Contrôle 2

DURÉE : 1H30 – DATE : 07/04/2022

Ce devoir comporte 1 page et est constitué de 4 exercices indépendants.

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Toute réponse doit être *justifiée*. Le barème donné est *indicatif*.

Exercice 1. (6 points)

Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^4$ déterminé par le système : $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ \phantom{x+{}} y+z+t = 0 \end{cases}$

1. Montrer que les vecteurs $(1,-1,0,1)$ et $(0,-1,1,0)$ engendrent $\mathcal{P}$.

2. Soient $\overrightarrow{u} = (0,1,0,-1)$ et $\overrightarrow{v_\lambda} = (1,0,-1,\lambda)$ où λ est un paramètre réel. Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{P}_\lambda$ engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_\lambda}$ est un plan de $\mathbb{R}^4$.

3. Soit $\overrightarrow{w} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, montrer que $\overrightarrow{w} \in \mathcal{P}_\lambda$ si et seulement si $z=-x$ et $t = \lambda x - y$.

4. En déduire que l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_\lambda$ est déterminée par le système $(\mathcal{S}_\lambda)$: $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ y+z+t = 0 \\ x+z = 0 \\ \lambda x - y - t = 0 \end{cases}$

5. Calculer le rang de $(\mathcal{S}_\lambda)$ en fonction de λ.

6. Sans résoudre (S_λ), déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_\lambda$ quand $\lambda \neq 1$.

Exercice 2. (4 points)

On considère les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par la formule $g(x,y) = (x+y, -x-y, -y)$.

1. Donner une formule pour $f(x,y,z)$ définissant f.

2. Déterminer la matrice de g dans les bases canoniques.

3. Déterminer la matrice de $f \circ g$ dans les bases canoniques.

4. Caractériser géométriquement l'application $f \circ g$.

↑ Rédigez sur des copies différentes ↓

Exercice 3. (5,5 points)

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire $(\mathcal{S}_m)$: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = m \end{cases}$

1. Résoudre $(\mathcal{S}_m)$ en fonction de m.

2. Donner la matrice A associée au (membre de gauche du) système $(\mathcal{S}_m)$ et spécifier son rang.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer l'image par f du vecteur $(1,-1,-1) \in \mathbb{R}^3$.

4. Donner un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas dans l'image de f.

5. Déduire de la question **1.**, les antécédents du vecteur $(4,-2,10)$ par f.

Exercice 4. (4,5 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

On rappelle que le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r est décrit par l'équation $x^2+y^2=r^2$.

2. Montrer que f envoie le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r dans un cercle de centre $(0,0)$ dont on déterminera le rayon en fonction de r.

3. Déterminer un angle θ et une constante réelle c tels que $A = c \cdot R_\theta$ où R_θ est la matrice de rotation de centre $(0,0)$ et d'angle θ dans les bases canoniques.