Feuille d'exercices n°5

Sous-espaces vectoriels, base, dimension

Exercice 1 - *Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.*

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

a. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x - 7y = 0\}$,

b. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - y^2 = 0\}$,

c. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = x + y - z = 0\}$,

d. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 1\}$.

2. Soient E et F des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ (pour un entier $n \geq 1$).

a. Montrer que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer qu'en général $E \cup F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

c. On définit $E + F$ comme l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in F$. Montrer que $E + F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

d. Montrer que $E + E = E$.

Exercice 2 - *Noyau et image d'une application linéaire.*

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. En résolvant des systèmes linéaires pertinents, déterminer le noyau et l'image de f. On en donnera une équation (ou un système d'équations) cartésienne(s) *et* une famille génératrice.

2. L'application f est-elle injective ? surjective ?

3. Mêmes questions avec $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de matrice associée $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 - *Composition d'applications linéaires.*

Soient des applications linéaires $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

1. Montrer que $\ker g \subset \ker(f \circ g)$ et que $\operatorname{im}(f \circ g) \subset \operatorname{im} f$.

2. On considère les applications f et g de l'**Exercice 2**. Montrer (sans calculs) que $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont ni injectives, ni surjectives.

3. On suppose que $f \circ f = 0$. Quelle relation y a-t-il entre $\ker f$ et $\operatorname{im} f$?

Exercice 4 - *Construction d'exemples.*

Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

1. son image est la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (1, 2, 3)$.

2. $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est stable par f et son noyau est la droite engendrée par $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 1)$.

Exercice 5 - *Famille libre ou liée.*

Soient $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (4,1,4)$ et $\overrightarrow{v_3} = (2,-1,4)$.

1. Vérifier que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$, ainsi que pour $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$.

2. La famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est-elle libre ? Sinon, donner une relation de dépendance linéaire.

Exercice 6 - *Multiplication par i.*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}$.

1. Donnez un exemple d'une telle application.

2. Montrer que f est injective et surjective.

3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $B = (\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est libre.

Exercice 7 - *Coordonnées dans une base.*

1. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{v_3} = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ dans cette base.

Exercice 8 - *Extraction de base d'un système générateur.*

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $\overrightarrow{v_1} = (1,-1,2,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,2,1,1)$, $\overrightarrow{v_3} = (1,1,3,1)$ et $\overrightarrow{v_4} = (2,0,5,1)$.

1. La famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ est-elle libre ? Quel est son rang ?

2. Soit $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Déterminer la dimension de E et extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.

Exercice 9 - *Base incomplète.*

1. Soient $\overrightarrow{v_1} = (1,-2,1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-1,2,1)$. Compléter la famille libre $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Même question avec $\overrightarrow{v_1} = (1,-2,1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (2,2,-1)$.

Exercice 10 - *Dimension et base d'un sev défini par un système d'équations.*

1. Déterminer la dimension et donner une base du sev de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \ x - 2y + 3z - 4t = 0\}.$$

2. Même question avec

$$F = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \ x + 2y + z + 2t = 0 = -2x - 4y + z - t\}.$$

Exercice 11 - *Dimension et égalité d'espaces.*

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$E = \mathrm{Vect}\big((-1,3,2), (-2,-1,1), (1,4,1)\big) \text{ et } F = \mathrm{Vect}\big((0,7,3), (-7,0,5)\big).$$

Montrer qu'ils ont même dimension, puis qu'ils sont égaux.

Exercice 12 - *Détermination d'un supplémentaire.*

Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x - 2y - z + t = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

1. Déterminer la dimension et une base de E.

2. Donner un supplémentaire de E.

3. Mêmes questions avec $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 2y - z + 2t = x + y + 2z + t = y + z + t = 0\}$.

Exercice 13 - *Somme de sous-espaces vectoriels.*

Pour a réel donné, on considère dans $\mathbb{R}^4$ les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+t = x-y+t = 0\},$$

et $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ avec $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0,a,0,1)$.

1. Déterminer une base de E.

2. Pour quelles valeurs de a a-t-on $E \cap F = \{0\}$?

3. Pour quelles valeurs de a les espaces E et F sont-ils supplémentaires ?

4. Donner une base de $E + F$.

Exercice 14 - *Somme de deux espaces – suite.*

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ y+z+t = 0\} \text{ et } F = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y = 0 \text{ et } z = 2t\}.$$

1. Déterminer la dimension et une base de E et F.

2. Trouver la dimension et une base de $E \cap F$.

3. Que peut-on dire de $E + F$? La somme est-elle directe ?

Exercice 15 - *Théorème du rang.*

Vérifier le théorème du rang sur les applications linéaires f et g de l'**Exercice 2**.

Exercice 16 - *Théorème du rang, supplémentaire du noyau et isomorphisme induit.*

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le rang de f et une base de $\mathrm{im}\, f$. Quelle est la dimension de $\ker f$?

2. Donner une équation cartésienne de l'image de f. Quelle est la structure de l'ensemble des antécédents de $(1,1,-2)$ par f ?

3. Soit $E = \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)\big)$. Montrer que $E \oplus \ker f = \mathbb{R}^4$ et que $f(E) = \mathrm{im}\, f$.

4. En déduire que tout $\overrightarrow{v} \in \mathrm{im}\, f$ admet un *unique* antécédent $\overrightarrow{u} \in E$ par f. Le déterminer pour $\overrightarrow{v} = (1,1,-2)$.

Exercice 17 - *Exemples de projections et de symétries dans $\mathbb{R}^3$.*

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x+y+z = 0$ et D la droite $\mathrm{Vect}(1,1,-1)$.

1. Déterminer une base de P et montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2. Décomposer tout $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sous la forme $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in P$ et $\overrightarrow{w} \in D$.

3. En déduire les coordonnées de $p_{P/D}(x,y,z)$, l'image de (x,y,z) par la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D ; en déduire la matrice de $p_{P/D}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4. Mêmes questions pour $p_{D/P}$, la projection de $\mathbb{R}^3$ sur D parallèlement à P.

5. Mêmes questions pour la symétrie $s_{P/D}$ de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P et de direction D, puis pour $s_{D/P}$.

6. Retrouver ces expressions grâce aux formules du cours.