Feuille d'exercices n°4

Matrices et applications linéaires

Exercice 1 - *Exemples d'applications linéaires du plan.*

Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler l'expression de $f(\overrightarrow{v})$ où f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice A dans la base canonique.

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le triangle T de sommets les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$.

2. Déterminer l'image de T, par les applications linéaires associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $\lambda = a + ib = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ et f_λ la similitude directe $f_\lambda : z = x + iy \mapsto \lambda z$. On considère f_λ comme une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même : donner l'expression de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ en fonction de a et b, puis en fonction de r et θ.

4. Spécifier, parmi les matrices A à J de la question **2.**, lesquelles sont de ce type (et déterminer λ).

Exercice 2 - *Application linéaire associée à une matrice.*

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on note respectivement par f et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires associées à $X \mapsto AX$ et $X \mapsto BX$ (X écrit en colonne) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

1. Sans calcul, déterminer les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1})$, $f(\overrightarrow{e_2})$, $f(\overrightarrow{e_3})$.

2. Calculer $f(x, y, z)$ de deux manières « différentes » :

(i) en utilisant que $(x, y, z) = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ et la linéarité de f ;

(ii) par calcul direct de AX.

3. Déterminer la matrice de l'application linéaire $f - 3g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 - $\mathbb{R}$ *comme espace vectoriel (de dimension* 1*).*

1. Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $x \mapsto (x, 2x, 3x)$ est une application linéaire et déterminer sa matrice dans les bases canoniques correspondantes.

2. Même question avec l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$.

3. Plus généralement, on rappelle (ou on définit) que le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \,.$$

On fixe un vecteur $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$, déterminer la matrice de l'application linéaire $S_{\overrightarrow{a}} : \overrightarrow{v} \mapsto \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{v} \rangle$.

4. L'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ est-elle linéaire ?

Exercice 4 - *Une application linéaire utile.*

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = \big(-\frac{x}{2} + y, -\frac{x}{2} + z \big)$.

1. Donner la matrice de f quand on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques respectives.

2. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'image par f des trois axes $(0x)$, $(0y)$ et $(0z)$ de $\mathbb{R}^3$, l'image des arêtes du cube $C = [0, 1]^3$ de $\mathbb{R}^3$, l'image d'une figure quelconque située dans un plan vertical $x = c$.

3. Quelle est l'utilité de cette application f ?

4. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.

Exercice 5 - *Produit vectoriel dans* $\mathbb{R}^3$.

Soient $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que le produit vectoriel de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est le vecteur

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. On fixe $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ et on considère l'application $V_{\overrightarrow{a}} : \overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{v}$. Montrer $V_{\overrightarrow{a}}$ est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.

2. On suppose que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1}$, déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ tels que $V_{\overrightarrow{e_1}}(\overrightarrow{v}) = 0$.

3. Même question avec $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3)$.

4. Pour un vecteur $\overrightarrow{a}$ quelconque, montrer que tous les points $\overrightarrow{v}$ de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\overrightarrow{a}$ vérifient $V_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{v}) = 0$.

Exercice 6 - *Produit de matrices.*

1. Calculer, lorsque cela est possible, le produit AB, pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les carrés de toutes les matrices de la question **2.** de l'**Exercice 1**. Interpréter géométriquement les résultats lorsque c'est possible.

3. Montrer que *si des matrices* A *et* B *commutent*, i.e si $AB = BA$, alors $(AB)^2 = A^2 B^2$. (C'est par exemple le cas des matrices B et I de la question **2.** de l'**Exercice 1**.)

4. Considérer l'exemple des matrices E et G de la question **2.** de l'**Exercice 1**.

Exercice 7 - *Projections orthogonales et symétries axiales dans* $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^2$, on note R_θ la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et (D_θ) la droite engendrée par $\overrightarrow{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$.

1. Soit P_θ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur (D_θ). Montrer (avec des arguments géométriques) que $P_\theta = R_\theta \circ P_0 \circ R_{-\theta}$. ($P_0$ est la projection orthogonale sur $(D_0) = (Ox)$!)

2. En déduire la matrice de P_θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3. Vérifier qu'un vecteur de (D_θ) est bien laissé invariant par P_θ.

4. Soit S_θ la symétrie d'axe (D_θ). Comme en question **1.** ci-dessus, montrer que $S_\theta = R_\theta \circ S_0 \circ R_{-\theta}$ où S_0 est la symétrie d'axe (Ox).

5. En déduire la matrice de S_θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

6. Vérifier que pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$, $P_\theta(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} + S_\theta(\overrightarrow{v}))$. Interpréter ce fait géométriquement.

Exercice 8 - *Matrice associée à un système linéaire.*

Pour $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3)$ donné, on considère le système linéaire

$$(S_y)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = y_2 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = y_3 \end{cases}.$$

1. Déterminer la matrice A tel que (S_y) soit équivalent à l'équation $AX = Y$ (pour X et Y vecteurs colonnes correspondant à $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$).

2. Déterminer le rang de A ; est-elle inversible ?

Exercice 9 - *Matrices inversibles (ou pas).*

Décider si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 - *Inverse à gauche.*

Soient $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer BA. En déduire que si $AX = Y$ alors $X = BY$.

2. Peut-on en déduire que A est inversible ?