SURCONVERGENCE ET CLASSICITÉ : LE CAS HILBERT

par

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

Résumé. — Nous démontrons un critère de classicité pour les formes surconvergentes de Hilbert associées à une extension totalement réelle F de $\mathbb{Q}$ et à un nombre premier non ramifié dans F. Ceci permet par exemple de caractériser les points classiques des variétés de Hecke associées aux formes de Hilbert pour F.

Table des matières

1. Introduction

On étudie dans cet article la classicité de formes modulaires surconvergentes de Hilbert associées à un corps totalement réel F de degré $d \geq 2$ et à un nombre premier p non ramifié dans F. Nous utilisons pour cela les techniques de prolongement analytique développées par Buzzard et Kassaei. Fixons un plongement $F \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ et notons v la valuation de $\mathbb{C}_p$ normalisée par $v(p) = 1$. Commençons par supposer p inerte dans F. On montre alors le théorème suivant.

Théorème 1.1. — *Soit $N \geq 5$ premier à p et f une forme modulaire de Hilbert surconvergente de poids $\kappa = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, de niveau $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$ propre pour l'opérateur U_p de valeur propre $a_p \in \mathbb{C}_p$. Si $v(a_p) < \inf_{i=1}^{d}(k_i) - d$ alors f est classique de niveau $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$.*

On dispose également d'un énoncé dans le cas où p est non ramifié mais pas nécessairement inerte. Connaissant le cas inerte, la démonstration du cas non ramifié général suit les lignes de [**Sa**], qui traite le cas où p est totalement décomposé dans F. De même en adaptant des arguments de [**Bu**] et [**Ka**], on en déduit un théorème de classicité pour les formes surconvergentes de niveau arbitraire en p. Avant de présenter ces résultats, introduisons quelques notations. Notons $p \cdot \mathcal{O}_F = \prod_{i=1}^{r} \pi_i$ la décomposition de p en produit d'idéaux premiers dans $\mathcal{O}_F$. Pour tout $1 \leq i \leq r$ notons $D_i = \{\sigma \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}_p) \,|\, v(\sigma(\pi_i)) > 0\}$. Les D_i forment une partition de $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}_p)$ et le cardinal de D_i vaut le degré $[F_{\pi_i} : \mathbb{Q}_p]$ de la complétion π_i-adique F_{π_i} de F. Le poids d'une forme de Hilbert est par définition un caractère du tore $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ défini sur une extension assez grande de $\mathbb{Q}$. Ce groupe des caractères géométriques de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ est canoniquement isomorphe à

$$\mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C}_p)}$$

que l'on avait identifié à $\mathbb{Z}^d$ dans le théorème **1.1**. Le résultat général s'énonce alors de la manière suivante.

Théorème 1.2. — *Soient $n \geq 1$ un entier, $N \geq 5$ un entier premier à p et f une forme modulaire de Hilbert surconvergente de poids $\kappa = (k_\sigma) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C}_p)}$ et de niveau $\Gamma_1(Np^n)$. Supposons f propre pour l'opérateur U_{π_i} pour tout $1 \leq i \leq r$ de valeur propre $a_{\pi_i} \in \mathbb{C}_p$. Si $v(a_{\pi_i}) < \inf_{\sigma \in D_i}(k_\sigma) - [F_{\pi_i} : \mathbb{Q}_p]$ pour tout $1 \leq i \leq r$ alors f est classique.*

Les opérateurs U_{π_i} auxquels il est fait allusion dans l'énoncé du théorème **1.2** sont définis dans le paragraphe **7.3**. Soit G le sous-groupe algébrique de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_2$ des éléments de déterminant dans $\mathbb{G}_m$. Les formes modulaires classiques de Hilbert que nous considérons dans cet article apparaissent dans la théorie des formes automorphes pour le groupe G. Lorsque le poids κ est tel que tous les k_σ ont même parité, il existe une notion de forme modulaire de Hilbert de poids κ pour le groupe $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_2$ (qui est celle des arithméticiens). Ces dernières apparaissent en facteur direct dans l'espace des formes de Hilbert de poids κ pour le groupe G (voir la rem. **7.3.1**), donc notre résultat s'applique bien aux formes de Hilbert "arithmétiques".

Indiquons rapidement comment nous démontrons le théorème **1.1**. Soit f une forme surconvergente. C'est par définition une section d'un faisceau inversible sur un voisinage strict du tube ordinaire-multiplicatif de la variété de Hilbert rigide analytique X_{rig} de niveau $\Gamma_0(p) \cap \Gamma_1(N)$. On suppose que f est propre pour l'opérateur U_p pour une valeur propre non nulle a_p. On voit alors comme dans [**Bu**] la relation

$$f \;=\; a_p^{-1} \cdot U_p(f)$$

comme une équation fonctionnelle au moyen de laquelle on essaye d'étendre le domaine de définition de f. Ce procédé d'extension ne permet pas de traiter certains points de X_{rig} correspondant à des variétés abéliennes dont le groupe de Barsotti-Tate est une extension non triviale. Nous appelons de tels points des points spéciaux d'ordre infini.

Ce phénomène de points spéciaux existe déjà sur la courbe modulaire dans le cas où $F = \mathbb{Q}$, auquel cas l'ensemble des points spéciaux non multiplicatifs forment le tube ordinaire étale. Pour contourner l'obstruction apparente au prolongement de f sur ce tube ordinaire étale, Kassaei [**Ka**] a construit en s'inspirant de l'équation fonctionnelle et en utilisant la théorie du sous-groupe canonique des approximations du prolongement souhaité qui convergent sous certaines hypothèses sur le poids et la pente. Cela permet de prouver la classicité de f dans le cas des formes modulaires habituelles.

Dans le cas des formes de Hilbert générales où $F \neq \mathbb{Q}$, un point spécial de X_{rig} n'est pas nécessairement dans le tube ordinaire. Le groupe de Barsotti-Tate de la variété abélienne peut par exemple être extension d'un groupe de Lubin-Tate associé à $\mathcal{O}_{F_p}$ par son dual. Un tel groupe de Barsotti-Tate n'admet pas de sous-groupe canonique et la technique de Kassaei ne semble pas directement s'adapter. Nous remarquons néanmoins que pour tout point spécial de X_{rig}, il existe un unique sous-groupe "spécial" dans la p-torsion de son Barsotti-Tate qui généralise le sous-groupe canonique défini dans le cas ordinaire. Ceci nous permet de construire quand même des séries de Kassaei sous des hypothèses entre poids et pente et de mener à bien le prolongement de la forme f. Nous trouvons remarquable que ces hypothèses entre poids et pente apparaissant dans l'énoncé du théorème **1.1** proviennent finalement de l'analyse de la correspondance de Hecke U_p sur les groupes de Barsotti-Tate qui sont extension d'un groupe de Lubin-Tate associé à $\mathcal{O}_{F_p}$ par leur dual.

Disons à présent quelques mots sur l'organisation du texte. Les sections 3 à 6 sont dédiées à la démonstration du théorème **1.1** et nous y faisons donc l'hypothèse que p est inerte. Dans les sections 7 et 8 nous expliquons comment déduire le théorème **1.2** de la démonstration du théorème **1.1**.

Dans [**Ti**], Y. Tian a trouvé indépendamment une démonstration du théorème **1.1** dans le cas où F est un corps quadratique et du théorème **1.2** lorsque $n = 1$ et les corps résiduels des places au dessus de p dans F sont de degré au plus 2 sur $\mathbb{F}_p$.

Nous remercions chaleureusement K. Buzzard qui a organisé un groupe de travail avec C. Johannson et W. Kim sur une version antérieure de ce travail et qui nous a signalé de nombreuses erreurs. Nous remercions de même P. Kassaei et Y. Tian qui nous ont signalé une erreur cruciale dans une version précédente de l'article, erreur qui nous a conduit à modifier en profondeur certains arguments. Nous voulons également remercier le rapporteur pour sa relecture attentive.

Les auteurs ont bénéficié du projet ANR-10-BLAN 0114 ArShiFo pendant la préparation de cet article.

2. Préliminaires rigides analytiques

2.1. La norme. — Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, d'uniformisante π et de corps résiduel $\mathbb{F}$.

2.1.1. Définition des normes. — Soit $\mathfrak{Z}$ un schéma formel admissible p-adique réduit sur Spf $\mathcal{O}_K$. Notons Z_{rig} sa fibre générique rigide. Le faisceau structural $\mathscr{O}_{Z_{\mathrm{rig}}}$ est équipé d'une valuation et de la norme associé. En effet, pour tout ouvert U de Z_{rig} et toute section $f \in H^0(U, \mathscr{O}_{Z_{\mathrm{rig}}})$, on pose $|f|_U = \sup_{x \in U} |f(x)|$. Notons bien que si U n'est pas quasi-compact, ce supremum peut être infini. Si U est un affinoïde, la norme $| \ |_U$ fait de $H^0(U, \mathscr{O}_{Z_{\mathrm{rig}}})$ un espace de Banach.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau localement libre de rang fini sur $\mathfrak{Z}$. Soit $\mathscr{F}_{\mathrm{rig}}$ le faisceau induit sur Z_{rig}. On peut mettre sur $\mathscr{F}_{\mathrm{rig}}$ une structure de $\mathscr{O}_{Z_{\mathrm{rig}}}$-module de Banach. Soit en effet L une extension finie de K et $x : \mathrm{Spm}(L) \to Z_{\mathrm{rig}}$ un L-point. Il provient d'un unique $\mathcal{O}_L$-point $\tilde{x} : \mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_L \to \mathfrak{Z}$ et on dispose d'une identification naturelle $\tilde{x}^\star \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_L} L \simeq x^\star \mathscr{F}_{\mathrm{rig}}$. Si $f \in x^\star \mathscr{F}_{\mathrm{rig}}$, on pose

$$|f| = \inf\{|\lambda|,\ \lambda \in L^\times \mid \frac{1}{\lambda} f \in \tilde{x}^\star \mathscr{F}\}\ .$$

Si U est un ouvert de Z_{rig} et f une section de $H^0(U, \mathscr{F}_{\mathrm{rig}})$, on pose

$$|f|_U = \sup_{x \in U} |f(x)| = \sup_{x \in U} |x^\star f|.$$

On notera par $\tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{rig}}$ le sous-faisceau de $\mathscr{F}_{\mathrm{rig}}$ des éléments de norme inférieure ou égale à 1.

2.1.2. Le lemme de recollement de Kassaei. — Nous reformulons ici un lemme dégagé par Kassaei dans [**Ka**]. On reprend les notations du paragraphe précédent.

Lemme 2.1.3. — *Supposons Z_{rig} lisse. Soit U un ouvert quasi-compact de Z_{rig}. On a*

$$H^0(U, \mathscr{F}_{\mathrm{rig}}) \xleftarrow{\sim} H^0(U, \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{rig}}) \otimes_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\sim} \left(\varprojlim_n H^0(U, \tilde{\mathscr{F}}_{\mathrm{rig}}/p^n)\right) \otimes_{\mathcal{O}_K} K$$

Démonstration. — Voir [**Pi**, cor. 5.3.2]. □

2.2. Voisinages stricts. — Soit Z un espace rigide quasi-compact sur K et U un ouvert quasi-compact de Z.

Définition 2.2.1. — Un voisinage strict de U dans Z est un ouvert V de Z contenant U tel que le recouvrement $(Z \setminus U) \bigcup V$ de Z est admissible.

D'après la théorie de Raynaud (voir [**Bo**] par exemple), Z possède un modèle formel $\mathfrak{Z}$ pour lequel U s'identifie au tube d'un ouvert de la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$. On retrouve donc la définition des voisinage stricts de [**Be**, def.1.2.1].

Exemple 2.2.2. — Soit f une fonction définie sur Z et M et N des réels tels que $N > M$. On suppose que $|f|_U \leq M$. Alors $\{x \in f, |f(x)| \leq N\}$ est un voisinage strict de U dans Z.

La proposition suivante regroupe quelques propriétés immédiates des voisinages stricts.

Proposition 2.2.3. — *Soit U un ouvert quasi-compact de Z et V_1 et V_2 deux voisinages stricts de U. Alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage strict. Soit U_1 et U_2 deux ouverts quasi-compacts de Z et V_1 et V_2 des voisinages stricts de U_1 et de U_2. Alors $V_1 \cup V_2$ est un voisinage strict de $U_1 \cup U_2$.*

Voici enfin une proposition de « surconvergence » des sections d'un morphisme fini étale.

Proposition 2.2.4. — *Soit $f : Y \to Z$ un morphisme fini étale entre deux espaces rigides quasi-compacts. Soit U un ouvert quasi-compact de Z et $s : U \to Y$ une section de f. Il existe un voisinage strict V de U et une section $s' : V \to Y$ étendant s.*

Démonstration. — Le problème est local sur Z et U. On peut donc supposer que $Z = \mathrm{Spm}(A)$, $Y = \mathrm{Spm}(B)$, $U = \mathrm{Spm}(C)$ et $Y_U = \mathrm{Spm}(D)$. Il existe par hypothèse une fonction idempotente $e \in D$ qui vaut 1 sur $s(U)$ et 0 sur $Y_U \setminus s(U)$. On peut alors trouver par approximation une fonction $g \in B$ tel que $|g - e|_{Y_U} \leq p^{-1}$. Considérons $P(T) = \sum_{i=1}^r g_i T^i$ le polynôme caractéristique de la multiplication par g sur le A-module projectif B. On a donc $|g_{r-1}|_U = 1$ et $|g_{r-i}|_U \leq p^{-i+1}$ pour $2 \leq i \leq r$. Il existe alors un voisinage strict V de U sur lequel on a $|g_{r-1}|_U \geq p^{-1/3}$ et

$$|g_{r-i}|_U \leq p^{\frac{-i+1}{2}}$$

pour $2 \leq i \leq r$. On a alors un recouvrement admissible

$$Y_V = \{x \in Y_V, |g(x)| \geq p^{-\frac{1}{3}}\} \cup \{x \in Y_V, |g(x)| \leq p^{-\frac{1}{2}}\}.$$

La restriction de f à $\{x \in Y_V, |g(x)| \geq p^{-\frac{1}{3}}\}$ est finie étale de degré un donc est un isomorphisme. □

3. Théorie de Raynaud

Soit F une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$ de degré $d \geq 2$, $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers, p un nombre premier inerte dans F, F_p la complétion p-adique et k_F le corps résiduel associé. On identifie les groupes $\mathrm{Gal}(F_p/\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{Gal}(k_F/\mathbb{F}_p)$ et $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ en envoyant le Frobenius arithmétique en p sur 1. Nous identifierons occasionnellement $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ avec l'ensemble des entiers compris dans $[1, d]$. Par ailleurs, K désigne toujours une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, d'uniformisante π et de corps résiduel $\mathbb{F}$. On suppose que K contient F_p et on fixe un tel plongement. On fixe de plus une clôture algébrique $\bar{K}$ de K dont on notera $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ l'anneau d'entiers et v la valuation à valeurs dans $\mathbb{Q}$ normalisée par $v(p) = 1$.

3.1. Rappels. — Soit S un schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Dans [**Ray**], Raynaud a classifié les schémas en k_F-espaces vectoriels de dimension 1 sur S. Ce sont par définition les schémas en groupes finis et plats de rang p^d sur S équipés d'une action de k_F, vérifiant la condition $(**)$ de [**Ray**, p.246] (cette condition est automatiquement vérifiée si S est plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$). On s'autorisera dans la suite à les appeler simplement des k_F-vectoriels de dimension un ou des schémas en groupes de Raynaud. Rappelons le résultat de Raynaud dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(R)$ est un schéma local. L'expression de ce résultat dépend d'une unité p-adique universelle ω_p définie dans [**Ray**]. À tout $2d$-uplet $(\delta_1, \ldots, \delta_d; \gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in R^{2d}$ tel que $\delta_i \cdot \gamma_i = p \cdot \omega_p$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, Raynaud associe un schéma en k_F-vectoriels $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$ de schéma sous-jacent

$$\mathrm{Spec}\ R[X_1, \ldots, X_d]/(X_i^p - \delta_i \cdot X_{i+1})$$

où les indices i sont pris dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \mathrm{Gal}(k_F/\mathbb{F}_p)$. Le plongement $F_p \hookrightarrow K$ induit une identification $k_F^* \simeq \mu_{p^d-1}(\mathcal{O}_K)$ et à chaque $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ on peut donc associer le i-ème caractère fondamental $\chi_i : k_F^* \to \mathcal{O}_K^*$. L'action de k_F sur la i-ème coordonnée X_i se fait à travers le caractère χ_i. Raynaud obtient le théorème suivant.

Théorème 3.1.1 **([Ray], thm. 1.4.1).** — *Tout schéma en k_F-espaces vectoriels de dimension un sur S est isomorphe à un schéma en k_F-vectoriel $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$ appelé « de Raynaud ». Soient $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$ et $H_{(\delta'_i;\gamma'_i)}$ deux schémas de Raynaud. Tout morphisme de k_F-schémas en groupes de $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$ vers $H_{(\delta'_i;\gamma'_i)}$ est donné au niveau des algèbres par $X_i \mapsto a_i \cdot X_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où $a_i \in R$ vérifient $a_{i+1} \cdot \delta'_i = a_i^p \cdot \delta_i$.*

Les schémas en k_F-espaces vectoriels $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$ et $H_{(\delta'_i;\gamma'_i)}$ sont donc isomorphes sur S si et seulement il existe des éléments $a_i \in R^*$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ tels que

$$a_{i+1} \cdot \delta'_i = a_i^p \cdot \delta_i$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Considérons le cas où $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. Il est clair que dans ce cas le schéma en groupe $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$ est déterminé par le d-uplet (δ_i). Nous le notons simplement $H_{(\delta_i)}$.

Corollaire 3.1.2 **([Ray], coro. 1.5.2).** — *Lorsque $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{DEG} : \{\textit{Classes d'isom. de schémas en groupes de Raynaud sur } S\} & \to & [0,1]^d \\ H_{(\delta_i)} & \mapsto & (v(\delta_i)) \end{array}$$

est injective d'image $[0, 1]^d \cap \mathbb{Q}^d$.

On notera $\deg_i$ la i-ème coordonnée de cette application. On a donc

$$\mathrm{DEG} = (\deg_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}\,.$$

Considérons la stratification standard du cube $[0,1]^d$ en sommets, arêtes, faces, etc. On obtient le corollaire suivant par réduction modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.

Corollaire 3.1.3. — *L'application du corollaire précédent induit une bijection canonique entre les classes d'isomorphismes de schémas en groupes de Raynaud sur* $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}})$ *et les strates du cube* $[0,1]^d$.

Exemple 3.1.4. — La classe d'isomorphisme du schéma en groupes de Raynaud multiplicatif $(\mu_p \otimes_{\mathbb{Z}} k_F) \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}})$ correspond au sommet $(1, \dots 1)$ du cube et celle du groupe de Raynaud étale $k_F \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}})$ au sommet $(0, \dots, 0)$. Les autres strates du cube correspondent à des groupes de Raynaud qui ne sont ni étales ni multiplicatifs.

Remarque 3.1.5. — La dualité de Cartier des schémas en groupes finis et plats échange $H_{(\delta_i;\gamma_i)}$ et $H_{(\gamma_i;\delta_i)}$. Si $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ elle échange donc DEG et $1 - \mathrm{DEG}$. Si $S = \bar{\mathbb{F}}$ elle agit sur les strates du cube comme la symétrie centrale de centre $(1/2, \dots, 1/2)$.

Rappelons que tout schéma en groupes fini et plat sur $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ a un degré qui est un rationnel positif défini dans [**Fa**]. Le degré de $H_{(\delta_i)}$, noté $\deg(H_{(\delta_i)})$ est

$$\sum_i v(\delta_i) \ = \ \sum_i \deg_i \left(H_{(\delta_i)}\right) \ .$$

Etant donné un groupe de Raynaud $G = H_{(\delta_i)}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$, on peut obtenir $\deg_i(G)$ de la manière suivante. Le faisceau conormal ω_G est un module sous

$$\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} k_F$$

et se décompose selon les plongement $k_F \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}$ indexés par $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On obtient donc

$$\omega_G = \bigoplus_i \omega_{G,i}.$$

On a alors $\omega_{G,i} = \mathcal{O}_{\bar{K}}/\delta_{i-1}$ et $\deg_i(G) = v(\mathrm{Fitt}_0\, \omega_{G,i+1})$ où Fitt_0 désigne le 0-ème idéal de Fitting.

3.2. Relation d'ordre. — Dans ce paragraphe, nous travaillerons sur la base $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. Soit H et G deux schémas en groupes de Raynaud sur S. On dit que $H \leq G$ s'il existe un morphisme non nul $H \to G$ de k_F-schémas en groupes. Ce morphisme est alors un isomorphisme en fibre générique. On dit que $H < G$ si $H \leq G$ et H et G ne sont pas isomorphes. On note enfin $H \simeq G$ si H et G sont isomorphes ou, ce qui est équivalent, si $H \leq G$ et $G \leq H$ (voir la proposition suivante). Nous allons maintenant interpréter cette relation d'ordre partielle sur le cube $[0,1]^d$. Nous identifions ici les schémas en groupes de Raynaud avec leurs coordonnées $(\deg_i)$ dans le cube. Nous définissons aussi une fonction somme des coordonées, $\deg : [0,1]^d \to [0,d]$.

Proposition 3.2.1. — *On a* $(y_1, \dots, y_d) \geq (x_1, \dots, x_d)$ *si et seulement si pour tout* $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ *on a*

$$\sum_{k=0}^{d-1} p^k (y_{i-k} - x_{i-k}) \geq 0\ .$$

On a $(y_i) = (x_i)$ *si et seulement si* $\deg((y_i)) = \deg((x_i))$ *et* $(y_i) \geq (x_i)$ *; si et seulement si* $(y_i) \geq (x_i)$ *et* $(x_i) \geq (y_i)$.

Démonstration. — Soit $H_{(\delta_i)}$ et $H_{(\delta'_i)}$ deux schémas en groupes de Raynaud de coordonnées respectives (x_i) et (y_i). On a $H_{(\delta_i)} \leq H_{(\delta'_i)}$ si et seulement si il existe $(a_i) \in \mathcal{O}_K^d$ tel que $a_{i+1} \cdot \delta'_i = a_i^p \cdot \delta_i$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Ces équations se réécrivent

$$a_{i+1} \ = \ a_{i+1}^{p^d} \cdot \prod_{k=0}^{d-1} \left(\frac{\delta_{i-k}}{\delta'_{i-k}}\right)^{p^k}.$$

Elles possèdent une solution si et seulement si

$$v\left(\prod_{k=0}^{d-1} \left(\frac{\delta_{i-k}}{\delta'_{i-k}}\right)^{p^k}\right) \leq 0.$$

Le reste de la proposition ne pose pas de problème. $\square$

On peut écrire matriciellement les d équations de la proposition de la façon suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & p & \cdots & p^{d-1} \\ p & p^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^{d-1} & 1 & \cdots & p^{d-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_d - x_d \\ \vdots \\ y_1 - x_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la relation d'ordre $\geq$ garde un sens sur $[0,1]^d$ et même sur $\mathbb{R}^d$ et pas seulement sur le sous-ensemble $[0,1]^d \cap \mathbb{Q}^d$ correspondant aux groupes de Raynaud sur S. Pour tout point $x = (x_i)$ du cube, notons $\mathcal{H}_i(x)$ l'hyperplan affine d'équation

$$\sum_{k=0}^{d-1} p^k \cdot (Y_{i-k} - x_{i-k}) = 0$$

où $Y = (Y_i)$ est la coordonnée sur $\mathbb{R}^d$. Cet hyperplan partage l'espace $\mathbb{R}^d$ en les deux demi-espaces

$$\mathcal{H}_i(x)^+ \ = \ \{Y \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{k=0}^{d-1} p^k \cdot (Y_{i-k} - x_{i-k}) \geq 0\}$$

et

$$\mathcal{H}_i(x)^- \ = \ \{Y \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{k=0}^{d-1} p^k \cdot (Y_{i-k} - x_{i-k}) \leq 0\}.$$

On a bien sûr $\mathcal{H}_i(x) = \mathcal{H}_i(x)^+ \cap \mathcal{H}_i(x)^-$. Si $x \neq (0, \dots, 0)$ alors $(0, \dots, 0) \notin \mathcal{H}_i(x)$ et $\mathcal{H}_i(x)^-$ est le demi-espace qui contient le point 0.

Remarquons que $x = \cap_i \mathcal{H}_i(x)$ (car les hyperplans sont linéairement indépendants), et que si x' est un autre point du cube, $\mathcal{H}_i(x')$ est l'image de $\mathcal{H}_i(x)$ par la translation qui applique x sur x'. Le lieu du cube déterminé par l'équation $(y_i) \geq (x_i)$ est donc la pyramide de sommet x, intersection des d demi-espaces $\mathcal{H}_i(x)^+$ avec le cube. Elle est dirigée vers le point de coordonnée $(1, 1, \dots, 1)$ correspondant au schéma en groupes multiplicatif. De même, le lieu des $(y_i) \leq (x_i)$ est l'intersection du cube avec les d demi-espaces $\mathcal{H}_i(x)^-$. C'est un pyramide de sommet (x_i), dirigée cette fois vers le point de coordonnées $(0, 0, \dots, 0)$ correspondant au schéma en groupes étale.

Soit x et x' deux points du cube. Disons que $\mathcal{H}_i(x) \leq \mathcal{H}_i(x')$ si $\mathcal{H}_i(x) \subset \mathcal{H}_i(x')^-$. L'ensemble $\{\mathcal{H}_i(x),\ x \in [0,1]^d\}$ muni de la relation d'ordre $\leq$ est totalement ordonné. En particulier on peut définir la borne inférieure $\inf\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_i(x')\}$ pour tous points x et x' du cube et tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Proposition 3.2.2. — *Soit H et G deux schémas en groupes de Raynaud sur S. Il existe un schéma en groupe de Raynaud $\inf\{H, G\}$ sur S unique à isomorphisme près, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout schéma en groupe de Raynaud H', on a l'équivalence*

$$H' \leq G \text{ et } H' \leq H \Leftrightarrow H' \leq \inf\{H, G\}.$$

On a plus précisément la formule

$$\mathrm{DEG}(\inf\{H, G\}) = \bigcap_i \inf\left\{\mathcal{H}_i(\mathrm{DEG}(H)), \mathcal{H}_i(\mathrm{DEG}(G))\right\}.$$

Démonstration. — Soit (x_i) et (y_i) les coordonnées de H et G. Il s'agit de montrer que l'ensemble

$$\{(z_i) \in [0,1]^d \cap \mathbb{Q}^d \mid (z_i) \leq (x_i), (z_i) \leq (y_i)\}$$

possède un plus grand élément. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, soit $\mathcal{H}_i$ l'infimum de $\mathcal{H}_i(x)$ et $\mathcal{H}_i(y)$ au sens de la relation d'ordre $\leq$ que nous venons de définir. L'ensemble $\{(z_i) \in [0,1]^d \cap \mathbb{Q}^d \,|\, (z_i) \leq (x_i), (z_i) \leq (y_i)\}$ est l'intersection des demi-espaces $\mathcal{H}_i^-$ avec les points rationnels du cube $[0,1]^d$. La pyramide $\cap_i \mathcal{H}_i^-$ est l'intersection des pyramides $\cap_i \mathcal{H}_i(x)^-$ et $\cap_i \mathcal{H}_i(y)^-$. Vérifions que son sommet (w_i) se trouve à l'intérieur du cube. Soit M la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & p & \cdots & p^{d-1} \\ p & p^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^{d-1} & 1 & \cdots & p^{d-2} \end{pmatrix}.$$

Son inverse vaut

$$M^{-1} = \frac{1}{1-p^d} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -p \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -p & \cdots & 0 \\ -p & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(z_i) \in \mathbb{R}^d$, Soit $M((z_i))_j$ le j-ième coefficient du vecteur $M((z_i))$. Soit $m_j = \inf\{M((x_i))_j, M((y_i))_j\}$. Par définition $(w_i) = M^{-1}((m_i)) = (\frac{pm_{1-i} - m_{2-i}}{p^d - 1})$. Montrons que pour tout j, $\sup\{x_j, y_j\} \geq w_j \geq \inf\{x_j, y_j\}$. A échange près de (x_i) et (y_i), il y a deux cas à traiter. Soit $m_{1-j} = M((x_i))_{1-j}$ et $m_{2-j} = M((x_i))_{2-j}$. Dans ce cas, $w_j = x_j$. Soit $m_{1-j} = M((x_i))_{1-j}$ et $m_{2-j} = M((y_i))_{2-j}$. Dans ce cas, $x_i = \frac{pm_{1-i} - M((x_i))_{2-j}}{p^d - 1} \geq w_i \geq \frac{pM((y_i))_{1-j} - m_{2-j}}{p^d - 1} = y_i$. □

3.3. Configuration de Raynaud. — Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle configuration de Raynaud de cardinal N la donnée de $N+1$-points distincts $(P_0, \ldots, P_N)$ du cube $[0,1]^d$ vérifiant $\inf\{P_i, P_j\} = P_0$ pour tous $0 \leq i < j \leq N$.

Proposition 3.3.1. — *Une configuration de Raynaud est de cardinal au plus d.*

Démonstration. — Soit $(P_0,\dots,P_N)$ une configuration de Raynaud de cardinal N. À chaque point P_k sont associés des hyperplans affines $\mathcal{H}_i(P_k)$ pour $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Soit $S\subset\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ le sous-ensemble des i tels qu'il existe $1\le k\le N$ vérifiant $\mathcal{H}_i(P_k)>\mathcal{H}_i(P_0)$. Choisissons pour tout $i\in S$ un indice $k(i)$ réalisant cette dernière inégalité. Montrons que la fonction $k:S\to[1,N]\cap\mathbb{N}$ ainsi définie est surjective. Soit $k'\notin k(S)$. On a $\mathcal{H}_i(P_{k'})=\mathcal{H}_i(P_0)$ pour tout $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\setminus S$. Soit $i\in S$. La relation $\inf\{P_{k'},P_{k(i)}\}=P_0$ entraîne que $\mathcal{H}_i(P_{k'})=\mathcal{H}_i(P_0)$. Par conséquent $P_{k'}=P_0$, ce qui est une contradiction. □

Donnons à présent un critère pour qu'une configuration de Raynaud soit de cardinal deux.

Lemme 3.3.2. — *Soit $(P_0,\dots,P_N)$ une configuration de Raynaud de cardinal au moins 2. Supposons que pour tout $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_i(P_1)\neq\mathcal{H}_i(P_2)$. Alors $N=2$.*

Démonstration. — Dans la démonstration précédente, on peut prendre $k(i)\in\{1,2\}$ pour tout $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. □

Lemme 3.3.3. — *Considérons deux sommets opposés $(x_i),(x'_i)\in\{0,1\}^d$ vérifiant donc $x'_i=1-x_i$. Alors $\mathcal{H}_i(x)\neq\mathcal{H}_i(x')$ pour tout i. De plus, si $(x_i)\neq(0,\dots,0)$ et $(x_i)\neq(1,\dots,1)$, alors $\inf\{(x_i),(x'_i)\}<(x_i)$ et $\inf\{(x_i),(x'_i)\}<(x'_i)$.*

Démonstration. — Pour le premier point, remarquons que pour tout $j\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on a

$$(x_j-x'_j)+p(x_{j-1}-x'_{j-1})+\dots+p^{d-1}(x_{j+1}-x'_{j+1})\neq 0$$

car $p^{d-1}>\sum_{i=0}^{d-2}p^i$. Pour le second point, il suffit de démontrer que (x_i) n'est pas supérieur ou égal à (x'_i). Soit j tel que $x_j=0$, et $x'_j=1$. On vérifie alors que

$$p^{d-1}(x_j-x'_j)+p^{d-2}(x_{j+1}-x'_{j+1})+\dots+(x_{j-1}-x'_{j-1})<0$$

pour la même raison que précédemment. □

Corollaire 3.3.4. — *Il existe une seule configuration de Raynaud faisant intervenir deux sommets opposés. Elle est de cardinal un si ces sommets sont $(0,\dots,0)$ et $(1,\dots,1)$ et de cardinal deux sinon.*

Démonstration. — Combiner les lemmes **3.3.2** et **3.3.3**. □

Exemple 3.3.5. — Lorsque $d=2$ on a $\inf\{(0,1),(1,0)\}=(\frac{1}{p+1},\frac{1}{p+1})$. Lorsque $d=3$, $\inf\{(0,1,0),(1,0,1)\}=(\frac{-p-1+p^2}{p^3-1},\frac{p^2+p-1}{p^3-1},0)$.

Considérons maintenant un schéma en groupes fini et plat G sur $S=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar K})$ de rang p^{2d}, muni d'une action de k_F qui en fasse un k_F-vectoriel de dimension deux et qui soit isomorphe à son dual de Cartier de manière k_F-linéaire. De tels groupes proviendront par exemple de la p-torsion de variétés de Hilbert-Blumenthal pour $\mathcal{O}_F$. Soit H_1, H_2 et H_3 trois sous-groupes distincts de Raynaud de G (sous-groupe de Raynaud signifie sous-groupe fini et plat fermé de G de rang p^d, stable sous l'action de $\mathcal{O}_F$), numérotés dans un ordre indifférent.

Lemme 3.3.6. — *On a $H_3\geq\inf\{H_1,H_2\}$.*

Démonstration. — Dans le k_F-espace vectoriel de dimension deux abstrait $G(\bar{K})$, on peut supposer le groupe $H_1(\bar{K})$ engendré par un élément x, le groupe $H_2(\bar{K})$ engendré par un élément y et $H_3(\bar{K})$ engendré par $x+y$. On a un morphisme de somme $H_1 \times H_2 \to G[p]$ qui est un isomorphisme génériquement. Considérons le morphisme $\inf\{H_1, H_2\}$ vers $H_1 \times H_2$, appliquant un générateur de $\inf\{H_1, H_2\}(\bar{K})$ sur (x, y). Le morphisme composé $\inf\{H_1, H_2\} \to H_1 \times H_2 \to A[p]$ a pour image H_3. □

On va maintenant s'intéresser à tous les sous-groupes de Raynaud de G en même temps.

Corollaire 3.3.7. — *L'ensemble des classes d'isomorphismes de sous-groupes de Raynaud de G forme une configuration de Raynaud $(P_0, \ldots, P_N)$ de cardinal $0 \leq N \leq d$. De plus il existe un unique sous groupe appartenant à chaque classe d'isomorphisme P_i pour $i \geq 1$.*

Démonstration. — Soit H_1, H_2, H_3 trois sous-groupes de Raynaud distincts. On vérifie facilement grâce au lemme précédant que $\inf\{H_1, H_2\} \simeq \inf\{H_1, H_3\} \simeq \inf\{H_2, H_3\}$. Notons donc inf cette classe d'isomorphisme. Si C est une classe d'isomorphisme de sous-groupes de Raynaud de G vérifiant $C >$ inf alors C est réduite à un élément. En effet, si elle possédait deux élément, disons H et L, on aurait $\inf\{H, L\} = C = \inf$, ce qui est absurde. Par conséquent, inf et les classes d'isomorphismes de sous-groupes de Raynaud de G forme une configuration de Raynaud, disons $(P_0 = \inf, P_1, \ldots, P_N)$. Comme $N \leq d$ et que les classes d'isomorphismes $P_1, \ldots, P_N$ sont de cardinal 1, il existe des sous-groupes de Raynaud de G dans P_0. □

Disons que G est ordinaire s'il est isomorphe à $k_F \times (k_F \otimes \mu_p)$ sur S.

Corollaire 3.3.8. — *Supposons qu'il existe deux sous-groupes de Raynaud H et H' de G de coordonnées des sommets opposés du cube. Alors les classes d'isomorphismes de sous-groupes de Raynaud de G forment une configuration de Raynaud de cardinal un si G est ordinaire et de cardinal deux sinon. De plus, dans ce dernier cas les groupes H et H' sont uniques dans leur classe d'isomorphisme.*

Démonstration. — La première assertion résulte du corollaire **3.3.4**. Le fait que H et H' soient uniques dans leur classe d'isomorphisme si on a une configuration de Raynaud de cardinal deux résulte de **3.3.7**. □

3.4. Surconvergence. — Nous allons montrer que le lemme **3.3.3** et le corollaire **3.3.8** s'étendent par continuité à des sommets « presque opposés » du cube. Nous noterons $\underline{1} = (1, \ldots, 1) \in [0,1]^d$ et pour tout sous-ensemble W de $[0,1]^d$, nous noterons $\underline{1} - W = \{\underline{1} - x \mid x \in W\}$.

Lemme 3.4.1. — *Soit Z un sommet de $[0,1]^d$. Il existe un voisinage W de Z dans $[0,1]^d$ tel que pour tout point $x = (x_i) \in W$, $y = (y_i) \in \underline{1} - W$, on a $\mathcal{H}_i(x) \neq \mathcal{H}_i(y)$ pour tout i. De plus, si $Z \neq (0, \ldots, 0)$ ou $Z \neq (1, \ldots, 1)$, il existe $\varepsilon > 0$ dépendant de W mais pas de x et y tel que* $\deg(\inf\{(x_i), (y_i)\}) < \inf\{\deg((x_i)), \deg((y_i))\} - \varepsilon$.

Démonstration. — Le lemme **3.3.3** garantit que l'énoncé est vrai lorsque $x = Z$. La condition $\mathcal{H}_i(x) \neq \mathcal{H}_i(y)$ pour tout i est ouverte pour la topologie réelle de $([0,1]^d)^2$. Il existe donc un voisinage W de Z dans $[0,1]^d$ tel que cette condition reste satisfaite sur $W \times \underline{1} - W$. Toujours d'après le lemme **3.3.3** et la proposition **3.2.1**, si $x = Z$ est différent de $(0, \ldots, 0)$ ou $(1, \ldots, 1)$ on a $\deg(\inf\{(x_i), (1-x_i)\}) < \inf\{\deg((x_i)), \deg((1-x_i))\}$. Par continuité, il existe donc $\varepsilon > 0$

et W un voisinage de Z dans $[0,1]^d$ tel que $\deg(\inf\{(x_i),(y_i)\}) < \inf\{\deg((x_i)),\deg((y_i))\} - \varepsilon$ pour $(x,y) \in W \times \underline{1} - W$. $\square$

Corollaire 3.4.2. — *Soit Z un sommet du cube. Il existe un voisinage W de Z dans $[0,1]^d$ tel que s'il existe deux sous-groupes de Raynaud H et H' de G de coordonnées respectives dans W et dans $\underline{1} - W$, les classes d'isomorphismes de sous-groupes de Raynaud de G forment une configuration de Raynaud de cardinal un si $Z = (0,\ldots,0)$ ou $(1,\ldots,1)$ et de cardinal deux sinon. De plus, dans ce dernier cas les groupes H et H' sont uniques dans leur classe d'isomorphisme. Dans ce dernier cas, il existe également $\varepsilon > 0$ dépendant juste de $\mathcal{W}$ tel que $\deg(\inf(H,H')) < \inf\{\deg(H),\deg(H')\} - \varepsilon$.*

Démonstration. — Il suffit de prendre W comme dans le lemme **3.4.1** et d'appliquer le lemme **3.3.2** et le corollaire **3.3.7**. $\square$

4. Géométrie et dynamique

4.1. Schémas de Hilbert. — Le corps F désigne toujours une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$ de degré $d \geq 2$ et d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$ dans lequel p est inerte. On note F_p la complétion p-adique et k_F le corps résiduel associé. On identifie $\mathrm{Gal}(F_p/\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{Gal}(k_F/\mathbb{F}_p)$ et $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ en envoyant le Frobenius arithmétique en p sur 1. Le corps K est toujours une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ qui contient F_p, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, d'uniformisante π et de corps résiduel $\mathbb{F}$. On note v la valuation de K normalisée par $v(p) = 1$.

Définition 4.1.1. — Un schéma abélien de Hilbert-Blumenthal (SAHB) sur un schéma S est un schéma abélien A sur S de dimension d muni d'un plongement $\mathcal{O}_F \hookrightarrow \mathrm{End}_S(A)$.

Soit $N \geq 5$ un entier premier à p. Notons δ la différente de F. Soit $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de F. On note $\mathfrak{c}^+$ le cône des éléments totalement positifs de $\mathfrak{c}$. Notons $Y_{\Gamma_1(N),\mathfrak{c}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N])$ le schéma dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des triplets (A,i,ϕ) où

i. A est un schéma de Hilbert-Blumenthal sur S,

ii. $\iota : \delta^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_N \hookrightarrow A[N]$ est une injection de groupes étales,

iii. ϕ est une $\mathfrak{c}$-polarisation de A.

Dans cette définition, une $\mathfrak{c}$-polarisation est un homomorphisme $\mathcal{O}_F$-linéaire $\phi : \mathfrak{c} \to \mathcal{P}(A)$, où $\mathcal{P}(A)$ est le $\mathcal{O}_F$-module projectif de rang 1 des morphismes symétriques $f : A \to A^t$, tel que ϕ envoie $\mathfrak{c}^+$ dans le cône des polarisations $\mathcal{P}^+(A)$ et induise un isomorphisme $A \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{c} \xrightarrow{\sim} A^t$, qu'on note encore ϕ.

Soit $\{\mathfrak{c}_j\}$ des représentants du groupe de classe $Cl(F)^+$, qui est le quotient du groupe des idéaux fractionnaires par le sous-groupe des idéaux principaux engendrés par les éléments totalement positifs. On note $Y_{\Gamma_1(N)} = \coprod_i Y_{\Gamma_1(N),\mathfrak{c}_j}$. Ce schéma est indépendant du choix des $\{\mathfrak{c}_j\}$ à isomorphisme non unique près. Plus précisément, étant donné deux idéaux fractionnaires $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ et $\lambda \in F^{*+}$ totalement positif tel que $\mathfrak{c}' = \lambda \cdot \mathfrak{c}$, on obtient un isomorphisme $[\lambda] : Y_{\Gamma_1(N),\mathfrak{c}} \to Y_{\Gamma_1(N),\mathfrak{c}'}$ qui dépend de λ (en effet, on peut toujours multiplier λ par une unité positive).

Remarque 4.1.2. — Si l'ensemble $\lambda.\mathcal{O}_F^{*+}$ contient un nombre rationnel, alors il en contient un unique, disons λ_{rat}. Le rationnel λ_{rat} fournit alors un isomorphisme canonique entre $Y_{\Gamma_1(N),\mathfrak{c}}$ et $Y_{\Gamma_1(N),\mathfrak{c}'}$.

Soit $Y_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N])$ l'espace de modules dont les S-points sont les classes d'isomorphismes de données $(A,\iota,\phi,A',\iota',\phi',\alpha)$ où le triplet (A,ι,ϕ) est un point de $Y_{\Gamma_1(N),\mathfrak{c}_j}$ pour un certain idéal $\mathfrak{c}_j$, le triplet (A',ι',ϕ') est un point de $Y_{\Gamma_1(N),\mathfrak{c}_j}$ pour le même indice j et $\alpha : A \to A'$ est une isogénie $\mathcal{O}_F$-linéaire vérifiant

$$\alpha^t \circ \phi' \circ \alpha = \phi \circ p.$$

On note $H \hookrightarrow A[p]$ le noyau de α. C'est un groupe de rang p^d stable sous l'action de $\mathcal{O}_F$.

Lemme 4.1.3. — *Le schéma en groupes fini et plat H est de Raynaud sur $Y_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$.*

Démonstration. — Il faut vérifier par définition que H satisfait la condition $(**)$ de [**Ray**, p.246]. C'est le cas si $Y_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)}$ est plat sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. Mais la théorie du modèle local (voir [**St**]) montre que localement pour la topologie étale, le schéma $Y_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)}$ est donné par les équations $x_1 \cdot y_1 = p, \ldots, x_r \cdot y_r = p$ entre les variables $x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d$ pour $r \leq d$. Sa platitude est alors évidente. □

4.2. Les fonctions degrés. — Nous noterons désormais $X = Y_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N])} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et $Y = Y_{\Gamma_1(N)} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N])} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Nous noterons également $\mathfrak{X}$ la complétion de formel de X le long de sa fibre spéciale et X_{rig} la fibre rigide de $\mathfrak{X}$. Nous n'utiliserons pas les notions similaires pour Y.

Nous disposons du schéma abélien A sur X et de $H \subset A[p]$ qui est un sous-groupe de Raynaud. Considérons ω_H le faisceau conormal à la section unité de H. On peut le décomposer selon les plongements de k_F dans $\mathbb{F}$ en $\omega_H = \oplus_i \, \omega_{H,i}$. Posons $\delta_i = \mathrm{Fitt}_0 \, \omega_{H,i+1}$ où Fitt_0 désigne le 0-ème idéal de Fitting. C'est un faisceau inversible d'idéaux de $\mathscr{O}_X$. Soit $\tilde{\mathscr{O}}_{X_{\mathrm{rig}}}$ le sous-faisceau de $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{rig}}}$ des éléments de norme sup inférieure à 1. Les faisceaux δ_i induisent sur X_{rig} des faisceaux d'idéaux inversibles

$$\delta_i \subset \tilde{\mathscr{O}}_{X_{\mathrm{rig}}}$$

et pour tout $x \in X_{\mathrm{rig}}$ on peut considérer le rationnel $\deg_i H(x) = v(\delta_i(x))$. On dispose ainsi de fonctions

$$\begin{array}{rcl} \deg_i : X_{\mathrm{rig}} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \deg_i H(x) \end{array}$$

d'une fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{DEG} : X_{\mathrm{rig}} & \to & [0,1]^d \\ x & \mapsto & (\deg_i H(x))_{1\leq i\leq d} \end{array}$$

et d'une fonction

$$\begin{array}{rcl} \deg : X_{\mathrm{rig}} & \to & [0,d] \\ x & \mapsto & \deg H(x) = \sum_i \deg_i H(x) \end{array}$$

Toutes ces fonctions sont continues et sont localement égales à la valuation p-adique de fonctions analytiques. De plus, l'image inverse par n'importe laquelle de ces fonctions de tout sous-ensemble de $[0,1]^d$ défini par un nombre fini d'inégalités affines est un ouvert de X_{rig}. Cette image inverse est quasi-compacte si les inégalités sont larges et définies par des hyperplans rationnels de $[0,1]^d$. Pour tout $(v_i) \in [0,1]^d$, nous noterons $X_{\geq (v_i)} = \{x \in X_{\mathrm{rig}} \,|\, \mathrm{DEG}(x) \geq (v_i)\}$. Pour tout $v \in [0,d]$, on pose de même $X_{\geq v} = \{x \in X_{\mathrm{rig}} \mid \deg(x) \geq v\}$. On utilisera également la notation $X_{>v} = \{x \in X_{\mathrm{rig}} \mid \deg(x) > v\}$.

Remarque 4.2.1. — La fonction deg est déjà définie dans [**Fa**]. Les fonctions $\deg_i$ méritent le nom de « fonctions degré partielles ». Elles peuvent être définies de la même manière pour tout groupe fini et plat ayant une structure k_F-vectoriel sur un schéma formel admissible.

Pour toute strate Z du cube on note X_Z l'image inverse de Z via DEG dans X_{rig}.

4.3. Correspondance de Hecke. — Soit $C \to \mathrm{Spec}(K)$ l'espace de modules dont les S-points sont les classes d'isomorphisme de quintuplets (A, i, ϕ, H, L) où A est un schéma abélien de Hilbert-Blumenthal sur S, i est une structure de niveau de type $\Gamma_1(N)$, ϕ est une $\mathfrak{c}_j$-polarisation pour un indice j, et H et L sont des sous-groupes de $A[p]$ de rang p^d stables sous l'action de $\mathcal{O}_F$ vérifiant $L \cap H = \{0\}$.

On dispose de deux projections étales $p_1, p_2 : C \to X_K$ où p_1 est l'oubli de L et p_2 envoie (A, i, ϕ, H, L) sur $(A/L, i', \phi', A[p]/L)$ où i' est la structure de niveau N image de i et si ϕ est une $\mathfrak{c}$-polarisation de A alors ϕ' est la $\mathfrak{c}$-polarisation induite sur A/L. Remarquons que A/L est en fait muni d'une $p \cdot \mathfrak{c}$-polarisation mais la division par p permet de la transformer canoniquement en une $\mathfrak{c}$-polarisation.

L'analytifié C_{an} dans le sens de [**Be**, par.0.3] est muni de deux morphismes p_1 et p_2 vers l'analytifié X_{an}, qui contient X_{rig}. On note

$$C_{\mathrm{rig}} \;=\; C_{\mathrm{an}} \times_{p_1, X_{\mathrm{an}}} X_{\mathrm{rig}}$$

qui est toujours muni de deux morphismes $p_1, p_2 : C_{\mathrm{rig}} \to X_{\mathrm{rig}}$. Soit $P(X_{\mathrm{rig}})$ l'ensemble des parties de X_{rig}. On dispose d'une application

$$\begin{array}{rcl} U_p : P(X_{\mathrm{rig}}) & \to & P(X_{\mathrm{rig}}) \\ S & \mapsto & p_2 \circ p_1^{-1}(S) \end{array}$$

Rappelons la proposition classique suivante :

Proposition 4.3.1. — *Soit $g : T \to S$ un morphisme plat d'espaces rigides quasi-compacts. Le morphisme g envoie les ouverts quasi-compacts de T sur des ouverts quasi-compacts de S.*

Démonstration. — Voir [**Bo**], coro 2, page 182. □

Corollaire 4.3.2. — *L'application U_p envoie les parties finies dans les parties finies, les ouverts zariskiens dans les ouverts zariskiens, les ouverts admissibles quasi-compacts dans les ouverts admissibles quasi-compacts.*

4.4. Contraction et points spéciaux. — Nous allons à présent étudier le comportement dynamique de l'opérateur U_p agissant sur X_{rig}.

Proposition 4.4.1. — *Pour tout $(v_i) \in [0,1]^d$, on a $U_p\left(X_{\geq (v_i)}\right) \subset X_{\geq (v_i)}$. De même, pour tout $v \in [0,d]$, on a $U_p\left(X_{\geq v}\right) \subset X_{\geq v}$*

Démonstration. — Ces assertions se testent point par point. Comme U_p agit sur un point de X_{rig} en agissant par des isogénies sur le schéma abélien correspondant, la première partie de la proposition est juste la définition de la relation d'ordre $\geq$ sur les schémas en groupes de Raynaud et sa caractérisation via DEG fournie par la proposition **3.2.1**. La seconde partie provient de la première en sommant sur les indices $1 \leq i \leq d$ et divisant par $\sum_{k=0}^{d-1} p^k$, compte tenu de la définition de la relation d'ordre $\geq$ sur $[0,1]^d$ et du fait que $\deg = \sum_{i=1}^{d} \deg_i$. □

Des énoncés plus fins sont en fait vrais.

Proposition 4.4.2. — *Soit L une extension finie de K et $x = (A,H) \in X(\mathcal{O}_L)$. Soit N un entier ≥ 1. S'il existe $y \in U_p^N(\{x\})$ tel que $\deg(x) = \deg(y)$ alors*

i. *H est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1,*

ii. *il existe un groupe de Barsotti-Tate tronqué $G_N \subset A[p^N]$ d'échelon N, de hauteur d, stable sous l'action de $\mathcal{O}_F$, tel que l'application naturelle*

$$G_N \times H \to A[p^N]$$

soit une immersion fermée,

iii. *il existe $(x_i) \in \{0,1\}^d$ tel que $\mathrm{DEG}(H) = (x_i)$ et $\mathrm{DEG}(G_N[p]) = (1-x_i)$.*

Démonstration. — On obtient d'après les propriétés **i** et **iii** en adaptant [**Pi**, prop.2.4] pour tenir compte de l'action de $\mathcal{O}_F$. On obtient également potentiellement la propriété **ii**. Il existe donc une extension finie L' de L et un groupe de Barsotti-Tate tronqué $G_N \subset A_{\mathcal{O}_{L'}}[p^N]$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L'})$ d'échelon N, de hauteur d, stable sous l'action de $\mathcal{O}_F$, tel que l'application naturelle

$$G_N \times H_{\mathcal{O}_{L'}} \to A_{\mathcal{O}_{L'}}[p^N]$$

soit une immersion fermée.

Pour éviter au lecteur de consulter [**Pi**], rappelons l'argument et son adaptation au cas d'une action de $\mathcal{O}_F$. On utilise librement les propriétés de base de la fonction degré de [**Fa**]. Il existe pour $0 \leq i \leq N$ un point $x_i \in X_{\mathrm{rig}}$ tel que $x_0 = x$, $x_{i+1} \in U_p(\{x_i\})$ lorsque $1 \leq i \leq N-1$ et $x_N = y$. Quitte à étendre L en L', on peut supposer que $x_i \in X(\mathcal{O}_{L'})$. Il existe également une suite de groupes finis et plats L_i sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L'})$ tels que $x_i = (A/L_i, \mathrm{Im}(H \to A/L_i))$ pour tout i. On a $L_{i-1} \subset L_i$ et L_i est de rang p^{di} muni d'une action de $\mathcal{O}_F$ qui en fait un $\mathcal{O}_F/p^i$-module libre de rang un. Comme $\deg(x) = \deg(y)$ et que le degré augmente par isogénie, on obtient $\deg(x) = \deg(x_i)$ pour tout i. Le degré détectant les isomorphismes sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L'})$ parmi les morphismes sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L'})$ qui sont des isomorphismes sur $\mathrm{Spec}(L')$, on obtient pour tout i un isomorphisme $H \simeq \mathrm{Im}(H \to A/L_i)$ stable par l'action de $\mathcal{O}_F$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L'})$. On obtient en particulier un isomorphisme $\mathcal{O}_F$-linéaire $H \times L_i/L_{i-1} \simeq (A/L_{i-1})[p]$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L'})$. Posons $G_N = L_N$. Si $N = 1$ on en déduit que G_1 est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un stable par $\mathcal{O}_F$. Si $N > 1$, on obtient $\deg(H) = \deg((A/L_{i-1})[p]) - \deg(L_i) +$

$\deg(L_{i-1}) = d - \deg(L_i) + \deg(L_{i-1})$ car le degré est additif sur les suites exactes courtes. Pour tous $0 \leq j \leq i \leq N$, la suite courte $\mathcal{O}_F$-linéaire

$$0 \longrightarrow G_j \longrightarrow G_i \xrightarrow{p^j} G_{i-j} \longrightarrow 0$$

est exacte en fibre générique. Elle est donc exacte sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L'})$ puisque $\deg(G_j)+\deg(G_{j-i}) = \deg(G_i)$ d'après la formule précédente. On en déduit que G_N est bien un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon N, de hauteur d, stable sous l'action de $\mathcal{O}_F$. Il est clair qu'on dispose d'une immersion fermée $G_N \times H_{\mathcal{O}_{L'}} \to A_{\mathcal{O}_{L'}}[p^N]$. En particulier, G_1 est isomorphe au dual de Cartier de H et donc $\mathrm{DEG}(G_1) = (1 - x_i)$ (voir [**Ray**], rem. 1.5.3).

Il s'agit finalement de prouver que G_N est en fait défini sur L. Commençons par traiter le cas $N = 1$. On peut supposer L'/L galoisienne. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/L)$. Notons G_1^σ le tordu par σ de G_1. C'est toujours un groupe de Barsotti-Tate tronqué sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L'})$ inclus dans $A_{\mathcal{O}_{L'}}[p]$ et il est stable par l'action de $\mathcal{O}_F$ car L contient F_p par hypothèse. Il existe un isomorphisme

$$G_1^\sigma \times H_{\mathcal{O}_{L'}} \ = \ A_{\mathcal{O}_{L'}}[p]$$

sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L'})$, ce qui montre que $\mathrm{DEG}(G_1^\sigma) = (1-x_i)$. D'après le corollaire **3.3.8**, on en déduit que $G_1^\sigma[p] = G_1[p]$ comme sous-groupe de $A_{\mathcal{O}_{L'}}[p]$. Ainsi G_1 est bien défini sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L)$ tout comme son plongement dans $A[p]$.

On raisonne par récurrence sur N pour traiter le cas général. Supposons que le groupe G_{N-1} relatif n'importe quel point $x' = (A', H')$ vérifiant les hypothèses de la proposition est défini sur L et montrons que c'est le cas de G_N relatif à $x = (A, H)$. Posons $x' = (A/G_1, H/G_1)$ qui est bien défini sur L. Le groupe G_N relatif à x est alors l'image inverse du groupe G_{N-1} relatif à x' par l'isogénie $A \to A/G_1$ et il est donc défini sur L. $\square$

Définition 4.4.3. — Soit $Z = (x_i) \in \{0, 1\}^d$ un sommet du cube. On appelle point spécial d'ordre N de X_Z un point $x \in X_Z$ qui vérifie les hypothèses de la proposition **4.4.2** pour l'entier N. Le lieu spécial d'ordre N de X_Z est l'ensemble des points spéciaux d'ordre N.

On note $S_Z(N)$ le lieu spécial d'ordre N de X_Z. On a bien sûr $S_Z(N + 1) \subset S_Z(N)$.

Proposition 4.4.4. — *Le lieu spécial de $S_Z(N)$ est un ouvert quasi-compact de X_Z. Si Z est différent de $(1, \ldots, 1)$, il existe un sous-groupe spécial*

$$G_N \ \subset \ A[p^N] \times_{X_{\mathrm{rig}}} S_Z(N)$$

localement libre de rang un comme $\mathcal{O}_F/p^N\mathcal{O}_F$-module dont la fibre en tout point de $S_Z(N)$ soit le groupe construit dans la proposition précédente.

Démonstration. — Si $Z = (1, \ldots, 1)$ on a $S_Z(N) = X_Z$ pour tout N et la proposition est claire. Supposons donc $Z \neq (1, \ldots, 1)$ et commençons par traiter le cas $N = 1$. Soit $C_Z(1)$ l'ouvert quasi-compact de C_{rig} où H a pour coordonnées (x_i) et L pour coordonnées $(1 - x_i)$. Son image par le morphisme étale p_1 est $S_Z(1)$, c'est donc un ouvert quasi-compact. D'après le corollaire **3.3.8**, le morphisme étale $p_1 : C_Z(1) \to S_Z(1)$ a des fibres géométriques de cardinal un. C'est donc un isomorphisme et il admet un inverse qui fournit une section s de $S_Z(1)$ dans C_{rig}. L'image inverse du groupe universel L sur C_{rig} par s est le groupe G_1 cherché sur $S_Z(1)$.

Traitons maintenant le cas général par récurrence. Supposons donc la proposition démontrée pour $N-1$ et vérifions là pour N. Au dessus de $S_Z(N-1)$, on dispose donc d'un groupe G_{N-1}. On peut donc considérer le morphisme $S_Z(N-1) \to X_{\mathrm{rig}}$ donné par $(A, H) \mapsto (A/G_1, H/G_1)$.

Alors $S_Z(N)$ est l'image inverse de $S_Z(N-1)$ par ce morphisme, et le groupe G_N sur $S_Z(N)$ est l'image inverse du groupe G_{N-1} sur $S_Z(N-1)$ par ce morphisme. $\square$

Remarque 4.4.5. — Lorsque $Z=(0,\dots,0)$, on a alors $X_Z=S_Z(N)$ pour tout N et G_N est le sous-groupe canonique d'échelon N. La proposition précédente est bien connue dans ce cas.

En dehors des points spéciaux, on a de bonnes propriétés de contraction de la correspondance vers le tube multiplicatif ordinaire $X_{(1,\dots,1)}$. Nous utiliserons la proposition suivante.

Proposition 4.4.6. — *Soit $n\in\mathbb{N}$, $0\le n\le d-1$. Soit $\eta,\mu\in\mathbb{R}$, $0<\eta<\mu<1$. Il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que*

$$U_p^N\left(X_{\geq n+\eta}\right) \subset X_{\geq n+\mu}.$$

Démonstration. — La fonction degré augmente strictement après application de U_p sur $X_{\geq n+\eta}\setminus X_{>n+\mu}$ grâce à la proposition **4.4.2**. Comme $X_{\geq n+\eta}\setminus X_{>n+\mu}$ est quasi-compact et que la fonction degré est localement la valuation d'une fonction analytique, il résulte du principe du maximum qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $x\in X_{\geq n+\eta}\setminus X_{>n+\mu}$, et tout $y\in U_p(\{x\})$, $\deg(y)\geq\deg(x)+\epsilon$. Il en résulte que $U_p^m\left(X_{\geq n+\eta}\right)\subset X_{\geq n+\eta+m\varepsilon}\cup X_{\geq n+\mu}$ pour tout $m\geq 0$. On en déduit le résultat. $\square$

4.5. Surconvergence des groupes spéciaux. — Tout comme le sous-groupe canonique surconverge dans un voisinage strict du lieu ordinaire, on a aussi surconvergence des groupes spéciaux sur des voisinages stricts des ouverts-quasi compacts $S_Z(N)$ pour Z un sommet de $[0,1]^d$ et $N\geq 1$ un entier. Nous allons en fait exhiber des voisinages de surconvergence ayant une allure précise, bien que dépendant de bornes non quantifiées. Quantifier précisément de telles bornes nous serait inutile. Pour tout point $P\in\mathbb{R}^d$ et $t\in[0,d]$ notons

$$V_{P,t}=\left\{x\in[0,1]^d \mid x\geq P \,\text{et}\, \deg(x)\leq t\right\}$$

et $X_{\geq P,\leq t}=\mathrm{DEG}^{-1}(V_{P,t})$.

Lemme 4.5.1. — *On a $U_p(X_{\geq P,\leq t})\subset X_{\geq P,\leq t}\cup X_{\geq t}$ pour tout $P\in\mathbb{R}^d$ et $t\in[0,d]$.*

Démonstration. — Immédiat par la proposition **4.4.1**. $\square$

Lemme 4.5.2. — *Soit Z un sommet de degré r et $(P_n)\in(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (au sens de la relation d'ordre $\leq$) tendant vers Z pour la topologie standard. On suppose de plus que pour tout $n\in\mathbb{N}$, Z est dans l'interieur de la pyramide d'équation $(x_i)\geq P_n$. Les ouverts*

$$\{X_{\geq P_n,\,\leq r+\frac{1}{n+1}}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

forment un système fondamental de voisinages stricts de X_Z.

Démonstration. — Le sommet Z est bien dans l'intérieur de $V_{P_n,\,r+\frac{1}{n+1}}$ et donc

$$X_{\geq P_n,\,\leq r+\frac{1}{n+1}}$$

est un voisinage strict de X_Z. Remarquons que pour tout point $P \in \mathbb{R}^d$, l'hyperplan de $\mathbb{R}^d$ d'équation $\deg P = \sum_i x_i$ intersecte la pyramide d'équation $(x_i) \geq P$ au seul point P. Il en résulte que les

$$V_{P_n,\, r+\frac{1}{n+1}}$$

forment une suite décroissante de compacts de $\mathbb{R}^d$ d'intersection Z. On en déduit que pour tout voisinage ouvert U de Z dans $[0,1]^d$, il existe n tel que $V_{P_n,\, r+\frac{1}{n+1}} \subset U$. Par un argument identique à celui de la prop. 4.3.5 de [**Pi**] (lui-même décalqué de la prop. 1.2.2 de [**Be**]), on voit que les $DEG^{-1}(U)$ où U parcourt les voisinages ouvert de Z dans $[0,1]^d$ forment un système fondamental de voisinage stricts de X_Z. Par conséquent, les

$$\{X_{\geq P_n,\, \leq r+\frac{1}{n+1}}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

forment un système fondamental de voisinages stricts de X_Z. □

Lemme 4.5.3. — *Soit Z un sommet de degré $r \leq d-1$. Il existe un voisinage strict $\mathcal{W}$ de X_Z dans X qui vérifie les propriétés suivantes :*

i. *pour tout $x = (A,H) \in \mathcal{W}$ tel que $U_p(x) \cap \mathcal{W} \neq \varnothing$, l'ensemble des sous-groupes de Raynaud de $A[p]$ forme une configuration de Raynaud de cardinal 2 si $r \geq 1$ et de cardinal 1 si $r = 0$,*

ii. *dans la situation de* i, *H possède un supplémentaire privilégié G_1 tel que $DEG(G_1) \in \underline{1} - DEG(\mathcal{W})$, et tout sous-groupe de Raynaud de $A[p]$ différent de H et G_1 est isomorphe à $\inf\{H, G_1\}$,*

iii. *dans la situation de* i, *il existe $\varepsilon > 0$ dépendant juste de $\mathcal{W}$ mais pas de x tel que $\deg(\inf\{H, G_1\}) \leq d - r - \varepsilon$.*

Démonstration. — Soit W un voisinage arbitraire de Z dans $[0,1]^d$. Posons $\mathcal{W} = \mathrm{DEG}^{-1}(W)$ qui un voisinage ouvert de X_Z dans X_{rig}. Soit $x = (A,H) \in X_{\mathrm{rig}}$ tel que $U_p(x) \cap \mathcal{W} \neq \varnothing$. Il existe donc un sous-groupe de Raynaud H' de $A[p]$ tel que $\mathrm{DEG}(H) \in W$ et $\mathrm{DEG}(H') \in \underline{1} - W$ (car $DEG(A[p]/H') \in W$). Il suffit alors de choisir W comme dans le corollaire **3.4.2**.

Remarquons que quitte à choisir pour W un voisinage de Z dans $[0,1]^d$ de forme polyédrale délimité par des hyperplans définis sur $\mathbb{Q}$, on peut supposer que $\mathcal{W}$ est un voisinage strict quasi-compact de X_Z. □

Dans le reste de cette partie, on fixe un sommet Z de degré $\leq d-1$. Fixons un voisinage strict quasi-compact $\mathcal{U}_Z \subset \mathcal{W}$ de la forme $X_{\geq P, \leq u}$ du sommet X_Z où $u \in]r, r+\varepsilon[$ (où ϵ a été défini dans le lemme précédent). Il existe d'après le lemme **4.5.2**. Posons $\mathcal{U}_Z(N) = \{x \in \mathcal{U}_Z \mid U_p^N(x) \cap \mathcal{U}_Z \neq \varnothing\}$ pour tout $N \geq 1$. Posons aussi $\mathcal{U}_Z(0) = \mathcal{U}_Z$.

Proposition 4.5.4. — *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

i. *$\mathcal{U}_Z(N)$ est un ouvert quasi-compact pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.*

ii. *$S_Z(N) \subset \mathcal{U}_Z(N)$ pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.*

iii. *$\mathcal{U}_Z(N) \subset \mathcal{U}_Z(N-1)$ pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.*

iv. *Il existe un sous-groupe*

$$G_N \subset A[p^N] \times_{X_{\mathrm{rig}}} \mathcal{U}_Z(N)$$

qui est localement libre de rang un comme $\mathcal{O}_F/p^N\mathcal{O}_F$-module, qui vérifie $H \cap G_N = \{0\}$ et dont la restriction à $S_Z(N)$ est le groupe spécial d'échelon N construit précédemment.

v. *La correspondance U_p est la réunion $U_p^{\mathrm{sp}} \cup U_p^{\mathrm{nsp}}$ sur $\mathcal{U}_Z(1)$ où U_p^{sp} est la correspondance « diviser par le groupe spécial » et U_p^{nsp} est son complémentaire.*

vi. *On a $U_p^{\mathrm{sp}}(\mathcal{U}_Z(N)) \subset \mathcal{U}_Z(N-1)$ et $U_p^{\mathrm{nsp}}(\mathcal{U}_Z(N)) \subset X_{\geq u}$ pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.*

vii. *On a $U_p^{\mathrm{sp}}\big(\mathcal{U}_Z(N) \setminus \mathcal{U}_Z(N+1)\big) \subset \mathcal{U}_Z(N-1) \setminus \mathcal{U}_Z(N)$ pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.*

Démonstration. — Chaque $\mathcal{U}_Z(N)$ est image inverse d'un ouvert quasi-compact par une correspondance finie et donc est quasi-compact. Cela prouve le point **i**. Le point **ii** est évident. On vérifie que $U_p(x) \cap \mathcal{U}_Z = \emptyset \Rightarrow U_p^2(x) \cap \mathcal{U}_Z = \emptyset$ et on en déduit le point **iii**.

Pour démontrer le point **iv** on commence par supposer $N = 1$. Pour tout point $x = (A,H) \in \mathcal{U}_Z(1)$ on dispose d'après le lemme précédent d'un unique supplémentaire G_1 de H tel que $\mathrm{DEG}(G_1) \in \underline{1} - \mathrm{DEG}(\mathcal{U}_Z)$. Notons $\mathcal{C}_Z(1)$ l'ouvert quasi-compact de C_{rig} où $(A,H) \in \mathcal{U}_Z(1)$ et $\mathrm{DEG}(L) \in \underline{1} - \mathrm{DEG}(\mathcal{U}_Z)$. On obtient un morphisme étale $\mathcal{C}_Z(1) \to \mathcal{U}_Z(1)$ dont les fibres géométriques sont de cardinal un. Il possède donc une section qui fournit le groupe G_1 voulu sur $\mathcal{U}_Z(1)$. Lorsque $N \geq 1$, on raisonne par récurrence. Supposons donc G_{N-1} construit sur $\mathcal{U}_Z(N-1)$ et cherchons à construire G_N sur $\mathcal{U}_Z(N)$. Considérons le morphisme $\mathcal{U}_Z(N-1) \to X_{\mathrm{rig}}$ donné par $(A,H) \mapsto (A/G_1, H/G_1)$. Alors $\mathcal{U}_Z(N)$ est l'image inverse de $\mathcal{U}_Z(N-1)$ par ce morphisme, et le groupe G_N sur $\mathcal{U}_Z(N)$ est l'image inverse du groupe G_{N-1} sur $\mathcal{U}_Z(N-1)$ par ce morphisme.

Au dessus de $\mathcal{U}_Z(1)$ on a donc $U_p = U_p^{\mathrm{sp}} \cup U_p^{\mathrm{nsp}}$ où en termes modulaires U_p^{sp} divise par le sous-groupe G_1. Cela prouve le point **v**. Le fait que $U_p^{\mathrm{nsp}}(\mathcal{U}_Z(N)) \subset X_{\geq u}$ provient de la définition de U_p^{nsp} et des lemmes **4.5.1** et **4.5.3**, iii. Les autres assertions des points **vi** et **vii** sont évidentes. □

On peut faire surconverger plus encore les groupes spéciaux.

Proposition 4.5.5. — *Il existe un voisinage strict $\mathcal{U}'_Z(N)$ de $\mathcal{U}_Z(N)$ dans $\mathcal{U}_Z$ et un sous-groupe $G_N \subset A[p^N] \times_{X_{\mathrm{rig}}} \mathcal{U}'_Z(N)$ qui est localement libre de rang un comme $\mathcal{O}_F/p^N\mathcal{O}_F$-module, qui vérifie $H \cap G_N = \{0\}$ et dont la restriction à $\mathcal{U}_Z(N)$ est le groupe G_N construit précédemment. Il existe $\varepsilon' > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{U}'_N(Z)$ et tout sous-groupe de Raynaud $L \subset A_x[p]$ différent de H et de $G_N[p]$ on ait $\deg(L) < d - r - \varepsilon'$.*

Démonstration. — Considérons l'espace $C_{N,\mathrm{rig}}$ sur X_{rig} qui paramètre les sous-groupes L_N de $A[p^N]$ qui sont des sous $\mathcal{O}_F$-modules localement libres de rang un sur $\mathcal{O}_F/p^N$ vérifiant $H \cap L_N = \{0\}$. La projection $p_{N,1} : C_{N,\mathrm{rig}} \to X_{\mathrm{rig}}$ est finie étale. La donné de G_N fournit une section s de $p_{N,1}$ sur $\mathcal{U}_Z(N)$. Comme $\mathcal{U}_Z(N)$ est quasi-compact, l'existence d'un voisinage strict $\mathcal{U}'_Z(N)$ de $\mathcal{U}_Z(N)$ dans $\mathcal{U}_Z$ et d'une section s' prolongeant s sur $\mathcal{U}'_Z(N)$ résulte de la proposition **2.2.4**. L'image inverse du groupe universel L_N sur $C_{N,\mathrm{rig}}$ par s' fournit le groupe G_N sur $\mathcal{U}'_Z(N)$.

Il reste à vérifier l'assertion de degré. Soit $f : C_{N,\mathrm{rig}} \to C_{\mathrm{rig}}$ le morphisme au-desus de X_{rig} fourni par $L_N \mapsto L_N[p]$. D'après le point **iii** du lemme **4.5.3**, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le degré de L soit $\leq d - r - \varepsilon$ sur le complémentaire dans $p_1^{-1}(\mathcal{U}_Z(N))$ de l'image par f de $s(\mathcal{U}_N(Z))$. Quitte à rapetisser $\mathcal{U}'_Z(N)$, il est clair qu'il existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tel que le degré de L soit $\leq d - r - \varepsilon'$ sur le complémentaire dans $p_1^{-1}(\mathcal{U}'_Z(N))$ de l'image par f de $s(\mathcal{U}'_N(Z))$. □

Sur tout ouvert où le sous-groupe spécial surconverge on décompose la correspondance de Hecke U_p en $U_p = U_p^{\mathrm{sp}} \cup U_p^{\mathrm{nsp}}$. Cela vaut en particulier sur $\mathcal{U}'_Z(N)$. Fixons maintenant $v \in]r, r+\varepsilon'[$.

Lemme 4.5.6. — *Quitte à rapetisser les $\mathcal{U}'_N(Z)$, on peut conserver le même ε' vérifiant les conclusions de la proposition **4.5.5** et supposer que*

i. *On a $\mathcal{U}'_Z(N) \subset \mathcal{U}'_Z(N-1)$ pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.*

ii. *On a $U_p^{\mathrm{sp}}(\mathcal{U}'_Z(N)) \subset \mathcal{U}'_Z(N-1)$ et $U_p^{\mathrm{nsp}}(\mathcal{U}'_Z(N)) \subset X_{\geq v}$ pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.*

Démonstration. — Montrons juste que $U_p^{\mathrm{nsp}}(\mathcal{U}'_Z(N)) \subset X_{\geq v}$ pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sans même avoir à rapetisser $\mathcal{U}'_N(Z)$. Par définition U_p^{nsp} divise par les sous-groupes de Raynaud $L \subset A[p]$ différents de H et de $G_1 = G_N[p]$. Mais ces groupes sont de degré $< d - r - \varepsilon'$ et on a donc $\deg(A[p]/L) > r + \varepsilon' \geq v$. □

5. Prolongement analytique des formes modulaires

5.1. Formes de Hilbert. — Rappelons qu'on a identifié $\mathrm{Hom}(F,K) = \mathrm{Gal}(F_p/\mathbb{Q}_p)$ avec $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. À tout d-uplet $(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ correspond le caractère

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} k_i \cdot i$$

du tore $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})} \mathrm{Spec}(K)$. On appelle poids tout caractère de ce tore et on identifie l'ensemble des poids avec $\mathbb{Z}^d$ par la règle précédente. On notera $\lambda \mapsto \lambda^{\underline{k}}$ l'action de $\underline{k} \in \mathbb{Z}^d$ sur $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})} \mathrm{Spec}(K)$.

Définition 5.1.1. — Une forme de Hilbert classique sur X de poids $\kappa \in \mathbb{Z}^d$ est une loi fonctorielle f définie sur les $\mathcal{O}_K$-algèbres R qui associe à tout quintuplet $(A, i, \phi, H, \omega)/R$ où (A, i, ϕ, H) est un R-point de X et $\omega \in \omega_{A/R}$ est une section non nulle du faisceau conormal le long de la section unité, un élément $f(A, i, \phi, H, \omega) \in R$ et qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$f((A, i, \phi, H, \lambda.\omega) = \lambda^{-\kappa} \cdot f((A, i, \phi, H, \omega) \quad \forall\, \lambda \in (R \otimes_{\mathbb{Q}} F)^\times .$$

Le faisceau conormal ω_A du SAHB universel est un $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_X$-module localement libre de rang un. On peut donc le décomposer selon les éléments de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ en somme de faisceaux inversibles

$$\omega_A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \omega_{A,i}.$$

Pour tout $\kappa = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, on définit alors le faisceau inversible $\omega^\kappa = \bigotimes_i \omega_{A,i}^{k_i}$. Les formes de Hilbert de poids κ sur X sont donc par définition les sections globales du faisceau inversible ω^κ sur X. Notons encore ω^κ l'analytifié de ω^κ qui est un faisceau inversible sur X_{rig}. L'énoncé suivant est une combinaison du « principe de Koecher » et du théorème GAGA en géométrie formelle.

Proposition 5.1.2. — *L'application d'analytification induit un isomorphisme entre $\mathrm{H}^0(X_K, \omega^\kappa)$ et $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{rig}}, \omega^\kappa)$.*

Démonstration. — Soit $\bar{X}$ une compactification toroïdale de X sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ construite dans [**La**], thm. 6.1. Le faisceau ω^k s'étend en un fibré inversible sur $\bar{X}$. Le principe de Koecher ([**La**], thm. 8.7) garantit que $\mathrm{H}^0(X_K,\omega^\kappa)=\mathrm{H}^0(\bar{X}_K,\omega^\kappa)$ et que $\mathrm{H}^0(X\times\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^n),\omega^\kappa)=\mathrm{H}^0(\bar{X}\times\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^n),\omega^\kappa)$ pour tout $n\geq 1$. On en déduit que $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X},\omega^\kappa)=\mathrm{H}^0(\bar{\mathfrak{X}},\omega^\kappa)$ où $\mathfrak{X}$ et $\bar{\mathfrak{X}}$ désignent les complétions formelles de X et $\bar{X}$ le long de leur fibre spéciale. On a par définition $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{rig}},\omega^\kappa)=\mathrm{H}^0(\mathfrak{X},\omega^\kappa)\otimes_{\mathcal{O}_K}K$ et on conclut par le théorème GAGA de EGA III.4.1.5 qui garantit que $\mathrm{H}^0(\bar{\mathfrak{X}},\omega^\kappa)=\mathrm{H}^0(\bar{X},\omega^\kappa)$ puisque le schéma $\bar{X}$ est propre sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. □

Définition 5.1.3. — L'espace des formes surconvergentes de poids κ est le module

$$\mathrm{H}^0(X_K,\omega^\kappa)^\dagger=\mathrm{colim}_V\,\mathrm{H}^0(V,\omega^\kappa)$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts V du tube multiplicatif $X_{(1,\dots,1)}$ dans X_{rig}.

On dispose d'une application de restriction injective $\mathrm{H}^0(X_K,\omega^\kappa)\hookrightarrow\mathrm{H}^0(X_K,\omega^\kappa)^\dagger$ dont l'image est par définition l'ensemble des formes classiques.

5.2. Opérateur de Hecke. — La correspondance U_p agissant sur X_{rig} se relève en un opérateur agissant sur les formes modulaires. Nous allons rappeler sa définition puis calculer sa norme p-adique.

5.2.1. *Définition.* — Rappelons qu'on a défini une correspondance $p_1,p_2:C\to X_K$. Soit $\pi:A\to A/L$ l'isogénie universelle au dessus de C. Elle induit un isomorphisme

$$\pi^\star\ :\ \omega_{A/L/X}\to\omega_{A/X}$$

et donc un morphisme

$$\pi^\star(\kappa)\ :\ p_2^\star\omega^\kappa\longrightarrow p_1^\star\omega^\kappa$$

pour tout $\kappa\in\mathbb{Z}^d$. Pour tout ouvert U de X_{rig}, considérons le morphisme composé

$$\tilde{U_p}\ :\ \mathrm{H}^0\left(U_p(U),\,\omega^\kappa\right)\longrightarrow\mathrm{H}^0\left(p_1^{-1}(U),\,p_2^\star\omega^\kappa\right)\overset{\pi^\star(\kappa)}{\longrightarrow}\mathrm{H}^0\left(p_1^{-1}(U),\,p_1^\star\omega^\kappa\right)\overset{\mathrm{Tr}_{p_1}}{\longrightarrow}\mathrm{H}^0\left(U,\,\omega^\kappa\right)$$

On pose alors $U_p=\frac{1}{p^d}\tilde{U}_p$. La normalisation par p^{-d} optimise l'intégralité de l'opérateur U_p sur les formes modulaires de Hilbert comme on peut le voir par un calcul explicite sur le tube $X_{(1,\dots,1)}$ à l'aide de la théorie de Serre-Tate, ou bien par un calcul de q-développement.

Explicitons cette définition. Soit U un ouvert de X_{rig}, une fonction $f\in H^0(U_p(U),\omega^\kappa)$, un point $x=(A,\iota,\phi,H)\in U(\bar{K})$ et $\omega\in\omega_{A/\bar{K}}$ une différentielle ne s'annulant pas. On a

$$U_p(f)(x,\omega)\ =\ \frac{1}{p^d}\sum_{L\in p_1^{-1}\{x\}}f(A/L,\iota',\phi',A[p]/H,\omega')$$

où $\omega'\in\omega_{(A/L)/\bar{K}}$ est définie par la formule $\pi^\star\omega'=\omega$.

Remarque 5.2.2. — L'opérateur U_p agit sur l'espace des formes modulaires surconvergentes de poids κ d'après la proposition **4.4.1**.

Soit U un ouvert de X_{rig}. Si un sous-groupe spécial est défini sur U, on peut de même considérer les opérateurs U_p^{sp} et $U_p^{\mathrm{nsp}}:\mathrm{H}^0(U_p(U),\omega^\kappa)\to\mathrm{H}^0(U,\omega^\kappa)$ définis par les règles

$$U_p^{\mathrm{sp}}(f)(x,\omega)\ =\ \frac{1}{p^d}\cdot f(A/G_1,\iota',\phi',A[p]/G_1,\omega')$$

et

$$U_p^{\mathrm{nsp}}(f)(x,\omega) = \frac{1}{p^d} \sum_{L \in p_1^{-1}\{x\},\, L \neq G_1} f(A/L, \iota', \phi', A[p]/L, \omega').$$

On a alors $U_p = U_p^{\mathrm{sp}} + U_p^{\mathrm{nsp}}$.

5.2.3. Calcul de la norme. — Soit $A \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ un SAHB et $L \subset A[p]$ un sous groupe de Raynaud. On note (x_i) les coordonnées de L via l'application DEG. On a une isogénie $\pi : A \to A/L$ qui induit une suite exacte de $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$-modules

$$0 \longrightarrow \omega_{A/L} \xrightarrow{\pi^\star} \omega_A \longrightarrow \omega_L \to 0.$$

On peut décomposer cette suite exacte selon les éléments de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et on obtient comme composante isotypique une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \omega_{A/L,i} \xrightarrow{\pi_i^\star} \omega_{A,i} \longrightarrow \omega_{L,i} \to 0.$$

Cette suite s'identifie à la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}} \xrightarrow{p^{x_{i-1}}} \mathcal{O}_{\bar{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^{x_{i-1}}\mathcal{O}_{\bar{K}} \to 0.$$

Soit $Z = (x_i) \in \{0,1\}^d$ un sommet du cube distinct de $(1,\ldots,1)$. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de X_Z sur lequel on dispose de l'opérateur U_p^{sp}. On définit alors la norme de U_p^{sp} sur $\mathcal{W}$ par

$$|U_p^{\mathrm{sp}}|_{\mathcal{W}} = \inf\left\{ r \in \mathbb{R} \;\mid\; |U_p^{\mathrm{sp}}(f)|_{\mathcal{W}} \leq r|f|_{U_p(\mathcal{W})} \quad \forall f \in \mathrm{H}^0(U_p^{\mathrm{sp}}(\mathcal{W}), \omega^\kappa) \right\}$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 5.2.4. — *Pour tout ouvert $V \subset S_Z(1)$, si on note $Z = (x_1,\ldots,x_d)$ on a*

$$|U_p^{\mathrm{sp}}|_V \leq p^{d + \sum_i k_i(x_{i-1}-1)}.$$

*Pour tout $\mu > 0$, il existe un voisinage strict $\mathcal{U}_Z$ de X_Z comme dans la proposition **4.5.4** tel que pour tout ouvert $V \subset \mathcal{U}_Z'(1)$, on a*

$$|U_p^{\mathrm{sp}}|_V \leq p^{d + \mu + \sum_i k_i(x_{i-1}-1)}.$$

Démonstration. — La norme de U^{sp} sur V est p^d (à cause de la normalisation) multiplié par $p^{-\sum_i k_i \deg_{i-1}(G_1)}$. On obtient la première assertion puisque le sous-groupe spécial G_1 au-dessus de $S_Z(1)$ a pour DEG la famille $(1 - x_i)$.

Le voisinage $\mathcal{U}_Z$ construit dans le paragraphe **4.5** dépend du choix originel de $\mathcal{W}$ un voisinage de X_Z dans X_{rig} effectué dans le lemme **4.5.3**. On avait par construction $\mathcal{W} = \mathrm{DEG}^{-1}(W)$ où W était un voisinage de Z dans $[0,1]^d$. Comme d'après le lemme **4.5.3**, on a $\mathrm{DEG}(G_1) \in \underline{1} - W$ sur tous les points de $\mathcal{W}$ dans la situation du point **i** du lemme **4.5.3**, on peut bien choisir W assez proche de Z pour que $|U_p^{\mathrm{sp}}|_V \leq p^{d+\mu+\sum_i k_i(x_{i-1}-1)}$ sur tout ouvert $V \subset \mathcal{U}_Z'(1)$. □

6. Le prolongement analytique

Nous allons démontrer le théorème suivant, qui est le théorème **1.1** de l'introduction.

Théorème 6.1. — *Soit f une forme modulaire de Hilbert surconvergente de poids $\kappa = (k_1, k_2, \ldots, k_g)$ propre pour l'opérateur U_p de valeur propre a_p. Si $v(a_p) < \inf_i(k_i) - d$ alors f est classique sur X_K.*

L'objet essentiel de cette section sera de prouver le lemme suivant en plusieurs étapes. On se place sous les hypothèses du théorème **6.1**.

Lemme 6.1.1. — *Soit $0 \leq r \leq d-1$ un entier. Supposons qu'il existe $\eta > 0$ et un prolongement de f sur $X_{>r+1-\eta}$ vérifiant toujours l'équation $U_p(f) = a_p \cdot f$. Il existe alors $\eta' > 0$ et un prolongement de f sur $X_{>r-\eta'}$ qui vérifie l'équation $U_p(f) = a_p \cdot f$.*

*Démonstration du théorème **6.1**.* — Il existe par hypothèse $\eta > 0$ tel que f soit définie sur $X_{>d-\eta}$ et vérifie l'équation $U_p(f) = a_p \cdot f$. On peut donc raisonner par récurrence en utilisant le lemme **6.1.1** et l'on obtient que f est prolongeable sur $X_{\geq 0} = X_{\mathrm{rig}}$. Sa classicité résulte alors de **5.1.2**. □

Nous allons démontrer le lemme **6.1.1** en trois étapes : nous allons d'abord prolonger f jusqu'à $X_{>r}$ en utilisant seulement l'hypothèse $a_p \neq 0$. Nous la prolongerons ensuite sur des voisinages stricts de X_Z pour Z parcourant les sommets de degré r du cube. C'est l'étape la plus délicate de l'article et les hypothèses sur le poids et la pente apparaissant dans l'énoncé du théorème **6.1** seront nécessaires. Il sera alors facile de prolonger f jusqu'à $X_{\geq r-1/2}$.

6.2. Prolongement jusqu'à $X_{>r}$. — Considérons le recouvrement admissible

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_{>r+\frac{1}{n}}$$

de $X_{>r}$. Soit $\eta > 0$ tel que f soit définie sur $X_{>r+1-\eta}$. Par la proposition **4.4.6**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_p^N(X_{>r+\frac{1}{n}}) \subset X_{>r+1-\eta}$. On définit f sur $X_{>r+\frac{1}{n}}$ par la formule

$$f \;=\; a_p^{-N} \cdot U_p^N(f)\,.$$

On peut faire cela pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui permet d'étendre f à $X_{>r}$.

6.3. Prolongement sur un voisinage strict d'un sommet de degré r. — Soit Z un sommet de degré r. Employons librement toutes les définitions et notations effectuées dans la partie **4.5** relativement à Z. Fixons donc un voisinage strict $\mathcal{U}_Z = X_{\geq P,\leq u}$ de Z comme dans la partie **4.5** qui vérifie de plus la propriété que pour tout ouvert $V \subset \mathcal{U}'_Z(1)$, on a

$$\left|\frac{U_p^{\mathrm{sp}}}{a_p}\right|_V < 1\,.$$

Ceci est loisible d'après la proposition **5.2.4** et l'hypothèse $v(a_p) < \inf_i(k_i) - d$.

On définit sur $\mathcal{U}'_Z(N)$ la forme

$$f_N \;=\; \sum_{i=0}^{N-1} a_p^{-i-1} \cdot (U_p^{\mathrm{sp}})^i \circ U_p^{\mathrm{nsp}}(f)$$

pour tout $N \geq 1$. Cette formule a un sens car le dernier opérateur par lequel on compose (prendre garde à l'ordre, qui peut paraître illogique mais ne l'est pas car les opérateurs de Hecke agissent en vérité à droite sur les formes modulaires) est U_p^{nsp}. Or son image est dans $X_{>r}$ d'après le point **ii** du lemme **4.5.6** et f est définie sur $X_{>r}$.

On définit sur $X_{\geq P} \setminus \mathcal{U}_Z(N)$ la forme

$$g_N \;=\; a_p^{-N} \cdot U_p^N(f)$$

et cette formule a bien un sens car $U_p^N(X_{\geq P} \setminus \mathcal{U}_Z(N)) \subset X_{>r}$ par définition de $\mathcal{U}_Z(N)$ et que f est définie sur $X_{>r}$. On a les compatibilités $g_N = g_{N+1}$ sur $X_{\geq P} \setminus \mathcal{U}_Z(N)$. Sur $\mathcal{U}'_Z(M) \setminus \mathcal{U}_Z(N)$, on a (comparer avec **[Pi]**, rem. 6.3.1.2) :

$$f_M \;=\; g_N - \frac{1}{a_p^M} \cdot (U_p^{\mathrm{sp}})^M(g_N)$$

pour tous $1 \leq M \leq N$.

Lemme 6.3.1. — *Les sections g_N sont bornées sur $X_{\geq P} \setminus \mathcal{U}_Z(N)$ indépendamment de $N \geq 1$.*

Démonstration. — La norme supremum de f_1 sur $\mathcal{U}_Z(1)$ est finie par quasi-compacité et d'autre part $U_p(X_{\geq P} \setminus \mathcal{U}_Z(1)) \subset X_{\geq u}$. La norme sup de f est finie sur $X_{\geq u}$ par quasi-compacité. Comme $g_1 = a_p^{-1} \cdot U_p(f)$, la norme sup de g_1 sur $X_{\geq P} \setminus \mathcal{U}_Z(1)$ est finie. Soit $M = \sup\{|f_1|_{\mathcal{U}_Z(1)}, |g_1|_{X_{\geq P} \setminus \mathcal{U}_Z(1)}\}$. On montre par récurrence sur N que $|g_N|_{X_{\geq P} \setminus \mathcal{U}_Z(N)} \leq M$. En effet, sur $\mathcal{U}_Z(N) \setminus \mathcal{U}_Z(N+1)$ écrivons

$$\begin{aligned} g_{N+1} &= g_{N+1} - a_p^{-1} \cdot U_p^{\mathrm{sp}}(g_{N+1}) + a_p^{-1} \cdot U_p^{\mathrm{sp}}(g_{N+1}) \\ &= f_1 + a_p^{-1} \cdot U_p^{\mathrm{sp}}(g_{N+1}). \end{aligned}$$

Or $|a_p^{-1} \cdot U_p^{\mathrm{sp}}(g_{N+1})|_{\mathcal{U}_Z(N) \setminus \mathcal{U}_Z(N+1)} \leq |g_{N+1}|_{\mathcal{U}_Z(N-1) \setminus \mathcal{U}_Z(N)}$ grâce au point **vii** de la proposition **4.5.4**. □

Lemme 6.3.2. — *La suite $|f_N|_{\mathcal{U}'_Z(N)}$ est bornée et les suites $|f_N - f_{N+1}|_{\mathcal{U}'_Z(N+1)}$ et $|g_N - f_N|_{\mathcal{U}'_Z(N) \setminus \mathcal{U}_Z(N)}$ tendent vers zéro lorsque N tend vers l'infini.*

Démonstration. — D'après la formule définissant f_N, on a

$$|f_N|_{\mathcal{U}'_Z(N)} \;\leq\; \sup_{i=0}^{N-1} \left(\left| a_p^{-i-1} \cdot (U_p^{\mathrm{sp}})^i \circ U_p^{\mathrm{nsp}}(f) \right|_{\mathcal{U}'_Z(N)} \right) \;\leq\; |p^{-d} a_p^{-1}| \cdot |f|_{X_{\geq v}}.$$

On a $f_N - f_{N+1} = -a_p^{-N-1} \cdot (U_p^{\mathrm{sp}})^N \circ U_p^{\mathrm{nsp}}(f)$ et $|a_p^{-N-1} \cdot (U_p^{\mathrm{sp}})^N \circ U_p^{\mathrm{nsp}}(f)|_{\mathcal{U}'_Z(N)}$ tend vers zéro quand N tend vers l'infini puisque

$$\left| \frac{U_p^{\mathrm{sp}}}{a_p} \right|_{\mathcal{U}'_Z(N)} < 1\,.$$

On a enfin $g_N - f_N = a_p^{-N} \cdot (U_p^{\mathrm{sp}})^N(g_N)$ sur $\mathcal{U}'_Z(N) \setminus \mathcal{U}_Z(N)$ qui tend aussi vers zéro. □

Pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ on considère le recouvrement admissible $\{\mathcal{U}_Z \setminus \mathcal{U}_Z(N), \mathcal{U}'_Z(N)\}$ de $\mathcal{U}_Z$. On dispose d'une forme g_N sur $\mathcal{U}_Z \setminus \mathcal{U}_Z(N)$ et d'une forme f_N sur $\mathcal{U}'_Z(N)$. Quitte à extraire des sous-suites des suites $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(g_N)_{N \in \mathbb{N}}$, on peut supposer par le lemme précédent que $g_N = f_N \bmod p^N\, \tilde{\omega}^\kappa$ sur $\mathcal{U}'_Z(N) \setminus \mathcal{U}_Z(N)$ et que $f_N = f_{N+1} \bmod p^N \cdot \tilde{\omega}^\kappa$ sur $\mathcal{U}'_Z(N+1)$. Notons h_N le recollement de f_N et $g_N \bmod p^N \cdot \tilde{\omega}^\kappa$ sur $\mathcal{U}_Z$. On dispose donc d'un système projectif de sections uniformément bornées $(h_N)_{N \in \mathbb{N}} \in \mathrm{H}^0(\mathcal{U}_Z, \omega^\kappa \bmod p^N \cdot \tilde{\omega}^\kappa)$. On peut appliquer le gluing lemma du paragraphe **2.1.2** pour conclure qu'il provient d'une unique section $\tilde{f}_Z \in \mathrm{H}^0(\mathcal{U}_Z, \omega^\kappa)$.

6.4. Prolongement à $X_{\geq r-\frac{1}{2}}$. — Soit $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des sommets de $[0,1]^d$ de degré r. Notons

$$\mathcal{U} = X_{\geq r} \cup \bigcup_{Z\in\mathcal{S}_r} \mathcal{U}_Z .$$

On peut prolonger f à l'ouvert admissible (c'est le complémentaire d'un ouvert quasi-compact dans un espace quasi-compact) $X_{\geq r} \setminus \bigcup_{Z\in\mathcal{S}_r} X_Z$ par la formule $f = a_p^{-1} \cdot U_p f$. On vient également de construire $\tilde{f}_Z$ sur $\mathcal{U}_Z$ pour tout $Z \in \mathcal{S}_r$.

Lemme 6.4.1. — *Les sections f et $\tilde{f}_Z$ coïncident sur l'intersection de $X_{\geq r} \setminus \bigcup_{Z\in\mathcal{S}_r} X_Z$ et $\mathcal{U}_Z$. On peut donc recoller pour obtenir de cette façon une section notée encore f sur $\mathcal{U}$. Cette section vérifie $U_p(f) = a_p \cdot f$.*

Démonstration. — Soit $Z \in \mathcal{S}_r$. Posons $\mathcal{U}_Z(\infty) = \cap_N \mathcal{U}_Z(N)$ (vu comme sous-ensemble de $\mathcal{U}_Z$). Pour tout $x \in \mathcal{U}_Z \setminus \mathcal{U}_Z(\infty)$, on a par construction $\tilde{f}_Z(x) = a_p^{-N} U_p^N(f)(x)$ pour N assez grand. Par conséquent, f et $\tilde{f}_Z$ coïncident sur $(X_{\geq r} \setminus X_Z) \cap \mathcal{U}_Z \subset \mathcal{U}_Z \setminus \mathcal{U}_Z(\infty)$. On peut donc recoller f et les $\tilde{f}_Z$. Vérifions l'équation fonctionnelle. Si $x \notin \cup_{Z\in\mathcal{S}_r} \mathcal{U}_Z(\infty)$, on a $U_p f(x) = a_p f(x)$ par construction. Si $x \in \mathcal{U}_Z(\infty)$, $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_p^{-i-1} \cdot (U_p^{\mathrm{sp}})^i \circ U_p^{\mathrm{nsp}}(f)(x)$ et

$$\begin{aligned} U_p f(x) &= U_p^{sp} f(x) + U_p^{nsp} f(x) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_p^{-i-1} \cdot (U_p^{\mathrm{sp}})^{i+1} \circ U_p^{\mathrm{nsp}}(f)(x) + U_p^{nsp} f(x) \\ &= a_p f(x). \end{aligned}$$

□

Lemme 6.4.2. — *Il existe $N > 0$ tel que $U_p^N(X_{\geq r-\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{U}$.*

Démonstration. — Soit V un ouvert quasi-compact de X tel que $V \cap X_Z = \varnothing$ pour tout sommet Z de $[0,1]^d$ et $V \cup \mathcal{U} = X_{\geq r-\frac{1}{2}}$. Pour tout $x \in V$ et tout $y \in U_p(x)$, on a $\deg y > \deg x$ d'après le point **iii** de la proposition **4.4.2**. D'après le principe du maximum, il existe $\varepsilon > 0$ indépendant de $x \in V$ tel que $\deg y \geq \deg x + \varepsilon$. Pour tout $s \geq 0$, on a donc $U_p^s(X_{\geq r-\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{U} \cup X_{\geq r-\frac{1}{2}+s\varepsilon}$. □

On prolonge donc f sur $X_{\geq r-\frac{1}{2}}$ en posant $f = a_p^{-N} \cdot U_p^N(f)$. Cela termine la démonstration du lemme **6.1.1** et par conséquent du théorème **6.1**.

7. Extension des résultats au cas non-ramifié

Expliquons comment étendre nos résultats au cas où p est non ramifié dans F. On procède exactement comme dans **[Sa]** qui traite le cas p totalement décomposé. Notons $p \cdot \mathcal{O}_F = \prod_{i=1}^r \pi_i$ la décomposition de p en idéaux premiers dans $\mathcal{O}_F$. Notons F_{π_i} la complétion de F en la place π_i puis $\mathcal{O}_{\pi_i}$ son anneau d'entiers et k_{π_i} son corps résiduel. Posons $d_i = [F_{\pi_i} : \mathbb{Q}_p]$ qui est le degré de k_{π_i} sur $\mathbb{F}_p$ et $d = [F : \mathbb{Q}]$. Pour tout $1 \leq i \leq r$, soit $D_i = \{\sigma \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}_p) | v(\sigma(\pi_i)) > 0\}$. On vérifie que les D_i forment une partition de $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}_p)$ et que le cardinal de D_i vaut d_i. On fixe un plongement $F \hookrightarrow K$ où K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ incluse dans $\mathbb{C}_p$ telle que tout plongement de F dans $\mathbb{C}_p$ est à valeur dans K.

On reprend toutes les notations en cours dans cet article, en particulier celles de la section **4.1**, mais on ne suppose plus que p est inerte dans F. Ainsi Y désigne toujours la variété de Hilbert-Blumenthal de niveau $\Gamma_1(N)$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ qui paramètre des triplets (A,i,ϕ) et X désigne toujours la variété de Hilbert-Blumenthal de niveau $\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ qui paramètre les quadruplets (A,i,ϕ,H) où $H\subset A[p]$ est un sous-groupe fini et plat qui est un $\mathcal{O}_F/p$-module libre de rang un. Une adaptation évidente du lemme **4.1.3** montre que X est plate sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. La condition $(**)$ de Raynaud sera donc toujours vérifiée. Le principe général est que tous les objets p-adiques se décomposent en morceaux indexés par $1\leq i\leq r$.

Lemme 7.1. — *Il existe sur Y un isomorphisme canonique $A[p^\infty]=\prod_{i=1}^r A[\pi_i^\infty]$ entre groupes de Barsotti-Tate. Ce morphisme est équivariant sous l'action de $\mathcal{O}_F$ lorsque cet anneau agit sur $A[\pi_i^\infty]$ via son plongement dans $\mathcal{O}_{\pi_i}$. Il existe sur X un isomorphisme canonique $H=\prod_{i=1}^r H[\pi_i]$ stable sous l'action de $\mathcal{O}_F$. Le groupe $H[\pi_i]$ est un groupe de Raynaud en k_{π_i}-vectoriels sur X.*

7.2. Géométrie en niveau iwahorique. — Pour tout anneau d'entier $\mathcal{O}$ d'une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, notons $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}}$ le champ formel sur $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ qui paramètre les groupes de Barsotti-Tate G de dimension le rang de $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{Z}_p$ munis d'une action de $\mathcal{O}$ et d'une polarisation principale $\mathcal{O}$-linéaire. Notons $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{iw}}$ le champ formel qui paramètre les groupes de Barsotti-Tate G comme avant munis d'un sous-groupe de Raynaud $H\subset G[p]$ en k-vectoriels, où k est le corps résiduel de $\mathcal{O}$. On dispose grâce au lemme **7.1** de morphismes

$$\begin{aligned}\psi\ :\ Y\ &\to\ \prod_{i=1}^r \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_{\pi_i}}\\ (A,i,\phi)\ &\mapsto\ (A[\pi_i^\infty])_{1\leq i\leq r}\\ \psi^{\mathrm{iw}}\ :\ X\ &\to\ \prod_{i=1}^r \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_{\pi_i}}^{\mathrm{iw}}\\ (A,i,\phi,H)\ &\mapsto\ (A[\pi_i^\infty],H[\pi_i])_{1\leq i\leq r}\end{aligned}$$

Ces morphismes sont formellement étales d'après la théorie de Serre-Tate. Par conséquent la géométrie p-adique locale de X est similaire à celle d'un produit de r variétés de Hilbert associées à des corps totalement réels de degré d_i dans lesquels p est inerte. Introduisons dans cet esprit quelques notations. On a une application

$$\begin{aligned}\mathrm{DEG}\ :\ X_{\mathrm{rig}}\ &\to\ \prod_{i=1}^r [0,1]^{d_i}\\ (A,i,\phi,H)\ &\mapsto\ (\mathrm{DEG}(H[\pi_i]))_{1\leq i\leq r}\end{aligned}$$

et une application induite par les sommes partielles des coordonnées

$$\begin{aligned}\deg\ :\ X_{\mathrm{rig}}\ &\to\ \prod_{i=1}^r [0,d_i]\\ (A,i,\phi,H)\ &\mapsto\ (\deg(H[\pi_i]))_{1\leq i\leq r}\end{aligned}$$

Pour tout $(v_i)_{1\leq i\leq r}\in\prod_i [0,d_i]$ on note $X_{\geq(v_i)}$ l'image inverse via l'application deg du fermé $\prod_i [v_i,d_i]$ de $\prod_i [0,d_i]$.

7.3. Formes modulaires et opérateurs de Hecke sur X. — Le faisceau conormal ω_A de A sur X se décompose selon les élément $\sigma \in \mathrm{Hom}(F,K)$ en

$$\omega_A = \bigoplus_{\sigma} \omega_{A,\sigma} .$$

Pour tout d-uplet $\kappa = (k_\sigma) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,K)}$, on pose $\omega^\kappa = \bigotimes_\sigma \omega_{A,\sigma}^{k_\sigma}$. Les sections globales de ce faisceau inversible forment le module des formes modulaires de poids κ sur X. Les formes modulaires surconvergentes de poids κ sont les sections du faisceau ω^κ définie sur un voisinage strict du tube ordinaire multiplicatif $X_{\geq(d_1,\dots,d_r)}$ dans X_{rig}.

Supposons que (A,ι,ϕ,H,ω) est un point $\mathfrak{c}_j$-polarisé de X et que $L \subset A[\pi_i]$ est un sous-groupe de Raynaud en k_{π_i}-vectoriels pour un $1 \leq i \leq r$. Désignons par ϕ' la $\pi_i \cdot \mathfrak{c}_j$-polarisation induite sur A/L. La famille $(A/L,\iota',\phi',H',\omega')$ ne définit donc pas immédiatement un point de X. Il faut auparavant choisir un élément $\xi_{i,j}$ de F^{*+} tel que les idéaux fractionnaires $\xi_{i,j} \cdot \mathfrak{c}_{k(i,j)}$ et $\pi_i \cdot \mathfrak{c}_j$ soient égaux pour un certain indice $k(i,j)$ dans $Cl^+(F)$. Le choix de $\xi_{i,j}$ n'est unique que modulo les unités totalement positives $\mathcal{O}_F^{*,+}$. Nous supposerons un tel choix effectué pour tout $1 \leq i \leq r$ et tout $\mathfrak{c}_j \in Cl^+(F)$ et noterons ϕ'' la $\mathfrak{c}_{k(i,j)}$-polarisation associée sur A/L.

Ce choix permet définir des opérateurs de Hecke U_{π_i} par la formule :

$$U_{\pi_i}(f)(A,\iota,\phi,H,\omega) = \frac{1}{p^{d_i}} \cdot \sum_L f(A/L,\iota',\phi'',H',\omega')$$

où L parcourt les sous-groupes de Raynaud de $A[\pi_i]$ qui sont des supplémentaires de $H[\pi_i]$, où ι' est l'image de la structure de niveau N, où ϕ'' est définie dans le paragraphe précédent et dépend de choix, H' est l'image de H dans A/L et $\omega' \in \omega_{A/L}$ est définie par la formule $\pi^\star(\omega') = \omega$ si π désigne l'isogénie $A \to A/L$.

Cet opérateur U_{π_i} est relatif à une correspondance géométrique sur X_{rig}. Cette correspondance géométrique n'agit que sur la partie $A[\pi_i^\infty]$ de $A[p^\infty]$. L'opérateur U_{π_i} agit toujours sur l'espace des formes modulaires surconvergentes.

Ces opérateurs U_{π_i} pour $1 \leq i \leq r$ commutent entre eux à un automorphisme près. On a, à un automorphisme près :

$$U_p = \prod_{i=1}^r U_{\pi_i}.$$

Remarque 7.3.1. — Il existe une manière standard de se débarraser de la dépendance de U_{π_i} du choix des $\xi_{i,j}$. Elle consiste à introduire l'action naturelle du groupe fini $\Delta = \mathcal{O}_F^{*,+}/(\mathcal{O}_{F,N}^*)^2$ sur les formes modulaires, où $\mathcal{O}_{F,N}^*$ désigne les unités congrues à un modulo N. L'action de U_{π_i} sur les formes Δ-invariantes est alors canonique. Ce sont d'ailleurs les formes Δ-invariantes qui sont reliées aux formes automorphes pour le groupe GL_2/F.

Remarque 7.3.2. — Si A est un SAHB défini sur une $\mathcal{O}_K$-algèbre p-adiquement complète R on a $\omega_A = \omega_{A[p^\infty]}$ et $\omega_{A[\pi_i^\infty]} = \oplus_{\sigma\in D_i}\omega_{A,\sigma}$. C'est pour cette raison que le critère de classicité que nous démontrons relie la pente de l'opérateur U_{π_i} aux poids $(k_\sigma)_{\sigma\in D_i}$.

7.4. Le prolongement analytique. — Expliquons maintenant comment adapter les résultats des sections 2 à 6 pour démontrer le théorème suivant, qui est un premier pas en direction du théorème **1.2**.

Théorème 7.4.1. — *Soit $N \geq 5$ un entier positif premier à p et f une forme modulaire de Hilbert surconvergente de poids $\kappa = (k_\sigma) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C}_p)}$ et de niveau $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$. Supposons f propre pour l'opérateur U_{π_i} pour tout $1 \leq i \leq r$ de valeur propre $a_{\pi_i} \in \mathbb{C}_p$. Si $v(a_{\pi_i}) < \inf_{\sigma \in D_i}(k_\sigma) - [F_{\pi_i} : \mathbb{Q}_p]$ pour tout $1 \leq i \leq r$ alors f est classique de niveau $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$.*

Démonstration. — On utilise le lemme **7.4.2** dont l'énoncé est donné plus bas. Il existe par définition $\varepsilon > 0$ tel que f soit définie sur $X_{\geq(d_i - \varepsilon)}$. On applique successivement le lemme **7.4.2** à tous les indices $1 \leq i' \leq r$, ce qui permet d'étendre f à $X_{\mathrm{rig}} = X_{\geq(0)}$. On conclut alors grâce aux principes de Koecher et GAGA contenus dans la proposition **5.1.2**, dont l'énoncé et la démonstration utilisaient seulement l'hypothèse que p soit non ramifié dans F. □

Lemme 7.4.2. — *Soit $1 \leq i' \leq r$ et $(v_i) \in \prod_{1 \leq i \leq r} [0, d_i]$ tel que $v_{i'} < d_{i'}$. Soit $\kappa = (k_\sigma) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C}_p)}$ et f une section de ω^κ sur $X_{\geq(v_i)}$ propre pour $U_{\pi_{i'}}$ de valeur propre $a_{\pi_{i'}} \in \mathbb{C}_p$ telle que $v(a_{\pi_{i'}}) < \inf_{\sigma \in D_{i'}}(k_\sigma) - d_{i'}$. Posons $w_i = v_i$ pour $i \neq i'$ et $w_{i'} = 0$. La forme f s'étend en une section de ω^κ sur $X_{\geq(w_i)}$.*

Remarque 7.4.3. — Le même énoncé reste vrai en remplaçant $X_{\geq(v_i)}$ par l'image inverse par deg de $\prod_{i \neq i'} I_i \times [v_{i'}, d_{i'}]$ pour tout $v_{i'} < d_{i'}$ et tout intervalle I_i de $[0, d_i]$ pour $i \neq i'$, et $X_{\geq(v_i)}$ par l'image inverse par deg de $\prod_{i \neq i'} I_i \times [0, d_{i'}]$. De tels ouverts de X_{rig} sont en effet stables par la correspondance géométrique $U_{\pi_{i'}}$ puisque cette dernière n'agit que sur $A[\pi_{i'}^\infty]$ et préserve donc les applications $(A, H) \mapsto \deg(H[\pi_i])$ pour tout $i \neq i'$.

Démonstration. — Notons $\deg^{i'} : X_{\mathrm{rig}} \to [0, d_{i'}]$ l'application qui associe à (A, H) le degré de $H[\pi_{i'}]$ et notons

$$\mathrm{DEG}^{i'} : X_{\mathrm{rig}} \to [0,1]^{d_{i'}}$$

l'application qui associe à (A, H) la famille des degrés partiels de $H[\pi_{i'}]$. D'après le lemme **7.1**, tous les résultats des parties 3 à 6 de l'article, alors formulés avec $[0, d]$, $[0,1]^d$, deg, DEG, $A[p]$, H et U_p restent valables lorsqu'on les remplace par leurs analogues évidents faisant intervenir $[0, d_{i'}]$, $[0,1]^{d_{i'}}$, $\deg^{i'}$, $\mathrm{DEG}^{i'}$, $A[\pi_{i'}]$, $H[\pi_{i'}]$ et $U_{\pi_{i'}}$. On conclut en recopiant mot pour mot la démonstration du théorème **6.1**, la seule modification étant de rajouter partout un indice i'. □

8. Extension du résultat au cas d'un niveau arbitraire en p

Nous allons maintenant démontrer le théorème **1.2** dans toute sa généralité. Pour cela on va utiliser une projection bien choisie de la variété de Hilbert-Blumenthal de niveau $\Gamma_0(p^n)$ vers celle de niveau $\Gamma_0(p)$.

8.1. Les espaces de modules de niveau $\Gamma_1(p^n)$. — Dans cette section comme dans la précédente, F désigne une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$ de degré $d \geq 2$ et p est un nombre premier non ramifié dans F. Notons toujours $p \cdot \mathcal{O}_F = \prod_{i=1}^r \pi_i$ la décomposition de p en idéaux premiers dans $\mathcal{O}_F$. Posons $d_i = [F_{\pi_i} : \mathbb{Q}_p]$. On rappelle que K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ plongée dans $\mathbb{C}_p$ telle que tout plongement $F \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ se factorise par K.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $X_1(p^n)_K$ la variété de Hilbert-Blumenthal de niveau $\Gamma_1(Np^n)$ sur $\mathrm{Spec}(K)$. Elle paramètre des quadruplets (A, ι, ϕ, P_n) où

i. $A \to S$ est un schéma abélien d'Hilbert-Blumenthal,

ii. $\iota : \delta^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_N \hookrightarrow A[N]$ est une structure de niveau $\Gamma_1(N)$,

iii. ϕ est une $\mathfrak{c}_j$-polarisation de A pour un indice $j \in Cl^+(F)$,

iv. P_n est un point de $A[p^n]$ qui engendre un sous-groupe isomorphe à $\mathcal{O}_F/p^n\mathcal{O}_F$.

On note $X_0(p^n)_K$ la variété de Hilbert-Blumenthal de niveau $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p^n)$ sur $\mathrm{Spec}(K)$. Elle paramètre des quadruplets (A, ι, ϕ, H_n) où (A, ι, ϕ) sont comme précédemment et H_n est un sous-groupe de $A[p^n]$ localement isomorphe à $\mathcal{O}_F/p^n\mathcal{O}_F$ pour la topologie étale.

On a une application $\Pi : X_1(p^n)_K \to X_0(p^n)_K$ définie en envoyant (A, ι, ϕ, P_n) sur $(A, \iota, \phi, \mathcal{O}_F \cdot P_n)$. L'application Π est un revêtement étale galoisien de groupe $(\mathcal{O}_F/p^n\mathcal{O}_F)^\times$.

On a une application $\Pi_1 : X_0(p^n) \to X_K$ qui envoie le quadruplet (A, ι, ϕ, H_n) sur $(A, \iota, \phi, H_n[p])$.

8.2. Formes modulaires de Hilbert de niveau $\Gamma_0(p^n)$ et Nebentypus χ. — On suppose que K contient les racines p^n-ième de l'unité. On a une décomposition en composantes isotypiques sous l'action du groupe $(\mathcal{O}_F/p^n\mathcal{O}_F)^\times$

$$\Pi_\star\, \mathscr{O}_{X_1(p^n)_K} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{(\mathcal{O}_F/p^n\mathcal{O}_F)^\times}} \mathscr{O}_{X_1(p^n)_K}(\chi)\,.$$

Pour tout $\kappa \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,K)}$ et tout caractère $\chi : (\mathcal{O}_F/p^n\mathcal{O}_F)^\times \to K^\times$, les formes modulaires sur $X_0(p^n)_K$ de Nebentypus χ sont par définition les sections globales du faisceau inversible $\omega^\kappa(\chi) = \omega^\kappa \otimes \mathscr{O}_{X_1(p^n)}(\chi)$ sur $X_0(p^n)_K$.

Pour tout premier idéal π_i divisant p, on dispose d'une correspondance et d'un opérateur de Hecke U_{π_i} agissant sur $X_0(p^n)_K$ et sur l'espace des formes modulaires de poids κ et Nebentypus χ. L'action géométrique de U_{π_i} sur $X_0(p^n)_K$ envoie le point $x = (A, \iota, \phi, H_n)$ sur $(A/L, \iota', \phi', \mathrm{Im}(H_n))$ où $L \subset A[\pi_i]$ parcourt les sous-groupes de Raynaud supplémentaires de $H_n[\pi_i]$, ι' et ϕ' sont les structures de niveau auxiliaire et polarisation qui se déduisent de ι et ϕ par quotient par L, et $\mathrm{Im}(H_n)$ désigne l'image de H_n dans A/L.

8.3. Géométrie rigide. — On note $X_1(p^n)_{\mathrm{an}}$, $X_0(p^n)_{\mathrm{an}}$ et X_{an} les analytifiés dans le sens de [**Be**, par.0.3] des K-schémas $X_1(p^n)_K$, $X_0(p^n)_K$ et X_K. On rappelle que X_{rig} s'identifie à l'ouvert quasi-compact « de bonne réduction » de X_{an}. On a une application induite $\Pi_1 : X_0(p^n)_{\mathrm{an}} \to X_{\mathrm{an}}$. On note $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$ l'image inverse de X_{rig} par Π_1. De même on a une application induite $\Pi_1 \circ \Pi : X_1(p^n)_{\mathrm{an}} \to X_{\mathrm{an}}$. On note $X_1(p^n)_{\mathrm{rig}}$ l'image inverse de X_{rig} par $\Pi_1 \circ \Pi$.

Voyons qu'on peut définir une norme canonique sur les faisceaux $\omega^\kappa(\chi)$. D'après [**Bo**], thm. 3, p. 166, il existe un schéma formel admissible $\mathfrak{X}_1(p^n)$ de fibre générique l'espace rigide $X_1(p^n)_{\mathrm{rig}}$ ainsi qu'un morphisme $\mathfrak{X}_1(p^n) \to \mathfrak{X}$ de fibre générique le morphisme $\Pi_1 \circ \Pi$. Le faisceau ω^κ provient d'un faisceau sur le schéma formel $\mathfrak{X}$. D'après le numéro **2.1.1**, le faisceau $\omega^\kappa \otimes \mathscr{O}_{X_1(p^n)_{\mathrm{rig}}}$ hérite donc d'une norme. On vérifie facilement que cette norme est indépendante du choix du modèle formel $\mathfrak{X}_1(p^n)$ s'envoyant dans $\mathfrak{X}$ car on possède toujours un troisième modèle formel au dessus de deux modèles formels donnés. Il en résulte que $\omega^\kappa \otimes \mathscr{O}_{X_1(p^n)_{rig}}$ est muni d'une norme canonique, ainsi que son facteur direct $\omega^\kappa(\chi)$. D'autre part, le lemme **2.1.3** s'applique au faisceau $\omega^\kappa \otimes \mathscr{O}_{X_1(p^n)_{rig}}$ et donc aussi à son facteur $\omega^\kappa(\chi)$.

Considérons les applications composées

$$\mathrm{DEG} \circ \Pi_1 \;:\; X_0(p^n)_{\mathrm{rig}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} [0,1]^{d_i}$$

et

$$\deg \circ \Pi_1 \ : \ X_0(p^n)_{\mathrm{rig}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} [0, d_i].$$

Pour tout $(v_i) \in \prod_{i=1}^r [0, d_i]$, on note $X_0(p^n)_{\geq (v_i)}$ l'image inverse de $\prod_{i=1}^r [v_i, d_i]$ dans $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$ par $\deg \circ \Pi_1$.

On note également

$$\deg_{H_n} \ : \ X_0(p^n)_{\mathrm{rig}} \longrightarrow [0, nd].$$

l'application degré de H_n et pour tout $t \in [0, nd]$, on note $X_0(p^n)_{\deg_{H_n} \geq t}$ l'image inverse de $[t, nd]$ dans $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$ par $\deg_{H_n}$.

Une forme modulaire surconvergente de poids κ et Nebentypus χ sur $X_0(p^n)_{rig}$ est par définition une section du faisceau $\omega^\kappa(\chi)$ sur $X_0(p^n)_{\deg_{H_n} \geq nd}$ qui surconverge dans un voisinage strict dans $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$. Remarquons que les $\{X_0(p^n)_{\deg_{H_n} \geq nd - \epsilon}\}_{\epsilon > 0}$ forment un système fondamental de voisinages stricts. L'espace des formes modulaires surconvergentes est stable par l'action de l'opérateur U_{π_i} pout tout $1 \leq i \leq r$.

Remarque 8.3.1. — Bien sûr $X_0(p^n)_{\deg_{H_n} \geq nd}$ est isomorphe à son image $X_{\geq (d_1, \ldots, d_r)}$ via l'application qui envoie (A, ι, ϕ, H_n) sur $(A, \iota, \phi, H_n[p])$, l'inverse étant fourni par le sous-groupe canonique d'échelon n. Cet isomorphisme se prolonge dans des voisinages stricts puisque le groupe canonique d'échelon n surconverge d'après la proposition **2.2.4**. On peut donc voir une forme surconvergente de niveau $\Gamma_0(p^n)$ et Nebentypus χ comme une section sur $X_{\geq (d_1, \ldots, d_r)}$ qui surconverge sur un voisinage strict de $X_{\geq (d_1, \ldots, d_r)}$ dans X_{rig}.

Lemme 8.3.2. — *Pour tout sous-ensemble $V \subset X_0(p^n)_{\mathrm{an}}$ on a $\Pi_1 \circ U_{\pi_i}(V) = U_{\pi_i} \circ \Pi_1(V)$.*

Démonstration. — La démonstration ne pose pas de problème. □

Lemme 8.3.3. — *Pour toute $\epsilon > 0$, on a*

$$U_p^n(X_0(p^n)_{\geq (d_1 - \epsilon, d_2 - \epsilon, \ldots, d_r - \epsilon)}) \subset X_0(p^n)_{\deg_{H_n} \geq nd - nr\epsilon}.$$

Démonstration. — On va utiliser [**Fa**, cor.5.(4)]. Soit

$$x = (A, \iota, \phi, H_n) \in X_0(p^n)_{\geq (d_1 - \epsilon, d_2 - \epsilon, \ldots, d_r - \epsilon)}.$$

Soit $L_n \subset A[p^n]$ un sous groupe supplémentaire de H_n. On a deg $L_n[p] \leq r\epsilon$ car $L_n[p]$ est un supplémentaire générique de $H_n[p]$. La multiplication par $p^k : L_n[p^{k+1}] \to L_n[p]$ pour $1 \leq k \leq n-1$ induit un isomorphisme générique $L_n[p^{k+1}]/L_n[p^k] \to L_n[p]$. On en déduit que $\deg L_n \leq n \deg L_n[p] \leq nr\epsilon$. L'image de x par U_p^n est l'ensemble des $\{(A/L_n, \iota', \phi', A[p^n]/L_n)\}$ où L_n parcourt l'ensemble des supplémentaire de H_n dans $A[p^n]$. Comme $\deg A[p^n]/L_n = nd - \deg L_n$, on conclut. □

8.4. Le prolongement analytique. — Démontrons maintenant le théorème **1.2**.

Lemme 8.4.1. — *Soit f une forme surconvergente qui vérifie $U_p f = a_p f$ pour $a_p \neq 0$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que f peut se prolonger à $X_0(p^n)_{\geq (d_1 - \epsilon, \ldots, d_r - \epsilon)}$.*

Démonstration. — On applique le lemme **8.3.3** à $f = a_p^{-n} U_p^n f$. $\square$

Soit $U \subset X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$ un ouvert et $1 \leq i \leq r$. Supposons que le sous-groupe spécial $G_{1,i,U} \subset A[\pi_i]$ soit défini sur U. On peut définir une décomposition $U_{\pi_i} = U_{\pi_i}^{\mathrm{nsp}} \cup U_{\pi_i}^{\mathrm{sp}}$ sur U telle que $U_{\pi_i}^{\mathrm{sp}}$ divise par des supplémentaires spéciaux, et $U_{\pi_i}^{\mathrm{nsp}}$ par des supplémentaires non spéciaux. Voilà maintenant un lemme qui généralise le lemme **7.4.2**.

Lemme 8.4.2. — *Soit $1 \leq i' \leq r$ et $(v_i) \in \prod_{1 \leq i \leq r} [0, d_i]$ tel que $v_{i'} < d_{i'}$. Soit*

$$\kappa = (k_\sigma) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}_p)}$$

et f une section de $\omega^\kappa(\chi)$ sur $X_0(p^n)_{\geq (v_i)}$ propre pour $U_{\pi_{i'}}$ de valeur propre $a_{\pi_{i'}} \in \mathbb{C}_p$ telle que $v(a_{\pi_{i'}}) < \inf_{\sigma \in D_{i'}}(k_\sigma) - d_{i'}$. Posons $w_i = v_i$ pour $i \neq i'$ et $w_{i'} = 0$. La forme f s'étend en une section de $\omega^\kappa(\chi)$ sur $X_0(p^n)_{\geq (w_i)}$.

Démonstration. — Le principe de la démonstration suit le lemme **7.4.2** en utilisant l'égalité $\Pi_1 \circ U_{\pi_{i'}} = U_{\pi_{i'}} \circ \Pi_1$ du lemme **8.3.2**. Dans la démonstration qui suit, on note Π_1 pour sa restriction à $X_0(p^n)_{\geq (w_i)}$. On commence donc par étendre f sur

$$(\deg^{i'} \circ \Pi_1)^{-1}(]d_{i'} - 1, d_{i'}])$$

grâce à l'équation fonctionnelle $f = U_{\pi_{i'}}(f)/a_{\pi_{i'}}$, la proposition **4.4.6** et le lemme **8.3.2**.

Soit ensuite Z un sommet de $[0,1]^{d_{i'}}$ de degré total $d_{i'} - 1$ et $\mathcal{U}_Z$ un voisinage de l'image inverse de Z par $\deg^{i'}$ dans X_{rig} comme dans le paragraphe **6.3**. On a une décomposition $U_{\pi_{i'}} = U_{\pi_{i'}}^{\mathrm{sp}} + U_{\pi_{i'}}^{\mathrm{nsp}}$ au-dessus de $\Pi_1^{-1}(\mathcal{U}'_Z(1))$. Quitte à supposer $\mathcal{U}_Z$ assez petit, on peut de plus supposer que pour tout ouvert $V \subset \Pi_1^{-1}(\mathcal{U}'_Z(1))$, on a

$$\left| \frac{U_{\pi_{i'}}^{\mathrm{sp}}}{a_{\pi_{i'}}} \right|_V < 1\,.$$

Ceci est loisible à cause de l'hypothèse $v(a_{\pi_{i'}}) < \inf_{\sigma \in D_{i'}}(k_\sigma) - d_{i'}$. On définit sur $\Pi_1^{-1}(\mathcal{U}'_Z(N))$ la forme

$$f_N \;=\; \sum_{i=0}^{N-1} a_{\pi_{i'}}^{-i-1} \cdot (U_{\pi_{i'}}^{\mathrm{sp}})^i \circ U_{\pi_{i'}}^{\mathrm{nsp}}(f)$$

pour tout $N \geq 1$ et cette formule a bien un sens car d'après le lemme **8.3.2**, la forme f est bien définie sur $U_{\pi_{i'}}^{\mathrm{nsp}} \circ (U_{\pi_{i'}}^{\mathrm{sp}})^i(\Pi_1^{-1}(\mathcal{U}'_Z(N)))$. On définit sur $\Pi_1^{-1}(X_{\geq P} \setminus \mathcal{U}_Z(N))$ la forme

$$g_N \;=\; a_{\pi_{i'}}^{-N} \cdot U_{\pi_{i'}}^N(f)$$

ce qui a également un sens grâce au lemme **8.3.2**. On recolle ensuite les f_N et les g_N pour obtenir $\tilde{f}_Z \in \mathrm{H}^0(\Pi_1^{-1}(\mathcal{U}_Z), \omega^\kappa(\chi))$. L'argument est mot pour mot celui du paragraphe **6.3** en rajoutant partout l'indice i' et en prenant systématiquement l'image inverse par Π_1 des ouverts de X_{rig} considérés dans ce paragraphe. On note alors

$$\mathcal{U} = (\deg^{i'})^{-1}[d_{i'} - 1, d_{i'}] \cup \bigcup_{Z \in \mathcal{S}_{d_{i'}-1}} \mathcal{U}_Z\,.$$

On peut prolonger f à $\Pi_1^{-1}((\deg^{i'})^{-1}[d_{i'} - 1, d_{i'}] \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{S}_{d_{i'}-1}} X_Z)$ par la formule

$$f = a_{\pi_{i'}}^{-1} \cdot U_{\pi_{i'}} f\,.$$

On vient également de construire $\tilde{f}_Z$ sur $\Pi_1^{-1}(\mathcal{U}_Z)$ et les sections f et $\tilde{f}_Z$ coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. On peut donc recoller pour obtenir de cette façon une section notée encore f sur $\Pi_1^{-1}(\mathcal{U})$. Enfin, il existe $N > 0$ tel que

$$U_{\pi_{i'}}^N(\Pi_1^{-1}((\deg^{i'})^{-1}[d_{i'} - \frac{3}{2}, d_{i'}])) \subset \Pi_1^{-1}(\mathcal{U})$$

d'après les lemmes **6.4.2** et **8.3.2**. Cela permet donc de définir f sur $(\deg^{i'} \circ \Pi_1)^{-1}([d_{i'} - \frac{3}{2}, i'])$. On réitère alors le raisonnement en remplaçant $d_{i'} - 1$ de manière décroissante par tous les entiers $\in [0, d_{i'}]$ pour terminer la démonstration. □

Corollaire 8.4.3. — *Soit $\kappa = (k_\sigma) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C}_p)}$ et f une forme modulaire surconvergente de poids κ et de Nebentypus χ sur $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$ propre pour U_{π_i} de valeur propre $a_{\pi_i} \in \mathbb{C}_p$ telle que $v(a_{\pi_i}) < \inf_{\sigma \in D_i}(k_\sigma) - d_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$. La forme f s'étend en une section de $\omega^\kappa(\chi)$ sur $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$.*

À ce point de l'argument, il ne semble pas possible d'en déduire le théorème **1.2**. En effet, en l'absence de modèles entiers de $X_1(p^n)$ et de ses compactifications, nous ne savons pas que

$$\mathrm{H}^0\left(X_0(p^n)_{\mathrm{an}},\, \omega^\kappa(\chi)\right) \;=\; \mathrm{H}^0\left(X_0(p^n)_{\mathrm{rig}},\, \omega^\kappa(\chi)\right)\;.$$

Le principe de Koecher usuel sur $\mathrm{Spm}(K)$ et le principe GAGA montrent par contre que

$$\mathrm{H}^0\left(X_0(p^n)_{\mathrm{an}},\, \omega^\kappa(\chi)\right) \;=\; \mathrm{H}^0\left(X_0(p^n),\, \omega^\kappa(\chi)\right)\;.$$

Il nous suffit donc prouver que f s'étend en une section de $\omega^\kappa(\chi)$ sur $X_0(p^n)_{\mathrm{an}}$. Notons $X_0(p^n)_{\mathrm{an},\deg_{H_n} \geq nd}$ l'ouvert où le groupe H_n est de type multiplicatif. La projection Π_1 induit un isomorphisme de $X_0(p^n)_{\mathrm{an},\deg_{H_n} \geq nd}$ vers l'ouvert de X_{an} où le groupe universel est multiplicatif.

Lemme 8.4.4. — *L'inclusion naturelle est un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0\left(X_0(p^n)_{\deg_{H_n} \geq nd},\, \omega^\kappa(\chi)\right) \;=\; \mathrm{H}^0\left(X_0(p^n)_{\mathrm{an},\deg_{H_n} \geq nd},\, \omega^\kappa(\chi)\right)\;.$$

Démonstration. — Dans la démonstration de la proposition **5.1.2** on a introduit une compactification toroïdale $\bar{X}$ de X sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Soit $\bar{\mathfrak{X}}$ et $\mathfrak{X}$ les schémas formels associés et $\bar{\mathfrak{X}}_{ord-m}$ et $\mathfrak{X}_{ord-m}$ les ouverts où le groupe universel est multiplicatif. Soit $X_{ord-m} = X_0(p^n)_{\deg_{H_n} \geq nd}$ et $\bar{X}_{ord-m}$ les fibres génériques de ces schémas formels. On a $X_{ord-m} \subset X_0(p^n)_{\mathrm{an},\deg_{H_n} \geq nd} \subset \bar{X}_{ord-m}$. Le faisceau $\omega^\kappa(\chi)$ sur $X_0(p^n)_{\mathrm{an},\deg_{H_n} \geq nd}$ se prolonge en un faisceau inversible $\omega^\kappa(\chi)$ sur $\bar{\mathfrak{X}}_{ord-m}$. Le principe de Koecher montre alors $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{ord-m}, \omega^\kappa(\chi)) = \mathrm{H}^0(\bar{\mathfrak{X}}_{ord-m}, \omega^\kappa(\chi))$.
□

Lemme 8.4.5. — *Soit $\kappa = (k_\sigma) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C}_p)}$ et f une forme modulaire surconvergente de poids κ et de Nebentypus χ sur $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$ propre pour U_{π_i} de valeur propre $a_{\pi_i} \in \mathbb{C}_p$ telle que $v(a_{\pi_i}) < \inf_{\sigma \in D_i}(k_\sigma) - d_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$. La forme f s'étend en une section de $\omega^\kappa(\chi)$ sur $X_0(p^n)_{\mathrm{an}}$.*

Démonstration. — Notons $X_0(p^n)_{\mathrm{an-ord}}$ l'ouvert de $X_0(p^n)_{\mathrm{an}}$ formé des schémas abéliens de réduction ordinaire, qu'elle soit bonne ou mauvaise. On dispose d'un recouvrement admissible

$$X_0(p^n)_{\mathrm{an}} \;=\; X_0(p^n)_{\mathrm{an-ord}} \coprod X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$$

puisque les seules variété de Hilbert-Blumenthal dégénérant sont de réduction ordinaire. D'après le corollaire **8.4.3**, la forme f s'étend sur $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$. D'après le lemme **8.4.4**, elle s'étend également sur $X_0(p^n)_{\mathrm{an},\deg_{H_n}\geq nd}$ qui est une union de composantes connexes de $X_0(p^n)_{\mathrm{an-ord}}$. La forme f s'étend alors à tout $X_0(p^n)_{\mathrm{an-ord}}$ d'après le formalisme des séries de Kassaei ordinaires expliqué dans [**Ka**] et [**Sa**]. Remarquons que cette extension utilise seulement l'hypothèse

$$v(a_{\pi_i}) < -d_i + \sum_{\sigma\in D_i} k_\sigma$$

pour tout $1 \leq i \leq r$. Ces fonctions se recollent par construction sur l'ouvert ordinaire $X_0(p^n)_{\mathrm{rig-ord}}$ de $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$, qui est l'intersection de $X_0(p^n)_{\mathrm{an-ord}}$ et de $X_0(p^n)_{\mathrm{rig}}$. Ainsi f se prolonge bien en une section de $\omega^\kappa(\chi)$ sur X_{an}. $\square$

Nous pouvons à présent terminer la démonstration du théorème **1.2**. Soit f comme dans ce théorème. D'après le lemme **8.4.5**, la forme f s'étend en une section de $\omega^\kappa(\chi)$ sur $X_0(p^n)_{\mathrm{an}}$. Il suffit alors d'utiliser l'égalité

$$\mathrm{H}^0\left(X_0(p^n)_{\mathrm{an}}, \omega^\kappa(\chi)\right) = \mathrm{H}^0\left(X_0(p^n), \omega^\kappa(\chi)\right)$$

fournie par le principe de Koecher en fibre générique et GAGA.

Références

[Ba] W. Bartenwerfer, *Die erst metrische Kohomologiegruppe glatter affinoider Raüme*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser., A 40, n° 1 (1978), p. 1-14.

[Be] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication 96-03 (1996) disponible sur `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`

[Bo] S. Bosch, *Lectures on formal and rigid geometry*, disponible sur `math.uni-muenster.de/sfb/about/publ/`.

[Bu] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Am. Math. Soc. **16** n° 1 (2002), p. 29-55.

[Co] R. Coleman, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math. **124**, (1996), p.215-241.

[dJ] A. J. de Jong, *Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry*, Pub. Math. IHES **82** (1995).

[Fa] L. Fargues, *La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, Crelle **645** (2010).

[GK] E. Z. Goren and P. Kassaei, *Sous-groupes canoniques sur les varietes modulaires de Hilbert,* C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **347** (2009).

[GO] E. Z. Goren and F. Oort, *Stratifications of Hilbert modular varieties*, J. Algebraic Geom. **9** (2000), p.111-154.

[Ka] P. Kassaei, *A gluing lemma and overconvergent modular forms*, Duke Math. Journal **132** n° 3 (2006), p.509-529.

[La] K.W. Lan, *Integral models of toroidal compactifications with projective cone decompositions*, IMRN (2016).

[Pi] V. Pilloni, *Prolongement analytique des formes de Siegel de genre* 2, Duke Math. Jour., 2011.

[Rap] M. Rapoport, *Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal*, Compositio Math. **36** n° 3 (1978), p.255-335.

[Ray] M.Raynaud, *Schémas en groupe de type* $(p, p, \ldots, p)$, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), p. 241-280.

[Sa] S. Sasaki, *Analytic continuation of overconvergent Hilbert eigenforms in the totally split case*, Compositio Mathematica **146** (2010), p.541-560.

[St] H. Stamm, *On the reduction of the Hilbert-Blumenthal-moduli scheme with* $\Gamma_0(p)$*-level structure*, Forum Math. **9** (4) (1997) p. 405-455.

[Ti] Y.Tian, *Classicality of overconvergent Hilbert eigenforms : case of quadratic residue degrees*, Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova, Vol. 132, 2014, pp. 133-229..

Vincent Pilloni et Benoît Stroh