Contrôle 3

durée : 1h30 – date : 15/04/2021

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Ce devoir comporte 1 page et est constitué de 4 exercices indépendants. Toute réponse doit être justifiée. Le barème donné est *indicatif*. Le soin apporté à la rédaction et aux dessins sera pris en compte.

Exercice 1. (3,5 points)

1. Dans $\mathbb{R}^2$, donner la matrice associée à la rotation R_θ d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ dans les bases canoniques.
2. Déterminer la matrice de l'application linéaire $R_\theta \circ R_\theta$.
3. Déterminer l'application linéaire réciproque $(R_\theta)^{-1}$ et donner sa matrice.
4. On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ et on considère R_θ comme la similitude $z \mapsto \lambda \cdot z$. Déterminer $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 2. (6 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice qui lui est associée dans les bases canoniques.

1. Donner l'image des vecteurs de la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$ par f.
2. Calculer le déterminant de A. L'application f est-elle bijective ?
3. On considère la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2x - y = 0$.
   (a) Déterminer un vecteur générateur de $\mathcal{D}$.
   (b) Donner un vecteur générateur et une équation de l'image de $\mathcal{D}$ par f.

On dit qu'une droite vectorielle $\mathcal{D}'$ est *stabilisée* par f si elle contient son image par f, i.e. $f(\mathcal{D}') \subset \mathcal{D}'$.

4. Montrer que la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $x + y = 0$ est stabilisée par f.
5. (a) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\overrightarrow{v}) = 3\overrightarrow{v}$.
   (b) En déduire une autre droite vectorielle stabilisée par f et en donner une équation.

Exercice 3. (3,5 points)

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $f(\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3}) = (1, 1)$, $f(\overrightarrow{e_2}) = (2, 4)$ et $f(\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_3}) = (-3, 1)$.

1. Déterminer la matrice A de f associée aux bases canoniques.

Soit g l'application linéaire dont la matrice associée dans les bases canoniques est $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Justifier l'existence de la composition $f \circ g$.
3. Déterminer la matrice associée à $f \circ g$ dans les bases canoniques.

Exercice 4. (7 points)

Soient k un nombre réel, $\overrightarrow{u_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1, 2, 4)$, $\overrightarrow{u_3} = (1, k, k^2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Discuter selon les valeurs de k le rang de la matrice $A = \left(\overrightarrow{u_1} \,\middle|\, \overrightarrow{u_2} \,\middle|\, \overrightarrow{u_3} \right)$ dont les colonnes sont les vecteurs $\overrightarrow{u_i}$.
2. En déduire les valeurs de k pour lesquelles la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est libre.
3. On suppose $k = 2$, déterminer le noyau et l'image de A : pour chacun de ces sous-espaces, donner vecteur(s) générateur(s) *et* (système d') équation(s).
4. On suppose maintenant $k = 3$, déterminer A^{-1}.