Correction contrôle n°1

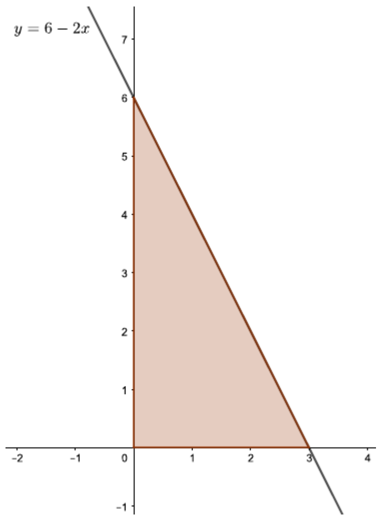
durée : 1h30 – date : 11/02/2020

Exercice 1. (3 points)

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{[0,2]\times[0,1]} \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dxdy \\
&= \left(\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy\right) \quad \text{par le théorème de Fubini et séparation des variables} \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^2 [\arctan(y)]_0^1 = \left(\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(1)\right)\big(\arctan(1) - \arctan(0)\big) = \boxed{\frac{\pi \ln(5)}{8}}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. (6 points)

Soit $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ 2x + y \leq 6\}$.



1. D_1 est le triangle de sommets $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,6)$. Par le théorème de Fubini en tranches verticales, son aire est :

$$\begin{aligned}
A(D_1) &= \iint_{D_1} dxdy = \int_0^3 \int_0^{6-2x} dydx \\
&= \int_0^3 (6-2x)\,dx = \big[6x - x^2\big]_0^3 \\
&= 18 - 9 = \boxed{9}.
\end{aligned}$$

2. Pour calculer cette intégrale, on utilise encore le théorème de Fubini en tranches verticales :

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} xy\,dxdy &= \int_0^3 \int_0^{6-2x} xy\,dydx = \int_0^3 x\,\frac{(6-2x)^2}{2}\,dx \\
&= \int_0^3 \left(18x - 12x^2 + 2x^3\right)\,dx = \left[9x^2 - 4x^3 + \frac{x^4}{2}\right]_0^3 \\
&= 27\left(3 - 4 + \frac{3}{2}\right) = \boxed{\frac{27}{2}}.
\end{aligned}$$

On considère le domaine $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ 9x + y \leq 9\}$.

3. Soit $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (ax, by) \in \mathbb{R}^2$. On cherche à déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ non nuls tels que $\varphi(D_1) = D_2$.

D_1 est le triangle de sommets $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,6)$ rectangle en $(0,0)$. D_2 est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,9)$ rectangle en $(0,0)$. La dilatation φ doit donc envoyer le point $(3,0)$ sur le point $(1,0)$: on a donc $3a = 1$ et donc $a = \frac{1}{3}$. De même, φ envoie $(0,6)$ sur $(0,9)$ i.e $6b = 9$ et donc $b = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

Finalement, $\varphi(D_1) = D_2$ avec $\boxed{\varphi : (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{3}, \frac{3y}{2}\right)}$ et son jacobien est donc $\boxed{\mathrm{Jac}_\varphi = |ab| = \frac{1}{2}}$.

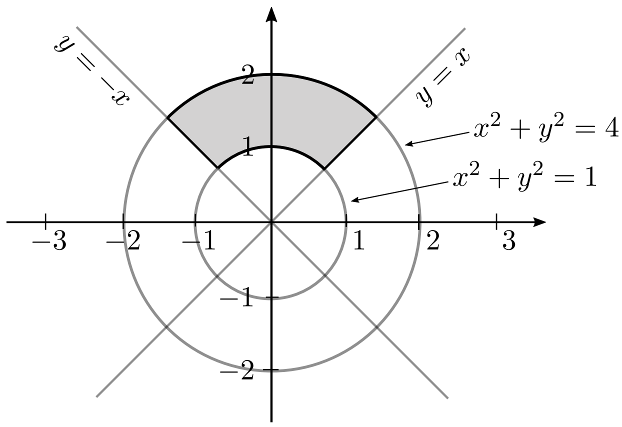
4. On sait qu'une dilatation est une bijection C^1 d'inverse C^1 (i.e un C^1-difféomorphisme). On peut donc l'utiliser comme changement de variable. Il vient

$$A(D_2) = \iint_{D_2 = \varphi(D_1)} dxdy = \iint_{D_1} \mathrm{Jac}_\varphi(x', y')\,dx'dy' = \frac{1}{2}A(D_1) = \boxed{\frac{9}{2}}.$$

Exercice 3. (7 points)

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ x+y \geq 0\,,\ x-y \leq 0\}$.

1. L'encadrement $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ correspond à deux inégalités i.e être à l'extérieur (resp. intérieur) du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 (resp. 2). D se trouve donc dans l'anneau délimité par ces deux cercles.
Il reste alors à tracer les droites d'équations $y = \pm x$ pour déterminer le quart d'anneau qui nous intéresse.



2. Montrons que D est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées i.e que D est invariant par l'application $\psi : (x,y) \mapsto (-x,y)$.

Si $(x,y) \in D$, $1 \leq (-x)^2+y^2 = x^2+y^2 \leq 4$. De plus, on a $x+y \geq 0$ donc $(-x)-y \leq 0$. Enfin, $x-y \leq 0$ donc $(-x)+y \geq 0$. Finalement, $(-x,y) \in D$ et D est invariant par ψ.

Une symétrie étant un C^1-difféomorphisme, on peut réaliser le changement de variables $(x',y') = \psi(x,y) = (-x,y)$ de jacobien $\mathrm{Jac}_\psi = 1$. On a :

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_D (-x')\,dx'dy' = \boxed{0}\,.$$

3. Soit $(r,\theta) \in \Delta$ tels que $(r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y) \in D$.

Comme en coordonnées polaires $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ est équivalent à $1 \leq r \leq 2$. La droite d'équation $y = x$ forme un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses et $y \geq x$ correspond à $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$. De même, $y \geq -x$ correspond à $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. Ces deux dernières conditions sont équivalentes à $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ et l'on obtient donc pour le domaine Δ :

$$\boxed{\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\ \middle|\ 1 \leq r \leq 2\,,\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\right\}}\,.$$

4. Par passage aux coordonnées polaires dont le jacobien est $\mathrm{Jac}(r,\theta) = r$ pour tout (r,θ),

$$\iint_D y\,dxdy = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r\sin\theta\, r\,drd\theta = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 [-\cos\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\frac{7\sqrt{2}}{3}}\,.$$

5. On suppose D homogène, les coordonnées de son centre de gravité s'écrivent donc :

$$x_G(D) = \frac{1}{A(D)}\iint_D x\,dxdy \qquad \text{et} \qquad y_G(D) = \frac{1}{A(D)}\iint_D y\,dxdy\,.$$

Il nous reste donc à calculer l'aire de D :

$$A(D) = \iint_D dxdy = \iint_\Delta r\,drd\theta = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r\,drd\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{3\pi}{4}}\,.$$

En utilisant les questions 2 et 4, on obtient :

$$x_G(D) = \boxed{0} \qquad \text{et} \qquad y_G(D) = \frac{4}{3\pi}\frac{7\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{28\sqrt{2}}{9\pi}}\,.$$

Exercice 4. (5 points)

1. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on pose $f(u) = e^{-u} - 1 + u$. La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(u) = 1 - e^{-u}$. Par croissance de l'exponentielle, la fonction $u \mapsto e^{-u}$ décroît sur $\mathbb{R}$ et elle est donc plus petite que $e^0 = 1$ sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}^+$ et donc que f y est croissante. Il vient donc que $f(u) \geq f(0) = 0$, ou encore $e^{-u} \geq 1 - u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^+$.

2. Pour tout $(x, y) \in [0,1] \times [0,2]$, $x^2y^2 \geq 0$ et donc $e^{-x^2y^2} \geq 1 - x^2y^2$ par la question précédente.

De plus, pour tout $u \geq 0$, $e^{-u} \leq 1$ donc $e^{-x^2y^2} \leq 1$. On obtient les inégalités suivantes, par croissance/positivité de l'intégrale :

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} (1 - x^2y^2)\, dxdy \leq \iint_{[0,1]\times[0,2]} e^{-x^2y^2}\, dxdy \leq \iint_{[0,1]\times[0,2]} dxdy\,.$$

Calculons les deux nouvelles intégrales via le théorème de Fubini (sur un rectangle) :

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 dy = \boxed{2}\,, \text{ et}$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} (1 - x^2y^2)\, dxdy = 2 - \int_0^1 x^2\, dx \int_0^2 y^2\, dy = 2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 2 - \frac{8}{9} = \boxed{\frac{10}{9}}\,.$$

On obtient bien les inégalités demandées : $\boxed{\frac{10}{9} \leq \iint_{[0,1]\times[0,2]} e^{-x^2y^2}\, dxdy \leq 2}$.

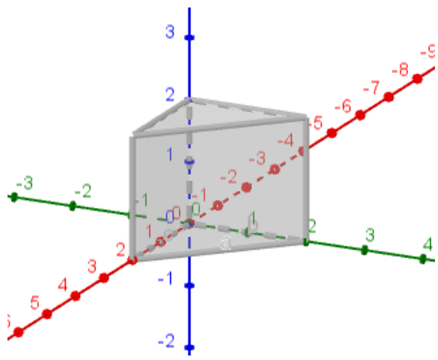
Exercice 5. (2 points)

On peut écrire D' en tranches horizontales :

$$D' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 2\,,\ (x, y) \in D_z\}$$

avec $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\ x + y \leq 2\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ pour tout z de $[0\,,2]$.

D' est donc le prisme à base triangulaire représenté ci-contre. En rouge l'axe $(0x)$, en vert l'axe $(0y)$ et en bleu l'axe $(0z)$.



Son volume s'écrit : $V(D') = \iiint_{D'} dxdydz = \int_0^2 A(D_z)\, dz$.

On calcule l'aire des tranches D_z en découpant en tranches verticales :

$$A(D_z) = \int_0^2 \int_0^{2-x} dy\, dx = \int_0^2 (2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\,.$$

Finalement, le volume de D' est :

$$V(D') = \int_0^2 2\, dz = \boxed{4}\,.$$