Correction du contrôle 2

DURÉE : 1H30 – DATE : 10/03/2020

Exercice 1 (3 points). On utilise l'algorithme de Gauss–Jordan en commençant par le pivot encadré :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x} & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & - & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 5z & = & 13 \\ x & + & 4y & + & z & = & 18 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x} & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ & & \boxed{y} & + & 2z & = & 7 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & & 2y & + & 4z & = & 14 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x} & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ & & \boxed{y} & + & 2z & = & 7 \\ & & & & \boxed{z} & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

et l'on obtient donc un système linéaire équivalent, sous forme échelonnée. Celui-ci admet une équation de compatibilité qui est satisfaite, il est donc compatible. De plus il a trois pivots : il n'y a pas d'inconnues secondaires et le système admet donc une unique solution que l'on peut déterminer en « remontant » l'algorithme :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & 7 \\ & & & & \boxed{z} & = & 2 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 10 \\ & & \boxed{y} & & & = & 3 \\ & & & & \boxed{z} & = & 2 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x} & & & & & = & 4 \\ & & \boxed{y} & & & = & 3 \\ & & & & \boxed{z} & = & 2 \end{array}\right.$$

ce qui conduit à l'unique solution $\boxed{(4,3,2)}$.

Exercice 2 (6 points).

1. On utilise le pivot encadré $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x_1} & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & m \end{array}\right.$ pour démarrer l'algorithme de Gauss–Jordan et on continue jusqu'à obtenir un système échelonné :

$$(\mathcal{S}) \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} \boxed{x_1} & +2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ & \boxed{-3x_2} & -6x_3 & = & -6 \\ & -6x_2 & -12x_3 & = & m-14 \end{array}\right. \longleftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{rrrcr} \boxed{x_1} & +2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ & \boxed{-3x_2} & -6x_3 & = & -6 \\ & & 0 & = & m-2 \end{array}\right.}$$

$(\mathcal{S})$ admet une solution si et seulement si ce dernier système est compatible. Celui-ci ayant une unique équation de compatibilité, $(\mathcal{S})$ admet donc une solution si et seulement si $\boxed{m=2}$. Il reste juste à réduire le système échelonné pour déterminer toutes les solutions de $(\mathcal{S})$. On commence par multiplier la seconde ligne par $-\frac{1}{3}$ et on utilise le pivot encadré :

$$(\mathcal{S}) \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ & \boxed{x_2} & +2x_3 & = & 2 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & -x_3 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2+x_3 \\ x_2 & = & 2-2x_3 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Quand $m=2$, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est donc $\boxed{\{(-2+x_3\,,2-2x_3\,,x_3)\,|\,x_3\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3}$.

2. La matrice est $\boxed{A=\mathrm{Mat}(f)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}}$.

Comme $(\mathcal{S})$ admet un système équivalent echelonné ayant 2 pivots, $\boxed{\mathrm{rang}(A)=2}$.

3. La matrice d'une application linéaire, $A = \mathrm{Mat}(f)$, se détermine en colonnes : sa i-ème colonne est l'image par f du i-ème vecteur de la base canonique. On trouve donc (sans calcul !) :

$$\boxed{f(\overrightarrow{e_1}) = (1,4,7), \quad f(\overrightarrow{e_2}) = (2,5,8) \quad \text{et } f(\overrightarrow{e_3}) = (3,6,9) \in \mathbb{R}^3}.$$

On peut ensuite calculer l'image de $(3,-2,1)$ par calcul matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3 + 2\times(-2) + 3\times 1 \\ 4\times 3 + 5\times(-2) + 6\times 1 \\ 7\times 3 + 8\times(-2) + 9\times 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}}.$$

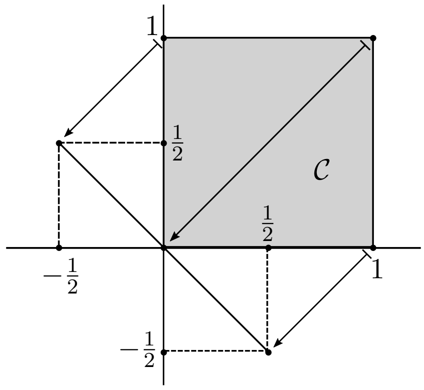
4. Le vecteur $(2,2,m)$ admet un antécédent par f si et seulement si le système $(\mathcal{S})$ admet une solution. La réponse est donc $\boxed{m = 2}$ comme déterminé en **question 1**.

Exercice 3 (6 points).

1. Il suffit de calculer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par f. On trouve $f(\overrightarrow{e_1}) = f(1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, et $f(\overrightarrow{e_2}) = f(0,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

On en déduit la matrice demandée

$$A = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$



2. On calcule l'image des sommets restants par f :
$f(0,0) = (0,0)$ et $f(1,1) = (0,0)$.
On en déduit que l'image du carré $\mathcal{C}$ par f est
$\boxed{\text{le segment d'extrémités les points } \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right), \text{ et } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)}$.

3. Un vecteur $\overrightarrow{v} = (x,y)$ est invariant par f si et seulement si $f(x,y) = (x,y)$. Ceci equivaut à $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}, -\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = (x,y)$ ou encore au système $\begin{cases} x - y & = 2x \\ -x + y & = 2y \end{cases}$ et donc à l'équation $y = -x$.

$\mathcal{D}$ admet donc $\boxed{y = -x}$ comme équation cartésienne, elle est engendrée (par exemple) par $\boxed{(1,-1)}$.

4. On cherche maintenant à résoudre $f(x,y) = (0,0)$ ou encore $\begin{cases} x - y & = 0 \\ -x + y & = 0 \end{cases}$. On trouve donc la droite d'équation cartésienne $\boxed{y = x}$.

Remarque. Cette dernière droite est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et f n'est autre que la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 4 (4 points).

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ doivent satisfaire l'équation de $\mathcal{P}$ et donc (a,b,c) est solution du système : $\begin{cases} a - c & = 0 \\ 2a + b - c & = 0 \end{cases}$. On en déduit que $c = a$ et $b = -a$. Pour $a = 1$, on obtient une équation cartésienne définissant $\boxed{\mathcal{P} : x - y + z = 0}$.

Remarque. Rigoureusement, on aurait d'abord dû prouver que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires (ce qui est très facile), pour en déduire qu'effectivement $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel, qui admet donc une équation du type $ax + by + cz = 0$.

2. On peut par exemple prendre $x = 1$, $y = 1$ et $z = 0$, ou $x = \lambda$, $y = 0$ et $z = 1$. Comme les deux vecteurs obtenus $\boxed{(1,1,0) \text{ et } (\lambda,0,1)}$ ne sont pas colinéaires, ils engendrent $\mathcal{P}_\lambda$.

3. Les points de l'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{P}$ satisfont le système $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + \lambda z = 0 \end{cases}$. En remplaçant la seconde ligne par la différence $L_2 - L_1$, on obtient le système équivalent $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ (\lambda - 1)z = 0 \end{cases}$.

Il y a donc deux cas à distinguer.

1. Si $\lambda = 1$, le système est équivalent à l'équation $x - y + z = 0$ et donc $\boxed{\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{P} = \mathcal{P}}$ (ce qui est évident puisque dans ce cas $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{P}$!).
2. Sinon, $\lambda \neq 1$, le système est équivalent à $z = 0$ et $x - y + z = 0$ ou encore $x = y$ et $z = 0$ et $\boxed{\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{P} \text{ est la droite vectorielle engendrée par } (1,1,0)}$.

Exercice 5 (3 points).

On cherche l'image par f des vecteurs de la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$. Comme $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{e_1}$, on a $\boxed{\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2})}$. De même, $\boxed{\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2})}$.

Il vient, par linéarité,

$$f(\overrightarrow{e_1}) = f\Big(\frac{1}{2}(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2})\Big) = \frac{1}{2}\big(f(\overrightarrow{u_1}) + f(\overrightarrow{u_2})\big) = \frac{1}{2}\big((1,0,1) + (3,2,1)\big) = (2,1,1)\,.$$

De la même façon, on trouve $f(\overrightarrow{e_2}) = \frac{1}{2}\big(f(\overrightarrow{u_1}) - f(\overrightarrow{u_2})\big) = \frac{1}{2}\big((1,0,1) - (3,2,1)\big) = (-1,-1,0)$.

La matrice associée à f dans les bases canoniques est donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.