

Feuille d'exercices n°1
INTÉGRALES SIMPLES (RAPPELS) ET DOUBLES (INTRODUCTION)

Exercice 1 - Échauffement.

1. Soient f et g des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} . Exprimer les dérivées de $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$.
2. Rappeler les domaines de définition, les images, puis dériver les fonctions \cos , \sin , \tan , \ln , \exp .
3. Même question avec les fonctions \arccos , \arcsin , \arctan .

Exercice 2 - Intégrales simples : révisions de méthodes de calculs.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la méthode suggérée.

1. $\int_0^\pi x \sin(x) dx$, à l'aide d'une intégration par parties.
2. $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$, à l'aide du changement de variables $x = \ln(u)$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$, à l'aide du changement de variable $u(x) = \cos x$.
4. $\int_0^1 \frac{4}{x^2 - 4} dx$, à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

Exercice 3 - Détermination de primitives.

1. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de chacune des fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{x-7}, \quad g : x \mapsto \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right), \quad h_a : x \mapsto \ln(x-a) \text{ (pour } a \in \mathbb{R} \text{ et } x > a).$$

2. Dériver la fonction $x \mapsto \ln(\cos x)$. En déduire (toutes) les primitives de la fonction tangente.
3. Déterminer (toutes) les primitives des fonctions :

$$f : x \mapsto xe^x, \quad g : x \mapsto \ln(1+x^2), \quad h_\alpha : x \mapsto x^\alpha \text{ (pour } x > 0, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 4 - Intégrale et aire sous la courbe représentative.

1. Soient a et b des réels positifs. Calculer puis interpréter géométriquement les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^a bx dx \quad \text{et} \quad J = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

2. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions continues telles que $f \leq g$. Interpréter géométriquement l'intégrale $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$.

Indication. On pourra commencer par considérer les cas $0 \leq f \leq g$ et $f \leq 0 \leq g$.

Exercice 5 - Relation entre intégrale et primitive.

Soit $f, \varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose de plus φ et ψ de classe C^1 . On note par $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y) dy$ pour tout réel x .

1. Soit F une primitive quelconque fixée de f . Montrer que $g(x) = F \circ \psi(x) - F \circ \varphi(x)$.
2. En déduire que g est C^1 et donner l'expression de sa dérivée g' , en fonction de f, φ et ψ .

Exercice 6 - Dessins de domaines du plan.

Représenter les domaines suivants du plan :

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x + 1, 0 \leq y, y + 2x \leq 4\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -2, -1 \leq y \leq 1, y \geq x - 3\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, y \leq x^2 + 1, y \geq 2x, y \geq -2x\},$$

$$D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq \sqrt{3}x, x \leq \sqrt{3}y\}.$$

Exercice 7 - Découpages en tranches et calculs d'aires.

Pour chaque domaine D de l'exercice précédent :

1. déterminer géométriquement les tranches verticales $D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = a\}$ (vide ou pas? extrémités? etc.), pour toutes les valeurs du paramètre réel a .
2. Déterminez de même les tranches horizontales $D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = b\}$ pour tout $b \in \mathbb{R}$.
3. Pour $i = 1, 2$ et 3 , donner les deux expressions de l'aire de D_i , par décomposition en tranches horizontales et verticales. Puis calculer l'aire en choisissant l'une de ces expressions.

Exercice 8 - Premiers calculs d'intégrales doubles.

Soit $C = [0, \pi] \times [0, \pi]$. On dénote par T_- (resp. T_+) la partie de C consistant en les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y \leq \pi$ (resp. $x + y \geq \pi$).

1. Représenter C, T_- et T_+ , puis déterminer géométriquement leurs aires respectives.
2. Calculer l'intégrale double de la fonction $(x, y) \mapsto xy$ sur T_- grâce à Fubini, en tranches verticales.
3. Calculer l'intégrale double de cette même fonction sur T_+ grâce à Fubini en tranches horizontales.
4. Vérifier vos résultats en les comparant à l'intégrale double sur C .

Exercice 9 - Et quelques autres.

1. Calculer les intégrales doubles $\iint_{D_i} x dx dy$ pour les domaines D_i de l'exercice 5 pour $i = 1, 2, 3$.
2. Donner les abscisses des centres de gravité des domaines précédents, supposés *homogènes* (c'est-à-dire de densité constante).
3. Donner les ordonnées de ces centres de gravité.

Exercice 10 - Estimation d'intégrales doubles.

Sans chercher à calculer explicitement les intégrales doubles ci-dessous, montrer que

1. $\iint_C \cos^2(x + y) dx dy = \pi^2 - \iint_C \sin^2(x + y) dx dy$, où C est le carré $[0, \pi] \times [0, \pi]$.
2. $\iint_{C_{a,b}} e^{x^2+y^2} dx dy \geq ab$, où $C_{a,b}$ est le rectangle $[0, a] \times [0, b]$ (avec a et $b > 0$).
3. $\left| \iint_D \arctan(x^{2019} + y^{2020}) dx dy \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \text{Aire}(D)$, pour tout domaine régulier D .