

Feuille d'exercices n°6

APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES : CHANGEMENTS DE BASE

Exercice 1 - *Différentes matrices d'une même application linéaire.*

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + 2z).$$

1. f est-elle une application linéaire ?
2. Donner la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ quand on munit \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 de leur base canonique \mathcal{B}_3 et \mathcal{B}_2 .
3. Montrer qu'il existe des vecteurs $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, \vec{v}_2 , \vec{v}_3 de \mathbb{R}^3 tels que $f(\vec{v}_1) = (0, 0)$, $f(\vec{v}_2) = (1, 0)$ et $f(\vec{v}_3) = (0, 1)$.
4. Vérifier que $\mathcal{B}'_3 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 , puis déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}_2}(f)$.
5. Vérifier que $\mathcal{B}'_2 = ((1, 1), (1, -1))$ est une base de \mathbb{R}^2 , puis déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}'_2}(f)$.

Exercice 2 - *Application linéaire déterminée par l'image d'une base.*

Dans \mathbb{R}^2 , on considère les deux vecteurs $\vec{v}_1 = (2, 1)$ et $\vec{v}_2 = (1, 1)$.

1. Vérifiez que $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 , et déterminer les coordonnées de $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$ dans la base \mathcal{B} .
- Soit p l'unique application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $p(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ et $p(\vec{v}_2) = \vec{0}$.
2. Quelle est la matrice M de p dans la base \mathcal{B} ? Que représente géométriquement p ? Déterminer $p \circ p$ et M^2 ?
3. Calculer $p(\vec{e}_1)$ et $p(\vec{e}_2)$ à l'aide de la question 1. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $\mathcal{B}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Que vaut N^2 ?
4. Retrouver directement N à l'aide d'une formule du cours.

Exercice 3 - *Isomorphismes de \mathbb{R}^n .*

Soient $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ une base de \mathbb{R}^n et $\mathcal{F}' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_n)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $f(\vec{v}_i) = \vec{v}'_i$ pour tout i entre 1 et n .

1. Montrer que f est bijective si et seulement si \mathcal{F}' est une base de \mathbb{R}^n .
2. Dans ce cas, déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}'}(f)$ la matrice de f dans les bases \mathcal{B} , \mathcal{F}' .
- On se place dans \mathbb{R}^2 où l'on considère la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et la famille $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ où $\vec{v}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\vec{v}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$.
3. Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^2 .
4. Soit \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^2 dont les composantes (i.e. ses coordonnées dans la base canonique) sont (x, y) . Calculer ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 4 - *Matrice de passage et équations cartésiennes.*

On note $\mathcal{B}_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1 = (-1, 2, 3), \vec{u}_2 = (1, -1, 1), \vec{u}_3 = (-1, 1, -2))$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'}$ de \mathcal{B}_3 à \mathcal{B}' .

2. Soit $\vec{u} = x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + z'\vec{u}_3 = (x', y', z')_{\mathcal{B}'}$. Quel calcul matriciel permet de déterminer les composantes x, y, z de \vec{u} dans la base canonique ?
3. Inversement, si $\vec{u} = (x, y, z)$, exprimer les coordonnées de \vec{u} dans la base \mathcal{B}' .
4. À quelle condition sur x', y', z' le vecteur $\vec{u} = (x', y', z')_{\mathcal{B}'}$ appartient-il à $P = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$? En déduire une équation cartésienne de P dans la base canonique.
5. Donner une équation cartésienne de $E = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 5 - Suite : Changement de base et applications linéaires.

On travaille toujours dans \mathbb{R}^3 avec les bases \mathcal{B}_3 et \mathcal{B}' de l'Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice dans \mathcal{B}_3 d'une application linéaire f .

1. Exprimer $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ en fonction de A et $P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'}$.
2. Déterminer A' et expliquer la signification géométrique de f .
Indication. On pourra utiliser la question 1. ou déterminer A' directement grâce à sa définition.
3. Calculer $(A')^2$ et en déduire A^2 . Quelle relation satisfaite par f cela traduit-il ?

Exercice 6 - Généralisation : Une caractérisation des projections.

On suppose que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ et on considère la projection $p = p_{E/F}$ sur E parallèlement à F .

1. Rappeler la définition de p et montrer que

$$(a) E = \text{im } p = \ker(p - \text{Id}), \quad (b) F = \ker p, \quad (c) p \circ p = p.$$

2. Soient \mathcal{B} une base *quelconque* de \mathbb{R}^n et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ la matrice de p dans \mathcal{B} . Montrer que $P^2 = P$.

Inversement, on suppose qu'un endomorphisme $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait $p^2 = p$. On veut montrer que p est la projection sur $E = \ker(p - \text{Id})$ parallèlement à $F = \ker p$.

3. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, montrer que $p(\vec{v}) \in E$ et $\vec{v} - p(\vec{v}) \in F$.
4. En déduire que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ en remarquant que $\vec{v} = p(\vec{v}) + (\vec{v} - p(\vec{v}))$ et conclure quant à la nature de p .
5. *Exemple* : montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projection.
6. Déterminer $\text{im } P$ et $\ker P$.

Finalement on veut calculer la trace d'une projection. (On rappelle que la *trace* d'une matrice carrée $M \in M_n(\mathbb{R})$ est la somme de ses coefficients diagonaux.) On suppose que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$.

7. Soient \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F des bases respectives de E et F . Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$ est une base de \mathbb{R}^n .
8. Déterminer la matrice dans \mathcal{B} de la projection p sur E parallèlement à F .
9. En déduire la trace de p .
10. En déduire les dimensions de l'image et du noyau de Q .

Exercice 7 - Propriété d'application linéaire.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X \mapsto AX$ associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de f et une base de $\text{im } f$. En déduire $\dim(\ker f)$.
2. Donner une base de $\ker f$. Les espaces $\ker f$ et $\text{im } f$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?
3. Calculer $f(1, -2, -1)$.
4. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f s'écrit $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. En déduire que $A^n = 2^{n-1}A$.

Exercice 8 - Les symétries.

On suppose que E et F sont deux sous-espaces supplémentaires de \mathbb{R}^n .

1. Rappeler la définition de la symétrie par rapport à E dans la direction de F .
2. Montrer que $s \circ s = \text{Id}$.
3. Soit $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ la matrice de s dans une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n : calculer S^2 .
4. Montrer que S est inversible et déterminer son inverse.

On rappelle que la trace d'une matrice carrée $M \in M_n(\mathbb{R})$ est la somme de ses coefficients diagonaux.

5. Soient A et B des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et λ un réel. Montrer que $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$.
6. Dédire de ceci et de la question **9** de l'**Exercice 6** la trace de S .
7. Retrouver (sans détail) ce résultat en vous inspirant des questions **7–9** de l'**Exercice 6**.

Exercice 9 - Diagonalisation et puissances d'une matrice 2×2 .

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $f_\lambda = f - \lambda \text{Id}$, et on note A_λ sa matrice dans la base canonique.

1. Exprimer A_λ et son déterminant, $P(\lambda) = \det(A_\lambda)$, en fonction de λ .

Remarque. Le déterminant des matrices 2×2 est bien au programme.

2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application f_λ est-elle un isomorphisme ?

3. *Sans les calculer explicitement*, déduire de la question **2** qu'il existe deux vecteurs \vec{v}_2 et \vec{v}_3 non nuls tels que $f(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$ et $f(\vec{v}_3) = 3\vec{v}_3$.

4. Montrer que la famille (\vec{v}_2, \vec{v}_3) est libre.

Indication. Montrer que si $a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ alors $2a_2\vec{v}_2 + 3a_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ et donc que $a_2 = a_3 = 0$.

5. En déduire qu'il existe une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, et qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}A'P$.

6. Montrer que $A^n = P^{-1}(A')^n P$ pour tout entier n et en déduire un calcul (efficace) de A^{2021} .