1 pour son application au cas présent).

Soit f une forme modulaire classique cuspidale, propre, de poids $\kappa = (k_1, k_2)$ avec $k_1 \geq k_2$ quelconque et de niveau K. Dans ce travail, on est conduit à faire trois types d'hypothèses sur cette forme.
On suppose que la forme f est ordinaire en p. Cela signifie que les racines $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p)$ du polynôme de Hecke en p rangées dans un ordre convenable ont pour valuations p-adiques respectives $0, k_2 - 2, k_1 - 1, k_1 + k_2 - 3$. On fait de plus une hypothèse de distinguabilité modulo p qu'on appelle ordinarité forte. Celle-ci est par exemple vérifiée si les nombres $\{\alpha_p,\ p^{2-k_2}\beta_p,\ p^{1-k_1}\gamma_p,\ p^{3-k_1-k_2}\delta_p\}$ sont distincts modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. Sous cette hypothèse, la forme f est membre d'une famille de Hida. On peut alors lui associer (sans faire l'hypothèse que $k_2 \geq 3$) une représentation résiduelle $\bar{\rho}_f$ et une pseudo-représentation ρ_f^{ps}.
On doit ensuite supposer l'image résiduelle de $\bar{\rho}_f$ suffisamment grosse. On permet bien sûr le cas où l'image projective contient $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F})$ mais aussi d'autres cas intéressants. Cette hypothèse entraîne en particulier que la représentation résiduelle $\bar{\rho}_f$ est irréductible et assure donc l'existence de ρ_f. Elle implique aussi que ρ_f se factorise à travers $\mathrm{G}(\mathcal{O})$.
On fait finalement des hypothèses de minimalité sur le compact K et la ramification de la représentation ρ.
Un triplet (f, K, p) vérifiant les hypothèses mentionnées ci-dessus est dit admissible (voir 7.1 pour une définition précise). Notre théorème est alors le suivant :

Théorème 1.1. — *Soit f une forme modulaire de Siegel cuspidale de genre 2, poids $\kappa = (k_1, k_2)$ avec $k_1 \geq k_2$ quelconque et niveau K premier à p. Supposons le triplet (f, K, p)*

admissible. Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathcal{O})$ une représentation.
On suppose que

- *$\bar{\rho}_f = \bar{\rho}$.*
- *Pour toute place v différente de p, $\rho_f|_{I_v} \simeq \rho|_{I_v}$.*
- *Il existe un poids $\kappa' = (k'_1, k'_2)$ tel que $\rho|_{D_p}$ est ordinaire en p de poids $0, 2-k'_2, 1-k'_1, 3-k'_1-k'_2$.*

Alors il existe une forme modulaire p-adique g ordinaire, cuspidale, propre, de niveau K et poids κ' telle que $\rho_g = \rho$.

Lorsque $k'_1 \geq k'_2 \geq 3$, la représentation $\rho|_{D_p}$ est semi-stable et on conjecture que la forme g provient d'une forme modulaire classique (peut-être de niveau Np). On sait le démontrer sous l'hypothèse $k_1 \geq k_2 \geq 4$ (voir [**Pi2**]). Lorsque $k_1 \geq k_2 = 2$ et que de plus la représentation $\rho|_{D_p}$ est semi-stable on conjecture aussi que g est classique.

Lorsque κ est dominant, c'est-à-dire que $k_1 \geq k_2$, la forme g provient toujours d'une forme surconvergente. On rappelle que la situation est cependant légèrement différente selon qu'on suppose le poids parallèle ou non :

Soit $S_K \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[1/N]$ le schéma de Siegel de dimension 3 associé au niveau K. Notons $\bar{S}_K$ une compactification toroïdale de S_K. Soit $\bar{S}_K^{rig}$ la variété rigide analytique sur $\mathbb{Q}_p$ déduite de $\bar{S}_K$. On note $\bar{S}_K^{rig-ord}$ l'ouvert d'ordinarité. Lorsque le poids κ est régulier, c'est à dire que $k_1 > k_2$, toute forme modulaire p-adique ordinaire cuspidale provient d'une section du faisceau modulaire ω^κ au-dessus de $\bar{S}_K^{rig-ord}$, et cette section surconverge dans un voisinage strict (voir [**Pi1**], thm A.3) .
Lorsque le poids est dominant mais non régulier, c'est-à-dire que $k_1 = k_2$, une forme modulaire p-adique ordinaire cuspidale provient d'une section du faisceau modulaire sur un revêtement étale de $\bar{S}_K^{rig-ord}$ qui est un quotient du premier étage de la tour d'Igusa. Cette section surconverge dans la variété rigide analytique de Siegel $\bar{S}_{K\cap I(p)}^{rig}$ qui est un revêtement de $\bar{S}_K^{rig}$ associé au sous-groupe d'Iwahori I en p (voir [**Pi1**], appendice A).

Ceci justifie le raffinement suivant du théorème 1.1 lorsque le poids est parallèle.

Théorème 1.2. — *Soit f une forme modulaire de Siegel cuspidale de genre 2, de poids $\kappa = (k, k)$ quelconque et de niveau K. Supposons le triplet (f, K, p) admissible. Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathcal{O})$ une représentation.*
On suppose que

- *$\bar{\rho}_f = \bar{\rho}$.*
- *Pour toute place v différente de p, $\rho_f|_{I_v} \simeq \rho|_{I_v}$.*
- *Il existe un poids $\kappa' = (k', k')$ tel que $\rho|_{D_p}$ est ordinaire en p de poids $0, 2-k', 1-k', 3-2k'$.*

Alors il existe une forme modulaire surconvergente g sur $\bar{S}_K^{rig}$, ordinaire, cuspidale, propre, de niveau K et poids κ' telle que $\rho_g = \rho$.

La stratégie utilisée pour démontrer ces théorèmes est celle des systèmes de Taylor-Wiles. Elle a été mise en oeuvre pour le groupe G par A. Genestier et J. Tilouine dans [**G-T**]. Dans [**G-T**], les auteurs démontrent un théorème $R = T$ à la fois moins général et plus précis que le nôtre. Leur hypothèse sur l'image résiduelle est plus contraignante et ils supposent ρ_f et ρ ordinaires en p de même poids de Hodge-Tate, petit par rapport à p et cohomologique, c'est à dire $k_1 + k_2 - 3 < p - 1$ et $k_2 \geq 3$. Sous leurs hypothèses, ils démontrent toujours (même lorsque $k_2 = 3$) la modularité de la représentation ρ. J.

Tilouine dans [**Til**] a mis en famille le résultat de [**G-T**] et a pu s'affranchir de l'hypothèse que ρ_f et ρ ont les mêmes poids de Hodge-Tate, en supposant toujours que le poids de ρ_f est petit par rapport à p et cohomologique. Il démontre alors que ρ est associée à une forme modulaire p-adique.

Notre travail est motivé par l'application nouvelle suivante. Une conjecture de Yoshida [**Yos**] prédit que toute surface abélienne est associée à une forme de Siegel de poids $(2,2)$. Le poids $(2,2)$ n'est pas cohomologique et il n'est congru à aucun poids qui soit à la fois cohomologique et petit par rapport à p. En effet, le plus petit poids cohomologique congru au poids $(2,2)$ est le poids $(p+1,p+1)$. On déduit alors de nos théorèmes l'énoncé suivant :

Corollaire 1.1. — *Soit $A \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}$ une surface abélienne munie d'une polarisation de degré premier à p. Supposons que A a bonne réduction ordinaire en p. Soit $\rho_{A,p}$ la représentation symplectique du groupe Γ sur le module $\mathrm{H}^1_{et}(A,\mathbb{Z}_p)$. S'il existe f une forme modulaire cuspidale propre de poids (k_1,k_2) et de niveau K telle que le triplet (f,K,p) soit admissible, $\bar\rho_f = \bar\rho_{A,p}$ et $\rho_f|_{I_v} = \rho_{A,p}|_{I_v}$ pour toute place v différente de p, alors $\rho_{A,p}$ est la représentation associée à une forme surconvergente g sur $\bar{S}^{rig}_{K\cap I(p)}$, cuspidale, propre, ordinaire, de poids $(2,2)$ et niveau K. Si on suppose de plus que $k_1 = k_2$, alors la forme g surconverge sur la variété de niveau premier à p, $\bar{S}^{rig}_{K}$.*

On conjecture dans ce cas que la forme g est classique. Pour le démontrer, on peut chercher à imiter la démarche de [**B-T**] dans le cas du poids 1 lorsque $g = 1$. Il faudrait en particulier établir l'existence de formes compagnons associées à g (voir [**Her-T**] et [**Til1**] pour des conjectures et des résultats dans cette direction). Nous espérons revenir sur ces questions dans un prochain travail.

Remarquons également que les hypothèses des théorèmes 1.1 et 1.2 nous permettent de travailler avec des représentations résiduelles qui sont le cube symétrique de représentations à valeur dans GL_2 - le cube symétrique de la représentation standard de GL_2 sur $\mathbb{Z}_p$ se plonge dans G lorsque $p \neq 3$. Il est difficile d'exhiber des représentations résiduellement modulaires pour G, mais on sait, d'après la conjecture de Serre démontrée par Khare et Wintenberger ([**K-W**]) et le transfert pour le cube symétrique ([**K-S**] et [**Ram-S**]), que toute représentation $\Gamma \to \mathrm{G}(\mathbb{F})$, qui est le cube symétrique d'une représentation $\Gamma \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ impaire, est modulaire. Ceci ouvre peut-être la voie à des théorèmes de modularité plus effectifs.

Donnons à présent une idée de la démonstration. Soit f une forme modulaire, cuspidale, propre, de niveau K et poids κ. Nous supposons le triplet (f,K,p) admissible. Nous allons identifier l'anneau universel $\tilde{R}$ des déformations ordinaires de poids de Hodge-Tate variable, avec ramification auxiliaire contrôlée, de la représentation résiduelle $\bar\rho_f$ avec une algèbre de Hecke $\tilde{\mathrm{T}}$. Cette algèbre $\tilde{\mathrm{T}}$ est la localisation en l'idéal maximal associé à (f,p), noté $\mathfrak{m}$, de l'algèbre de Hecke de niveau premier à Np agissant sur le module $\mathcal{V}^{ord,\star}_{cusp}$ qui contrôle les formes modulaires p-adiques ordinaires cuspidales de poids variable et de niveau K. On démontre précisément :

Théorème 1.3. — *On a un isomorphisme $\tilde{R} \to \tilde{\mathrm{T}}$, le schéma $\mathrm{Spec}\ \tilde{\mathrm{T}}$ est fini et plat sur l'espace des poids $\mathrm{Spec}\ \Lambda$, et le module localisé $(\mathcal{V}^{ord,\star}_{cusp})_{\mathfrak{m}}$ est libre de rang fini sur $\tilde{\mathrm{T}}$.*

Pour montrer ce résultat, on démontre une infinité d'isomorphismes $R_{i_\kappa} \tilde{\to} \mathrm{T}_\kappa$ où R_{i_κ} est un anneau universel de déformations de poids de Hodge-Tate fixé κ et T_κ est l'image de $\tilde{\mathrm{T}}$ dans l'anneau d'endomorphismes du module des formes modulaires p-adiques, ordinaires,

cuspidales, de niveau K et poids κ, localisé en $\mathfrak{m}$. Ces isomorphismes sont démontrés par la méthode des systèmes de Taylor-Wiles.
La différence majeure avec [**G-T**] est que nous utilisons des modules de formes modulaires p-adiques ordinaires cuspidales comme module de contrôle dans les systèmes de Taylor-Wiles, tandis que dans *loc. cit.*, les auteurs utilisaient des modules de cohomologie étale. Les modules de cohomologie cohérente sont bien plus simples à étudier que les H^3 de la cohomologie étale. L'absence de torsion est immédiate et, on dispose de théorèmes de relèvement des formes modulaires p-adiques de la caractéristique p vers la caractéristique 0 (voir [**Pi1**], thm. 6.2). Ces théorèmes de relèvement sont l'ingrédient essentiel du théorème de contrôle horizontal qui intervient dans la vérification des propriétés du système de Taylor-Wiles. L'utilisation de tels modules était suggérée dans l'introduction de [**Hi02**].

Ce travail repose de façon fondamentale sur l'article [**G-T**], et je tiens à exprimer ma dette envers A. Genestier et J. Tilouine. Je remercie spécialement J. Tilouine pour ses conseils avisés et ses encouragements. Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance à H. Hida qui a relu en détail une version préliminaire du manuscrit.

2. Préliminaires

2.1. Variétés de Siegel analytiques. — Soit $\mathrm{G} = \mathrm{GSp}_4$ le groupe symplectique de dimension 4 sur $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$.
Soit les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}$$

On réalise G comme l'ensemble des matrices $X \in \mathrm{GL}_4$ vérifiant la relation ${}^tXJX = \nu(X)J$ avec $\nu(X) \in \mathbb{G}_m$. On note G^1 le noyau du caractère ν. Pour tout $X \in \mathrm{G}$, posons $X^\sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tX^{-1} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'application $\sigma : X \mapsto X^\sigma$ est un automorphisme de G.
Soit

$$\mathcal{H}_+ = \{\Omega \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}),\ {}^t(S\Omega) = S\Omega \text{ et } \mathrm{Im}(S\Omega) > 0\}$$

le demi-plan de Siegel et soit $\mathcal{H}$ le sous-ensemble de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \cup -\mathcal{H}_+$$

Le groupe $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ agit à gauche transitivement sur $\mathcal{H}$ par

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} .\Omega = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}$$

Soit K'_∞ le stabilisateur du point $iS \in \mathcal{H}^+$. Concrètement $K'_\infty = \mathbb{R}_{>0}K_\infty$ où K_∞ est le groupe compact

$$K_\infty = \{X \in \mathrm{G}(\mathbb{R}),\ {}^tXX = I_4\}$$

Ce groupe est la réunion de deux composantes connexes découpées par les valeurs 1 et -1 du facteur de similitude ν. On note $K_{1,\infty} \subset \mathrm{G}^1(\mathbb{R})$ la composante neutre de K_∞.
De façon explicite, on a

$$K_{1,\infty} = \{ \begin{pmatrix} SAS & SB \\ -BS & A \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(\mathbb{R}),\ A^tA + B^tB = 1,\ A^tB = B^tA\}$$

Pour tout $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(\mathbb{R})$, on définit $J(g, \Omega) = (C\Omega + D)$. On a la relation de 1-cocycle

$$J(gh, \Omega) = J(g, h\Omega)J(h, \Omega)$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} K'_\infty & \to & \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ g & \mapsto & J(g, iS) \end{array}$$

est un morphisme de groupe injectif qui identifie $K_{1,\infty}$ au groupe unitaire $\mathrm{U}(2)$.

Soit $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ où $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}$ est l'anneau des adèles finis.
On dispose d'un plongement diagonal $\mathrm{G}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{G}(\mathbb{R}) \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f)$. Ceci permet de faire agir $\mathrm{G}(\mathbb{Q})$ par translation à gauche sur $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f)$.
Soit N un entier, $K(N) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{G}(\mathbb{Z}/N)\big)$ le groupe de congruence adèlique de niveau N et K un sous-groupe compact tel que $K(N) \subset K \subset G(\hat{\mathbb{Z}})$. On note

$$S_K(\mathbb{C}) = \mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{H} \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f)/K$$

la variété de Siegel analytique de dimension 3 et niveau K.
Il résulte du théorème d'approximation forte que $S_K(\mathbb{C}) = \mathrm{G}^1(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_+ \times \mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})/K$.
A tout élément $\Omega \in \mathcal{H}_+$, on associe une surface abélienne principalement polarisée $\mathcal{A}_\Omega = \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}^2 \oplus S\Omega\mathbb{Z}^2)$ munie de la polarisation principale donnée par la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^2$ de matrice $\mathrm{Im}(S\Omega)^{-1}$. Comme

$$\mathcal{A}_\Omega[N] = \big((\frac{1}{N}\mathbb{Z})^2 \oplus S\Omega(\frac{1}{N}\mathbb{Z}^2)\big)/(\mathbb{Z}^2 \oplus S\Omega\mathbb{Z}^2)$$

on a une structure de niveau principale $\eta_\Omega : \mathbb{Z}^4/N\mathbb{Z}^4 \simeq \mathcal{A}_\Omega[N]$.
De même, à tout couple $(\Omega, k) \in \mathcal{H}_+ \times \mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$, on associe la surface abélienne principalement polarisée $\mathcal{A}_\Omega$ et la structure de niveau principale $\eta_\Omega \circ k^\sigma$ (où k opère à travers son image dans $\mathrm{G}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ via la projection naturelle).
Soit $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{G}^1(\mathbb{Z})$ et $\Omega \in \mathcal{H}_+$. On a la relation

$${}^t(C\Omega + D)^{-1} \begin{pmatrix} S\Omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S\gamma\Omega & 1 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire ${}^t(C\Omega + D)^{-1} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ induit donc un isomorphisme

$$\psi_\gamma : \mathcal{A}_\Omega \to \mathcal{A}_{\gamma\Omega}$$

Cet isomorphisme respecte la polarisation et on a la relation

$$\psi_\gamma \circ \eta_\Omega = \eta_{\gamma\Omega} \circ \gamma^\sigma$$

En résumé, pour tout couple $(\Omega, k) \in \mathcal{H}_+ \times \mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$, ψ_γ réalise un isomorphisme de la paire $(\mathcal{A}_\Omega, \eta_\Omega \circ k^\sigma)$ vers la paire $(\mathcal{A}_{\gamma\Omega}, \eta_\Omega \circ \gamma^\sigma.k^\sigma)$.
Ceci explique la proposition classique

Proposition 2.1 **([Lau], I, cor. 3.3)**. — *Les points complexes de $S_K(\mathbb{C})$ sont en bijection avec les classes d'isomorphismes de surfaces abéliennes sur* Spec $\mathbb{C}$*, principalement polarisées, munies d'une structure de niveau K (c'est à dire la K-orbite d'une structure principale de niveau N).*

2.2. Formes modulaires. —

2.2.1. Poids. — Soit GL_2 le groupe linéaire de dimension 2 réalisé comme le groupe des matrices 2×2 inversibles. Soit SL_2 son groupe dérivé. Notons B le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur, U le radical unipotent et T le tore maximal standard. L'espace des poids est le groupe des caractères algébriques du tore, noté $X(\mathrm{T})$. Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ via l'application qui au couple $\kappa = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ associe le caractère $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_1^{k_1} t_2^{k_2}$. On a une involution de $X(\mathrm{T})$, $\kappa = (k_1, k_2) \mapsto \kappa^\sigma = (-k_2, -k_1)$.
On note $X(\mathrm{T})^+$ le cône des poids dominants par rapport à B. Il s'identifie au cône de $\mathbb{Z}^2$ des couples $(k_1, k_2),\ k_1 \geq k_2$. On note $X(\mathrm{T})^{++}$ le cône des poids réguliers. Il s'identifie au cône de $\mathbb{Z}^2$ des couples $(k_1, k_2),\ k_1 > k_2$. Ces cônes sont préservés par l'involution σ.
Pour tout couple $(k_1, k_2) \in X(\mathrm{T})^{++}$, supposons donnés des entiers $N_{k_1 - k_2} \in \mathbb{Z}$. On dit alors que $\kappa = (k_1, k_2) \in X(\mathrm{T})^{++}$ est très régulier si $k_2 \geq N_{k_1 - k_2}$. Quand nous utiliserons cette notion, les entiers $N_{k_1 - k_2}$ seront non explicites et sous-entendus. Nous abrégerons fréquemment en disant que $\kappa = (k_1, k_2)$ est très réguliers si $k_1 > k_2 >> 0$.
On note $X(\mathrm{GL}_2)$ le groupe des caractères de GL_2. C'est un sous-groupe de $X(\mathrm{T})$ qui s'identifie au groupe $\mathbb{Z}$ plongé diagonalement dans $\mathbb{Z}^2$. Il est préservé par l'involution σ.

2.2.2. Formes de Siegel arithmétiques. — Soit $K \subset \mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$ un sous-groupe de congruence contenant le sous-groupe de congruence principal de niveau N et $S_K \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[1/N]$ le champ algébrique de modules paramétrisant les surfaces abéliennes principalement polarisées munies d'une structure de niveau K ([**F-C**], chap I, 4.11). L'espace de module grossier associé à son analytifié complexe est la variété de Siegel $S_K(\mathbb{C})$ ([**F-C**], chap I, 6.).
On dispose, au dessus de S_K, du schéma abélien universel $\mathcal{A}$, de section neutre e. Soit $e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/S_K}$ le faisceau conormal de $\mathcal{A}$ relativement à S_K. Pour tout poids $\kappa = (k_1, k_2) \in X(\mathrm{T})^+$, on définit le $\mathcal{O}_{S_K}$-module localement libre de rang fini

$$\omega^\kappa = \mathrm{sym}^{k_1 - k_2} e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/S_K} \otimes \det{}^{k_2} e^\star \Omega^1_{\mathcal{A}/S_K}$$

Définition 2.1. — *Soit M un $\mathbb{Z}[1/N]$-module.*

1. *Une forme modulaire de Siegel de genre 2, de niveau K, de poids κ, à coefficients dans M est un élément de $\mathrm{H}^0(S_K, \omega^\kappa \otimes_{\mathbb{Z}[1/N]} M)$. On note ce module $\mathrm{M}(\kappa, K, M)$.*
2. *Le sous-module $\mathrm{H}^0_{cusp}(S_K, \omega^\kappa \otimes M)$ de $\mathrm{H}^0(S_K, \omega^\kappa \otimes_{\mathbb{Z}[1/N]} M)$ des formes qui s'annulent aux pointes ou cusps* ([**F-C**], IV, 6.6) *est le sous-module des formes cuspidales. Il est noté $\mathrm{S}(\kappa, K, M)$.*

2.2.3. Formes modulaires p-adiques. — Soit p un nombre premier ne divisant pas N.

A partir de cette partie, nous supposons soit que K est net, soit que $p \geq 7$.

Cette hypothèse est importante pour la validité des résultats de la théorie de Hida rappelés plus bas. Le sens de l'hypothèse $p \geq 7$ lorsque K n'est pas net est le suivant. On peut dans ce cas trouver un nombre premier $r \geq 3$ tel que p ne divise pas le cardinal du groupe $\mathrm{G}(\mathbb{F}_r)$. Ce groupe fini agissant sur les $\mathbb{Z}_p$-modules n'a donc pas de cohomologie supérieure. On peut donc artificiellement rajouter une structure de niveau principale en r, ce qui rend le compact net, puis prendre les invariants.

Soit $\bar{S}_K \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[1/N]$ une compactification toroïdale de S_K associée à une décompositon polyédrale (voir [**F-C**], III, th. 5.7) et $\mathcal{G}$ le schéma semi-abélien qui étend le schéma abélien universel au dessus de S_K. Soit p un nombre premier ne divisant pas N et soit $\bar{S}_\infty \to \mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p$ le schéma formel obtenu en complétant $\bar{S}_K$ le long de l'ouvert ordinaire de sa fibre spéciale $(\bar{S}_K)_{\mathbb{F}_p}$. Soit $\mathcal{T}_\infty = \mathrm{Isom}_{\bar{S}_\infty}(\mathbb{G}^2_m[p^\infty], \mathcal{G}[p^\infty])$ la tour d'Igusa. C'est un pro-revêtement étale de groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On pose $V_\infty = \mathrm{H}^0(\mathcal{T}_\infty, \mathcal{O}_{\mathcal{T}_\infty})$ et on note $V_{cusp,\infty}$ l'idéal des fonctions qui s'annulent aux pointes de $\mathcal{T}_\infty$.

Définition 2.2. — 1. *On note V_∞^{U} la sous-algèbre de V_∞ des formes invariantes sous $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_p)$. C'est l'algèbre des formes modulaires p-adiques (sous-entendu pour le parabolique B). On note $V_{cusp,\infty}^{\mathrm{U}}$ l'idéal des formes modulaires p-adiques cuspidales.*
2. *Pour tout caractère $\kappa \in X(\mathrm{T})$, on note $V_\infty^{\mathrm{U}}[-\kappa^\sigma]$ le sous-module de V_∞^{U} des formes κ-variantes pour l'action du tore. C'est le module des formes modulaires p-adiques de poids κ, niveau K. On note également $V_{cusp,\infty}^{\mathrm{U}}[-\kappa^\sigma]$ le sous-module des formes modulaires p-adiques de poids κ, niveau K et cuspidales.*
3. *On note $V_\infty^{\mathrm{SL}_2}$ la sous-algèbre de V_∞ des formes invariantes sous $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$. C'est l'algèbre des formes modulaires p-adiques pour le parabolique GL_2 de GL_2. On note $V_{cusp,\infty}^{\mathrm{SL}_2}$ l'idéal des formes modulaires p-adiques cuspidales pour le parabolique GL_2.*
4. *Pour tout caractère $\kappa \in X(\mathrm{GL}_2)$, on appelle $V_\infty^{\mathrm{SL}_2}[-\kappa^\sigma]$ le module des formes modulaires p-adiques pour le parabolique GL_2, de poids κ, niveau K. On note également $V_{cusp,\infty}^{\mathrm{SL}_2}[-\kappa^\sigma]$ le sous-module des formes modulaires p-adiques, cupsidales, de poids κ et niveau K pour le parabolique GL_2.*

Remarque 2.1. — On peut faire le lien avec les notations de [**Pi1**]. Pour GL_2, il y a deux paraboliques standard, qui sont B et GL_2. Dans *loc. cit.*, pour tout parabolique standard P, on considérait son sous-groupe $S\mathrm{P}$. Ici on a simplement $S\mathrm{B} = \mathrm{U}$ et $S\mathrm{GL}_2 = \mathrm{SL}_2$. Notons aussi que l'involution sur les poids $\kappa \to \kappa^\sigma$ était notée $\kappa \mapsto \kappa'$ dans *loc. cit.*.

On a une première proposition reliant la théorie des formes modulaires classiques et celle des formes modulaires p-adiques (voir [**Hi02**] et [**Pi1**], 4.2.1).

Proposition 2.2. — *Pour tout $\kappa \in X(\mathrm{T})^+$, il existe un plongement :*

$$\Theta : \mathrm{S}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow V_{cusp,\infty}^{\mathrm{U}}[-\kappa^\sigma]$$

Lorsque $\kappa \in X(\mathrm{GL}_2)$, le plongement Θ se factorise de la façon suivante :

$$\Theta : \mathrm{S}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow V_{cusp,\infty}^{\mathrm{SL}_2}[-\kappa^\sigma] \hookrightarrow V_{cusp,\infty}^{\mathrm{U}}[-\kappa^\sigma]$$

.

Considérons le pro-p groupe $H = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{T}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\big)$. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[H]] \subset \mathbb{Z}_p[[\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)]]$ les algèbres de groupe complétées.
Soit aussi le groupe $H' = \mathrm{Ker}\big(\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\big)$. Soit $\Lambda' = \mathbb{Z}_p[[H']] \subset \mathbb{Z}_p[[\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p)]]$ les algèbres de groupe complétées. L'identification $X(\mathrm{GL}_2) \simeq \mathbb{Z}$ nous permet d'identifier $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(\mathrm{GL}_2), \mathbb{G}_m)$ avec $\mathbb{G}_m$. Voici le théorème principal de la théorie de Hida pour le groupe G :

***Théorème 2.1* ([Hi02] et [Pi1], thm 7.1).** — 1. *Il existe un projecteur d'ordinarité e, agissant sur $V_{cusp,\infty}^{\mathrm{U}}$, tel que pour tout poids très régulier $\kappa = (k_1, k_2) \in X(\mathrm{T})$ on a :*

$$e\Theta\big(\mathrm{S}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p)\big) \simeq eV_{cusp,\infty}^{\mathrm{U}}[-\kappa^\sigma]$$

et pour tout poids $\kappa = (k, k) \in X(\mathrm{GL}_2)$, $k >> 0$, on a

$$e\Theta\big(\mathrm{S}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p)\big) \simeq eV_{cusp,\infty}^{\mathrm{SL}_2}[-\kappa^\sigma]$$

2. *Il existe un $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)]]$-module $\mathcal{V}_{cusp}^{ord,\star}$, libre de rang fini comme Λ-module, tel que pour tout $\kappa \in X(\mathrm{T})$*

$$\mathcal{V}_{cusp}^{ord,\star} \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)]],\kappa} \mathbb{Z}_p = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(eV_{cusp,\infty}^{\mathrm{U}}[-\kappa^\sigma], \mathbb{Z}_p)$$

3. *Il existe un* $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p)]]$*-module* $\mathcal{V}^{ord,\mathrm{GL}_2,\star}_{cusp}$*, libre de rang fini comme* Λ'*-module, tel que pour tout* $\kappa \in X(\mathrm{GL}_2)$

$$\mathcal{V}^{ord,\mathrm{GL}_2,\star}_{cusp} \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p)]],\kappa} \mathbb{Z}_p = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(eV^{\mathrm{SL}_2}_{cusp,\infty}[-\kappa^\sigma], \mathbb{Z}_p)$$

Définition 2.3. — *On note simplement* $\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p)$ *le module* $e\Theta\big(\mathrm{S}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p)\big)$.

Remarque 2.2. — Dans [**Hi02**] ou [**Pi1**], on considère un projecteur de B-ordinarité e_{B}, il est noté simplement e ici. C' est le produit de deux projecteurs, le projecteur e_{GL_2} d'ordinarité pour l'opérateur classique U_p et le projecteur e'_{GL_2} d'ordinarité pour l'opérateur de Hecke associé à la matrice $diag(1, p, p, p^2)$. Dans le cas des poids parallèles, le projecteur e_{GL_2} suffit pour avoir une bonne théorie de Hida. Dans le présent travail, on applique cependant le projecteur $e = e_{\mathrm{B}}$ aux formes de poids parallèles. Les résultats de [**Pi1**], valables pour le projecteur e_{GL_2}, sont a fortiori valables pour le projecteur e_{B}.
La représentation galoisienne associée à une forme de Siegel cuspidale propre pour les opérateurs de Hecke, GL_2-ordinaire en p n'est pas forcément ordinaire (voir [**Urb**], cor. 1, où GL_2-ordinaire est appelé ordinaire pour le parabolique de Siegel). Dans notre travail, nous préférons cependant nous limiter à des représentations ordinaires. Ceci motive donc l'utilisation de $e_{\mathrm{B}} = e$ dans tous les cas.

Remarque 2.3. — Le projecteur e ne stabilise pas le module $\mathrm{S}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p)$. En fait, pour le groupe d'Iwahori en p, $I(p)$, on peut considérer l'espace des formes modulaires cuspidales de poids κ et niveau $K \cap I(p)$ que nous notons $\mathrm{S}(\kappa, K \cap I(p), \mathbb{Z}_p)$. On dispose d'un plongement naturel $\mathrm{S}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p) \to \mathrm{S}(\kappa, K \cap I(p), \mathbb{Z}_p)$. Le projecteur e agit par définition (voir [**Hi02**] ou [**Pi1**]) sur l'espace $\mathrm{S}(\kappa, K \cap I(p), \mathbb{Z}_p)$ et on a donc une inclusion $\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow \mathrm{S}(\kappa, K \cap I(p), \mathbb{Z}_p)$. L'opération qui à $f \in \mathrm{S}(\kappa, K, \mathbb{Z}_p)$ associe $e.f$ est parfois appelée la p-stabilisation.

Remarque 2.4. — Dans [**Pi2**], on montre que sous l'hypothèse $k_1 \geq k_2 \geq 4$, on a un isomorphisme $eV^{\mathrm{U}}_{cusp,\infty}[-\kappa^\sigma] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq e\mathrm{S}(\kappa, K \cap I(p), \mathbb{Q}_p)$.

Remarque 2.5. — On a un théorème analogue pour des formes modulaires p-adiques possédant un nebentypus prescrit en une place ne divisant pas p (voir [**Pi1**], thm. 7.2).

2.3. Algèbre de Hecke. —

2.3.1. Algèbres de Hecke. — Soit ℓ un nombre premier. Introduisons les matrices symplectiques :

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} \ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} \text{ et } \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell \end{pmatrix}$$

Soit également $K_\ell = \mathrm{G}(\mathbb{Z}_\ell)$ le compact maximal standard de $\mathrm{G}(\mathbb{Q}_\ell)$, soit $\Pi(\ell)$ son sous-groupe parahorique de Klingen et $\Pi(\ell)^+$ son sous-groupe parahorique de Klingen strict. Il sont respectivement constitués des matrices $M \in K_\ell$ telles que

$$M = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \bmod \ell \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \bmod \ell$$

Soit enfin les monoïdes $\mathrm{T}^-(\mathbb{Q}_\ell) = \big\{\alpha.\beta_0^{n_0}.\beta_1^{n_1}.\beta_2^{n_2},\ n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathrm{T}(\mathbb{Z}_\ell)\big\}$ et $\Delta_\ell^- = \Pi(\ell)^+\mathrm{T}^-(\mathbb{Q}_\ell)\Pi(\ell)^+$.

Proposition 2.3 **([G-T], 3.1)**. — 1. *L' algèbre de Hecke sphérique en ℓ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est l'algèbre $\mathbb{Z}[K_\ell\backslash \mathrm{G}(\mathbb{Q}_\ell)/K_\ell]$ des fonctions à support compact sur $\mathrm{G}(\mathbb{Q}_\ell)$, K_ℓ bi-invariantes, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Elle est munie du produit de convolution. Elle est commutative et s'identifie à l'algèbre de polynômes $\mathbb{Z}[T_{\ell,0}, T_{\ell,1}, T_{\ell,2}]$ en les indéterminées $T_{\ell,i} = K_\ell\beta_i K_\ell$, $i = 0, 1, 2$. On la note $\mathcal{H}_\ell$.*

2. *L' algèbre de Hecke dilatante pour le parahorique de Klingen strict en ℓ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est l'algèbre $\mathbb{Z}[\Pi(\ell)^+\backslash\Delta^-_\ell/\Pi(\ell)^+]$ des fonctions à support compact sur Δ^-_ℓ, $\Pi(\ell)^+$ bi-invariantes, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Elle est munie du produit de convolution. Elle est commutative et s'identifie à l'algèbre $\mathbb{Z}[U_{\ell,0}, U_{\ell,1}, U_{\ell,2}][(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times]$ en les indéterminées $U_{\ell,i} = \Pi^+(\ell)\beta_i\Pi^+(\ell)$. On la note $\mathcal{H}^-_\ell$.*

Définition 2.4. — *Pour tout entier N, on note $\mathcal{H}^N$ le produit tensoriel restreint des algèbres de Hecke sphériques locales $\mathcal{H}_\ell$ aux premiers ℓ ne divisant pas N.*

2.3.2. Action de l'algèbre de Hecke. — L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^N$ engendrée par les opérateurs premiers à N agit par correspondances algébriques sur $\mathrm{M}(\kappa, K, M)$ et $\mathrm{S}(\kappa, K, M)$. On pourra consulter sur ce sujet [**F-C**], chap 7 ou [**S-U**], 1.1.6 . De même, si $K = \prod_\ell K^\ell$ avec $K^\ell \subset \mathrm{G}(\mathbb{Z}_\ell)$ et si q est un nombre premier tel que $K^q = \Pi(q)$ ou $\Pi(q)^+$, on peut faire agir l'algèbre dilatante $\mathcal{H}^-_q$ sur $\mathrm{S}(\kappa, K, M)$.
Si p est un nombre premier ne divisant pas N, on a une action par correspondance de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^{Np}$ sur l'algèbre V_∞ qui respecte l'idéal cuspidal $V_{cusp,\infty}$. Cette action commute avec l'action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et induit en particulier une action sur les espaces de formes modulaires p-adiques cuspidales de poids κ, $V^{\mathrm{U}}_{cusp,\infty}[-\kappa^\sigma]$ (voir [**Pi1**]). De même si q est un premier tel que $K^q = \Pi(q)$ ou $\Pi^+(q)$, on a une action de l'algèbre dilatante $\mathcal{H}^-_q$.
Le morphisme Θ de la proposition 2.2 est équivariant pour l'action de l'algèbre $\mathcal{H}^{Np}$ et de $\mathcal{H}^-_q$ lorsque celle-ci est définie.

2.4. Le point de vue automorphe. — Nous allons maintenant rappeler comment caractériser les formes modulaires de Siegel à coefficients complexes comme vecteurs des représentations auomorphes cuspidales pour le groupe G. Nous suivons ici [**A-S**] qui traite le cas des formes modulaires de niveau $\mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$.

Soit $f \in \mathrm{H}^0(S_K(\mathbb{C}), \omega^\kappa)$ une forme modulaire à coefficients complexes. Notons

$$V^\kappa = \mathrm{Sym}^{k_1-k_2}\mathrm{St} \otimes \det{}^{k_2}$$

la representation plus haut poids κ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Les différentiels dz_1, dz_2 ((z_1, z_2) sont les coordonnées sur $\mathbb{C}^2$) fournissent une trivialisation du faisceau conormal de la variété abélienne $\mathcal{A}_\Omega$. A f, on associe la fonction $F : \mathcal{H}_+ \times \mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}}) \to V^\kappa$ définie par $F(\Omega, k) = f\big(\mathcal{A}_\Omega, \eta_\Omega \circ k^\sigma, (dz_1, dz_2)\big)$.

Proposition 2.4. — *L'application $f \mapsto F$ définit un isomorphisme de $\mathrm{H}^0(S_K(\mathbb{C}), \omega^\kappa)$ vers l'ensemble des fonctions sur $\mathcal{H}_+ \times \mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$ à valeur dans V^κ, holomorphes en la première variable et vérifiant*
- *Pour tout $\gamma \in \mathrm{G}^1(\mathbb{Z})$, $F(\gamma\Omega, \gamma k) = J(\gamma, \Omega).F(\Omega, k)$.*
- *Pour tout $k' \in K$, $F(\Omega, kk') = F(\Omega, k)$.*

Soit $<,>$ un produit hermitien sur V^κ, invariant sous $U(2)$. La formule

$$< f, g >= \int_{\mathrm{G}^1(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_+\times\mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})/K} \big\langle \mathrm{Im}(S\Omega)^{\frac{1}{2}} F(\Omega, k), \mathrm{Im}(S\Omega)^{\frac{1}{2}} G(\Omega, k)\big\rangle \mathrm{d}\Omega.\mathrm{d}k$$

définit l'accouplement de Petersson sur $\mathrm{H}^0_{cusp}(S_K(\mathbb{C}),\omega^\kappa)$ (voir [**A-S**], p. 195).

D'après le théorème d'approximation forte

$$\mathrm{G}(\mathbb{A}) = \mathrm{G}(\mathbb{Q})\mathrm{G}^+(\mathbb{R})\mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$$

A f, on associe la fonction $\tilde{\Phi}_f : \mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}) \to V^\kappa$ définit par

$$\tilde{\Phi}_f(g) = \nu(g_\infty)^{\frac{k_1+k_2}{2}} J(g_\infty, iS)^{-1} F(g_\infty.iS, g_f)$$

où on a décomposé $g \in \mathrm{G}(\mathbb{A})$ en $g_{\mathbb{Q}}g_\infty g_f$ avec $(g_{\mathbb{Q}}, g_\infty, g_f) \in \mathrm{G}(\mathbb{Q})\times\mathrm{G}^+(\mathbb{R})\times\mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$ grâce au théorème d'approximation forte. On vérifie sans peine que la fonction $\tilde{\Phi}_f$ est bien définie en dépit de l'ambiguité dans la décomposition de g. Nous allons maintenant exprimer la condition d'holomorphie. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{G}(\mathbb{R})$. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ à valeur dans V^κ et $X \in \mathfrak{g}$. La formule

$$Xh(g) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h\big(g\exp(tX)\big)$$

définit une action de $\mathfrak{g}$ sur l'espace fonctionnel $\mathcal{C}^\infty\big(\mathrm{G}(\mathbb{R}), V^\kappa\big)$. Par $\mathbb{C}$-linéarité, cette action se prolonge à l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.
Soit $\mathfrak{g}^1$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{G}^1(\mathbb{R})$. De façon explicite on a

$$\mathfrak{g}^1 = \Big\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}),\ {}^tCS = SC,\ {}^tBS = SB,\ {}^tAS = -SD \Big\}$$

L'involution de Cartan $\Theta X = -{}^tX$ agit sur $\mathfrak{g}^1$. L'espace propre pour la valeur propre 1 est l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_{1,\infty}$ de $K_{1,\infty}$

$$\mathfrak{k}_{1,\infty} = \Big\{ \begin{pmatrix} SAS & SB \\ -BS & A \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A,\ {}^tB = B \Big\}$$

l'espace propre pour la valeur propre -1 est la sous-algèbre de Lie

$$\mathfrak{p} = \Big\{ \begin{pmatrix} SAS & SB \\ BS & A \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}),\ {}^tA = A,\ {}^tB = B \Big\}$$

La complexifiée $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ est la somme de deux sous-algèbres de Lie $\mathfrak{p}^\pm_{\mathbb{C}}$,

$$\mathfrak{p}^\pm_{\mathbb{C}} = \Big\{ \begin{pmatrix} SAS & \pm iSA \\ \pm iAS & A \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}),\ {}^tA = A \Big\}$$

Les lemmes 5 et 7 de [**A-S**] montrent alors

Proposition 2.5. — *L'application $f \mapsto \tilde{\Phi}_f$ définit une bijection de $\mathrm{H}^0(S_K(\mathbb{C}),\omega^\kappa)$ vers l'ensemble des fonctions $\tilde{\Phi} : \mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}) \to V^\kappa$ qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ et vérifient :*
- *Pour tout $k_\infty \in K'_{1,\infty}$, $\tilde{\Phi}(gk_\infty) = J(k_\infty, iS)^{-1}\tilde{\Phi}(g)$.*
- *Pour tout $k \in K$, $\tilde{\Phi}(gk) = \tilde{\Phi}(g)$.*
- *Pour tout $X \in \mathfrak{p}^-_{\mathbb{C}}$, $X\tilde{\Phi} = 0$.*

De plus, la forme f est cuspidale si et seulement si

$$\int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \tilde{\Phi}_f(ng)\ \mathrm{d}n = 0$$

pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathbb{A})$ et tout radical unipotent N d'un sous-groupe parabolique strict de G.

Soit $L_0^2(\mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}),\mathbb{C})$ l'espace des formes automorphes cuspidales pour G. Le groupe $\mathrm{G}(\mathbb{A})$ agit par translation sur $L_0^2(\mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}),\mathbb{C})$. Soit $K=\prod_\ell K^\ell$ un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$. Soit N le produit des nombres premiers ℓ tel que $K^\ell\neq\mathrm{G}(\mathbb{Z}_\ell)$. On a une action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^N$ sur $L_0^2(\mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}),\mathbb{C})^K$. De même, si q est un nombre premier tel que $K^q=\Pi(q)$ ou $\Pi(q)^+$, on a une action de l'algèbre $\mathcal{H}_q^-$ sur $L_0^2(\mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}),\mathbb{C})^K$.

Soit $L:V^\kappa\to\mathbb{C}$ une forme linéaire non nulle. L'application induite

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}:V^\kappa & \to & Fonct(K'_\infty,\mathbb{C})\\ v & \mapsto & \Big[k\mapsto L\big(J(k,iS)^{-1}v\big)\Big]\end{array}$$

est un morphisme injectif de K'_∞-module à droite.

Proposition 2.6 **([A-S], th. 1 et 4.5)**. — *L'application $f\mapsto\mathcal{L}(\tilde{\Phi}_f)=\Phi_f$ est une isométrie de $\mathrm{H}^0_{cusp}(S_K(\mathbb{C}),\omega^\kappa)$ vers le sous-espace de $L_0^2(\mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}),\mathbb{C})$ constitué des fonctions Φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à $\mathrm{G}(\mathbb{R})$, vérifiant :*

- *Pour tout $g\in\mathrm{G}(\mathbb{A})$, la fonction $\Phi_g:K'_\infty\to\mathbb{C}$ définie par $\Phi_g(k)=\Phi(gk)$ appartient à $\mathcal{L}(V^\kappa)$.*
- *Pour tout $k\in K$, $\Phi(gk)=\Phi(g)$.*
- *Pour tout $X\in\mathfrak{p}_\mathbb{C}^-$, $X\Phi=0$.*

Cette isométrie est équivariante sous l'action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^N$ et sous l'action de $\mathcal{H}_q^-$ lorsque elle est bien définie.

Soit $f\in\mathrm{H}^0_{cusp}(S_K(\mathbb{C}),\omega^\kappa)$ propre pour l'action des opérateurs de Hecke de niveau premier à N. Considérons la sous-représentation π_{Φ_f} de $L_0^2(\mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}))$ engendrée par Φ_f. Cette sous-représentation se décompose en une somme finie de représentations irréductibles. Toutes ces représentations irréductibles ont les mêmes paramètres de Hecke aux places finis ne divisant pas le niveau et la même composante à l'infini ([**A-S**], 4.4). Si $k_2\geq 3$, cette composante à l'infini est la série discrète holomorphe de poids (k_1,k_2) ([**A-S**], 4.5, p. 196). Enfin, toutes ces représentations irréductibles ont le même caractère central. Ce caractère est trivial sur $\mathbb{R}^\times$ et il se factorise donc à travers un caractère de Diriclet.

3. La représentation galoisienne associée à une forme de Siegel

Soit $\pi=\pi_\infty\otimes\pi_f$ une représentation cuspidale de $\mathrm{G}(\mathbb{A})$, de niveau N, associée à une forme modulaire cuspidale de Siegel de poids $\kappa=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$ avec $k_1\geq k_2$. On suppose que $k_2\geq 3$ et on pose $(a_1,a_2)=(k_1-3,k_2-3)$, c'est le poids cohomologique de π. Soit p un nombre premier et $\iota_p:\bar{\mathbb{Q}}\to\bar{\mathbb{Q}}_p$ un plongement. Il existe alors, grâce aux travaux de Taylor [**Tay**], Laumon [**Lau**] et Weissauer [**Weis**], un homomorphisme continu :

$$\rho_\pi:\Gamma\to\mathrm{GL}_4(\bar{\mathbb{Q}}_p)$$

non ramifié hors de Np et qui vérifie un certain nombre de propriétés que nous allons détailler.

3.1. Polynômes de Hecke. —

Définition 3.1 **([G-T], 3.1, p. 196)**. — *Soit ℓ un nombre premier.*

1. *On appelle polynôme de Hecke sphérique en ℓ et on note $\mathcal{Q}_\ell(X)$ le polynôme $X^4-T_{\ell,2}X^3+\ell(T_{\ell,1}+(\ell^2+1)T_{\ell,0})X^2-\ell^3T_{\ell,2}T_{\ell,0}X+\ell^6T_{\ell,0}^2$.*

2. *On a deux ploynômes de Hecke dilatants en ℓ. Le polynôme étale $\mathcal{Q}^e_\ell = X^2 - U_{\ell,2}X + \ell U_{\ell,1}$ et le polynôme multiplicatif $\mathcal{Q}^m_\ell = \ell^{-1}U^{-1}_{\ell,1}X^2\mathcal{Q}^e_\ell(\ell^3 U_{\ell,0}X^{-1})$.*

La composante finie π_f de π est le produit de ses composantes locales : $\pi_f = \otimes\pi_\ell$. Pour tout nombre premier ℓ ne divisant pas N, on a dim $\pi_\ell^{K_\ell} = 1$ et l'algèbre $\mathcal{H}_\ell$ agit sur cette droite à travers un caractère. L'image du polynôme de Hecke $\mathcal{Q}_\ell$ par ce caractère est un polynôme à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$: $Q_\ell(X) = (X-\alpha_\ell)(X-\beta_\ell)(X-\gamma_\ell)(X-\delta_\ell)$. .

Théorème 3.1 **([Weis], th. I)**. — *Pour tout ℓ ne divisant par Np, on a l'identité :*

$$\det(1 - X\mathrm{Frob}_\ell, \rho_\pi) = Q_\ell(X).$$

De plus, si π n'est pas CAP, pour tout ℓ ne divisant pas N les racines de Q_ℓ sont des nombres de Weil de poids $\omega = a_1 + a_2 + 3$.

3.2. Théorie de Hodge p-adique. — Au poids κ nous associons le quadruplet $i_\kappa = (0, -a_2-1, -a_1-2, -w) \in \mathbb{Z}^4$. La représentation $\rho_\pi|_{D_p}$ est de Hodge-Tate. On a de plus

Théorème 3.2 **([Weis], th. III)**. — *Supposons que π n'est ni CAP, ni faiblement endoscopique. Alors les poids de Hodge-Tate de ρ_π sont $0, -a_2-1, -a_1-2, -w$.*

Remarquons que lorsque ρ_π est irréductible, π n'est ni CAP, ni faiblement endoscopique et le théorème s'applique.

Si l'on suppose que p ne divise pas N, $\rho_\pi|_{D_p}$ est cristalline ([**Fal**]). Le $\bar{\mathbb{Q}}_p$-module $D_{cris}(\rho_\pi)$ est muni d'un isomorphisme de Frobenius Φ. Le résultat suivant vient compléter le théorème 3.1.

Théorème 3.3 **([Urb], th. 1)**. — *On a l'identité :*

$$\det(1 - X\Phi, D_{cris}(\rho_\pi)) = Q_p(X)$$

On dit que π est ordinaire en p au sens automorphe si π est sphérique en p et les racines du polynôme de Hecke en p, rangées dans un ordre convenable, disons $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ et δ_p, ont pour valuations p-adiques respectives $0, a_2+1, a_1+2, a_1+a_2+3 = w$.

Remarque 3.1. — Si π est une représentation automorphe associée à une forme modulaire f, cuspidale, de niveau premier à p, propre pour les opérateur de Hecke en p. La forme automorphe π est ordinaire en p si est seulement si l'image de f par la projection d'ordinarité e est non nulle.

Soit $\chi_p : D_p \to \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p-adique et pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}_p$, de valuation nulle, soit $\xi(\alpha)$ le caractère non ramifié qui applique le Frobenius géométrique sur α.

Théorème 3.4 **([Urb], cor. 1)**. — *Si π est ordinaire en p et n'est ni CAP, ni faiblement endoscopique, la restriction de ρ_π à D_p est conjuguée à :*

$$\begin{pmatrix} \xi(\alpha_p) & \star & \star & \star \\ & \xi(p^{-a_2-1}\beta_p)\chi_p^{-a_2-1} & \star & \star \\ & & \xi(p^{-a_1-2}\gamma_p)\chi_p^{-a_1-2} & \star \\ & & & \xi(p^{-\omega}\delta_p)\chi_p^{-w} \end{pmatrix}$$

Appelons simplement $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les caractères apparaissant sur la diagonale de $(\rho_\pi)|_{D_p}$ en partant du haut. Pour $r = 0, ..., 3$ notons $\bar{\lambda}_r$ le caractère résiduel.

Définition 3.2. — *On dit que π est fortement ordinaire en p si π est ordinaire en p et pour tous $r, r' \in \{0,1,2,3\}$ avec $r > r'$, les caractères résiduels $\bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_{r'}^{-1}$, sont tous distincts du caractère trivial et du caractère cyclotomique résiduel $\bar{\chi}_p$.*

3.3. Symplecticité. — Le caractère central de π se factorise à travers un caractère fini $\omega_\pi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times \to \mathbb{C}^\times$. Notons $\nu : \Gamma \to \mathbb{Q}_p^\times$ le caractère $\omega_\pi \chi_p^{-w}$.

Proposition 3.1. — *La représentation ρ_π est autoduale : $\rho_\pi \simeq \rho_\pi^\star \otimes \nu$.*

Ceci implique l'existence d'une forme bilinéaire non dégénérée ψ sur l'espace de la représentation V, pour laquelle ρ_π agit par similitudes.

Certaines hypothèses sur ρ_π peuvent entraîner l'existence d'une forme symplectique pour laquelle ρ_π agit par similitude. Commençons par poser la définition :

Définition 3.3. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F})$. On dit que G est très symplectique* (SYMP) *si la propriété suivante est vraie : G préserve une unique forme bilinéaire non dégénérée à multiplication près par un scalaire et cette forme est symplectique.*

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$

Proposition 3.2. — *Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}_4(\mathcal{O})$ une représentation autoduale, résiduellement irréductible, telle que $\bar{\rho}$ soit très symplectique. Alors il existe une forme bilinéaire symplectique $V_\mathcal{O} \times V_\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ non dégénérée pour laquelle ρ agit par similitude.*

Démonstration. Par hypothèse ρ préserve une forme bilinéaire $\psi : V_\mathcal{O} \times V_\mathcal{O} \to \mathcal{O}$, dont on peut supposer la réduction modulo $\mathfrak{m}_\mathcal{O}$ non nulle. On a une décomposition unique de ψ en la somme d'une forme symplectique et d'une forme orthogonale : $\psi = \psi_o + \psi_s$. Et Γ préserve ψ_o et ψ_s à un scalaire près. La forme bilinéaire résiduelle $\bar{\psi} = \bar{\psi}_o + \bar{\psi}_s$ est encore non dégénérée car $\bar{\rho}$ est supposée irréductible. C'est donc que $\bar{\psi}_o$ ou $\bar{\psi}_s$ est non nulle et non dégénérée. Or il est exclu par (SYMP) que $\bar{\psi}_0$ soit non dégénérée. □

Corollaire 3.1. — *Si $\bar{\rho}$ est très symplectique alors, après une conjugaison, ρ se factorise à travers $\mathrm{G}(\mathcal{O})$.*

3.4. Mauvaise réduction. —

3.4.1. Quelques matrices nilpotentes. — Introduisons les matrices nilpotentes d'ordre 2 :

$$\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la matrice nilpotente d'ordre 4 :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.2. Mauvaise réduction associée au parahorique de Klingen. — Soit q un nombre premier divisant N. Supposons que ρ_π soit irréductible et symplectique.

Théorème 3.5 **([G-T], th. 2.2.5. et th. 8.2.1.).** — 1. *Si π_q possède des vecteurs invariants non nuls par le sous-groupe parabolique de Klingen $\Pi(q)$, l'action du sous-groupe d'inertie en q est unipotente et le logarithme de monodromie est d'ordre au plus 2.*
2. *Si π_q possède une droite stable par le parahorique de Klingen sur laquelle il agit à travers son quotient $\Pi(q)/\Pi(q)^+$ par un caractère $\chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \to \mathbb{C}^\times$ non trivial, $\rho_\pi|_{D_q}$ est la somme de deux plans totalement isotropes $\rho_\pi|_{D_q} = V_e \oplus V_m$. Le groupe d'inertie agit trivialement sur V_e et agit sur V_m à travers le caractère χ.*

Conjecture 1. — *Si π_q a une unique droite fixe par le parahorique de Klingen, le logarithme de monodromie est ϵ_2.*

Si π_q possède des vecteurs non nuls χ-variants par le sous-groupe parahorique de Klingen $\Pi(q)$ on a $\dim \pi_q^{\Pi^+(q)} = 1$ et l'algèbre de Hecke dilatante $\mathcal{H}_q^-$ agit par un caractère sur cette droite. Soit $Q_q^e(X) = (X - \alpha_q)(X - \beta_q)$ et $Q_q^m(X) = (X - \gamma_q)(X - \delta_q)$ les images respectives des polynôme $\mathcal{Q}_q^e$ et $\mathcal{Q}_q^m$ par ce caractère.

Théorème 3.6 **([G-T], 8.2.1).** — *On a les identités :*

$$det(1 - X\mathrm{Frob}_q, V_e) = Q^e(X) \quad et \quad det(1 - X\mathrm{Frob}_q, V_m(\chi^{-1})) = Q^m(X)$$

Nous aurons besoin dans la suite du résultat suivant. Considérons le cas où π_q possède un vecteur fixe par $\Pi(q)$. Il resulte du travail de Schmidt et Roberts [**R-S**] que π_q est un sous-quotient d'une induite depuis le Borel.
Soit $\chi : \mathrm{T}(\mathbb{Q}_q) \to \mathbb{C}^\times$ un caractère non ramifié du tore. On étend χ en un caractère du Borel opposé $\bar{\mathrm{B}}$. Introduisons les paramètres de Hecke :

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \chi(diag(1,1,q,q)) \\ \beta_q &= q\chi(diag(1,q,1,q)) \\ \gamma_q &= q^2\chi(diag(q,1,q,1)) \\ \delta_q &= q^3\chi(diag(q,q,1,1)) \end{aligned}$$

Considérons l'induite :

$$V_\chi = \{f : \mathrm{G}(\mathbb{Q}_q) \to \mathbb{C}, \quad f \text{ est localement constante et } f(g\bar{b}) = \chi(\bar{b})f(g)\}$$

Le groupe $\mathrm{G}(\mathbb{Q}_q)$ agit à droite.

Proposition 3.3 **([G-T], cor. 3.2.2, prop. 3.2.3 et cor. 3.2.4)**

1. *Le module $V_\chi^{\Pi(q)}$ est de dimension 4, il porte une action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_q^-$ et les valeurs propres des opérateurs $U_{q,1}$ et $U_{q,2}$ sont respectivement :*

   $$q^{-1}\alpha_q\beta_q,\ q^{-1}\alpha_q\gamma_q,\ q^{-1}\beta_q\delta_q,\ q^{-1}\gamma_q\delta_q \quad et \quad \alpha_q + \beta_q,\ \alpha_q + \gamma_q,\ \beta_q + \delta_q,\ \gamma_q + \delta_q$$

   .
2. *La représentation V_χ est irréductible si et seulement si les quotients ab^{-1}, $a, b \in \{\alpha_q, \beta_q, \gamma_q, \delta_q\}$ sont tous différents de q. Lorsque c'est le cas, V_χ est sphérique.*
3. *Lorsque V_χ est sphérique et $\alpha_q\beta_q$ n'appartient pas à l'ensemble $\{\alpha_q\gamma_q,\ \beta_q\delta_q,\ \gamma_q\delta_q\}$, l'endomorphisme de $\pi^{\Pi(q)}$ induit par*

   $$X_q = (qU_{q,1} - \alpha_q\gamma_q)(qU_{q,1} - \beta_q\delta_q)(qU_{q,1} - \gamma_q\delta_q)$$

réalise un isomorphisme de la droite π^{K_q} sur la droite de $\pi^{\Pi(q)}$ sur laquelle $qU_{q,1}$ et $U_{q,2}$ ont pour valeurs propres $\alpha_q\beta_q$ et $\alpha_q+\beta_q$. L'isomorphisme inverse est donné par l'application

$$Y_q : x \mapsto [(\alpha_q\beta_q-\alpha_q\gamma_q)(\alpha_q\beta_q-\beta_q\delta_q)(\alpha_q\beta_q-\gamma_q\delta_q)]^{-1}\big(x|\sum_{w\in\Pi(q)\backslash K_q/\mathrm{I}_{\bar{\mathrm{B}}}}\Pi(q)w\Pi(q)\big)$$

où $\mathrm{I}_{\bar{\mathrm{B}}}$ désigne le sous-groupe d'Iwahori de K_q des matrices résiduellement triangulaires inférieures.

3.4.3. Mauvaise réduction associée au sous-groupe d' Iwahori. — Soit q un nombre premier divisant N. Supposons toujours ρ_π symplectique et irréductible. On note $I(q)$ le sous-groupe d'Iwahori de $K_q = \mathrm{G}(\mathbb{Z}_q)$. C'est l'ensemble des matrices $M \in K_q$ telles que

$$M = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \mod q$$

***Théorème 3.7** ([**Ge**]).* — *Si π_q a un vecteur stable par l'Iwahori et par aucun autre parahorique le contenant strictement alors l'action du sous-groupe d'inertie I_q est unipotente et le logarithme de monodromie est ϵ.*

3.4.4. Mauvaise réduction associée au parahorique de Siegel. — On note $S(q)$ le sous-groupe parahorique de Siegel de K_q. C'est l'ensemble des matrices $M \in K_q$ telles que

$$M = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \end{pmatrix} \mod q$$

***Conjecture 2** ([**G-T**], **p. 186**).* — *Si π_q a une unique droite fixe par le parahorique de Siegel $S(q)$ alors l'action du groupe d'inertie I_q est unipotente et le logarithme de monodromie est η_2.*

Des résultats récents [**Sor**] et [**Ar**] laissent penser que cette conjecture est sur le point d'être démontrée.

4. Enoncé du théorème, plan de la démonstration

4.1. Théorème. — Nous présentons ici notre théorème principal sous une hypothèse de forte admissibilité un peu plus forte que nécessaire mais qui a le mérite de s'énoncer simplement. Pour des résultats plus généraux, nous renvoyons le lecteur au numero 7.1.
Soit $K = \prod K^\ell \subset \mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$ un sous-groupe compact ouvert. Soit N le produit des nombres premiers ℓ tels que $K^\ell \neq \mathrm{G}(\mathbb{Z}_\ell)$. Soit p un nombre premier ne divisant pas N. On suppose soit que $p \geq 7$, soit que K est net et $p \geq 5$.
Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, de corps résiduel $\mathbb{F}$ et soit $f \in \mathrm{S}(\kappa, K, \mathcal{O})$ une forme modulaire de Siegel propre pour l'action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^N$ engendrée par les opérateurs d'indice premier à N.

Définition 4.1. — *On dit que le triplet (f, K, p) est fortement admissible si :*

1. *Les racines $(\alpha_p,\ \beta_p,\ \gamma_p,\ \delta_p)$ du polynôme de Hecke en p ont pour valuation p-adique respectives $0, k_2-1, k_1-1, k_1+k_2-3$ et les nombres $\{\alpha_p, p^{2-k_2}\beta_p, p^{1-k_1}\gamma_p, p^{3-k_1-k_2}\delta_p\}$ sont distincts modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.*

Ceci entraîne l'existence d'une pseudo-représentation ρ_f^{ps} et d'une représentation résiduelle (peut-être non unique) $\bar{\rho}_f$ associées à f.

2. *Une des deux conditions suivantes est vérifiée :*
   - *Il existe un sous-corps* $\mathbb{F}'$ *de* $\mathbb{F}$ *tel que l'image projective résiduelle* $\bar{\rho}_f^0(\Gamma)$ *est, à conjugaison près, un sous-groupe de* $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}')$ *qui contient* $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}')$. *Lorsque* $p = 5$ *et* $\mathbb{F}' = \mathbb{F}_5$, *on exige de plus que* $k_1 + k_2 - 3$ *soit impair.*
   - *Il existe un sous corps* $\mathbb{F}'$ *de* $\mathbb{F}$ *tel que l'image projective résiduelle* $\bar{\rho}_f^0(\Gamma)$ *est, à conjugaison près, un sous-groupe de* $\mathrm{Sym}^3\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}')$ *qui contient* $\mathrm{Sym}^3\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}')$ *et il existe dans* $\mathbb{F}'$ *un élément* a *tel que* $a^{12} \neq 1$.

   Cette hypothèse implique l'unicité de $\bar{\rho}_f$ et l'existence d'une représentation $\rho_f : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathcal{O})$.
3. *Pour tout nombre premier* ℓ *divisant* N, *on est dans l'un des cas suivants :*
   - *Soit* $\bar{\rho}_f|_{I_\ell} \simeq \exp t_p\epsilon$ *pour le caractère modéré résiduel* $t_p : I_\ell \to \mathbb{F}(1)$ *et* $K_\ell = I(\ell)$.
   - *Soit* $\bar{\rho}_f|_{I_\ell} \simeq \exp t_p\epsilon_2$ *et* $K_\ell = \Pi(\ell)$.
   - *Soit* $\bar{\rho}_f|_{I_\ell} \simeq \mathbb{F}^2 \oplus \mathbb{F}^2(\chi_\ell)$ *pour un caractère* $\chi_\ell : I_\ell \to \mathbb{F}^\times$ *non trivial,* $K_\ell = \Pi(\ell)^+$ *et* $\ell - 1$ *est premier à* p.
   - *Soit* $\bar{\rho}_f|_{I_\ell}$ *est absolument irréductible et* $\ell^4 - 1$ *est premier à* p.

Théorème 4.1. — *Supposons* (f, K, p) *fortement admissible. Soit* $\rho : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathcal{O})$ *une représentation telle que :*
- $\rho \simeq \rho_f$ *modulo* $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$.
- *Pour toute place* $v \nmid p$, $\rho|_{I_v}$ *est isomorphe à* $\rho_f|_{I_v}$.
- ρ *est ordinaire en* p *de poids* $i_{\kappa'} = (0, 2 - k_2', 1 - k_1', 3 - k_1' - k_2')$ *pour un couple d'entiers* $\kappa' = (k_1', k_2')$.

Il existe alors une forme modulaire p*-adique* f' *ordinaire cuspidale de niveau* K *et poids* κ' *telle que* $\rho = \rho_{f'}$.

De plus, si $\kappa = (k, k)$ *est un poids parallèle et si* ρ *est ordinaire en* p *de poids* $(0, 2 - k', 1 - k', 3 - 2k')$ *alors il existe une forme modulaire* p*-adique* f' *pour le parabolique* GL_2, *ordinaire, cuspidale, de niveau* K *et poids* $\kappa' = (k', k')$ *telle que* $\rho = \rho_{f'}$.

Remarque 4.1. — 1. L'hypothèse que $\rho_f|_{I_\ell} \simeq \rho|_{I_\ell}$ pour une place ℓ différente de p où $\bar{\rho}_f|_{I_\ell}$ est absolument irréductible et $p \nmid \ell^4 - 1$ est impliquée par la congruence $\bar{\rho}_f = \bar{\rho}$ (voir le lemme 5.1).

2. Sous la conjecture 2, nous pouvons aussi inclure des premiers de ramification $\ell | N$ tels que $\bar{\rho}_f|_{I_\ell} \simeq \exp t_p\eta_2$ et $K^\ell = S(\ell)$.
3. Le sens de l'hypothèse 1 dans la condition de forte admissibilité est de contrôler l'anneau des déformations locales ordinaires en p. C'est un cas particulier de l'hypothèse de forte ordinarité formulée en 5.2.
4. Le sens de l'hypothèse 2 est d'une part de rigidifier suffisamment la situation pour entraîner l'existence d'une représentations à valeur dans $\mathrm{G}(\mathcal{O})$, d'autre part d'assurer l'existence de nombres de Taylor-Wiles ayant des bonnes propriétés (voir 5.8).
5. On ne suppose par que les poids de la forme f sont cohomologiques ($k_2 \geq 3$) ou petits par rapport à p ($k_1 + k_2 - 3 < p - 1$).

4.2. Plan de la démonstration. — Nous allons identifier un anneau universel $\tilde{R}$ de déformations ordinaires pour des poids de Hodge-Tate variables de la représentation $\bar{\rho}_f$ avec une algèbre de Hecke $\tilde{\mathrm{T}}$ agissant sur une localisation de l'espace des formes modulaires p-adiques cuspidales. La démonstration se fait en deux étapes. D'abord, nous construisons une infinité de systèmes de Taylor-Wiles pour des poids de Hodge-Tate fixés. Ensuite, nous mettons ces isomorphismes ensembles pour obtenir un isomorphisme entre

$\tilde{R}$ et $\tilde{\mathrm{T}}$.

Rappelons d'abord ce qu'est un système de Taylor-Wiles au sens de Fujiwara.

4.2.1. Système de Taylor-Wiles. — Soit $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de nombres premiers congrus à 1 modulo p. Pour tout nombre premier q congru à 1 modulo p, notons Δ_q le p-Sylow de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Pour tout ensemble Q_m, notons $\Delta_{Q_m} = \prod_{q\in Q_m}\Delta_q$. L'anneau $\mathcal{O}[\Delta_{Q_m}]$ est une algèbre de Hopf local, d'idéal d'augmentation I_{Q_m}. Un système de Taylor-Wiles est une donnée $\{R, \mathrm{T}, \mathcal{M}, \mathrm{T}_{Q_m}, R_{Q_m}, \mathcal{M}_{Q_m}\}$ où :

- R est une $\mathcal{O}$-algèbre locale complète et R_{Q_m} est une $\mathcal{O}[\Delta_{Q_m}]$-algèbre locale complète telle que $R \simeq R_{Q_m}/I_{Q_m}$.
- $\mathcal{M}$ est un R-module, libre de rang fini comme $\mathcal{O}$-module, et $\mathcal{M}_{Q_m}$ est un R_{Q_m}-module, libre comme $\mathcal{O}[\Delta_{Q_m}]$-module, de rang fini indépendant de m.
- T est l'image de R dans l'anneau d'endomorphismes de $\mathcal{M}$ et T_{Q_m} est l'image de R_{Q_m} dans l'anneau d'endomorphismes de $\mathcal{M}_{Q_m}$.

Théorème 4.2 **(**[**Fuj**]**).** — *Soit $\{R, \mathrm{T}, \mathcal{M}, \mathrm{T}_{Q_m}, R_{Q_m}, \mathcal{M}_{Q_m}\}$ un système de Taylor-Wiles vérifiant :*

- *Pour tout $q \in Q_m$, $q \equiv 1 \ mod\ p^m$,*
- *$r = \sharp Q_m$ est indépendant de m,*
- *R_{Q_m} est engendré par au plus r éléments comme $\mathcal{O}$-algèbre complète,*
- *Pour tout m, l'image de T_{Q_m} dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{Q_m}/I_{Q_m})$ est isomorphe à T,*
- *Pour tout m, on a un isomorphisme de T_{Q_m}-modules $\mathcal{M}_{Q_m}/I_{Q_m} \simeq \mathcal{M}$.*

alors $R = \mathrm{T}$, R est une $\mathcal{O}$-algèbre finie d'intersection complète, et $\mathcal{M}$ est un R-module libre de rang fini.

Remarque 4.2. — Les ensembles Q_m sont fréquemment appelés *ensembles de Taylor-Wiles.*

4.2.2. Schéma de la preuve. — Nous expliquons à présent comment s'organise la démonstration du théorème. Soit (f, K, p) un triplet admissible (voir la définition 6.1, la notion d'admissibilité raffine celle de forte admissibilité). On définit au numéro 5.4 un anneau $\tilde{R}$ de déformations ordinaires de poids de Hodge-Tate non fixé de la représentation $\bar{\rho}_f$. On a une fibration Spec $\tilde{R} \to$ Spec Λ sur l'espace des poids de Hodge-Tate. Le couple (f, p) définit un idéal maximal, disons $\mathfrak{m}$, de l'algèbre de Hecke de niveau premier à Np, agissant sur le Λ-module $\mathcal{V}^{ord,\star}_{cusp}$ qui contrôle les formes modulaires p-adiques ordinaires cuspidales. On définit $\tilde{\mathrm{T}}$ comme la localisation de cette algèbre de Hecke en l'idéal $\mathfrak{m}$ (voir le numéro 6.1) et $\tilde{\mathcal{M}}$ comme la localisation du module $\mathcal{V}^{ord,\star}_{cusp}$ en l'idéal $\mathfrak{m}$.
Pour tout poids $\kappa \in$ Spec Λ, la fibre de $\tilde{R}$ au dessus de κ est un anneau R_{i_κ} de déformations ordinaires de poids de Hodge-Tate fixé (voir 5.3).
L'anneau $\tilde{\mathrm{T}}$ agit sur la localisation en $\mathfrak{m}$ de l'espace des formes modulaires p-adiques cuspidales ordinaires de poids κ, de dual $\mathcal{M}_\kappa = \mathcal{M}\otimes_{\Lambda,\kappa}\mathcal{O}$. On note T_κ l'image de $\tilde{\mathrm{T}}$ dans l'anneau d'endomorphismes de $\mathcal{M}_\kappa$ (voir 6.2).
Dans la partie 5, on montre que sous nos hypothèses sur la représentation résiduelle $\bar{\rho}_f$, il existe une suite d'ensembles de Taylor-Wiles $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de cardinal constant r et des $\mathcal{O}[\Delta_{Q_m}]$-algèbres R_{Q_m} engendrées par au plus r éléments (voir 5.7).
Dans la partie 6, pour tout poids κ, nous construisons des $\mathcal{O}[\Delta_{Q_m}]$-modules $\mathcal{M}_{Q_m,\kappa}$, vérifions qu'ils sont libres de rang indépendant de m. Ce sont les duaux de localisations d'espaces de formes modulaires de poids κ et niveau strictement inclus dans K. On définit des algèbres de Hecke $\mathrm{T}_{Q_m,\kappa}$ agissant fidèlement sur les modules $\mathcal{M}_{Q_m,\kappa}$.
Nous vérifions les différentes compatibilités exigées (6.4). Nous montrons entre autre

l'existence de morphismes $\tilde{R} \to \tilde{\mathrm{T}}$, $R_{i_\kappa} \to \mathrm{T}_\kappa$ et $R_{Q_m} \to \mathrm{T}_{Q_m,\kappa}$ grâce à l'existence de représentations galoisiennes à valeurs dans $\tilde{\mathrm{T}}$, T_κ et $\mathrm{T}_{Q_m,\kappa}$ (6.5 et 6.6) vérifiant les propriétés locales requises.
La démarche utilisée pour démontrer les résultats ci-dessus est la suivante : on les obtient d'abord pour des poids très réguliers ($\kappa = (k_1, k_2)$, $k_1 > k_2 >> 0$), on les étend ensuite à des poids entiers quelconques par un argument de famille. L'avantage de travailler avec des poids très réguliers et que les formes modulaires p-adiques ordinaires cuspidales sont classiques. On peut donc aussi bien utiliser les outils de la théorie des formes p-adiques de [**Hi02**] et [**Pi1**] que les outils automorphes (voir 2.4 et prop. 3.3).

Les systèmes de Taylor-Wiles ainsi définis nous donnent alors des isomorphismes $R_{i_\kappa} \simeq \mathrm{T}_\kappa$ pour tout poids κ congru au poids de f (7.2).

On en déduit des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ \tilde{\mathrm{T}} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ \tilde{R} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Spec}\ \mathrm{T}_\kappa & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Spec}\ R_{i_\kappa} \end{array}$$

de schémas sur Spec Λ pour tout poids $\kappa \in X(\mathrm{T})$ congru au poids de f. Là encore, un argument de densité des poids entiers nous permet d'en déduire (7.3) l'isomorphisme $\tilde{R} \simeq \tilde{\mathrm{T}}$.

5. Déformations

Soit $\mathcal{O}$ un anneau d'entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et soit $\mathbb{F}$ son corps résiduel. Soit $\widehat{\mathcal{AR}_\mathcal{O}}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{O}$-algèbres locales noethériennes complètes A, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$, telles que le morphisme structural $\mathcal{O} \to A$ induise un isomorphisme des corps résiduels. Ceci nous permet d'identifier $A/\mathfrak{m}_A$ avec $\mathbb{F}$. Notons $\mathcal{AR}_\mathcal{O}$ la sous-catégorie pleine des $\mathcal{O}$-algèbre artiniennes locales complètes.

5.1. Conditions sur la ramification. — Soit ℓ un nombre premier différent de p et soit A un objet de $\widehat{\mathcal{AR}_\mathcal{O}}$. Soit $\rho : I_\ell \to \mathrm{G}(A)$ une représentation du groupe d'inertie en ℓ.

Définition 5.1. — *On dit que la représentation ρ est ramifiée :*
- *de type χ_ℓ, s'il existe un caractère $\chi_\ell : \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}^\times \to A^\times$ non trivial tel que ρ soit la somme de deux plans totalement isotropes, l'un portant une action trivial de I_ℓ et l'autre une action de I_ℓ par χ_ℓ et si de plus $\ell - 1$ est premier à p.*
- *de type ϵ_2, si l'inertie I_ℓ agit à travers un conjugué de l'unipotent* $\exp \epsilon_2$.
- *de type ϵ, si l'inertie I_ℓ agit à travers un conjugué de l'unipotent* $\exp \epsilon$.
- *de type très ramifiée (TR), si l'image de l'inertie I_ℓ est irréductible et $\ell^4 - 1$ est premier à p.*

Le lemme suivant exprime que les déformations d'une représentation très ramifiée sont triviales.

Lemme 5.1 **([G-T] 4.3.6)**. — *Soit $\rho, \rho' : I_\ell \to \mathrm{G}(A)$ deux représentations. On suppose que les représentations résiduelles sont très ramifiées et isomorphes. Alors ρ et ρ' sont isomorphes.*

Soit à présent une représentation globale $\rho : \Gamma \to \mathrm{G}(A)$. On note S l'ensemble des places finies de $\mathbb{Q}$ différentes de p auxquelles ρ est ramifiée.

Définition 5.2. — *On dit que ρ est bien ramifiée si :*
- *L'ensemble S est fini.*
- *Pour tout $\ell \in S$, $\rho|_{I_\ell}$ est de type $\chi_\ell, \epsilon_2, \epsilon$ ou TR.*

5.2. Conditions en p. — Soit A un objet de $\widehat{\mathcal{AR}_\mathcal{O}}$ et soit $\rho : D_p \to \mathrm{G}(A)$ une représentation.

Définition 5.3. — *On dit que ρ est ordinaire en p pour des caractères $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ si :*

$$\rho \simeq \begin{pmatrix} \lambda_0 & \star & \star & \star \\ & \lambda_1 & \star & \star \\ & & \lambda_2 & \star \\ & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

et s'il existe un quadruplet $i = (i_0, i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{Z}^4$ tel que :

$$\forall i \in \{0,1,2,3\},\ \lambda_r|_{I_p} = \chi_p^{-i_r}$$

Le quadruplet i est appelé un poids de ρ.
(FOR) *On dit que ρ est fortement ordinaire si de plus, pour tout $r, r' \in \{0,1,2,3\}$, $r < r'$, le caractère résiduel $\bar\lambda_r \bar\lambda_{r'}^{-1}$ n'est ni trivial, ni le caractère cyclotomique résiduel $\bar\chi_p$.*

Remarque 5.1. — Le poids d'une représentation ordinaire n'est donc pas unique en général.

Soit $\rho : D_p \to \mathrm{G}(\mathbb{F})$ une représentation ordinaire pour des caractères $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. On appelle *poids de Hodge-Tate résiduel* de ρ le quadruplet $\bar i = (\bar i_0, \bar i_1, \bar i_2, \bar i_3) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^4$ tel que

$$\forall i \in \{0,1,2,3\},\ \lambda_r|_{I_p} = \bar\chi_p^{-\bar i_r}$$

Lorsque $\bar i_0 = 0$, nous posons $\bar\kappa = (2 - \bar i_2, 1 - \bar i_1) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$. Par analogie avec le théorème 3.2, on dit également que ρ est de poids résiduel $\bar\kappa$.

Si $\rho : D_p \to \mathrm{G}(A)$ est fortement ordinaire (FOR) pour les caractères $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, il existe une unique filtration

$$0 = \mathrm{Fil}_{-1} \subset \mathrm{Fil}_0 \subset \mathrm{Fil}_1 \subset \mathrm{Fil}_2 \subset \mathrm{Fil}_3 = \rho$$

stable sous D_p et telle que $\mathrm{Fil}_r/\mathrm{Fil}_{r-1} = \lambda_r$ pour $r = 0, ..., 3$. On l'appelle la *filtration naturelle.*

Remarque 5.2. — Sans l'hypothèse (FOR), une représentation ordinaire peut stabiliser de nombreux drapeaux comme le montre l'exemple de la représentation triviale.

5.3. Le foncteur de déformation $\mathbb{D}_i$. — Soit $\bar\rho : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathbb{F})$ une représentation irréductible telle que :
- $\bar\rho$ est résiduellement irréductible
- $\bar\rho$ est bien ramifiée, on note S l'ensemble des places différentes de p où ρ se ramifie.
- $\bar\rho$ est fortement ordinaire en p pour des caractères $(\bar\lambda_0, \bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \bar\lambda_3)$.
- $\bar\lambda_0|_{I_p} = 1$

Soit $\bar i = (\bar i_0, \bar i_1, \bar i_2, \bar i_3) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^4$ le poids de Hodge-Tate résiduel de $\bar\rho$. Notons également $\bar\kappa = (2 - \bar i_2, 1 - \bar i_1) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$.

Soit $i \in \mathbb{Z}^4$ un quadruplet de poids de $\bar\rho$ relevant le poids résiduel $\bar i$.

A tout objet A de $\mathcal{AR}_\mathcal{O}$, on associe l'ensemble $E(A)$ des classes d'isomorphismes de déformations $\rho_A : \Gamma \to \mathrm{G}(A)$ de $\bar\rho$ qui sont non-ramifiées hors de $S \cup \{p\}$ et qui vérifient :

– ρ_A est bien ramifiée en S de même type que $\bar\rho$: pour tout $s \in S$ si $\bar\rho|_{I_s}$ est ramifiée de type χ_s (resp. ϵ_2, ϵ, TR) alors $\rho_A|_{I_s}$ est aussi ramifiée de type χ_s (resp. ϵ_2, ϵ, TR).
– ρ_A est ordinaire en p pour des caractères $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ relevant $(\bar\lambda_0, \bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \bar\lambda_3)$ et est de poids i.

Remarque 5.3. — On remarque que tous les éléments de $E(A)$ ont le même facteur de similitude à cause des conditions locales fixées.

Ceci permet de définir le foncteur :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}_i : \mathcal{AR}_{\mathcal{O}} & \longrightarrow & ENS \\ A & \rightsquigarrow & E(A) \end{array}$$

Proposition 5.1 **([G-T], 4.1)**. — *Le foncteur $\mathbb{D}_i$ est pro-représentable*

Soit alors un couple (ρ_{univ}, R_i), où R_i est un objet de $\widehat{\mathcal{AR}_{\mathcal{O}}}$, qui représente $\mathbb{D}_i$.

5.4. Le foncteur de déformation $\tilde{\mathbb{D}}$. — Rappelons que $\bar\rho$ est fortement ordinaire pour des caractères $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Ceci signifie en particulier que

$$\bar\rho|_{D_p} \simeq \begin{pmatrix} \bar\lambda_0 & \star & \star & \star \\ & \bar\lambda_1 & \star & \star \\ & & \bar\lambda_2 & \star \\ & & & \bar\lambda_3 \end{pmatrix}$$

et que les caractères $\{\bar\lambda_r\}_{r\in[0,3]}$ sont distincts. On dispose alors d'une unique filtration naturelle stable sous D_p (voir 5.2),

$$0 = \bar{\mathrm{Fil}}_{-1} \subset \bar{\mathrm{Fil}}_0 \subset \bar{\mathrm{Fil}}_1 \subset \bar{\mathrm{Fil}}_2 \subset \bar{\mathrm{Fil}}_3 = \bar\rho$$

telle que $\bar{\mathrm{Fil}}_r/\bar{\mathrm{Fil}}_{r-1} = \bar\lambda_r$, pour $r = 0, ..., 3$. Rappelons de plus que $\bar\lambda_0|_{I_p} = 1$.
A tout objet A de $\mathcal{AR}_{\mathcal{O}}$, on associe l'ensemble $\tilde{E}(A)$ des classes d'isomorphismes de déformations $\rho_A : \Gamma \to \mathrm{G}(A)$ de $\bar\rho$ qui sont non-ramifiées hors de $S \cup \{p\}$ et qui vérifient :
– ρ_A est bien ramifiée en S de même type que $\bar\rho$: pour tout $s \in S$ si $\bar\rho|_{I_s}$ est ramifiée de type χ_s (resp. ϵ_2, ϵ, TR) alors $\rho_A|_{I_s}$ est aussi ramifiée de type χ_s (resp. ϵ_2, ϵ, TR).
– Il existe une filtration (nécessairement unique) $\{\mathrm{Fil}_r^A\}$ sur ρ_A relevant la filtration naturelle $\{\bar{\mathrm{Fil}}_r\}$ et stable sous $\rho_A|_{D_p}$.
– Pour $r = 0, ..., 3$ soit $\lambda_{A,r} : D_p \to A^\times$ le caractère donnant l'action de D_p sur $\mathrm{Fil}_r^A/\mathrm{Fil}_{r-1}^A$. On a $\lambda_{A,0}|_{I_p} = 1$.

Ceci permet de définir le foncteur :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\mathbb{D}} : \mathcal{AR}_{\mathcal{O}} & \longrightarrow & ENS \\ A & \rightsquigarrow & \tilde{E}(A) \end{array}$$

Proposition 5.2 **([Til], prop. 2.1)**. — *Le foncteur $\tilde{\mathbb{D}}$ est pro-représentable*

Soit alors un couple $(\rho_{univ}, \tilde{R})$, où $\tilde{R}$ est un objet de $\widehat{\mathcal{AR}_{\mathcal{O}}}$, qui représente $\mathbb{D}$.

5.5. La structure de Λ-algèbre. — Soit T le tore standard du groupe algébrique $\mathrm{GL}_2 \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}$. Considérons le pro-$p$ groupe $H = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{T}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\big)$. Soit $\Lambda = \mathcal{O}[[H]]$ l'algèbre de groupe complétée. Tout caractère $n : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_m$ induit par restriction un caractère de H et définit un point

$$P_n : \mathrm{Spec}\ \mathcal{O} \to \mathrm{Spec}\ \Lambda$$

La théorie du corps de classe locale identifie le pro-p Sylow du groupe d'inertie de l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}_p$ avec le groupe $\mathbb{Z}_p$. Notons $\pi : I_p \to \mathbb{Z}_p$ cette projection. Considérons le caractère universel

$$\begin{array}{rcl} \chi_{univ} : I_p & \to & \mathcal{O}[[T]] \\ \sigma & \mapsto & (1+T)^{\pi(\sigma)} \end{array}$$

Soit $\lambda : I_p \to \mathbb{F}^\times$ un caractère de I_p. Considérons le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}_\lambda : \mathcal{AR}_{\mathcal{O}} & \longrightarrow & ENS \\ A & \rightsquigarrow & \{\lambda_A : I_p \to A^\times,\ \lambda_A \otimes A/\mathfrak{m}_A = \lambda\} \end{array}$$

Notons $[\lambda] : I_p \to \mathcal{O}^\times$ le relèvement de Teichmuller de λ. La proposition suivante est classique.

Proposition 5.3. — *Le couple $(\chi_{univ} \otimes [\lambda], \mathcal{O}[[T]])$ représente le foncteur $\mathbb{D}_\lambda$.*

Les applications Gr_1 et Gr_2 (Gr comme gradué) qui à tout A-point ρ_A de $\tilde{\mathbb{D}}$ associent respectivement les caractères

$$\lambda_{A,1}^{-1} \otimes \chi_p : I_p \to A^\times \text{ et } \lambda_{A,2}^{-1} \otimes \chi_p^2 : I_p \to A^\times$$

définissent deux morphismes de foncteurs

$$\mathrm{Gr}_1 : \tilde{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{D}_{\lambda_1^{-1}\otimes\chi_p} \text{ et } \mathrm{Gr}_2 : \tilde{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{D}_{\lambda_2^{-1}\otimes\chi_p^2}$$

On a donc des morphismes d'algèbre $\mathrm{Gr}_1 : \mathcal{O}[[X]] \to \tilde{R}$ et $\mathrm{Gr}_2 : \mathcal{O}[[X]] \to \tilde{R}$.

L'application qui à Y associe $diag(1+p,1) \in H$ et X associe $diag(1,1+p) \in H$ identifie $\mathcal{O}[[X]]\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathcal{O}[[Y]] = \mathcal{O}[[X,Y]]$ à Λ. Le morphisme $\mathrm{Gr}_1\hat{\otimes}\mathrm{Gr}_2 : \Lambda \to \tilde{R}$ définit une structure de Λ-algèbre sur $\tilde{R}$.
On rappelle qu'à tout poids $\kappa \in \mathbb{Z}^2$, on associe le quadruplet $i_\kappa = (0, 2-k_2, 1-k_1, 3-k_1-k_2)$. La proposition suivante est immédiate.

Proposition 5.4. — *Pour tout poids κ relevant $\bar{\kappa}$, on a un isomorphisme canonique*

$$(\mathrm{Spec}\ \tilde{R})|_{P_\kappa} \simeq \mathrm{Spec}\ R_{i_\kappa}$$

5.5.0.1. Notation :— *Dans la suite de cette partie 5 on fixe un poids κ relevant le poids $\bar{\kappa}$. Pour alléger les notations, on note simplement $\mathbb{D}$ le foncteur $\mathbb{D}_{i_\kappa}$ et R l'anneau R_{i_κ}.*

5.6. Les foncteurs de déformation $\mathbb{D}_Q$. — Un *nombre de Taylor-Wiles* est un nombre premier q qui n'appartient pas à S, qui est congru à 1 modulo p et tel que $\bar{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$ ait 4 valeurs propres distinctes. Un *ensemble de Taylor-Wiles* est un ensemble de tels nombres. Soit q un nombre de Taylor-Wiles et soit $\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q$ avec $\bar{\alpha}_q\bar{\delta}_q = \bar{\beta}_q\bar{\gamma}_q$ les valeurs propres de Frob_q.
On a une décomposition de $\bar{\rho}|_{D_q}$ en la somme de deux plans isotropes $\bar{V}_e \oplus \bar{V}_m$, telle que les valeurs propres de Frob_q sur $\bar{V}_e$ (resp. sur $\bar{V}_m$) soient $\bar{\alpha}_q$ et $\bar{\beta}_q$ (resp. $\bar{\gamma}_q$ et $\bar{\delta}_q$).
Pour tout $q \in Q$, soit Δ_q le p-groupe de Sylow de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Posons aussi $\Delta_Q = \prod_{q\in Q} \Delta_q$.

Lemme 5.2 **([G-T], lem. 5.1.1.).** — *Soit $q \in Q$ et A un objet de $\mathcal{AR}_{\mathcal{O}}$. Toute déformation $D_q \to \mathrm{G}(A)$ de $\rho|_{D_q}$ est la somme de quatre caractères.*

A tout objet A de $\mathcal{AR}_{\mathcal{O}}$, on associe l'ensemble $E_Q(A)$ des classes d'isomorphismes de déformations $\rho_A : \Gamma \to \mathrm{G}(A)$ de $\bar{\rho}$ qui sont non ramifiées hors de $S \cup Q \cup \{p\}$ et qui vérifient :

- ρ_A est bien ramifiée en S de même type que $\bar{\rho}$.
- Pour tout $q \in Q$, il existe une décomposition de $\rho_A|_{D_q}$ en la somme de deux plans isotropes $\rho_A|_{D_q} = V_e \oplus V_m$ induisant modulo $\mathfrak{m}_A$ la décomposition $\bar{\rho}|_{D_q} = \bar{V}_e \oplus \bar{V}_m$, et de plus V_e est non ramifiée et I_q agit sur V_m par un caractère $\chi_q : \Delta_q \to A^{\times}$.
- ρ_A est ordinaire en p pour des caractères $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ relevant $(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3)$ et de poids i.

Ceci nous permet de définir le foncteur :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}_Q : \mathcal{AR}_{\mathcal{O}} & \longrightarrow & ENS \\ A & \rightsquigarrow & E_Q(A) \end{array}$$

Remarque 5.4. — Le foncteur $\mathbb{D}_Q$ dépend non seulement de l'ensemble q, mais aussi d'un ordre sur les valeurs propres de $\bar{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$.

Proposition 5.5 **([G-T], prop. 5.2.1).** — *Le foncteur $\mathbb{D}_Q$ est pro-représentable.*

Soit alors un couple (ρ_{univ}, R_Q), où R_Q est un objet de $\widehat{\mathcal{AR}_{\mathcal{O}}}$, qui représente $\mathbb{D}_q$.

Remarquons que $\mathbb{D}$ est un sous-foncteur de $\mathbb{D}_Q$, ce qui nous permet d'identifier R à un quotient de R_Q.

On a un caractère tautologique $\chi_Q^{univ} : \Delta_Q \to \mathcal{O}[\Delta_Q]^{\times}$ et le couple $(\mathcal{O}[\Delta_Q], \chi_Q^{univ})$ représente le foncteur des déformations du caractère trivial de Δ_Q.
On dispose d'un morphisme naturel Spec $R_Q \to$ Spec $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ qui à un A-point ρ_A de $\mathbb{D}_Q$ associe le caractère $\bigotimes_{q \in Q} \chi_q : \Delta_Q \to A^{\times}$ où chaque χ_q est le caractère donnant l'action de I_q sur V_m.
Le caractère trivial de Δ_Q définit un $\mathcal{O}$-point de Spec $\mathcal{O}[\Delta_q]$. La fibre du morphisme Spec $R_Q \to$ Spec $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ au dessus de ce point est canoniquement isomorphe à Spec R.

5.7. Critère de contrôle. — L'objet de ce paragraphe et d'établir, sous certaines hypothèses sur $\bar{\rho}$, l'existence d'une suite d'ensembles $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de nombres premiers de Taylor-Wiles tels que :

- (P1) pour tout $q \in Q_m$, $q = 1 \bmod p^m$.
- (P2) pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sharp Q_m = r$ ne dépend pas de m.
- (P3) l'anneau R_{Q_m} est un quotient d'une $\mathcal{O}$-algèbre de séries formelles en r indéterminées.

Posons $K_m = \mathbb{Q}(\zeta_{p^m})$ et notons son groupe de Galois absolu Γ_{K_m}. Soit L_m l'extension de K_m fixée par le noyau de Ad $\bar{\rho}|\Gamma_{K_m}$. Soit Γ_{L_m} son groupe de Galois absolu. Notons également $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{G}(\mathbb{F})$ et $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{n}$ les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ du sous-groupe de Borel supérieur et de son radical unipotent.

Les hypothèses (H 1), (H 2) et (H 3) sont :

- (H 1) L_1 est une extension stricte de L_0 ou de manière équivalente $\zeta_p \notin L_0$.
- (H 2) Pour tout m : (H 2 (m)) il existe $\sigma \in \Gamma_{K_m}$ tel que $\bar{\rho}(\sigma)$ ait 4 valeurs propres distinctes et tel que Ad $\bar{\rho}(\sigma)$ admette la valeur propre 1 sur tout sous-espace irréductible de la représentation Ad $\bar{\rho}|_{\Gamma_{K_m}}$.

– (H 3) $\dim \mathrm{H}^0(\Gamma,\mathfrak{g}) = 1$ et $\dim \mathrm{H}^0(\Gamma,\mathfrak{g}(1)) = 0$.

Dans la suite de cette section, on démontre :

Proposition 5.6. — *Sous les hypothèses* (H 1), (H 2), (H 3) *il existe une suite d'ensembles* $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *satisfaisant* (P1),(P2),(P3).

Avant cela, nous rappelons certains calculs de cohomologie galoisienne.

5.7.1. Espaces tangents des foncteurs de déformation. — Les espaces tangents des foncteurs $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}_Q$ sont naturellement isomorphes à des sous-groupe de $\mathrm{H}^1(\Gamma,\mathfrak{g})$ que nous allons préciser.

Pour chaque place v nous definissons un groupe $L_v \subset \mathrm{H}^1(D_v,\mathfrak{g})$, et pour $q \mid Q$ nous définissons de plus un groupe $L_{Q,q}$:

– Pour tout $\ell \nmid p$ soit
$$L_\ell = \mathrm{H}^1(D_\ell/I_\ell,\mathfrak{g}).$$
– Pour $q \mid Q$, rappelons que $\bar\rho|_{D_q}$ est non ramifiée et que les valeurs propres du Frobenius notées $\alpha_q,\beta_q,\gamma_q,\delta_q$ sont distinctes. Soit alors $\bar\rho|_{D_q} = \bar V_{\alpha_q}\oplus\bar V_{\beta_q}\oplus\bar V_{\gamma_q}\oplus\bar V_{\delta_q}$ la décomposition en sous-espaces propres pour le Frobenius . Soit
$$L_{Q,q} = \{(c_1,c_2,d_1,d_2)\in \mathrm{H}^1(D_q,\mathrm{End}\bar V_{\alpha_q}\oplus\mathrm{End}\bar V_{\beta_q}\oplus\mathrm{End}\bar V_{\gamma_q}\oplus\mathrm{End}\bar V_{\delta_q})$$
tels que $c_1+d_1 = c_2+d_2$ et d_2-d_1 est non ramifié $\}$.
– Posons
$$L'_p = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{H}^1(D_p,\mathfrak{b})\to\mathrm{H}^1(I_p,\mathfrak{b}/\mathfrak{n})\big)$$
et définissons L_p comme l'image de L'_p par l'application $\mathrm{H}^1(D_p,\mathfrak{b})\to\mathrm{H}^1(D_p,\mathfrak{g})$.

***Proposition 5.7* ([G-T], prop. 10.2.1).** — *L'espace tangent du foncteur $\mathbb{D}$ est naturellement isomorphe à :*
$$\mathrm{H}^1_{\mathbb{D}}(\Gamma,\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{H}^1(\Gamma,\mathfrak{g})\to\oplus_v\ \mathrm{H}^1(D_v,\mathfrak{g})/L_v\Big).$$
L'espace tangent du foncteur $\mathbb{D}_Q$ est naturellement isomorphe à :
$$\mathrm{H}^1_{\mathbb{D}_Q}(\Gamma,\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{H}^1(\Gamma,\mathfrak{g})\to\oplus_{v\nmid Q}\ \mathrm{H}^1(D_v,\mathfrak{g})/L_v\ \ \oplus_{q|Q}\ \mathrm{H}^1(D_q,\mathfrak{g})/L_{Q,q}\Big).$$

5.7.2. Application de la formule de Poitou-Tate. — Pour chaque place v l'accouplement de dualité :
$$\mathrm{H}^1(D_v,\mathfrak{g})\times\mathrm{H}^1(D_v,\mathfrak{g}(1))\to\mathrm{H}^2(D_v,\mathbb{F}\otimes\mu_p)\simeq\mathbb{F}$$
nous permet de considérer les orthogonaux $L_v^\perp$ et $L_{Q,q}^\perp$ de L_v et $L_{Q,q}$.

On définit comme précédemment des espaces :
$$\mathrm{H}^1_{\mathbb{D},\perp}(\Gamma,\mathfrak{g}(1)) = \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{H}^1(\Gamma,\mathfrak{g}(1))\to\oplus_v\ \mathrm{H}^1(D_v,\mathfrak{g}(1))/L_v^\perp\Big)$$
$$\mathrm{H}^1_{\mathbb{D}_Q,\perp}(\Gamma,\mathfrak{g}(1)) = \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{H}^1(\Gamma,\mathfrak{g}(1))\to\oplus_{v\nmid Q}\ \mathrm{H}^1(D_v,\mathfrak{g}(1))/L_v^\perp\ \ \oplus_{q|Q}\ \mathrm{H}^1(D_q,\mathfrak{g}(1))/L_{Q,q}^\perp\Big).$$
Posons $h^0 = \dim \mathrm{H}^0(\Gamma,\mathfrak{g})$, $h^{0,\star} = \dim \mathrm{H}^0(\Gamma,\mathfrak{g}(1))$ et $h^0_v = \dim \mathrm{H}^0(D_v,\mathfrak{g})$, on dispose alors de la formule de Poitou-Tate (voir [**G-T**], thm. 10.3.1) :

Théorème 5.1. — *On a l'identité :*
$$\dim\mathrm{H}^1_{\mathbb{D}_Q}(\Gamma,\mathfrak{g}) - \dim\mathrm{H}^1_{\mathbb{D}_Q,\perp}(\Gamma,\mathfrak{g}(1)) = h^0 - h^{0,\star} + \sum_{q|Q}(\dim L_{Q,q} - h^0_q) + \sum_{v\nmid Q}(\dim L_v - h^0_v).$$

Corollaire 5.1. —
$$\dim\ \mathrm{H}^1_{\mathbb{D}_Q}(\Gamma,\mathfrak{g}) - \dim\ \mathrm{H}^1_{\mathbb{D}_Q,\perp}(\Gamma,\mathfrak{g}(1)) \le \sharp Q.$$

Démonstration. D'après les calculs de [**G-T**], prop 10.4.1., en invoquant (H 3), on a :
- $h^0_\infty = 5$ et $L_\infty = 0$.
- Pour $q \mid Q$ on a dim $L_{Q,q} = 4$ et $h^0_q = 3$.
- Pour $v \nmid pQ$ on a dim $L_v - h^0_v = 0$
- $h^0 = 1$ et $h^{0,\star} = 0$.
- En p on a une inégalité dim $L_p - h^0_p \leq 4$. En effet, considérons le diagramme exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & \mathrm{H}^1(D_p/I_p, \mathfrak{b}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(D_p/I_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(D_p, \mathfrak{n}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^1(D_p, \mathfrak{b}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(D_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) \arrow[d] & \\
 & & & & \mathrm{H}^1(I_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) &
\end{tikzcd}$$

On en déduit l'identité :

$$\dim L'_p - h^0(D_p, \mathfrak{b}) = h^1(D_p/I_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) - h^0(D_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) + h^1(D_p, \mathfrak{n}) - h^0(D_p, \mathfrak{n}).$$

D'une part $h^1(D_p/I_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) = h^0(D_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{n}) = 3$ et d'autre part $h^1(D_p, \mathfrak{n}) - h^0(D_p, \mathfrak{n}) = \dim \mathfrak{n} + h^0(D_p, \mathfrak{n}^\vee(1))$. Sous l'hypothèse (FOR), $h^0(D_p, \mathfrak{n}^\vee(1)) = 0$. On en déduit l'inégalité annoncée.

□

5.7.3. Fin de la démonstration. — Pour démontrer le critère 5.6, il suffit donc de montrer que pour tout $m \geq 1$ il existe un ensemble Q_m de nombres premiers premiers n'appartenant pas à S, tels que :
- $\sharp Q_m = r$.
- Pour tout $q \in Q_m$, $\bar{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$ a ses valeurs propres distinctes.
- Pour tout $q \in Q_m$, $q = 1 \bmod p^m$.
- $\mathrm{H}^1_{\mathbb{D}_Q,\perp}(\Gamma, \mathfrak{g}(1)) = 0$.

Soit Q un ensemble de Taylor-Wiles. Pour tout $q \in Q$, soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base symplectique de $\bar{\rho}$, telle qu'on ait dans cette base $\bar{\rho}(\mathrm{Frob}_q) = diag(\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q)$. Cette base fixe une énumération des valeurs propres et permet bien de définir $\mathbb{D}_Q$. Soit $(e_{i,j})$ la base de Ad $\bar{\rho}(1)$ naturellement déduite de (e_i).
On vérifie sans peine ([**G-T**], 10.5) que

$$\mathrm{H}^1_{\mathbb{D}_Q,\perp}(\Gamma, \mathfrak{g}(1)) = \ker\big(\mathrm{H}^1_{\mathbb{D},\perp}(\Gamma, \mathfrak{g}(1)) \to \oplus_{q\in Q}\ \mathrm{H}^1(D_q/I_q, k\ e_{4,4})\big).$$

En vertue du corollaire 5.1, il suffit d'annuler ce dernier groupe, pour des choix convenables de nombre premiers q de Taylor-Wiles. On se ramène donc à montrer que, pour tout $c \in \mathrm{H}^1_{\mathbb{D},\perp}(\Gamma, \mathfrak{g}(1))$ non nul et pour tout $m \geq 1$, il existe un premier q, distinct de $\{p\} \cup S$, tel que :
- $\bar{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$ ait ses valeurs propres distinctes.
- $q = 1 \bmod p^m$.
- Il existe une base symplectique (e_i) dans laquelle $\bar{\rho}(\mathrm{Frob}_q) = diag(\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q)$ et tel que le coefficient (4,4) de la matrice $c(\mathrm{Frob}_q)$ dans la base $e_{i,j}$ soit non nul.

Grâce au théorème de Chebotarev, on se ramène à vérifier que, pour tout $c \in \mathrm{H}^1_{\mathbb{D},\perp}(\Gamma, \mathfrak{g}(1))$ non nul et pour tout $m \geq 1$, il existe un élément $\sigma \in \Gamma$ tel que :

- $\bar{\rho}(\sigma)$ a ses valeurs propres distinctes.
- $\sigma = 1$ sur $\mathbb{Q}(\zeta_{p^m}) = K_m$.
- Si $\{e_i\}$ est une base de vecteurs propres pour $\bar{\rho}(\sigma)$ et $\{e_{i,j}\}$ est la base naturellement induite sur $\mathfrak{g}$ et si P est la projection de $\mathfrak{g}$ sur $vect(e_{i,i}, i = 1, ..., 4)$ parallèlement à $vect(e_{i,j}, i \neq j)$, on a $P(c(\sigma)) \neq 0$.

Considérons la restriction

$$res : \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathfrak{g}(1)) \to \left(\mathrm{H}^1(\Gamma_{L_m}, \mathfrak{g}(1))\right)^\Gamma$$

Lemme 5.3. — *Si l'hypothèse* (H 1) *est satisfaite, l'application de restriction ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. L'application res est surjective et son noyau vaut $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L_m/\mathbb{Q}), \mathfrak{g}(1))$. La suite spectrale de Hochschild-Serre donne alors

$$0 \to \mathrm{H}^1(L_1/\mathbb{Q}, \mathfrak{g}(1)) \to \mathrm{H}^1(L_m/\mathbb{Q}, \mathfrak{g}(1)) \to \mathrm{H}^1(L_m/L_1, \mathfrak{g}(1))^{\mathrm{Gal}(L_1/\mathbb{Q})} \to 0$$

Le membre de droite vaut $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(L_1/\mathbb{Q})}\big(\mathrm{Gal}(L_m/L_1), \mathfrak{g}(1)\big)$ et il s'injecte dans

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(L_1/L_0)}\big(\mathrm{Gal}(L_m/L_1), \mathfrak{g}(1)\big) = \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Gal}(L_m/L_1), \mathfrak{g}(1)^{\mathrm{Gal}(L_1/L_0)}\big)$$

On a une injection naturelle de $\mathrm{Gal}(L_1/L_0)$ dans $\mathrm{Gal}(K_1/\mathbb{Q})$. Par construction le $\mathrm{Gal}(L_1/L_0)$-module $\mathfrak{g}$ est trivial. Comme par hypothèse $\mathrm{Gal}(L_1/L_0) \neq \{1\}$, on en déduit que

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(L_1/L_0), \mathfrak{g}(1)) = 0$$

Le membre de gauche s'insère à nouveau dans une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^1(L_0/\mathbb{Q}, \mathfrak{g}(1)^{\mathrm{Gal}(L_1/L_0)}) \to \mathrm{H}^1(L_1/\mathbb{Q}, \mathfrak{g}(1)) \to \mathrm{H}^1(L_1/L_0, \mathfrak{g}(1))^{\mathrm{Gal}(L_0/\mathbb{Q})} \to 0$$

Le terme de gauche est nul par les mêmes arguments que précédemment. Le membre de droite s'injecte dans $\mathrm{H}^1\big(L_1/L_0, \mathfrak{g}(1)\big)$ et ce dernier groupe est nul car $\mathrm{Gal}(L_1/L_0)$ est un groupe d'ordre premier à p. □

Soit donc $c \in \mathrm{H}^1_{\mathbb{D},\perp}(\Gamma, \mathfrak{g}(1))$, non nul. La proposition précédente permet d'identifier c à un élément de $(\mathrm{H}^1(\Gamma_{L_m}, \mathfrak{g}(1)))^\Gamma$ et donc aussi de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(L_m/K_m)}(\Gamma_{L_m}, \mathfrak{g}(1))$. Notons $V_c \subset \mathfrak{g}(1)$ le sous $\mathbb{F}$-espace vectoriel engendré par $c(\Gamma_{L_m})$. C'est aussi un sous Γ_{K_m}-module de $\mathfrak{g}(1)$. Soit $\sigma \in \Gamma_{K_m}$ satisfaisant à l'hypothèse (H 2). Notons $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de vecteurs propres pour $\bar{\rho}(\sigma)$. Notons $\{e_{i,j}\}$ la base induite de $\mathfrak{g}(1)$. Pour tout $\tau \in \Gamma_{L_m}$, $\bar{\rho}(\tau)$ est central. Pour terminer la démonstration du critère, il suffit donc de trouver $\tau \in \Gamma_{L_m}$ tel que l'un des coefficients diagonaux de la matrice $c(\tau \circ \sigma) \in \mathfrak{g}(1)$ dans la base $\{e_i\}$ soit non nul.
Décomposons alors $c(\sigma) = \sum_{i,j} b_{i,j} e_{i,j}$. Si l'un des $b_{i,i}$ est non nul, σ convient et c'est terminé.
Sinon, d'après l'hypothèse (H 2), l'espace $V_c^\sigma = V \cap (\oplus_i \mathbb{F}e_{i,i})$ des invariants de V_c sous σ est non nul.
Il existe donc $\tau \in \Gamma_{L_m}$ tel que $c(\tau)$ possède une coordonnée non nulle en l'un des $e_{i,i}$. Comme $c(\tau \circ \sigma) = c(\tau) + c(\sigma)$ on voit que $\tau \circ \sigma$ convient.

5.8. Exemples d'images résiduelles permises. — Nous donnons ici des exemples de représentations résiduelles $\bar{\rho} : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathbb{F})$ qui sont très symplectiques et qui vérifient les hypothèses (H 1), (H 2) et (H 3). On note $\bar{\rho}^0 : \Gamma \to \mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F})$ la projectivisée de $\bar{\rho}$.

5.8.1. Le cas de grande image. —

Proposition 5.8. — *Soit* $\mathbb{F}'$ *un sous-corps de* $\mathbb{F}$*. Supposons que* $\bar{\rho}^0(\Gamma)$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}')$ *qui contient le sous-groupe* $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}')$*. Si* $p = 5$ *et* $\mathbb{F}' = \mathbb{F}_5$*, supposons de plus que* $\bar{\rho}^0(\Gamma) = \mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}')$*. Alors la représentation* $\bar{\rho}$ *est très symplectique et vérifie* (H 1), (H 2), (H 3).

Démonstration. Soit $\psi =<,>$ une forme bilinéaire symétrique ou alternée, non dégénérée, préservée à un caractère près par un groupe dont l'image projective est $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}')$. Comme le centre de $\mathrm{G}(\mathbb{F})$ agit par similitude pour toute forme bilinéaire, c'est donc que ψ est respectée à un caractère près par le groupe $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}')$. Comme $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}')$ est égal à son groupe dérivé, la forme ψ est respectée par $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}')$. On écrit alors que ψ est respectée par les matrices unipotentes

$$M = \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $j = 1...4$, les relations $< Me_1, Me_j >=< e_1, e_j >$ donnent $< e_1, e_i >= 0$ si $i = 1...3$. De même, les relations $< Me_2, Me_j >=< e_2, e_j >$ donnent $< e_2, e_2 >= 0$, $< e_2, e_3 >=< e_1, e_4 >$ et $< e_2, e_1 >= - < e_1, e_2 >$. C'est donc que ψ est alternée. En utilisant N de la même manière on trouve finalement que $< e_2, e_4 >=< e_3, e_4 >= 0$ et donc ψ est un multiple de la forme symplectique standard.
On remarque ensuite que comme $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}') \subset \mathrm{Ad}\ \bar{\rho}(\Gamma) \subset \mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}')$, l'abélianisé $\big(\mathrm{Ad}\ \bar{\rho}(\Gamma)\big)^{ab}$ est un groupe d'ordre 1 ou 2. L'hypothèse (H 1) est donc vérifiée car $p \geq 5$. Il en résulte aussi que $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}') \subset \mathrm{Ad}\bar{\rho}(\Gamma_m)$ pour tout m.
L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose sous l'action de $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}')$ en la somme de deux sous-espaces irréductibles, son centre $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}^{ss}$, l'algèbre de Lie du sous-groupe Sp_4. Si $\mathbb{F}' \neq \mathbb{F}_5$, il existe $x, y \in \mathbb{F}'^{\times}$ tels que les éléments $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ soient distincts. Pour tout m soit $\sigma_m \in \Gamma_m$ tel que $\bar{\rho}(\sigma_m) = \lambda.diag(x, y, y^{-1}, x^{-1})$ avec $\lambda \in \mathbb{F}'^{\times}$. Si $\mathbb{F}' = \mathbb{F}_5$, l'hypothèse supplémentaire entraîne que $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}') = \mathrm{Ad}\bar{\rho}(\Gamma_m)$ pour tout m. Choisissons $\sigma_m \in \Gamma_m$ tel que $\bar{\rho}(\sigma_m) = \lambda.diag(2, 1, 3, 4)$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_5^{\times}$. L' élément σ_m possède la valeur propre 1 sur les deux sous-espaces irréductible $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}^{ss}$ de $\mathfrak{g}$, ce qui montre que (H 2) est vérifiée. Vérifions maintenant (H 3). On a $\mathrm{H}^0(\Gamma, \mathfrak{g}) = \mathrm{H}^0(\Gamma_1, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_0$. Il en résulte aussitôt que $\mathrm{H}^0(\Gamma, \mathfrak{g}(1)) = 0$. □

Remarque 5.5. — Si $p = 5$, $\bar{\rho}$ est la représentation résiduelle associée à une forme de poids $\kappa = (k_1, k_2)$ tel que $k_1 + k_2 - 3$ est impair et $\bar{\rho}^0$ est un sous-groupe de $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_5)$ qui contient $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_5)$, alors $\bar{\rho}^0 = \mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_5)$ d'après la proposition 3.1.

5.8.2. Le cas du cube symétrique. — Soit V un $\mathbb{Z}$ module libre de rang 2. Le module $\mathrm{Sym}^3 V$ est libre de rang 4. On peut définir un morphisme $\mathrm{Sym}^3 : \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{GL}_4$ dont le noyau est isomorphe au groupe μ_3 des racines cubiques de l'unité. Soit (e_1, e_2) une base de V et $(e_1^3, e_1^2 e_2, e_1 e_2^2, e_2^3)$ la base de $\mathrm{Sym}^3 V$ qu'elle induit. Dans ces bases, on a :

$$\mathrm{Sym}^3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 b & b^2 a & b^3 \\ 3a^2 c & a^2 d + 2abc & b^2 c + 2bda & 3b^2 d \\ 3c^2 a & c^2 b + 2acd & d^2 a + 2bdc & 3d^2 b \\ c^3 & c^2 d & d^2 c & d^3 \end{pmatrix}$$

L'image de Sym^3 préserve la forme symplectique ψ de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

au facteur de similitude $\det^3$ près. Comme $p \geq 5$, cette forme est non dégénérée sur $V_{\mathbb{F}}$.

Soit $\bar\eta : \Gamma \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ une représentation galoisienne. Formons $\bar\rho = \mathrm{Sym}^3\bar\eta$ et notons aussi $\bar\eta^0$ la projectivisé de $\bar\eta$. On peut donc plonger (non canoniquement) $\mathrm{Sym}^3\bar\eta$ dans $\mathrm{G}(\mathbb{F})$.

Proposition 5.9. — *Soit $\mathbb{F}'$ un sous-corps de $\mathbb{F}$. S'il existe dans $\mathbb{F}'^\times$ un élément a tel que $a^{12} \neq 1$ et si $\bar\eta^0(\Gamma)$ est un sous-groupe de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}')$ *qui contient* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}')$ *alors $\bar\rho$ est très symplectique et vérifie* (H 1), (H 2), (H 3).

Démonstration. Des calculs analogues à ceux de la démonstration 5.8 en remplaçant M et N par

$$\mathrm{Sym}^3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Sym}^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

montrent bien que $\bar\rho$ est très symplectique.
Comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}') \subset \mathrm{Ad}\ \bar\rho(\Gamma) \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}')$, $\mathrm{Ad}\ \bar\rho(\Gamma)^{ab}$ est un groupe abélien d'ordre 1 où 2. Par conséquent (H 1) est vraie et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}') \subset \mathrm{Ad}\bar\rho\ (\Gamma_m)$.
Sous l'action du tore $\{diag(a^3, a, a^{-1}, a^{-3}) = \mathrm{Sym}^3 diag(a, a^{-1}),\ a \in \mathbb{F}'^\times\}$, $\mathfrak{g}$ se décompose en la somme de ses sous-espaces propres :

$$\mathfrak{g} = \oplus\mathfrak{g}(a^n), \quad |n| = 0, 2, 4, 6.$$

Précisément :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}(a^0) &= \{diag(x, y, z-y, z-x),\ x, y, z \in \mathbb{F}\} \\
\mathfrak{g}(a^6) &= \mathbb{F}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}(a^{-6}) = {}^t\,\mathfrak{g}(a^6) \\
\mathfrak{g}(a^4) &= \mathbb{F}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}(a^{-4}) = \mathbb{F}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathfrak{g}(a^2) &= \{\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{F}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}(a^{-2}) = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{F}\}
\end{aligned}$$

Bien sûr les caractères $a \mapsto a^n$ ne sont pas forcément distincts. En utilisant l'action des unipotents, on trouve que $\mathfrak{g}$ est comme $\mathbb{F}[\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}')]$-module la somme de 3 sous-modules irréductibles :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_6$$

avec

$$\mathfrak{g}_0 = \mathbb{F}diag(1,1,1,1)$$

$$\mathfrak{g}_2 = \{\begin{pmatrix} 3z & y & 0 & 0 \\ 3x & z & 2y & 0 \\ 0 & 2x & -z & 3y \\ 0 & 0 & x & -3z \end{pmatrix}, \ x,y,z \in \mathbb{F}\} \text{ est la représentation de plus haut poids 2.}$$

$$\mathfrak{g}_6 = \{\begin{pmatrix} z & -v & -w & t \\ 3x & -3z & -3v & 3w \\ 3y & -3x & 3z & 3v \\ x & -y & x & -z \end{pmatrix}, \ t,u,v,w,x,y,z \in \mathbb{F}\} \text{ est la représentation de plus haut poids 6.}$$

Par hypothèse, il existe $a \in \mathbb{F}'$ tel que les nombres $\{a^3, a, a^{-1}, a^{-3}\}$ soient tous distincts. Choisissons $\sigma_m \in \Gamma_m$ tel que $\bar{\eta}(\sigma)$ soit égal à $\lambda.diag(a, a^{-1})$ pour $\lambda \in \mathbb{F}'^{\times}$. L'endomorphisme $\rho(\sigma)$ a 4 valeurs propres distinctes et son action adjointe sur $\mathfrak{g}(a^0)$ est triviale. Comme cet espace rencontre les 3 sous-espaces irréductibles de $\mathfrak{g}$, nous pouvons conclure. On vérifie enfin (H 3) comme dans la démonstration de la proposition 5.8. □

6. Algèbres de Hecke

6.1. L'algèbre $\tilde{\mathrm{T}}$. — Soit N un entier et $p \geq 5$ un nombre premier ne divisant pas N. Soit $K = \prod K^\ell \subset \mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$ un sous-groupe compact, tel que $K^\ell = \mathrm{G}(\mathbb{Z}_\ell)$ pour tout nombre premier ℓ ne divisant pas N. On suppose soit que K est net, soit que $p \geq 7$. Soit $S_K \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ le schéma de Siegel de genre 2, de niveau K. Pour tout poids $\kappa = (k_1, k_2)$, soit $\mathrm{S}(\kappa, K, \mathcal{O}) = \mathrm{H}^0_{cusp}(S_K, \omega^\kappa)$ l'espace des formes de Siegel de poids κ, de niveau K, cuspidales, à coefficients dans $\mathcal{O}$.

La théorie de Hida (rappelée au numéro 2.2.3) nous fournit un Λ-module libre de rang fini $\mathcal{V}^{ord,\star}_{cusp}$ qui vérifie la propriété de contrôle suivante :

Théorème 6.1 **([Hi02], [Pi1])**. — *Pour tout poids $\kappa \in X(\mathrm{T})$ très régulier, on a*

$$\mathcal{V}^{ord,\star}_{cusp} \otimes_{\Lambda, P_\kappa} \mathcal{O} = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}\big(\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathcal{O}), \mathcal{O}\big)$$

On rappelle que $\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathcal{O}) = e\mathrm{S}(\kappa, K, \mathcal{O})$ où e est le projecteur d'ordinarité. L'algèbre $\mathcal{H}^{Np}$ agit par correspondances algébriques sur le module $\mathcal{V}^{ord,\star}_{cusp}$ (voir 2.3.2). Notons $\tilde{\mathbb{T}}$ l'image de l'algèbre $\mathcal{H}^{Np} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ dans les endomorphismes de $\mathcal{V}^{ord,\star}_{cusp}$. C'est une Λ-algèbre finie et sans-torsion.

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\tilde{\mathbb{T}}$. Quitte à augmenter l'anneau de coefficients $\mathcal{O}$, on peut supposer que $\tilde{\mathbb{T}}/\mathfrak{m} = \mathbb{F}$. Soit $\bar{\rho} : \Gamma \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{F})$ la réduction de la représentation associée à un point très régulier (donc classique) et cohomologique de $\tilde{\mathbb{T}}_\mathfrak{m}$ par les résultats de [**Tay**], [**Lau**], [**Weis**] rappelés dans la partie 3. La semi-simplifiée de la représentation $\bar{\rho}$ ne dépend que de l'idéal $\mathfrak{m}$.

On est amené à faire des hypothèses sur la représentation $\bar{\rho}$ et le sous-groupe compact K.

Définition 6.1. — *Le couple $(\mathfrak{m}, K)$ comme ci-dessus est admissible si :*

1. *$\bar{\rho}$ est irréductible.*
2. *$\bar{\rho}$ est très symplectique (défi. 3.3), $\bar{\rho}$ se factorise donc à travers $\mathrm{G}(\mathbb{F})$.*
3. *$\bar{\rho}(\Gamma)$ vérifie (H 1), (H 2), (H 3) (voir 5.7).*
4. *$\bar{\rho}$ est bien ramifiée aux places divisant N (défi. 5.1) et pour tout ℓ divisant N :*
   - *Si $\bar{\rho}$ est ramifiée en ℓ de type χ_ℓ alors $K^\ell = \Pi^+(\ell)$.*

– *Si $\bar{\rho}$ est ramifiée en ℓ de type ϵ_2 alors $K^\ell = \Pi(\ell)$.*
– *Si $\bar{\rho}$ est ramifiée en ℓ de type ϵ alors $K^\ell = I(\ell)$.*

5. *$\bar{\rho}$ est fortement ordinaire en p (défi. 5.2).*

Remarque 6.1. — Cette définition est compatible avec la correspondance locale de Langlands.

Remarque 6.2. — On ne met pas de conditions sur le niveau aux premiers $\ell \mid N$ où $\bar{\rho}$ est TR.

On suppose à présent que le couple $(\mathfrak{m}, K)$ *est admissible.*

On note $\bar{\kappa}$ le poids résiduel de $\bar{\rho}$ et $\bar{i}_\kappa$ son poids de Hodge-Tate résiduel. On pose également $\tilde{\mathrm{T}} = \tilde{\mathbb{T}}_{\mathfrak{m}}$ et $\tilde{\mathcal{M}} = (\mathcal{V}^{ord,\star}_{cusp})_{\mathfrak{m}}$. C'est un $\tilde{\mathrm{T}}$-module fidèle.

6.2. L'algèbre T_κ et le module $\mathcal{M}_\kappa$. — Soit $\kappa = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ un poids relevant $\bar{\kappa}$. On note $\mathcal{M}_\kappa = \tilde{\mathcal{M}} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathcal{O}$. Lorsque κ est très régulier, on a

$$\mathcal{M}_\kappa = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathcal{O}), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$$

On note T_κ l'image de $\tilde{\mathrm{T}}$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_\kappa)$.

6.3. Les algèbres $\tilde{\mathrm{T}}_q$ et les modules $\tilde{\mathcal{M}}_q$. — Soit q un nombre premier ne divisant pas N, congru à 1 modulo p et tel que $\bar{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$ ait 4 valeurs propres distinctes $\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q$. Par symplecticité, on peut les ordonner telles que $\bar{\alpha}_q\bar{\delta}_q = \bar{\beta}_q\bar{\gamma}_q$.

Considérons les S_K-schémas de modules $S_{K\cap\Pi^+(q)}$ et $S_{K\cap\Pi(q)}$. Ce sont les espaces de modules pour les problèmes de modules de type Klingen strict : “un point d'ordre q ” et Klingen : “un sous-groupe d'ordre q ”. Ce sont des $\mathcal{O}$-schémas lisses et on a des morphismes finis étales d'oubli naturels :

$$S_{K\cap\Pi^+(q)} \to S_{K\cap\Pi(q)} \to S_K$$

De plus $S_{K\cap\Pi^+(q)}$ est un revêtement étale galoisien de $S_{K\cap(q)}$ de groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. On rappelle que $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times = \Delta_q \times \Delta'_q$, où Δ_q est le p-Sylow.

On considère le revêtement $S_{K\cap\Pi^+(q)}/\Delta'_q \to S_{K\cap\Pi(q)}$ de groupe Δ_q. La théorie de Hida associe à $S_{K\cap\Pi^+(q)}/\Delta'_q$ et $S_{K\cap\Pi(q)}$ des Λ-modules libres $\mathcal{V}^{ord,\star}_{1,q,cusp}$ et $\mathcal{V}^{ord,\star}_{0,q,cusp}$ qui vérifient le théorème de contrôle :

Théorème 6.2 **([Hi02],[Pi1])**. — *Pour tout poids $\kappa \in X(\mathrm{T})$ très régulier, on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{ord,\star}_{1,q,cusp} \otimes_{\Lambda,P_\kappa} \mathcal{O} &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\big(\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K\cap\Pi^+(q), \mathcal{O})^{\Delta'_q}, \mathcal{O}\big)\\ \mathcal{V}^{ord,\star}_{0,q,cusp} \otimes_{\Lambda,P_\kappa} \mathcal{O} &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\big(\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K\cap\Pi(q), \mathcal{O}), \mathcal{O}\big)\end{aligned}$$

On déduit facilement du théorème de contrôle horizontal (voir [**Pi1**], thm. 9.1) que $\mathcal{V}^{ord,\star}_{1,q,cusp}$ est de plus un $\Lambda[\Delta_q]$ module libre et que

$$\mathcal{V}^{ord,\star}_{1,q,cusp} \otimes_{\Lambda[\Delta_q],\Delta_q \xrightarrow{1} \mathcal{O}^\times} \Lambda = \mathcal{V}^{ord,\star}_{0,q,cusp}$$

Soit l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^N_q = \mathcal{H}^{Npq} \otimes \mathcal{H}^-_q = \mathcal{H}^{Npq}[U_0, U_1, U_2][\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]$. L'algèbre $\mathcal{H}^N_q \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ agit par correspondances algébriques sur $\mathcal{V}^{ord,\star}_{0,q,cusp}$ et $\mathcal{V}^{ord,\star}_{1,q,cusp}$. Notons $\tilde{\mathbb{T}}^-_q$ (resp. $\tilde{\mathbb{T}}_q$) l'image de $\mathcal{H}^N_q \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ (resp. $\mathcal{H}^{Nqp} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$) dans l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{V}^{ord,\star}_{1,q,cusp}$. Ce sont des Λ-algèbres finies et sans torsion.

On a une application de restriction $\tilde{\mathbb{T}}_q \to \mathrm{End}(\mathcal{V}_{cusp}^{ord,\star})$, induisant une application $\tilde{\mathbb{T}}_q \to \tilde{\mathbb{T}}$. On note $\mathfrak{m}_q$ l'idéal maximal de $\tilde{\mathbb{T}}_q$, image inverse de $\mathfrak{m}$.
Soit $\kappa \in X(\mathrm{T})^+$ un poids dominant et $f \in \mathrm{S}(\kappa, K, \mathcal{O})$ une forme propre pour l'action de $\tilde{\mathbb{T}}$, de paramètres de Hecke α_q et β_q en q. Soit $X_q = (qU_{1,q} - \alpha_q\gamma_q)(qU_{1,q} - \beta_q\delta_q)(qU_{1,q} - \gamma_q\delta_q)$, d'après la proposition 3.3, la forme $X_q f \in \mathrm{S}^{ord}(\kappa, K \cap \Pi(q), \mathcal{O})$ est propre pour l'action de l'algèbre $\tilde{\mathbb{T}}_q^-$ et les opérateurs $U_{1,q}$ et $U_{2,q}$ ont pour valeurs propres $q^{-1}\alpha_q\beta_q$ et $\alpha_q + \beta_q$. L'idéal $\mathfrak{m}_q^-$ de $\tilde{\mathbb{T}}_q^-$, engendré par $\{\mathfrak{m}_q, U_{1,q} - \bar{\alpha}_q + \bar{\beta}_q, qU_{2,q} - \bar{\alpha}_q\bar{\beta}_q, \lambda - 1\}$ où λ est un générateur de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$ est donc maximal.
Soit la localisation

$$\tilde{\mathcal{M}}_q = (\mathcal{V}_{1,q,cusp}^{ord,\star})_{\mathfrak{m}_q^-}$$

On note $\tilde{\mathrm{T}}_q$ l'image de $\tilde{\mathbb{T}}_q$ dans $\mathrm{End}_\Lambda(\tilde{\mathcal{M}}_q)$ et $\tilde{\mathrm{T}}_q^-$ l'image de $\tilde{\mathbb{T}}_q^-$ dans $\mathrm{End}_\Lambda(\tilde{\mathcal{M}}_q)$. Pour tout poids $\kappa \in X(\mathrm{T})$ relevant $\bar{\kappa}$, on note

$$\mathcal{M}_{q,\kappa} = \tilde{\mathcal{M}}_q \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathcal{O}$$

et on note $\mathrm{T}_{q,\kappa}$ l'image de $\tilde{\mathrm{T}}_q$ dans $\mathrm{End}_\mathcal{O}(\mathcal{M}_{q,\kappa})$. On note enfin $\mathrm{T}_{q,\kappa}^-$ l'image de $\tilde{\mathrm{T}}_q^-$ dans $\mathrm{End}_\mathcal{O}(\mathcal{M}_{q,\kappa})$.

6.4. Théorème de contrôle pour les modules $\mathcal{M}_{q,\kappa}$ et les algèbres $\mathrm{T}_{q,\kappa}$. — D'après le théorème de contrôle horizontal (voir [**Pi1**], thm. 9.1), on a la proposition

Proposition 6.1. — *Le module $\tilde{\mathcal{M}}_q$ est libre sur $\Lambda[\Delta_q]$ et*

$$\tilde{\mathcal{M}}_q \otimes_{\Lambda[\Delta_q],1} \Lambda \simeq (\mathcal{V}_{0,q,cusp}^{ord,\star})_{\mathfrak{m}_q^-}$$

Pour tout poids κ relevant $\bar{\kappa}$, le module $\mathcal{M}_{q,\kappa}$ est libre sur $\mathcal{O}[\Delta_q]$, et si le poids est très régulier, on a

$$\mathcal{M}_{q,\kappa} \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_q],1} \mathcal{O} \simeq \mathrm{Hom}\big(\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K \cap \Pi(q), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_q^-}, \mathcal{O}\big)$$

Soit κ un poids très régulier relevant $\bar{\kappa}$. On dispose d'une injection naturelle :

$$i : \mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathcal{O}) \hookrightarrow \mathrm{S}^{ord}(\kappa, K \cap \Pi(q), \mathcal{O})$$

Soit α_q et $\beta_q \in \mathcal{O}$ des éléments relevant $\bar{\alpha}_q$ et $\bar{\beta}_q$. Soit X_q l'opérateur de Hecke $(qU_{1,q} - \alpha_q\gamma_q)(qU_{1,q} - \beta_q\delta_q)(qU_{1,q} - \gamma_q\delta_q)$ introduit à la proposition 3.3. Cet opérateur induit un projecteur $\lim_{n\to\infty} X_q^{n!}$ agissant sur $\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K \cap \Pi(q), \mathcal{O})$, indépendant du choix des relèvements α_q et β_q. On considère alors l'opérateur modifié

$$i_q = \big(\lim_{n\to\infty} X_q^{n!}\big) \circ i$$

Proposition 6.2. — *Le morphisme i_q réalise un isomorphisme*

$$\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathcal{O})_\mathfrak{m} \otimes F \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^{ord}(\kappa, K \cap \Pi(q), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_q^-} \otimes F$$

Démonstration. L'isomorphisme peut se vérifier après tensorisation par $\bar{\mathbb{Q}}_p$, une clôture algébrique de F. Fixons un isomorphisme entre $\bar{\mathbb{Q}}_p$ et $\mathbb{C}$. Soit E_1 l'ensemble des représentations automorphes cuspidales irréductibles de G, non ramifiées hors de N, ayant tous leurs paramètres de Hecke aux places non divisant Np congrus dans $\bar{\mathbb{Q}}_p$ (identifié à $\mathbb{C}$) aux paramètres de Hecke définis par l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de T_κ, et leur paramètre de Hecke en p ordinaire. Considérons dans $L_0^2(\mathrm{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}))$ la sous-représentation $\oplus_{\pi'\in E_1}\pi'$. On identifie alors $S^{ord}(\kappa, K, \mathcal{O})_\mathfrak{m} \otimes_\mathcal{O} \bar{\mathbb{Q}}_p$ aux vecteurs de $\oplus_{\pi'\in E_1}\pi'$ vérifiant les hypothèses de la proposition 2.6 pour le compact K et le poids κ.
De même, soit E_2 l'ensemble des représentations automorphes cuspidales irréductibles de G, non ramifiées hors de Nq, ayant tous leurs paramètres de Hecke aux places ne divisant

pas Npq congrus dans $\bar{\mathbb{Q}}_p$ (identifiés à $\mathbb{C}$) aux paramètres de Hecke definis par l'idéal maximal $\mathfrak{m}_\mathfrak{q}$ de $\mathrm{T}_{q,\kappa}$, leur paramètre de Hecke en p ordinaire et possédant des vecteurs fixes par $\Pi(q)$.

On identifie alors $\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K\cap\Pi(q), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_q^-}\otimes_{\mathcal{O}}\bar{\mathbb{Q}}_p$ au $\bar{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel engendré par l'ensemble des vecteurs v de $\oplus_{\pi'\in E_2}\pi'$ vérifiant les hypothèses de la proposition 2.6 pour le compact $K\cap\Pi(q)$ et le poids κ, qui vérifient de plus :

Il existe $\alpha'_q, \beta'_q\in\bar{\mathbb{Q}}_p$, relevant $\bar\alpha_q$ et $\bar\beta_q$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_p$ tel que v appartienne au sous-espace caractéristique de $qU_{1,q}$ pour la valeur propre $\alpha'_q\beta'_q$ et au sous-espace caractéristique de $U_{2,q}$ pour la valeur $\alpha'_q+\beta'_q$.

Soit $\pi'\in E_1$. Soit π'_q sa composante locale en q et $\alpha'_q, \beta'_q, \gamma'_q, \delta'_q$ ses paramètres de Hecke. D'après la proposition 3.3, l'opérateur $X'_q = (qU_{1,q}-\alpha'_q\gamma'_q)(qU_{1,q}-\beta'_q\delta'_q)(qU_{1,q}-\gamma'_q\delta'_q)$ réalise un isomorphisme entre la droite des vecteurs sphériques de π'_q et la droite de $\pi_q^{\Pi(q)}$ sur laquelle qU_{1q} et $U_{2,q}$ agissent à travers $\alpha'_q\beta'_q$ et $\alpha'_q+\beta'_q$. Les projecteurs $\lim_{n\to\infty}X_q^{n!}$ et $\lim_{n\to\infty}(X'_q)^{n!}$ commutent entre eux et sont congrus modulo l'idéal maximal de l'anneau d'entiers de $\bar{\mathbb{Q}}_p$. Ils sont donc égaux. Il en résulte que l'application $i_q\otimes 1$ réalise une injection de $\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathcal{O})_\mathfrak{m}\otimes_{\mathcal{O}}\bar{\mathbb{Q}}_p$ dans $\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K\cap\Pi(q), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_q^-}\otimes_{\mathcal{O}}\bar{\mathbb{Q}}_p$.

Soit $\pi' = \otimes\pi'_l\in E_2$ une représentation qui contribue effectivement à $\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K\cap\Pi(q), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_q^-}\otimes_{\mathcal{O}}\bar{\mathbb{Q}}_p$ (c'est-à-dire qui possède des vecteurs provenant de $\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K\cap\Pi(q), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_q^-}\otimes_{\mathcal{O}}\bar{\mathbb{Q}}_p$).

Comme π'_q possède des vecteurs fixes par $\Pi(q)$, c'est un sous-quotient d'une induite. D'après la proposition 3.3, et vu le choix de q, cette induite est nécessairement irréductible, c'est donc que π' est sphérique en q et appartient à E_1. □

Proposition 6.3. — *L'application précédente induit un isomorphisme*

$$\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathcal{O})_\mathfrak{m}\otimes F/\mathcal{O}\xrightarrow{\sim}\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K\cap\Pi(q), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_q^-}\otimes F/\mathcal{O}$$

Démonstration. La surjectivité de cette application découle de la proposition précédente. Pour montrer l'injectivité, il suffit de montrer l'injectivité de l'application :

$$\mathrm{S}^{ord}(\kappa, K, \mathcal{O})_\mathfrak{m}\otimes\mathbb{F}\to\ \mathrm{S}^{ord}(\kappa, K\cap\Pi(q), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_q^-}\otimes\mathbb{F}$$

Cette application est équivariante sous l'action de l'algèbre $\mathrm{T}_{q,\kappa}$, son noyau est donc un $\mathrm{T}_{q,\kappa}$-module M. Supposons M non nul et soit f un vecteur propre non nul pour cette action. Il résulte du théorème de Chebotarev, de l'existence d'une représentation galoisienne $\bar\rho$ (non ramifiée en q) associée à l'idéal $\mathfrak{m}$ et des relations d'Eichler-Shimura que f est aussi propre pour l'action des opérateurs de Hecke sphériques en q et donc pour l'algèbre T_κ. On a alors simplement $\lim_{n\to\infty}X_q^{n!}(f) = X_q(f)$. Pour l'opérateur Y_q définit à la proposition 3.3, on a alors $Y_q\circ i\circ X_q(f) = f = 0$, une contradiction. □

On dispose de même d'une surjection naturelle :

$$s : \mathcal{V}_{0,q,cusp}^{ord,\star}\to\mathcal{V}_{cusp}^{ord,\star}$$

L'opérateur X_q définit de nouveau un projecteur $p = \lim_{n\to\infty}X_q^{n!}$ agissant sur $\mathcal{V}_{0,q,cusp}^{ord,\star}$.

Corollaire 6.1. — *L'application $s\circ p : (\mathcal{V}_{0,q,cusp}^{ord,\star})_{\mathfrak{m}_q^-}\to\tilde{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme de $\tilde{\mathrm{T}}_{q,\kappa}$-modules*

En particulier, pour tout poids $\kappa\in X(\mathrm{T})$ relevant $\bar\kappa$, on a un isomorphisme de $\mathrm{T}_{q,\kappa}$-modules

$$\mathcal{M}_{q,\kappa}\otimes_{\mathcal{O}[\Delta_q],1}\mathcal{O}\simeq\mathcal{M}_\kappa$$

et l'image de $\mathrm{T}_{q,\kappa}$ *dans* $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M})$ *s'identifie à* T_κ.

Démonstration. Pour tout poids κ très régulier, l'application

$$s \circ p \otimes 1 : (\mathcal{V}^{ord,\star}_{0,q,cusp})_{\mathfrak{m}_q^-} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{M}} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathcal{O}$$

est duale de l'application de la proposition précédente. C'est donc un isomorphisme. Il résulte du lemme de Nakayama que le morphisme $(\mathcal{V}^{ord,\star}_{0,q,cusp})_{\mathfrak{m}_q^-} \to \tilde{\mathcal{M}}$ est un morphisme surjectif de Λ-modules libres. Comme les poids très réguliers sont Zariski-denses dans Spec Λ, on déduit à nouveau de la proposition précédente que c'est un isomorphisme. Le dernier point résulte de l'existence de représentations galoisiennes $\rho_{\mathrm{T}_\kappa} : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathrm{T}_\kappa)$, non ramifiées en q, établie aux numéros 6.5 et 6.6, du théorème de Chebotarev et des relations d'Eichler-Shimura. □

6.5. Les représentations galoisiennes ρ_{T_κ} et $\rho_{\mathrm{T}_{q,\kappa}}$. — Fixons un poids $\kappa \in X(\mathrm{T})$ très régulier, relevant $\bar{\kappa}$.

Proposition 6.4 **([G-T], lem. 4.3.3.).** — *Pour* $\star = q$ *ou* $\varnothing$*, il existe une unique représentation* $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}} : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$ *telle que pour tout idéal premier minimal* $\mathfrak{P}$ *de* $\mathrm{T}_{\star,\kappa}$ *correspondant à une forme propre* f, $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{T}_{\star,\kappa}/\mathfrak{P}$ *soit la représentation associée à la forme* f.

Démonstration. L'existence d'un morphisme $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}} : \Gamma \to \mathrm{GL}_4(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$ vérifiant la propriété de l'énoncé se démontre en utilisant la technique des pseudo-représentations ([**Rou**]). Les représentations $\nu \otimes \rho^\vee_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ et $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ ont les mêmes pseudo-représentations. L'autodualité de $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ découle alors d'un résultat de Carayol (voir aussi [**Rou**]). Enfin, comme $\bar{\rho}_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ vérifie (SYMP), il existe une forme symplectique non dégénérée pour laquelle $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ agit par similitude. □

Pour décrire les propriétés locales de $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme 6.1. — *Toute matrice unipotente d'ordre 2 de* $\mathrm{G}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$*, congrue à* $\exp \epsilon_2$ *modulo* $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$*, est conjuguée à* $\exp \epsilon_2$ *dans* $\mathrm{G}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$.
Toute matrice unipotente d'ordre 4 de $\mathrm{G}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$*, congrue à* $\exp \epsilon$ *modulo* $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$*, est conjuguée à* $\exp \epsilon$ *dans* $\mathrm{G}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$.

Démonstration. Comme $p \geq 5$, les applications log et exp sont des bijections inverses entre l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathrm{G}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$ et les matrices nilpotentes de $\mathfrak{g}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$. Il suffit donc de montrer l'énoncé correspondant pour les matrices nilpotentes.
Dans le premier cas, c'est le lemme 9.2.1 de [**G-T**].
Démontrons le second point. Soit $N \in \mathfrak{g}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$ une matrice nilpotente d'ordre 4 congrue à ϵ. Dans la base symplectique standard $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, le vecteur e_1 est cyclique et on a $< e_1, Ne_1 > \in \mathfrak{m}_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$. Il existe alors $\beta \in \mathfrak{m}_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ tel que $< e_1 + \beta N^2 e_1, N(e_1 + \beta N^2 e_1) >= 0$. Posons $e'_1 = e_1 + \beta N^2 e_1$. Quitte à normaliser e'_1 on peut supposer $< e'_1, N^3 e'_1 >= -1$ et on vérifie alors que la base $\{e'_1, Ne'_1, N^2 e'_1, -N^3 e'_1\}$ est une base symplectique congrue à la base de départ dans laquelle la matrice de N vaut ϵ. □

Proposition 6.5 **([G-T], prop. 4.3.4, cor. 4.3.7, 9.2, 9.3)**

La représentation $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

- *Soit* ℓ *un nombre premier différent de* p *et* $\star$*. La représentation* $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}|_{D_\ell}$ *est ramifiée si est seulement si* $\bar{\rho}|_{D_\ell}$ *est ramifiée. Si c'est le cas, elle est bien ramifiée de même type que* $\bar{\rho}|_{I_\ell}$.
- *La représentation* $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}|_{D_p}$ *est ordinaire en* p *de poids* i_κ.
- *Si* $\star = q$*, la représentation* $\rho_{\mathrm{T}_{q,\kappa}}|_{D_q}$ *est ramifiée de type* χ_q.

– *On les égalités de facteurs de similitude* $\nu \circ \rho = \nu \circ \rho_{\mathrm{T}_\kappa}$ *et* $\nu \circ \rho \otimes \chi_q = \nu \circ \rho_{\mathrm{T}_{q,\kappa}}$.

Démonstration. On a la décomposition

$$\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}} \otimes_{\mathcal{O}} F \ = \ \bigoplus_{\mathfrak{P}} \rho_{\mathfrak{P}}$$

où $\mathfrak{P}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers minimaux de $\mathrm{T}_{\star,\kappa}$ et $\rho_{\mathfrak{P}}$ est la représentation associée à $\mathfrak{P}$. Il résulte du théorème I de [**Weis**] que $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ est non ramifiée hors de $\{p\} \cup \{S\} \cup \{\star\}$.

Vérifions à présent les conditions locales aux premiers $\ell \in S$.
Si $\bar{\rho}|_{I_\ell}$ est ramifiée de type ϵ_2 et $K^\ell = \Pi(\ell)$, on sait que l'inertie est unipotente d'ordre au plus 2 (3.5). D'après le lemme 6.1 , toute matrice unipotente d'ordre 2 de $\mathrm{G}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$, congrue à $\exp\ \epsilon_2$ est conjuguée à $\exp\ \epsilon_2$ dans $\mathrm{G}(\mathrm{T}_{\star,\kappa})$.
Supposons que $\bar{\rho}|_{I_\ell}$ est ramifiée de type ϵ et $K^\ell = I(\ell)$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal minimal de $\mathrm{T}_{\star,\kappa}$. Soit π' une forme automorphe cuspidale irréductible associée. Par construction π'_ℓ possède des vecteurs fixes par l'Iwahori $I(\ell)$. On remarque que π'_ℓ ne peut posséder de vecteurs fixes par le parahorique de Siegel ou de Klingen car sinon l'inertie serait unipotente d'ordre au plus 2. Un examen de la table A.15 de [**R-S**] nous apprend alors que π'_ℓ possède un unique vecteur fixe par l'Iwahori. Grâce au théorème 3.7 on en déduit que l'inertie I_ℓ agit sur $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ à travers un unipotent d'ordre 4. On peut alors appliquer le lemme 6.1.
Supposons que $\bar{\rho}|_{I_\ell}$ est ramifiée de type χ_ℓ et $K^\ell = \Pi(\ell)^+$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal minimal de $\mathrm{T}_{\star,\kappa}$. Soit π une forme automorphe cuspidale irréductible associée. Par construction π_ℓ possède une droite fixe par le parahorique de Klingen $\Pi(\ell)$ sur laquelle il agit par le caractère χ'_ℓ. Si jamais π_ℓ possédait des vecteur fixes par le parahorique de Klingen $\Pi(\ell)$, l'inertie agirait de façon unipotente (d'après 3.5) sur la représentation $\rho_{\pi'}$ ce qui contredit la congruence avec $\bar{\rho}$. C'est donc que χ'_ℓ est non trivial. D'après le théorème 3.5, on a la congruence $\chi'_\ell = \chi_\ell \bmod \mathfrak{m}$ et comme $p \nmid \ell - 1$, on a $\chi'_\ell = \chi_\ell$. Comme le caractère χ_ℓ est résiduellement non trivial, on a comme $\mathrm{T}_{\star,\kappa}[I_\ell]$-modules

$$\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}|_{I_\ell} = \rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}^{I_\ell} \oplus \rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}^{I_\ell,\chi_\ell}$$

Vérifions la condition d'ordinarité en p. La représentation résiduelle $\bar{\rho}$ est fortement ordinaire (FOR). Il existe donc une filtration naturelle (voir le numéro 5.2) $\bar{\mathrm{Fil}}_j$ sur $\bar{\rho}$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal minimal de $\mathrm{T}_{\star,\kappa}$. D'après le théorème 3.4, et l'hypothèse (FOR), la représentation $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{T}_{\star,\kappa}/\mathfrak{P}$ est ordinaire en p de poids i_κ et il existe une filtration naturelle $\mathrm{Fil}_j^{\mathfrak{P}}$ relevant la filtration $\bar{\mathrm{Fil}}_j$. Par unicité, les filtrations naturelles définis sur $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}$ au-dessus de chaque composante irréductible de $\mathrm{Spec}\ \mathrm{T}_{\star,\kappa}$ se recollent, ce qui démontre l'ordinarité.
Soit q un nombre premier de Taylor-Wiles. Soit $\{\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q\}$ les valeurs propres de $\bar{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$. Soit σ un relèvement dans D_q de Frob_q. Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un base symplectique pour $\rho_{\mathrm{T}_{q,\kappa}}$ dans laquelle $\rho_{\mathrm{T}_{q,\kappa}}(\sigma)$ s'écrit $diag(\alpha_q, \beta_q, \gamma_q, \delta_q)$ (avec $\alpha_q, \beta_q, \gamma_q, \delta_q$ des relèvements respectifs de $\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q$). Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier minimal de $\mathrm{T}_{q,\kappa}$ et π' une forme automorphe, cuspidale, irréductible associée. On sait que π'_q possède des vecteurs invariants par le parabolique de Klingen strict $\Pi(q)^+$. Si elle possède des vecteurs invariants par le parabolique de Klingen $\Pi(q)$, il résulte du choix de q ($q = 1 \bmod p$ et $\bar{\alpha}_q, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_q, \bar{\delta}_q$ distincts) et de la proposition 3.3 que π'_q est sphérique. Sinon, le parabolique $\Pi(q)$ stabilise une unique droite et agit sur celle-ci à travers un caractère non trivial $\chi_q : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \to \mathbb{C}^\star$. Les opérateurs de Hecke dilatants qU_1 et U_2 agissent sur cette droite avec les valeurs propres $\alpha_q\beta_q$ et $\alpha_q + \beta_q$. Il resulte alors des théorèmes 3.5 et 3.6 que le plan lagrangien $\mathrm{T}_{q,\kappa}/\mathfrak{P}\ e_1 \oplus \mathrm{T}_{q,\kappa}/\mathfrak{P}\ e_2$ est stable par D_q, non ramifié et que Frob_q y agit avec les valeurs propres α_q et β_q. Le plan $\mathrm{T}_{q,\kappa}/\mathfrak{P}\ e_3 \oplus \mathrm{T}_{q,\kappa}/\mathfrak{P}\ e_4$ est stable, l'inertie y agit

à travers le caractère χ_q qui se factorise nécessairement par Δ_q car $\bar{\rho}_{\mathrm{T}_{q,\kappa}}$ est non ramifiée en q. On a donc une décomposition en somme de plans lagrangiens

$$\rho_{\mathrm{T}_{q,\kappa}}|_{D_q} \;=\; \big(\mathrm{T}_{q,\kappa}\ e_1 \oplus \mathrm{T}_{q,\kappa}\ e_2\big) \bigoplus \big(\mathrm{T}_{q,\kappa}\ e_3 \oplus \mathrm{T}_{q,\kappa}\ e_4\big)$$

Le premier plan est non ramifié et sur le second plan, l'inertie agit à travers son quotient Δ_q par un caractère χ_q.
Les relations sur les facteurs de similitudes résultent alors des calculs locaux qui précédent. $\square$

On dispose également d'un caractère $\chi'_q\ :\ \Delta_q\ \to\ (\mathrm{T}^-_{q,\kappa})^\times$ induit par l'inclusion $\mathcal{O}[\Delta_q] \hookrightarrow \mathcal{H}^N_q$. Soit $i : \mathrm{T}_{q,\kappa} \hookrightarrow \mathrm{T}^-_{q,\kappa}$ l'injection canonique. On vient de vérifier

Proposition 6.6. — *Le caractère $i\circ\chi_q\ :\ \Delta_q\ \to\ (\mathrm{T}^-_{q,\kappa})^\times$ est égal au caractère χ'_q et l'injection i est un isomorphisme.*

6.6. Les représentations $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}}$ et $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}_q}$. — La technique des pseudo-représentations ([**Rou**], [**T-U**], thm. 7.1) permet de construire des représentations

$$\begin{aligned}\rho_{\tilde{\mathrm{T}}} : \Gamma &\;\to\; \mathrm{G}(\tilde{\mathrm{T}})\\ \rho_{\tilde{\mathrm{T}}_q} : \Gamma &\;\to\; \mathrm{G}(\tilde{\mathrm{T}}_q)\end{aligned}$$

telle que pour tout poids κ très régulier relevant $\bar{\kappa}$, on a $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}}\otimes\mathrm{T}_\kappa = \rho_{\mathrm{T}_\kappa}$ et $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}_q}\otimes\mathrm{T}_{\kappa,q} = \rho_{\mathrm{T}_{\kappa,q}}$. Grâce à la densité des points P_κ dans Spec Λ pour κ très régulier relevant $\bar{\kappa}$, on vérifie (comme dans [**Til**]) que :

- La représentation $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}}$ est non ramifiée en dehors de Np, la représentation $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}_q}$ est non ramifiée hors de Npq.
- Pour $\star = \varnothing$ ou q, et pour tout premier ℓ divisant N, $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}_\star}|_{I_\ell}$ est bien ramifiée de même type que $\bar{\rho}|_{I_\ell}$.
- Pour $\star = \varnothing$ ou q, il existe une filtration $\{\mathrm{Fil}_j\}$ sur $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}_\star}|_{D_p}$ relevant la filtration naturelle $\{\bar{\mathrm{Fil}}_j\}$.
- Sur le gradué $\mathrm{Fil}_0/\mathrm{Fil}_{-1}$ l'inertie I_p agit trivialement.
- Sur le gradué $\mathrm{Fil}_1/\mathrm{Fil}_0$ elle agit par le caractère $\chi_p\otimes\chi^{-1}_{univ} : I_p \to \mathcal{O}[[T]]^\times \hookrightarrow \Lambda^\times$ (voir le numéro 5.5 pour la notation).
- Sur le gradué $\mathrm{Fil}_2/\mathrm{Fil}_1$ elle agit par le caractère $\chi^2_p\otimes\chi^{-1}_{univ} : I_p \to \mathcal{O}[[T']]^\times \hookrightarrow \Lambda^\times$ (voir 5.5).
- La représentation $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}_q}|_{D_q}$ est ramifiée de type χ_q, et le caractère $\chi_q : \Delta_q \to \tilde{T}_q \to \tilde{T}^-_q$ est le caractère déduit de l'inclusion $\mathcal{O}[\Delta_q] \to \mathcal{H}^q_N$.

L'existence et les propriétés de la représentation $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}_q}$ entraînent l'isomorphisme $\tilde{\mathrm{T}}_q \simeq \tilde{\mathrm{T}}^-_q$.

Pour $\star = \varnothing$ ou q, on déduit par spécialisation de la représentation $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}_\star}$, pour tout poids κ relevant $\bar{\kappa}$, une représentation $\rho_{\mathrm{T}_{\star,\kappa}}\ :\ \Gamma\ \to\ \mathrm{G}(A)$, vérifiant les propriétés de la proposition 6.5.

7. Théorème de modularité

7.1. Théorème. — Soit N un entier, $p \geq 5$ un nombre premier ne divisant pas N et K un sous-groupe compact de $\mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$ contenant $K(N)$. On suppose soit que K net, soit que $p \geq 7$. Soit f une forme modulaire cuspidale, ordinaire en p, de niveau $K \supset K(N)$, de poids quelconque $\kappa^0 = (k^0_1, k^0_2)$. Soit $\bar{\rho}_f\ :\ \Gamma \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{F})$ une représentation résiduelle

associée à f.
On suppose que le triplet (f, K, p) est admissible. Ceci signifie que :

1. $\bar{\rho}_f$ est irréductible.
   Ceci entraîne l'unicité de $\bar{\rho}_f$ et l'existence d'une représentation $\rho_f : \Gamma \to \mathrm{GL}_4(\mathcal{O})$ associée à f.
2. $\bar{\rho}_f$ est très symplectique (déf. 3.3), ρ_f se factorise donc à travers $\mathrm{G}(\mathcal{O})$.
3. $\bar{\rho}_f(\Gamma)$ vérifie (H 1), (H 2), (H 3) (voir 5.7).
4. $\bar{\rho}_f$ est bien ramifiée aux places divisant N (déf. 5.1) et pour tout ℓ divisant N :
   – Si $\bar{\rho}_f$ est ramifiée en ℓ de type χ_ℓ alors $K^\ell = \Pi^+(\ell)$.
   – Si $\bar{\rho}_f$ est ramifiée en ℓ de type ϵ_2 alors $K^\ell = \Pi(\ell)$.
   – Si $\bar{\rho}_f$ est ramifiée en ℓ de type ϵ alors $K^\ell = I(\ell)$.
5. f est fortement ordinaire en p (déf. 3.2).

La représentation $\bar{\rho}_f$ définit un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de l'algèbre de Hecke $\tilde{\mathbb{T}}$ agissant sur le Λ-module $\mathcal{V}_{cusp}^{ord,\star}$ qui contrôle les formes modulaires p-adiques ordinaires. Le couple $(\mathfrak{m}, K)$ est admissible. Rappelons qu'on a noté $\tilde{\mathrm{T}} = \tilde{\mathbb{T}}_{\mathfrak{m}}$ et $\tilde{\mathcal{M}} = (\mathcal{V}_{cusp}^{ord,\star})_{\mathfrak{m}}$. Soit également $\tilde{R}$ l'anneau universel de déformation de la représentation $\bar{\rho}_f$ définit en 5.4. Par propriété universel (voir 6.6), on dispose d'un morphisme $\tilde{R} \to \tilde{\mathrm{T}}$ de Λ-algèbres.

Le théorème qui suit correspond au théorème 1.1 de l'introduction :

Théorème 7.1. — *Le morphisme $\tilde{R} \to \tilde{\mathrm{T}}$ est un isomorphisme, la Λ-algèbre $\tilde{\mathrm{T}}$ est plate et le module $\tilde{\mathcal{M}}$ est un $\tilde{\mathrm{T}}$-module libre. De plus, pour tout poids $\kappa \in X(\mathrm{T})$ relevant $\bar{\kappa}$, le morphisme $\tilde{\mathrm{T}} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathcal{O} \to \mathrm{T}_\kappa$ est un isomorphisme.*

En particulier, soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathcal{O})$ une représentation telle que :
– *$\rho = \rho_f$ modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$.*
– *Pour toute place $v \nmid p$, $\rho|_{I_v}$ est isomorphe à $\rho_f|_{I_v}$.*
– *ρ est ordinaire en p poids $i_{\kappa'} = (0, 2-k_2', 1-k_1', 3-k_1'-k_2')$ pour un couple d'entiers $\kappa' = (k_1', k_2')$.*

Il existe alors une forme modulaire p-adique ordinaire f' de niveau K et poids κ' telle que $\rho = \rho_{f'}$.

Pour démontrer ce théorème, nous suivons dans les sections qui suivent le schéma de la preuve esquissé au numéro 4.2.2. Elle s'organise en deux temps. On construit des systèmes de Taylor-Wiles en des poids fixés grâce aux résultats des parties 5 et 6. On met ensuite en famille. On explique enfin dans une dernière partie comment obtenir la variante du théorème 1.1, le théorème 1.2 de l'introduction, par une modification des arguments précédents.

7.2. Construction d'un système de Taylor-Wiles pour un poids κ. — Soit κ un poids relevant le poids résiduel $\bar{\kappa}$ de $\bar{\rho}_f$. En appliquant les résultats de la partie 5 à la représentation résiduelle $\bar{\rho}_f$ (où ρ_f est la représentation associée à f) avec le poids $i_\kappa = i$, on obtient un anneau $R_{i_\kappa} = R$ de déformation. Comme $\bar{\rho}_f$ vérifie les hypothèses (H 1), (H 2), (H 3), on dispose d'après la proposition 5.6 :
– de $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de Taylor-Wiles.
– des $\mathcal{O}[\Delta_{Q_m}]$-algèbres de déformations R_{Q_m} vérifiant (P1), (P2), (P3).
– d'isomorphismes canoniques : $R_{Q_m} \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_q]} \mathcal{O} \simeq R$.

D'après les résultats de la partie 6, on dispose d'une algèbre de Hecke T_κ et d'une représentation galoisienne ρ_{T_κ}. D'apres les propositions 6.4 et 6.5 et le numéro 6.6, cette représentation définit un unique morphisme $\Phi_\kappa : R \to \mathrm{T}_\kappa$.
Pour chaque nombre de Taylor-Wiles q, on a construit une algèbre de Hecke $\mathrm{T}_{q,\kappa}$ et étudié

ses propriétés. Une récurrence immédiate permet de généraliser nos résultats à un ensemble Q_m de nombres de Taylor-Wiles. On dispose donc d'algèbres de Hecke $\mathrm{T}_{Q_m,\kappa}$ et de représentations $\rho_{\mathrm{T}_{Q_m,\kappa}}$. Il résulte des propositions 6.4 et 6.5 et du numéro 6.6 que ces représentations induisent des morphismes : $R_{Q_m} \to \mathrm{T}_{Q_m,\kappa}$ qui sont surjectifs.

On dispose aussi de $\mathrm{T}_{Q_m,\kappa}$-modules fidèles $\mathcal{M}_{Q_m,\kappa}$, libres sur $\mathcal{O}[\Delta_{Q_m}]$, de rang indépendant de m (résultats de la partie 6.4). Ces modules héritent d'une action de R_{Q_m} et donc d'une seconde action de $\mathcal{O}[\Delta_{Q_m}]$. Cette action coïncide avec la première d'après la proposition 6.6. On a établi le théorème de contrôle suivant (corollaire 6.1) :
L'image de $\mathrm{T}_{Q_m,\kappa}$ dans $\mathrm{End}(\mathcal{M}_{Q_m,\kappa} \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_q]} \mathcal{O})$ est canoniquement isomorphe à T_κ et on a un isomorphisme de $\mathrm{T}_{Q_m,\kappa}$-modules : $\mathcal{M}_{Q_m,\kappa}/I_{Q_m} \simeq \mathcal{M}_\kappa$.

Les données $\{R, \mathrm{T}, R_{Q_m}, \mathrm{T}_{Q_m}, \mathcal{M}_{Q_m}\}$ forment un système de Taylor-Wiles (voir 4.2.1). Les différentes propriétés vérifiées par ce système entraînent, grâce au théorème de [**Fuj**] rappelé au numéro 4.2.1,

Théorème 7.2. — *L'application*

$$\Phi_\kappa : R_{i_\kappa} \to \mathrm{T}_\kappa$$

est un isomorphisme. L'anneau R_{i_κ} est d'intersection complète sur $\mathcal{O}$. En particulier il est un $\mathcal{O}$-module libre de rang fini. Le module $\mathcal{M}_\kappa$ est un T_κ-module libre.

7.3. Mise en famille. — On dispose donc d'un morphisme de Λ-algèbres

$$\Phi : \tilde{R} \to \tilde{\mathrm{T}}$$

Il résulte de l'existence de la représentation galoisienne $\rho_{\tilde{\mathrm{T}}}$ et des relations d'Eichler-Shimura que ce morphisme est surjectif. Pour tout poids κ relevant $\bar{\kappa}$, l'anneau $R_{i_\kappa} = \tilde{R} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-module libre de rang fini indépendant de κ. Il résulte du lemme de Nakayama et de la densité des poids entiers dans Spec Λ, que la Λ-algèbre $\tilde{R}$ est libre de rang fini. Notons $\mathfrak{I}$ le noyau du morphisme Φ. Pour tout poids κ relevant $\bar{\kappa}$, le morphisme Φ induit un isomorphisme :

$$\Phi_\kappa : R_{i_\kappa} \to \tilde{\mathrm{T}} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathcal{O} \to \mathrm{T}_\kappa$$

On en déduit que $\tilde{\mathrm{T}} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathcal{O} = \mathrm{T}_\kappa$ et que $\mathfrak{I} \subset P_\kappa \tilde{R}$. Comme $\cap_{\kappa \text{ relevant } \bar{\kappa}} P_\kappa \tilde{R} = 0$, on en déduit l'isomorphisme. On montre de la même manière que $\tilde{\mathcal{M}}$ est un $\tilde{R}$-module libre.

7.4. Le cas d'un poids parallèle. — Lorsque le poids est parallèle, on a énoncé dans l'introduction un théorème 1.2 qui est une variante du théorème 1.1. Indiquons les modifications à effectuer dans la preuve précédente pour l'obtenir.

On remplace les formes modulaires p-adiques ordinaires cuspidales (sous entendu pour le Borel de GL_2) par les formes modulaires p-adiques cuspidales pour le parabolique GL_2 de GL_2, ordinaires pour les deux opérateurs de Hecke (voir 2.2.3). On substitut la notion de GL_2-très régulier à celle de très régulier.

Comme précédemment, K désigne un sous-groupe compact de $\mathrm{G}(\hat{\mathbb{Z}})$, maximal aux places ne divisant pas N. Soit $\tilde{\mathbb{T}}'$ l'algèbre de Hecke agissant sur le Λ'-module $\mathcal{V}_{cusp}^{ord,\mathrm{GL}_2,\star}$ (voir 2.2.3). Soit $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal de $\tilde{\mathbb{T}}'$. On note $\tilde{\mathrm{T}}' = \tilde{\mathbb{T}}'_{\mathfrak{m}'}$ et $\tilde{\mathcal{M}}' = (\mathcal{V}_{cusp}^{ord,\mathrm{GL}_2,\star})_{\mathfrak{m}'}$. On suppose le couple $(\mathfrak{m}', K)$ admissible. On dispose alors d'une représentation $\bar{\rho} : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathbb{F})$.

Soit S l'ensemble des places divisant N. Soit $\tilde{R}'$ l'anneau de déformation universel de $\bar{\rho}$ dont les A-points (pour tout objet A de $\mathcal{AR}_\mathcal{O}$) sont les déformations $\rho_A : \Gamma \to \mathrm{G}(A)$ de $\bar{\rho}$ qui sont non-ramifiées hors de $S \cup \{p\}$ et qui vérifient :

– ρ_A est bien ramifiée en S de même type que $\bar{\rho}$: pour tout $s \in S$ si $\bar{\rho}|_{I_s}$ est ramifiée de type χ_s (resp. ϵ_2, ϵ, TR) alors $\rho_A|_{I_s}$ est aussi ramifiée de type χ_s (resp. ϵ_2, ϵ, TR).
– Il existe une filtration (nécessairement unique) $\{\mathrm{Fil}_r^A\}$ sur ρ_A relevant la filtration naturelle $\{\bar{\mathrm{Fil}}_r\}$ et stable sous $\rho_A|_{D_p}$.
– Pour $r = 0, ..., 3$ soit $\lambda_{A,r} : D_p \to A^\times$ le caractère donnant l'action de D_p sur $\mathrm{Fil}_r^A/\mathrm{Fil}_{r-1}^A$. On a $\lambda_{A,0}|_{I_p} = 1$ et $\lambda_{A,2} \otimes \lambda_{A,1}^{-1} = \chi_p$.

Comme au numéro 5.5, on montre qu'il existe une structure de Λ'-algèbre naturelle sur $\tilde{R}'$. Comme en 6.6, on construit une représentation modulaire universelle sur $\tilde{\mathrm{T}}'$ et un morphisme $\Phi' : \tilde{R}' \to \tilde{\mathrm{T}}'$. Les résultats de contrôle de la partie 6 s'adaptent sans problème aux poids parallèles, à condition d'appliquer le théorème de contrôle horizontal pour les poids parallèles ([**Pi1**], thm. 9.1, appliqué avec $g = 2$ et $\mathrm{P} = \mathrm{GL}_2$).
On construit donc des systèmes de Taylor-Wiles en tout poids parallèle (k, k) relevant le poids résiduel de $\bar{\rho}$.
Finalement, on met en famille au dessus de l'algèbre Λ'. Le théorème est donc :

Théorème 7.3. — *On a un isomorphisme $\tilde{R}' \to \tilde{T}'$ de Λ-algèbres finies et plates. Le module $\tilde{\mathcal{M}}'$ est libre de rang fini sur $\tilde{R}'$.*

En particulier, soit f une forme modulaire cuspidale propre de niveau K et de poids diagonal (k, k) définissant un idéal premier de $\tilde{\mathrm{T}}'$. Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{G}(\mathcal{O})$ une représentation telle que :
– *$\rho = \rho_f$ modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$.*
– *Pour toute place $v \nmid p$, $\rho|_{I_v}$ est isomorphe à $\rho_f|_{I_v}$.*
– *ρ est ordinaire en p poids $i_{\kappa'} = (0, 2-k', 1-k', 3-2k')$ pour un poids $\kappa' = (k', k')$.*
Il existe alors une forme modulaire p-adique f' pour le parabolique GL_2, *ordinaire, cuspidale, de niveau K et poids κ', telle que $\rho = \rho_{f'}$.*

Références

[EGA] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique I, II, III, IV*, Publ. Math. I.H.E.S, **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, 1961-67.

[A-M] A. Abbès et F. Mokrane, *Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adic pour les variétés abèliennes*, Publ. Math. IHES, **99**, 2004.

[A-G] F.Andreatta et C.Gasbarri, *The canonical subgroup for families of abelian varieties*, Compositio Math., **143** (2007), p.566 à 602.

[Ar] J. Arthur, *Automorphic forms for* GSp_4, Contributions to Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory : A Volume in Honor of Joseph Shalika. Par Haruzo Hida, Dinakar Ramakrishnan, Freydoon Shahidi, JHU Press, 2004, p 65 à 82.

[A-S] M.Asgari et R. Schmidt, *Siegel modular forms and representations*, Manuscripta math. **104**, p. 173 à 200, 2001.

[Buz] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Am. Math. Soc., **16** , n. 1, p. 29 à 55, 2002.

[B-T] K. Buzzard and R. Taylor, *Companion forms and weight* 1 *forms*, Annals of Math. **149**, 1999.

[Fal] G. Faltings, *Crystalline cohomologie and Galois representations*, Algebraic analysis, Geometry and number theory, Proceedings of JAMI Inaugural Conference, John Hopkins Univ. Press, 1989.

[F-C] G.Faltings et C.-L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzbgebiete (3), vol. **22**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, with an appendix by D. Mumford.

[Fuj] K. Fujiwara,*Deformation rings and Hecke algebras for totally real fields.* prépublication.

[Ge] A.Genestier, *Mauvaise réduction des variétés de Siegel*, en préparation.

[G-T] A. Genestier et J. Tilouine , *Système de Taylor-Wiles pour* GSp_4, Formes Automorphes (II), le cas du groupe GSp(4), p. 177 à 287, Astérisque **302**, SMF, 2005.

[Her-T] F. Herzig et J. Tilouine, *Conjecture de type de Serre et formes compagnons pour* GSp_4 , à paraître.

[Hi02] H. Hida, *Control theorems for coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*, Jour. Inst. Math. Jussieu, **1**, 2002.

[Hi05] H. Hida, *p-adic automorphic forms on reductive groups*, Astérisque **298**, 2005, p. 147-254.

[Ka] N. Katz, *P-adic properties of modular schemes and modular forms*, Modular functions of one variable III, SLN, **350**, p. 69 à 190.

[K-W] C. Khare et J.P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture (1) et (2)*, prépublication.

[K-S] H.H. Kim et F. Shahidi, *Functorial products for* $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ *and the symmetric cube for* GL_2, Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 3, 837–893. With an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart.

[Lau] G. Laumon, *Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois*, Formes Automorphes (II), le cas du groupe GSp(4), p. 1 à 67, Astérisque **302**, SMF, 2005.

[M-T] F. Mokrane et J. Tilouine, *Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and applications*, Astérisque **280**, 2002.

[P-R] B. Perrin-Riou, *Représentations p-adiques ordinaires*, p. 185-220, in Periodes p-adiques, Asterisque **223**, 1994.

[Pi1] V. Pilloni, *Sur la théorie de Hida pour* GSp_{2g}, prépublication, disponible sur `www.math.columbia.edu/~pilloni/ThHida.pdf`.

[Pi2] V. Pilloni, *Prolongement analytique sur les variétés de Siegel*, prépublication, disponible sur `www.math.columbia.edu/~pilloni/ProAn.pdf`.

[Ram-S] D. Ramakrisnan et F. Shahidi, *siegel modular forms of genus 2 attached to elliptic curves*, Math. Res. Lett. **14** (2007), no. 2, p. 315 à 332.

[R-S] B.Roberts et R. Schmidt, *Local Newforms for* GSp(4), Springer Lecture Note in Mathematics, vol. **1918** (2007)

[Rou] R. Rouquier, *Caractérisation des caractères et pseudo-caractères*, J. of Algebra **180** (1996), 571-586.

[Sa] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields*, Publ. Math. IHES **18**, 1963, p. 5 à 69.

[S-U] C. Skinner et E. Urban, *Sur les déformations p-adiques de certaines représentations automorphes*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2006), **5**, 629-698.

[Sor] C. Sorensen *Galois representations attached to Hilbert-Siegel modular forms*, preprint.

[Tay] R. Taylor, *On the cohomology of the Siegel threefolds*, Inv. Math. **114**, p. 289 à 310, 1993.

[Til] J. Tilouine, *Nearly ordinary rank four Galois representations and p-adic Siegel modular forms.* With an appendix by Don Blasius. Compos. Math. **142** (2006), no. 5, 1122–1156.

[Til1] J.Tilouine, *Formes compagnons et complexe BGG dual pour* GSp_4, en préparation.

[T-U] J. Tilouine et E. Urban, *Several-variable p-adic families of Siegel-Hilbert cusp eigensystems and their Galois representations.* Ann. Sci. École Norm. Sup.(4) **32** (1999), no.4, 499-574.

[Urb] E. Urban, *Sur les représentations p-adiques associées aux représentations cuspidales de* $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$, Formes Automorphes (II), le cas du groupe GSp(4), p. 151 à 176, Astérisque **302**, SMF, 2005.

[Weis] R. Weissauer, *Four dimensional Galois representations*, Formes Automorphes (II), le cas du groupe GSp(4), p. 67 à 151, Astérisque **302**, SMF, 2005.

[Yos] H. Yoshida, *Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms*, Inv. Math. **60**, (1980) 193-248.

Septembre 2009

VINCENT PILLONI • *Courriel :* `pilloni@math.columbia.edu`