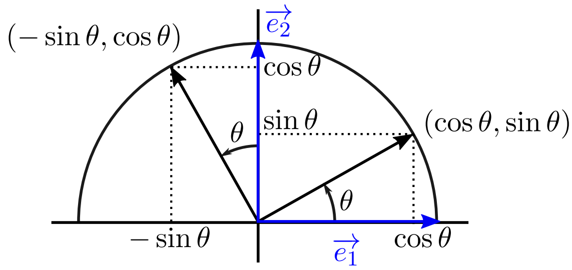
PeiP 1A/2C — Polytech Paris-Saclay
Mathématiques 2 — 2020–2021

Correction contrôle 3

durée : 1h30 – date : 15/04/2021

Exercice 1.

1. La rotation d'angle θ envoie les vecteurs de la base canonique respectivement sur les vecteurs $(\cos\theta, \sin\theta)$ et $\big(\cos(\theta+\frac{\pi}{2}), \sin(\theta+\frac{\pi}{2})\big) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. La matrice associée à R_θ dans les bases canoniques est donc, avec $\theta = \frac{2\pi}{3}$:
$$\mathrm{Mat}(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$



2. La composition de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ avec elle-même est la rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$, du fait de la forme générale des matrices de rotation rappelée ci-dessus, on obtient donc
$$\mathrm{Mat}(R_\theta \circ R_\theta) = \mathrm{Mat}(R_{\frac{4\pi}{3}}) = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$
Remarque. On pouvait aussi rappeler que la matrice de la composition est le produit des matrices et effectuer le produit de $\mathrm{Mat}(R_\theta)$ par elle-même.

3. On peut ici :
   - faire le calcul direct (ou avec la formule pour les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) de l'inverse,
   - argumenter que la réciproque de la rotation d'angle θ est la rotation d'angle $-\theta$.

   Comme $-\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - 2\pi$, il s'avère que
$$\mathrm{Mat}\big((R_\theta)^{-1}\big) = \mathrm{Mat}(R_{-\theta}) = \mathrm{Mat}(R_\theta \circ R_\theta) = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

4. La similitude $z \mapsto \lambda \cdot z$ avec $\lambda = \rho\, e^{i\theta}$ est la composition de l'homothétie de rapport ρ et de la rotation d'angle θ. Ici on obtient donc le nombre complexe $\boxed{\lambda = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Exercice 2.

1. Les images des vecteurs de la base canonique sont données par les colonnes de $A = \mathrm{Mat}(f)$, soit $\boxed{f(\overrightarrow{e_1}) = (2,1)}$ et $\boxed{f(\overrightarrow{e_2}) = (1,2)}$.

2. La formule du déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donne $\det(A) = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = \boxed{3}$. Comme il est non nul, A est inversible et f est un isomorphisme (en particulier, $\boxed{f \text{ est bijective}}$!).

3. (a) Si $x = 1$, nécessairement $y = 2$ pour que (x, y) soit élement de $\mathcal{D}$. Comme tout vecteur non nul de $\mathcal{D}$ l'engendre, $\mathcal{D}$ est engendrée par le vecteur $\boxed{\overrightarrow{u} = (1,2)}$.
   (b) L'image de $\overrightarrow{u}$ par f est le vecteur de coordonnées $(4,5)$ puisque $AU = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   L'image $f(\mathcal{D})$ est donc la droite engendrée par $\boxed{(4,5)}$ dont une équation est $\boxed{5x - 4y = 0}$.

4. La droite $\mathcal{D}'$ est engendrée par le vecteur $(1,-1)$ dont l'image par f est le vecteur $(1,-1)$. L'image de $\mathcal{D}'$ est donc la droite engendrée par $(1,-1)$ c'est-à-dire $\boxed{f(\mathcal{D}') = \mathcal{D}'}$ elle-même.

5. (a) Soit $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, l'équation $f(\overrightarrow{v}) = 3\overrightarrow{v}$ s'écrit
$$AV = 3V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 + v_2 = 3v_1 \\ v_1 + 2v_2 = 3v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$
   dont on déduit immédiatement que $\boxed{\overrightarrow{v} = (1,1)}$ convient.

(b) Par la question précédente, l'image de la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{v}$ est la droite vectorielle engendrée par $3\overrightarrow{v}$. Comme ces deux droites coïncident, la droite $\boxed{\mathrm{Vect}\big((1,1)\big)}$ dont une équation est $\boxed{x-y=0}$ est stabilisée par f.

Exercice 3.

1. Pour déterminer $A=\mathrm{Mat}(f)=\big(f(\overrightarrow{e_1})\,|\,f(\overrightarrow{e_2})\,|\,f(\overrightarrow{e_3})\big)$, il suffit de déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On détermine l'image de $\overrightarrow{e_1}$ par linéarité de f :
$$\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{2}\Big((\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_3})+(\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_3})\Big)\quad\Longrightarrow\quad f(\overrightarrow{e_1})=\frac{1}{2}\Big(f(\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_3})+f(\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_3})\Big)$$
ce qui donne $f(\overrightarrow{e_1})=\frac{1}{2}\big((1,1)+(-3,1)\big)=(-1,1)$.
On en déduit $f(\overrightarrow{e_3})$ puisque $\overrightarrow{e_3}=\frac{1}{2}\big((\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_3})-\overrightarrow{e_1}\big)$, on obtient $f(\overrightarrow{e_3})=\frac{1}{2}\big(f(\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_3})-f(\overrightarrow{e_1})\big)$ soit $f(\overrightarrow{e_3})=\frac{1}{2}\big((1,1)-(-1,1)\big)=(1,0)$.
La matrice associée à f dans les bases canoniques est donc : $\boxed{\mathrm{Mat}(f)=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&4&0\end{pmatrix}}$.

2. Au vu de la forme de $B=\mathrm{Mat}(g)$, g est une application linéaire $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$. On peut donc évidemment composer les applications f et g (dans n'importe quel ordre !). En particulier, on peut définir $\boxed{f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2}$.
3. Comme la matrice d'une composition est le produit des matrices,
$$\mathrm{Mat}(f\circ g)=\mathrm{Mat}(f)\cdot\mathrm{Mat}(g)=AB=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\1&2\\1&3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2&4\\5&11\end{pmatrix}}.$$

Exercice 4.

1. On échelonne la matrice A, augmentée en $\big(A\,|\,0\big)$, via la méthode du pivot de Gauss–Jordan :
$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&0\\1&2&k&0\\1&4&k^2&0\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&0\\0&\boxed{1}&k-1&0\\0&3&k^2-1&0\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&0\\0&\boxed{1}&k-1&0\\0&0&(k^2-1)-3(k-1)&0\end{array}\right)$$
Comme $(k^2-1)-3(k-1)=(k-1)\big((k+1)-3\big)=(k-1)(k-2)$, la matrice augmentée obtenue a (seulement) 2 pivots si $(k-1)(k-2)=0$ et 3 pivots sinon.
On conclut donc que $\boxed{\text{le rang de } A \text{ est égal à 2 si } k=1 \text{ ou } 2 \text{ et égal à 3 sinon}}$.
2. La famille $\mathcal{F}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ étant libre si et seulement si le rang de A est 3, $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\boxed{k\neq1 \text{ et } k\neq 2}$.
3. Quand $k=2$, le rang de A est 2 et A n'est donc ni surjective, ni injective.
• L'échelonnement fait à la première question montre que les colonnes 1 et 2 conduisent à des colonnes avec pivots. On en déduit directement que les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{u_1}=(1,1,1) \text{ et } \overrightarrow{u_2}=(1,2,4)}$ engendrent l'image de A.
Pour en déterminer une équation, on peut par exemple reprendre l'échelonnement précédent avec un second membre quelconque :
$$\big(A\,|\,Y\big)=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&y_1\\1&2&2&y_2\\1&4&4&y_3\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&y_1\\0&\boxed{1}&1&y_2-y_1\\0&3&3&y_3-y_1\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&y_1\\0&\boxed{1}&1&y_2-y_1\\0&0&0&y_3-3y_2+2y_1\end{array}\right)$$
L'équation $AX=Y$ a donc des solutions si et seulement si l'équation de compatibilité $y_3-3y_2+2y_1=0$ est satisfaite. Cela nous donne une équation de l'image : $\boxed{2x-3y+z=0}$.
• Pour déterminer le noyau de A, on peut de nouveau partir du premier échelonnement (avec $k=3$) que l'on réduit :
$$\big(A\,|\,0\big)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&\boxed{1}&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&0&0&0\\0&\boxed{1}&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$
L'inconnue secondaire z paramétrise donc l'ensemble des solutions qui sont les vecteurs de coordonnées $(0,-z,z)$ pour tout $z\in\mathbb{R}$. On en déduit donc que $\ker A$ est la droite engendrée par $\boxed{(0,1,-1)}$ ou, de manière équivalente, définie par le système $\boxed{\begin{cases}x=0\\y+z=0\end{cases}}$.

Remarque. L'image étant de dimension 2, le théorème du rang donne que le noyau est de dimension 1. Comme les deux dernières colonnes sont identiques, il est clair que le vecteur $(0, 1, -1)$ est dans le noyau de A et l'engendre donc.

4. On reprend (une dernière fois !) l'échelonnement initial, avec $k = 3$, où l'on a augmenté A par la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\left(A \,\middle|\, I_3\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On termine en réduisant à gauche :

$$\left(A \,\middle|\, I_3\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(I_3 \,\middle|\, A^{-1}\right)$$

On a donc prouvé que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.