Cours du 27/03/2020 – Partie 1.

Déf. E, F sev de $\mathbb{R}^n$ tq $\mathbb{R}^n = E \oplus F$.

(i) La projection de $\mathbb{R}^n$ sur E, parallèlement à F, est l'application linéaire : $p_{E/F}$

$$\mathbb{R}^n = E \oplus F \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \longmapsto \vec{v} \in E \subset \mathbb{R}^n.$$

(ii) La symétrie de $\mathbb{R}^n$ par rapport à E et de direction F est l'application linéaire : $s_{E/F}$

$$\mathbb{R}^n = E \oplus F \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \longmapsto \vec{v} - \vec{w} \in \mathbb{R}^n.$$

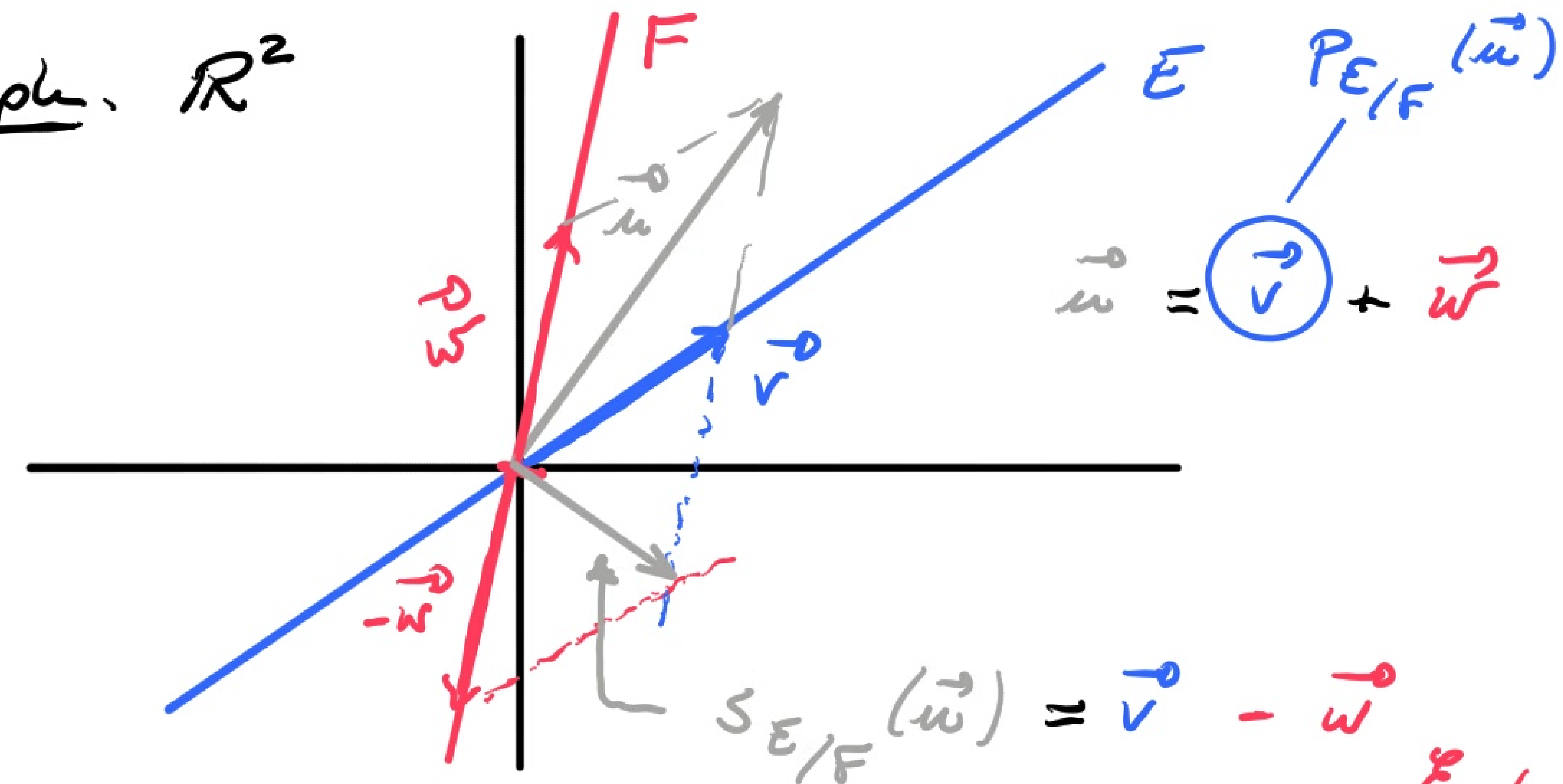
Rmq. La projection (...) (resp. la symétrie (...)) est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^n$ qui laisse invariants les vecteurs de E et qui envoie les vecteurs de F sur $\vec{0}$ (resp.) qui envoie $\vec{w} \in F$ sur $-\vec{w}$ ...).

ie $\forall \vec{v} \in E$, $\left.\begin{array}{l} p_{E/F}(\vec{v}) \\ s_{E/F}(\vec{v}) \end{array}\right\} = \vec{v}$ $\Bigg|$ $\forall \vec{w} \in F$, $p_{E/F}(\vec{w}) = \vec{0}$, $s_{E/F}(\vec{w}) = -\vec{w}$.

Rmq. $p_{E/F} + p_{F/E} = id_{\mathbb{R}^n}$.

$$s_{E/F} = p_{E/F} - p_{F/E} = 2p_{E/F} - id_{\mathbb{R}^n}.$$

Exple. $\mathbb{R}^2$



Lemme. $E = vect(\vec{e} = (e_1, e_2))$, F d'éqtn $ax + by = 0$ — $\mathcal{E}_F(x,y)$

$\vec{u} = (u_1, u_2)$, $p_{E/F}(\vec{u}) = \dfrac{au_1 + bu_2}{ae_1 + be_2}\vec{e}$. — $\dfrac{\mathcal{E}_F(u_1,u_2)}{\mathcal{E}_F(e_1,e_2)}$

et $s_{E/F}(\vec{u}) = 2\dfrac{au_1 + bu_2}{ae_1 + be_2}\vec{e} - \vec{u}$.

Rmq. • $ae_1 + be_2 \neq 0$ car $\vec{e} \notin F$.

• $au_1 + bu_2 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle$: pdt scalaire des 2 vecteurs.

• $au_1 + bu_2 = 0$ ssi les vecteurs sont orthogonaux.

dém (lemme). $(u_1, u_2) \longmapsto \dfrac{(a, b)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}{(a\ b)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}} \vec{e}$ est une application linéaire.

$\vec{v} \in E$, $\vec{v} = \lambda \vec{e}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\vec{v} = \lambda \vec{e} \longmapsto \dfrac{a(\lambda e_1) + b(\lambda e_2)}{ae_1 + be_2} \vec{e} = \lambda \vec{e} = \vec{v}$.

$\vec{w} \in F$, $\vec{w} = (w_1, w_2) \longmapsto \dfrac{\cancelto{0}{aw_1 + bw_2}}{ae_1 + be_2} \vec{e} = \vec{0}$.

Par unicité de la projection, c'est $P_{E/F}$ $\square$.

Rmq. Si $E \perp F$, F est d'équation $e_1 x + e_2 y = 0$.

et $P_{E/F}(\vec{u}) = \dfrac{e_1 u_1 + e_2 u_2}{e_1^2 + e_2^2} \vec{e}$.

Expl. $\mathbb{R}^3$ $E = D$ dte, F plan avec $D \not\subset P$.

$\mathbb{R}^3 = D \oplus F$.

$D = \text{vect}(\vec{e})$, P d'éq$^{\text{n}}$ $\underbrace{ax + by + cz}_{\mathcal{E}_F(x,y,z)} = 0$.

$P_{E/F}(\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)) = \dfrac{au_1 + bu_2 + cu_3}{ae_1 + be_2 + ce_3} \vec{e}$.

i.e même formule !

$\dfrac{\mathcal{E}_F(\vec{u})}{\mathcal{E}_F(\vec{e})}$.

Chap 5 – Algèbre linéaire

But.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \end{array}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{Mat(f) \in M_{n,p}(\mathbb{R})} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\boxed{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in M_{n,p}(\mathbb{R})} &
\end{tikzcd}$$

dans les bases canoniques !

Existence d'autres bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

Base de $\mathbb{R}^n$

Base de $\mathbb{R}^p$

→ Changement de bases.

Chap 5.

① Application linéaire et ses matrices associées.

E, F sev et $f : E \to F$.

$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p)$ une base de E, $\dim E = p$

$\mathcal{B}' = (\vec{u}_1', \dots \vec{u}_n')$ une base de F. $\dim F = n$

$\boxed{\text{FAIT}}$ f est déterminée par $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2) \dots f(\vec{u}_p)$.

En effet, $\vec{u} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots x_p \vec{u}_p$ — $\in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}$ base de E

$f(\vec{u}) = x_1 \cdot f(\vec{u}_1) + x_2 \cdot f(\vec{u}_2) + \dots x_p \cdot f(\vec{u}_p)$

f est linéaire.

Comme dans le chapitre 4, 4. on peut considérer :

$$\vec{u} = \underbrace{\boxed{(x_1, \dots x_p)_{\mathcal{B}}}}_{\in \mathbb{R}^p} = x_1 \vec{u}_1 + \dots x_p \vec{u}_p$$

$$\downarrow$$

$$f(\vec{u}) = \vec{v} = x_1 f(\vec{u}_1) + \dots x_p f(\vec{u}_p)$$

$$= y_1 \vec{u}_1' + y_2 \vec{u}_2' + \dots y_n \vec{u}_n' = \underbrace{\boxed{(y_1, y_2, \dots y_n)_{\mathcal{B}'}}}_{\in \mathbb{R}^n}$$

$\mathcal{B}'$ base de F

$\boxed{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}$

$$\rightsquigarrow Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Coordonnées de $f(\vec{u}_j)$ dans $\mathcal{B}'$ selon $\vec{u}_1'$

! coordonnées de $f(\vec{u}_2)$ dans la base $\mathcal{B}'$ (de F) $(f(\vec{u}_2) \in F$!!)

Exple. $\vec{u}_1 = 1 \times \vec{u}_1 + 0 \times \vec{u}_2 + \dots 0 \times \vec{u}_p = \boxed{(1, 0, 0 \dots 0)_{\mathcal{B}}}$

$$\downarrow$$

$$f(\vec{u}_1) \to Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \cdot U_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

coordonnées de $f(\vec{u}_1)$ dans $\mathcal{B}'$

$\boxed{(a_{11}, a_{21}, \dots a_{n1})_{\mathcal{B}'}}$

Déf. La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice formée en colonnes,
$A = (C_1 \mid C_2 \dots \mid C_p)$ où
C_j = coordonnées de $f(\vec{u_j})$ dans $\mathcal{B}'$.

On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Rmq. (Notation) En général $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

- Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de E et que $\mathcal{B}'$ est la base canonique de F, $\mathrm{Mat}(f)$.
- Si $E = F$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(!) Attention : Changer les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ conduit à des matrices a priori très différentes.

Exple. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices de la même application linéaire dans des bases différentes.

Cours du 27/03/2020 – Partie 2.

dans la base canonique.

On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soit $\underbrace{\mathrm{Mat}(f)}_{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

On remarque $A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u_1}} = \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2 \\ 1/2 + 1/2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u_1}}$,

et $A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u_2}} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2 \\ 1/2 - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f(\vec{u_1}) = \vec{u_1}$,
$f(\vec{u_2}) = \vec{0}$.

$\mathcal{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$ base de $\mathbb{R}^2$ car
- elle est libre,
- $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^2)$.

Dans $\mathcal{B}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}$

$f(\vec{u_2}) = \vec{0} = (0,0)_{\mathcal{B}}$
$f(\vec{u_1}) = \vec{u_1} = (1,0)_{\mathcal{B}}$

$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$

$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

f est la projection sur $D_{\vec{u_1}}$ parallèlement à $D_{\vec{u_2}}$.

Exple : $[f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2] \to \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{B}_3$ base canonique

$\mathcal{B}' = (\vec{u_1'} = (1,2), \vec{u_2'} = (3,4))$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{e_1}) &= (1,2) = \vec{u_1'} \\ f(\vec{e_2}) &= (3,4) = \vec{u_2'} \\ f(\vec{e_3}) &= (2,4) = 2\vec{u_1'} \end{aligned}\right\} \leadsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

coordonnées de $f(\vec{e_3})$ dans $\mathcal{B}'$.

Changement de point de vue.

$\mathcal{B}$ base de E
$\dim E = p$

$\mathcal{B}'$ base de F
$\dim F = n$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, "f"] & F \arrow[dr, "C_{\mathcal{B}'}"] & \\ \mathbb{R}^p \arrow[ur, "L_{\mathcal{B}}"] \arrow[rrr, bend right, "F = C_{\mathcal{B}'} \circ f \circ L_{\mathcal{B}}"'] & & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$(x_1, \dots x_p) \overset{L_{\mathcal{B}}}{\longmapsto} x_1 \vec{u_1} + \dots x_p \vec{u_p} \overset{f}{\longmapsto} \overbrace{x_1 f(\vec{u_1}) + \dots x_p f(\vec{u_p})}^{\in F}$$
$$= y_1 \vec{u_1}' + \dots y_n \vec{u_n}' \overset{C_{\mathcal{B}'}}{\longmapsto} (y_1, \dots y_n)_{\mathcal{B}'}$$

$$(x_1, \dots x_p) \overset{F}{\longmapsto} (y_1, \dots y_n)_{\mathcal{B}'}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}(F)}$ dans les bases canoniques.

② Opérations entre applications linéaires.

Prop. Des sev E, F, G et 2 applications linéaires $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On considère la composée $g \circ f : E \to G$.

On fixe des bases $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{B}'$ de F, $\mathcal{B}''$ de G :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f).$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$$

<u>dém.</u> $g \circ f = h$ ~~ $H = C_{\mathcal{B}''} \circ h \circ L_{\mathcal{B}}$.

$$\underbrace{C_{\mathcal{B}''} \circ h \circ L_{\mathcal{B}}}_{H} = C_{\mathcal{B}''} \circ (g \circ f) \circ L_{\mathcal{B}}$$

$C_{\mathcal{B}'}$

$$= \underbrace{(C_{\mathcal{B}''} \circ g \circ L_{\mathcal{B}'})}_{G} \circ \underbrace{(\overbrace{L_{\mathcal{B}'}^{-1}}^{C_{\mathcal{B}'}} \circ f \circ L_{\mathcal{B}})}_{F}.$$

$$\underbrace{L_{\mathcal{B}'}) \circ (L_{\mathcal{B}'}^{-1}}_{= id}$$

$$= G \circ F.$$

$H = G \circ F$ ~~ dans les bases canoniques :

$$\mathrm{Mat}\, H = \mathrm{Mat}(G \circ F) = \mathrm{Mat}\, G \cdot \mathrm{Mat}\, F.$$

i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ $\square$

Prop $f : E \to F$ linéaire bijective. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E et F (resp.).

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ est inversible

et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1}$.

(!) Rappel (S1). $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ bijectives,
$g \circ f : X \to Z$ est bijective et
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Csque : A, B matrices inversibles tq AB existe.
AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

$$(\mathrm{Mat}((g\circ f)^{-1}) = \mathrm{Mat}(f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Mat}(f^{-1}) \cdot \mathrm{Mat}(g^{-1})$$
$$= \underbrace{(\mathrm{Mat}\, f)}_{B}{}^{-1} \cdot \underbrace{(\mathrm{Mat}\, g)}_{A}{}^{-1}$$
$$= \underbrace{(\mathrm{Mat}(g \circ f))}_{AB}{}^{-1} \quad \text{i.e. } (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

dém (Prop) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}(F)$
$F = C_{\mathcal{B}'} \circ f \circ L_{\mathcal{B}}$.

rappel

$$F^{-1} = (C_{\mathcal{B}'} \circ f \circ L_{\mathcal{B}})^{-1} = L_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f^{-1} \circ C_{\mathcal{B}'}^{-1}$$
$$= C_{\mathcal{B}} \circ \underbrace{f^{-1}}_{g} \circ L_{\mathcal{B}'} = G \;!$$

Dans les bases canoniques :
$$\mathrm{Mat}(F^{-1}) = \mathrm{Mat}(G) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f^{-1}).$$
$$(\mathrm{Mat}\, F)^{-1} = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f))^{-1}.$$

□

3 Changement de bases. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E.

(!) Rappel (Chap 4, 4) La matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, c'est $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, la matrice de $C_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{B}'}$.

Donc $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}(C_{\mathcal{B}} \circ \mathrm{id} \circ L_{\mathcal{B}'}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

Déf. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$: matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}';\mathcal{B}}(\mathrm{id} : E \to E)$.

Conséquence Toute matrice de passage est inversible (puisque id est bijective).

De plus, $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\underbrace{id^{-1}}_{id}) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Rmq. (Terminologie).

(!) Rappel. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ donne les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$ quand on les connaît dans $\mathcal{B}'$.

i.e $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ "pousse" les objets de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Exple. $f : E \to F$ $\quad \mathcal{B}_E$ base de E, $\mathcal{B}_F$ de F.

$\to F = C_{\mathcal{B}_F} \circ f \circ L_{\mathcal{B}_E}$.

$$F \circ P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_E'} = (C_{\mathcal{B}_F} \circ f \circ \overbrace{L_{\mathcal{B}_E}) \circ (C_{\mathcal{B}_E}}^{=id} \circ L_{\mathcal{B}_E'})$$

$$= C_{\mathcal{B}_F} \circ f \circ L_{\mathcal{B}_E'}.$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_E'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E',\mathcal{B}_F}(f).$$

On passe de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}_E'$.

Cours du 31/03/2020

4) Cas particulier des endomorphismes.

Rappel : Matrices de changement de bases ce sont les matrices associées à l'id dans des bases bien choisies. $id : E \to E$, $x \mapsto x$.

Thm. E (s)ev de dim n. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$ (et $\mathcal{B}$) et

$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ ——— $\mathcal{B}'$ (et $\mathcal{B}'$).

P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$

dém. 1. Avec ce que l'on vient de voir :

$$A \cdot P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \cdot P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$$

L'image de X par AP est donc donnée dans $\mathcal{B}$. ($Y = APX$)

Pour l'obtenir dans la base $\mathcal{B}'$, il faut multiplier $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$.

$\leadsto P^{-1}(Y) = P^{-1}(APX) = \underbrace{P^{-1}AP}_{= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)} \cdot X$. ✓