Contrôle 2

durée : 1h30 – date : 25/02/2022

Exercice 1. (6 points)

1. Toute paire de vecteurs non-colinéaires engendrent un plan. On montre donc d'abord que les vecteurs appartiennent effectivement à $\mathcal{P}$, en vérifiant que leurs coordonnées satisfont les équations le définissant : $\begin{cases} 1-1+0=0 \\ -1+0+1=0 \end{cases}$ montre que $(1,-1,0,1) \in \mathcal{P}$ et $\begin{cases} -1+1=0 \\ -1+1=0 \end{cases}$ que $(0,-1,1,0) \in \mathcal{P}$.

Ensuite, on montre que les vecteurs forment une famille libre :

$$\alpha \cdot (1,-1,0,1) + \beta \cdot (0,-1,1,0) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (\alpha, -\alpha-\beta, \beta, \alpha) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0\,.$$

Remarque. *On aurait aussi pu les mettre en colonne dans une matrice et voir que celle-ci est échelonnée avec deux pivots. L'espace enegendré par ces deux vecteurs est donc de dimension 2, c'est bien un plan. (Technique du chapitre 4 qui n'était pas au programme du contrôle 2.)*

2. De nouveau, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_\lambda}$ ne sont pas colinéaires. Or

$$\alpha \cdot (0,1,0,-1) + \beta \cdot (1,0,-1,\lambda) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (\beta, \alpha, -\beta, -\alpha+\beta\lambda) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0\,.$$

3. Un vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathcal{P}_\lambda$ si et seulement s'il est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u} = (0,1,0,-1)$ et $\overrightarrow{v_\lambda} = (1,0,-1,\lambda)$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe α et β réels tels que

$$\overrightarrow{w} = \alpha \cdot \overrightarrow{u} + \beta \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot (0,1,0,-1) + \beta \cdot (1,0,-1,\lambda) = (\beta, \alpha, -\beta, -\alpha+\beta\lambda)\,.$$

On en déduit que $\overrightarrow{w} = (x,y,z,t) \in \mathcal{P}_\lambda$ si et seulement s'il existe α et β tels que ($x = \beta$, $y = \alpha$ et) $z = -\beta = -x$ et $t = -\alpha + \beta\lambda = \lambda x - y$.

4. Un point est dans l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ si et seulement s'il appartient à $\mathcal{P}$ **et** à $\mathcal{P}_\lambda$, ou encore si et seulement s'il vérifie les équations définissant $\mathcal{P}$ **et** celles définissant $\mathcal{P}_\lambda$. Au vu de la la définition de $\mathcal{P}$ et de la question **3.**, on obtient bien le système $(\mathcal{S}_\lambda)$.

5. Pour calculer le rang de $(\mathcal{S}_\lambda)$, on échelonne le système via l'algorithme de Gauss–Jordan. Il est plus efficace de le faire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\lambda) & -\lambda & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Comme le rang d'un système est le nombre de pivots de la matrice échelonnée équivalente obtenue, on conclut que $\operatorname{rang}(\mathcal{S}_\lambda) = 3$ si $\lambda = 1$ (puisque dans ce cas $\lambda - 1 = 0$) et 4 si $\lambda \neq 1$.

Remarque. *À l'étape 1, l'algorithme suggère de faire ($L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et) $L_4 \leftarrow L_4 - \lambda L_1$ qui est bien une opération élémentaire autorisée quelle que soit la valeur de λ. (Simplement, si $\lambda = 0$, on n'a rien fait ...) Idem pour l'étape 2 où l'on fait $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + (1+\lambda)L_2$.*

6. Quand $\lambda \neq 1$, le rang de $(\mathcal{S}_\lambda)$ est 4 qui est égal à aux nombres d'équations et d'inconnues. Autrement dit, $(\mathcal{S}_\lambda)$ est équivalent à un système de Cramer et a donc une unique solution (quel que soit le membre de droite !). Comme $(\mathcal{S}_\lambda)$ est homogène, $(0,0,0,0)$ est solution et c'est donc l'unique solution. Ceci montre que lorsque $\lambda \neq 1$, l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ est réduite au vecteur nul, $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_\lambda = \{(0,0,0,0)\}$.

Exercice 2. (4 points)

1. Pour obtenir l'image de (x,y,z) par l'application linéaire f dont on connaît la matrice dans les bases canoniques, il suffit de calculer $\operatorname{Mat}(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix}$. On en déduit que f est définie par la formule $f(x,y,z) = (x+2y-z, 2x+2y-z)$.

2. Pour déterminer la matrice de g dans la base canonique, on détermine l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par g. Or $g(\overrightarrow{e_1}) = g(1,0) = (1+0, -1-0, 0) = (1,-1,0)$ et $g(\overrightarrow{e_2}) = g(0,1) = (0+1, -0-1, -1) = (1,-1,-1)$. On en déduit $\operatorname{Mat}(g) = \left(g(\overrightarrow{e_1}) \mid g(\overrightarrow{e_2}) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. On peut par exemple utiliser le fait que la matrice de la composée d'applications linéaires et le produit des matrices : $\mathrm{Mat}(f \circ g) = \mathrm{Mat}(f) \cdot \mathrm{Mat}(g)$. Il suffit donc de calculer

$$\mathrm{Mat}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1-2+1 \\ 2-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. L'application $f \circ g$ envoie (x, y) sur le vecteur $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Il s'agit donc de la symétrie (orthogonale) d'axe (Oy).

Exercice 3. (5,5 points)

1. On applique l'algorithme de Gauss–Jordan :

$$(\mathcal{S}_m) : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_2 - 6x_3 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = m+6 \end{cases}$$

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = m+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ 0 = m+5 \end{cases}$$

Remarque. *L'étape $\overset{*}{\Leftrightarrow}$, où l'on a simplement remplacé L_2 par $\frac{1}{3}L_2$, n'est pas suggérée par l'algorithme mais simplifie les calculs.*

L'équation $0 = m + 5$ est la seule équation de compatibilité. On en déduit :

- Si $m \neq -5$, l'équation de compatibilité n'est pas satisfaite et $(\mathcal{S}_m)$ n'admet aucune solution,
- Si $m = -5$ toute les équations de compatibilité sont satisfaites et $(\mathcal{S}_m)$ admet des solutions.

Dans ce second cas, on peut compléter l'algorithme, en « remontant » :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \end{cases}$$

On a passé la variable secondaire dans le membre de droite puisque cette inconnue paramétrise l'ensemble des solutions. On conclut : $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}_{-5}) = \{(x_3, 1 + 2x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$.

2. Le système (S_m) est associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, son rang est celui du système initial (quel que soit le membre de droite). Or on a déterminé à la question précédente qu'il était équivalent à un système échelonné avec deux pivots. Le rang de A est donc 2.

3. Il suffit de calculer $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2-3 \\ 1-1+3 \\ 3+5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou encore $f(1, -1, -1) = (0, 3, 1)$.

4. Il y en a beaucoup mais la question **1.** montre que tout vecteur du type $(-2, 1, m)$ avec $m \neq 5$ convient. Par exemple, $(-2, 1, 2022)$.

5. Comme f est linéaire, $f(\vec{u}) = (4, -2, 10) = -2\,(-2, 1, -5)$ si et seulement si $f(-\frac{1}{2}\vec{u}) = -\frac{1}{2}(4, -2, 10) = (-2, 1, -5)$. Donc $\vec{u}$ est un antécédent de $(4, -2, 10)$ si et seulement si $\frac{1}{2}\vec{u}$ est une solution de $(\mathcal{S}_{-5})$. On déduit alors de la question **1.** l'ensemble des antécédents recherché, $\{-2\,(x_3, 1 + 2x_3, x_3) = (-2x_3, -2 - 4x_3, -2x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Remarque. *Il y avait une erreur dans l'énoncé initial (corrigée pendant l'épreuve), où l'on demandait initialement les antécédents de $(4, -2, -10)$.*

Exercice 4. (4,5 points)

Remarque. *Répondre à la question **3.** d'abord permettait de répondre à **1.** et **2.** sans calcul...*

1. Comme il faut calculer l'inverse de A, on applique la méthode générale : on forme la matrice $\left(A \,\middle|\, \mathrm{Id} \right)$ et on applique l'algorithme de Gauss–Jordan complet (en descendant *puis* remontant) pour obtenir $\left(\mathrm{Id} \,\middle|\, A^{-1} \right)$. Pour se faciliter la vie, on commence par intervertir L_1 et L_2 :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \sqrt{3} & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \sqrt{3} & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 1 & \sqrt{3} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{array}\right).$$

Le $\boxed{4}$ vient de l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{3}L_1$ car $1 + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1 + 3 = 4$. L'opération suivante consiste juste en faire apparaître des 1 au niveau des pivots.

REMARQUE. *On pouvait aussi appliquer les formules connues pour les matrices carrées de* $M_2(\mathbb{R})$ *:* $\det(A) = \sqrt{3} \times \sqrt{3} - (-1) \times 1 = 3 + 1 = 4 \neq 0$ *et donc* A *est bien inversible. L'inverse est alors donnée par* $\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$.

2. Comme rappelé par l'énoncé un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient au cercle de centre 0 et de rayon r si et seulement si ses coordonnées satisfont $x^2 + y^2 = r^2$. On prend un tel point et on calcule son image par f, dont les coordonnées sont données par $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,x+y \\ -x+\sqrt{3}\,y \end{pmatrix}$.

Pour montrer que ce point appartient à un cercle de centre 0, on calcule alors la somme des carrés de ses coordonnées :

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}\,x + y)^2 + (-x + \sqrt{3}\,y)^2 &= (3x^2 + \cancel{2\sqrt{3}\,xy} + y^2) + (x^2 - \cancel{2\sqrt{3}\,xy} + 3y^2) \\ &= 4x^2 + 4y^2 = 4\,(x^2 + y^2) = 4\,r^2 = (2\,r)^2\,.\end{aligned}$$

On en déduit que l'image d'un point du cercle de centre 0 de rayon r est un point du cercle de centre 0 et de rayon $2r$.

3. La matrice de rotation d'angle θ a pour matrice dans les bases canniques $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et donc $c \cdot R_\theta = \begin{pmatrix} c\cos\theta & -c\sin\theta \\ c\sin\theta & c\cos\theta \end{pmatrix}$. On cherche donc θ et c tels que $\frac{\sqrt{3}}{c} = \cos\theta$ et $-\frac{1}{c} = \sin\theta$.

Comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on trouve que $\frac{3}{c^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{4}{c^2} = 1$ et donc $c = 2$. On en déduit que $\theta = -\frac{\pi}{6}$ puisque $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

REMARQUE. *La question* ***2.*** *permet de conclure immédiatement que* $c = 2$ *puisqu'une rotation envoie un cercle de rayon* r *sur un cercle de rayon* r*. Il suffisait donc de se souvenir des valeurs de* $\cos$ *et* $\sin$ *de* $-\frac{\pi}{6}$.