PeiP 1A/2C — Polytech Paris-Saclay
Mathématiques 2 — 2020–2021

Contrôle 2

durée : 1h30 – date : 11/03/2021

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Ce devoir comporte 1 page et est constitué de 6 exercices indépendants.
Toute réponse doit être *justifiée*. Le barème donné est *indicatif*.
Le soin apporté à la rédaction et aux dessins sera pris en compte.

Exercice 1. (4,5 points)

Soit le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ y - x \geq -1,\ y + x \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Représenter D et calculer son aire.
2. On suppose D homogène de densité 1, déterminer les coordonnées de son centre de gravité.

Exercice 2. (3,5 points)

On considère le domaine de $\mathbb{R}^3$ suivant : $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$.

1. Représenter le domaine D.
2. Déterminer un domaine $\Delta \subset \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi] \times [0,\pi]\}$ tel que l'application $(r,\theta,\varphi) \mapsto \big(r\sin(\varphi)\cos(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\varphi)\big)$ réalise une bijection de Δ sur D.
3. Calculer $\iiint_D z\,dxdydz$ par changement de variables en coordonnées sphériques. (*Indication.* On rappelle que le Jacobien de cette transformation est $J(r,\theta,\varphi) = r^2 \sin\varphi$.)

Exercice 3. (4 points)

Soit $\overrightarrow{u} = (0,1,2)$ et $\overrightarrow{v} = (1,2,5)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{P}$ le plan vectoriel qu'ils engendrent.

1. Trouver $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{P}$ soit défini par l'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle $\mathcal{P}_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ le plan défini par l'équation cartésienne $\lambda x + y - \lambda z = 0$. Trouver deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (pouvant dépendre de λ) qui engendrent $\mathcal{P}_\lambda$.
3. Pour quelles valeurs de λ, $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{P}$ est-elle une droite ? En donner un vecteur directeur.

Exercice 4. (3 points)

On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 3z & = & 2 \\ x & & & - & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & 6 \end{array}\right.$

1. Donner un système linéaire échelonné équivalent à $(\mathcal{S})$.
2. Sans les calculer, déterminer le nombre de solutions de $(\mathcal{S})$. (Justifier.)

Exercice 5. (3 points)

Utiliser l'algorithme de Gauss–Jordan pour résoudre le système $(\mathcal{S}')$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ 4x & - & 3y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$

Exercice 6. (4 points)

Pour tout réel m, on considère le système linéaire $(\mathcal{S}_m)$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & m \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$

1. Donner un système linéaire échelonné équivalent.
2. Préciser les inconnues principales et secondaires, ainsi que le rang du système obtenu.
3. Déterminer, suivant les valeurs de m, les solutions de $(\mathcal{S}_m)$.