Feuille 6 : Courbes elliptiques (équations minimales et points de torsion)

On appelle dans la suite *corps local*, tout corps K complet pour une valuation discrète, parfait, de corps résiduel k, parfait. Nous noterons R son anneau des entiers et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal.

Rappels : Si $y^2+a_1xy+a_3y = x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ est une équation de Weierstrass sur un corps local de valuation v, on dit qu'elle est *minimale* si $v(\Delta)$ est minimal et si tous les coefficients a_i sont entiers. Rappelons les formules :

$$c_4 := (a_1 + 4a_2)^2 - 24(2a_4 + a_1a_3),$$

et

$$c_6 := -(a_1^2+4a_2)^3+36(a_1^2+4a_2)(2a_4+a_1a_3)-216(a_3^2+4a_6), \quad \text{et} \quad 2^6\cdot 3^3\cdot\Delta = c_4^3-c_6^2.$$

Ces formules se simplifient dans le cas d'une équation de la forme $y^2 = x^3+a_4x+a_6$ en

$$c_4 = -2^4 \cdot 3 \cdot a_4 \quad \text{et} \quad c_6 = -2^5 \cdot 3^3 \cdot a_6.$$

Rappelons également que tout changement d'équation de Weierstrass (conservant le point à l'infini) est de la forme

$$x = u^2x' + r \quad \text{et} \quad y = u^3y' + u^2sx' + t,$$

avec $u, r, s, t \in K$ et $u \neq 0$. Un calcul donne les formules suivantes pour les valeurs c_4', c_6' et Δ' :

$$c_4' = u^{-4}c_4, \quad c_6' = u^{-6}c_6 \quad \text{et} \quad \Delta' = u^{-12}\Delta.$$

Si l'équation de Weierstrass est sous la forme réduite $y^2 = x^3 + Ax + B$ alors le seul changement de variables préservant cette forme réduite est le changement

$$x = u^2x' \quad \text{et} \quad y = u^3y'.$$

Dans ce cas, on a

$$u^4A' = A \quad \text{et} \quad u^6B' = B.$$

Enfin on rappelle que, étant donné un modèle minimal de Weierstrass, la courbe elliptique a

1. bonne réduction si et seulement si $v(\Delta) = 0$,
2. réduction multiplicative si et seulement si $v(\Delta) = 0$ et $v(c_4) = 0$,
3. réduction additive si et seulement si $v(\Delta) = 0$ et $v(c_4) > 0$.

Exercice 1 Soit E/K une courbe elliptique donnée par un modèle de Weierstrass sur le corps local K, telle que les coefficients a_i sont tous entiers.

1. Montrer que si $v(\Delta) < 12$ ou si $v(c_4) < 4$ ou si $v(c_6) < 6$ alors l'équation est minimale.
2. Montrer que la réciproque est vraie si la caractéristique de k est différente de 2 ou 3.

Exercice 2 Soit K un corps local, (tel que k est de caractéristique différente de 2 ou 3). Soit E/K une courbe elliptique donnée par un modèle minimal de Weierstrass de la forme $y^2 = x^3 + Ax + B$. Montrer que la courbe elliptique a

1. bonne réduction si et seulement si $4A^3 + 27B^2 \in R^\times$,
2. réduction multiplicative si et seulement si $4A^3 + 27B^2 \in \mathfrak{m}$ et $AB \in R^\times$,
3. réduction additive si et seulement si $A, B \in \mathfrak{m}$.

Exercice 3 Considérons l'équation $y^2 = x^3+16$. Montrer qu'elle définie une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$. Pour quelle valeur de p cette équation est-elle minimale (on pourra consiérer le changement de variables $x = 4x'$ et $y = 8y' + 4$) ?

Exercice 4 On introduit le corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$ (il est tel que $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par l'idéal $\mathfrak{p} = (5, \sqrt{10})$). On considère l'équation $y^2 = x^3 + 5^3$. Montrer qu'elle définie une courbe elliptique sur K. Pour quell idéal maximal l'équation donnée est elle minimale ? Donner un modèle irréductible en $\mathfrak{p}$. Quelle est la réduction de la courbe modulo $\mathfrak{p}$?

Exercice 5 (Discriminant minimal) Soient K un corps de nombres et E/K une courbe elliptique. Pour toute place ultramétrique v, on note Δ_v le discriminant d'un modèle minimal de E/K_v. On introduit le *discriminant minimal* $\mathcal{D}_{E/K}$ défini comme étant l'idéal entier de K donné par

$$\mathcal{D}_{E/K} := \prod_{v \nmid \infty} \mathfrak{p}_v^{\mathrm{ord}_v \Delta_v}.$$

Considérons un modèle de Weiersterass de discriminant Δ de E/K.

1. Justifier l'existence de $\mathcal{D}_{E/K}$.
2. Montrer qu'il existe un idéal fractionnaire de K, $\mathfrak{a}_\Delta$, tel que $\mathcal{D}_{E/K} = (\Delta)\mathfrak{a}_\Delta^{12}$.
3. Montrer que la classe de $\mathfrak{a}_\Delta$ dans $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$, est indépendant de Δ.

Exercice 6 (Réduction semi-stable) Soient K un corps local et E/K une courbe elliptique.

1. Soit K'/K une extension non-ramifiée. Montrer que le type de réduction (bonne, multiplicative, additive) de E est le même sur K et sur K' (on se limitera à une preuve dans le cas où la caractéristique de k est ≥ 5).
2. Soit F/K une extension finie. Montrer que si E/K a une réduction bonne ou multiplicative, il en est de même de E/F.

Exercice 7 (Calculs de torsion) En réduisant modulo p déterminer les groupes $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ pour les courbes, données par un modèle de Weierstrass, suivantes :

$$E_1 : y^2 + y = x^3 - x + 1 \quad E_2 : y^2 = x^3 + 3 \quad E_3 : y^2 = x^3 + x.$$

On fournit les données calculatoires suivantes :

$$\Delta_{E_1} = -611, \quad |\tilde{E}_2(\mathbb{F}_5)| = 6 \text{ et } |\tilde{E}_2(\mathbb{F}_7)| = 13,$$

et,

$$\tilde{E}_3(\mathbb{F}_5) = \{0, (0,0), (2,0), (3,0)\}.$$

On montrera également que $E_2(\mathbb{Q})$ est infini. On donnera aussi, pour chaque p, un modèle de Weierstrass pour E_2 et E_3, et on précisera le type de réduction pour tout p.