

Feuille d'exercices n°5
SOUS-ESPACES VECTORIELS, BASE, DIMENSION

Exercice 1 - *Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .*

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?
 - a. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = 0\}$,
 - b. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$,
 - c. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x - 2y + z = 0\}$,
 - d. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\}$.
2. Soient E et F des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n (pour un entier $n \geq 1$).
 - a. Montrer que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
 - b. Montrer qu'en général $E \cup F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
 - c. On définit $E + F$ comme l'ensemble des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ pour tout $\vec{u} \in E$ et tout $\vec{v} \in F$. Montrer que $E + F$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
 - d. Montrer que $E + E = E$.

Exercice 2 - *Noyau et image d'une application linéaire.*

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. En résolvant des systèmes linéaires pertinents, déterminer le noyau et l'image de f . On en donnera une équation (ou un système d'équations) cartésienne(s) et une famille génératrice.
2. L'application f est-elle injective? surjective?
3. Mêmes questions avec $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de matrice associée $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 - *Composition d'applications linéaires.*

Soient des applications linéaires $f : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

1. Montrer que $\ker g \subset \ker(f \circ g)$ et que $\text{im}(f \circ g) \subset \text{im} f$.
2. On considère les applications f et g de l'**Exercice 2**. Montrer (sans calculs) que $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont ni injectives, ni surjectives.
3. On suppose que $f \circ f = 0$. Quelle relation y a-t-il entre $\ker f$ et $\text{im} f$?

Exercice 4 - *Construction d'exemples.*

Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :

1. son image est la droite engendrée par le vecteur $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$.
2. $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est stable par f et son noyau est la droite engendrée par $\vec{v}_2 = (1, -1, 1)$.

Exercice 5 - Famille libre ou liée.

Soient $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (4, 1, 4)$ et $\vec{v}_3 = (2, -1, 4)$.

1. Vérifier que \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour \vec{v}_2 et \vec{v}_3 , ainsi que pour \vec{v}_1 et \vec{v}_3 .
2. La famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ? Sinon, donner une relation de dépendance linéaire.

Exercice 6 - Multiplication par i .

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $f \circ f = -\text{Id}$.

1. Donnez un exemple d'une telle application.
2. Montrer que f est injective et surjective.
3. Soit \vec{u} un vecteur non nul de \mathbb{R}^2 . Montrer que la famille $B = (\vec{u}, f(\vec{u}))$ est libre.

Exercice 7 - Coordonnées dans une base.

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 .
2. Calculer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$ dans cette base.

Exercice 8 - Extraction de base d'un système générateur.

Dans \mathbb{R}^4 , on considère $\vec{v}_1 = (1, -1, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 2, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 3, 1)$ et $\vec{v}_4 = (2, 0, 5, 1)$.

1. La famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est-elle libre ? Quel est son rang ?
2. Soit $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$. Déterminer la dimension de E et extraire de \mathcal{F} une base de E .

Exercice 9 - Base incomplète.

1. Soient $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$ et $\vec{v}_2 = (-1, 2, 1)$. Compléter la famille libre (\vec{v}_1, \vec{v}_2) en une base de \mathbb{R}^3 .
2. Même question avec $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$ et $\vec{v}_2 = (2, 2, -1)$.

Exercice 10 - Dimension et base d'un sev défini par un système d'équations.

1. Déterminer la dimension et donner une base du sev de \mathbb{R}^4 défini par

$$E = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z - 4t = 0 \}.$$

2. Même question avec

$$F = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + 2t = 0 = -2x - 4y + z - t \}.$$

Exercice 11 - Dimension et égalité d'espaces.

On considère les deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par

$$E = \text{Vect}((-1, 3, 2), (-2, -1, 1), (1, 4, 1)) \text{ et } F = \text{Vect}((0, 7, 3), (-7, 0, 5)).$$

Montrer qu'ils ont même dimension, puis qu'ils sont égaux.

Exercice 12 - Détermination d'un supplémentaire.

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 2y - z + t = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

1. Déterminer la dimension et une base de E .
2. Donner un supplémentaire de E .
3. Mêmes questions avec $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z + 2t = x + y + 2z + t = y + z + t = 0\}$.

Exercice 13 - Somme de sous-espaces vectoriels.

Pour a réel donné, on considère dans \mathbb{R}^4 les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = x - y + t = 0 \},$$

et $F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ avec $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$ et $\vec{v}_2 = (0, a, 0, 1)$.

1. Déterminer une base de E .
2. Pour quelles valeurs de a a-t-on $E \cap F = \{0\}$?
3. Pour quelles valeurs de a les espaces E et F sont-ils supplémentaires ?
4. Donner une base de $E + F$.

Exercice 14 - Somme de deux espaces - suite.

On considère les deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 :

$$E = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z + t = 0 \} \text{ et } F = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } z = 2t \}.$$

1. Déterminer la dimension et une base de E et F .
2. Trouver la dimension et une base de $E \cap F$.
3. Que peut-on dire de $E + F$? La somme est-elle directe ?

Exercice 15 - Théorème du rang.

Vérifier le théorème du rang sur les applications linéaires f et g de l'**Exercice 2**.

Exercice 16 - Théorème du rang, supplémentaire du noyau et isomorphisme induit.

Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le rang de f et une base de $\text{im } f$. Quelle est la dimension de $\ker f$?
2. Donner une équation cartésienne de l'image de f . Quelle est la structure de l'ensemble des antécédents de $(1, 1, -2)$ par f ?
3. Soit $E = \text{Vect}(\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0))$. Montrer que $E \oplus \ker f = \mathbb{R}^4$ et que $f(E) = \text{im } f$.
4. En déduire que tout $\vec{v} \in \text{im } f$ admet un *unique* antécédent $\vec{u} \in E$ par f . Le déterminer pour $\vec{v} = (1, 1, -2)$.

Exercice 17 - Exemples de projections et de symétries dans \mathbb{R}^3 .

Dans \mathbb{R}^3 , on considère le plan P d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite $\text{Vect}(1, 1, -1)$.

1. Déterminer une base de P et montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Décomposer tout $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sous la forme $\vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in P$ et $\vec{w} \in D$.
3. En déduire les coordonnées de $p_{P/D}(x, y, z)$, l'image de (x, y, z) par la projection de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D ; en déduire la matrice de $p_{P/D}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
4. Mêmes questions pour $p_{D/P}$, la projection de \mathbb{R}^3 sur D parallèlement à P .
5. Mêmes questions pour la symétrie $s_{P/D}$ de \mathbb{R}^3 par rapport à P et de direction D , puis pour $s_{D/P}$.
6. Retrouver ces expressions grâce aux formules du cours.