PeiP 1A/2C — Polytech Paris-Saclay
Mathématiques 2 — 2020–2021

Contrôle 4

durée : 1h30 – date : 20/05/2021

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Ce devoir comporte 3 pages et est constitué de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée. Le barème donné est *indicatif*.
Le soin apporté à la rédaction et aux dessins sera pris en compte.

Exercice 1. (5 points)
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques, où a, b et c sont des paramètres réels.

1. Déterminer la dimension de l'image de f en fonction de la valeur c.
2. En utilisant le théorème du rang (à énoncer proprement), déterminer la dimension du noyau de f en fonction de c.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de c l'application f est-elle surjective ? injective ?
4. Déterminer des constantes a, b et c telles que $(3, 2, 1, 0)$ engendre le noyau de f.

Exercice 2. (5 points)
On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

- $E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ avec $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, -3, 4)$, $\overrightarrow{u_2} = (-1, 0, 3, 0)$ et $\overrightarrow{u_3} = (0, 1, 0, 2)$.
- $F_a = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z = 0 \text{ et } t = ay\}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la dimension et une base de E.
2. Déterminer la dimension et une base de F en fonction du paramètre a.
3. On suppose que $a = 3$, montrer que E et F_3 sont supplémentaires.
4. Pour $a = 2$, déterminer l'intersection $E \cap F_2$.

Exercice 3. (5 points)
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, 1)$ et $\overrightarrow{u_3} = (-1, 1, 1)$. Soient $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}$, puis la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_3$.
3. Déterminer les coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{B}$ du vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}_3$.
4. Déterminer une équation cartésienne du plan $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3})$ dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{B}_3$.

Exercice 4. (7 points)
Soit f l'application linéaire associée, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, à la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2, la matrice associée à $f \circ f$.
2. Montrer que la matrice associée à $f \circ f \circ f$ est nulle.
3. Déterminer la dimension et donner une base de $\ker(f \circ f)$.
4. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f \circ f(\overrightarrow{x}) \neq 0$.
5. Montrer que la famille $\big(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), f \circ f(\overrightarrow{x})\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Sans calcul, donner l'expression de la matrice de f dans cette nouvelle base.