

**Feuille d'exercices n°2**  
INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES

**Exercice 1 - Quelques intégrales doubles.**

Dessiner les domaines d'intégration et calculer les intégrales suivantes :

1.  $I_1 = \iint_D (1 - x - y) \, dx dy$  pour  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$ ,

2.  $I_2 = \iint_D \frac{xy^2}{1+x^2} \, dx dy$  pour  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ ,

3.  $I_3 = \iint_D e^{y-x} \, dx dy$  pour  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\}$ ,

4.  $I_4 = \iint_D \frac{2x}{1+x^2+y} \, dx dy$  pour  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ .

**Exercice 2 - Symétries dans une intégrale.**

Soit  $f : R_a \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue définie sur le carré  $R_a = [-a, a] \times [-a, a] \subset \mathbb{R}^2$ .

1. Montrer à l'aide de Fubini que

$$\iint_{R_a} f(x, -y) \, dx dy = \iint_{R_a} f(x, y) \, dx dy.$$

Montrer de même que

$$\iint_{R_a} f(-x, y) \, dx dy = \iint_{R_a} f(x, y) \, dx dy \quad \text{et} \quad \iint_{R_a} f(-x, -y) \, dx dy = \iint_{R_a} f(x, y) \, dx dy.$$

2. Montrer que  $\iint_{R_a} f(x, y) \, dx dy = \iint_{R_a} f(y, x) \, dx dy$ .

*Indication.* La symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = x$ ,  $(x, y) \mapsto (y, x)$ , est une isométrie.

3. *Illustration.* Calculer

$$\iint_{R_{2022}} x^{20} y^{22} \sin(x^{20} y^{21}) \, dx dy \quad \text{et} \quad \iint_{R_{2022}} (x - y)^{2021} e^{xy} \, dx dy.$$

4. *Illustration (bis).* Montrer sans calcul que l'abscisse du centre de gravité du domaine  $D_3$  de l'**Exercice 6** (de la feuille 1) est nul.

*Indication.* On fera attention au fait que  $D_3$  n'est pas un rectangle.

**Exercice 3 - Translations, homothéties.**

On considère le domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

1. Représenter  $D$  et montrer que  $D$  est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

2. Calculer les intégrales  $I = \iint_D x \, dx dy$  et  $J = \iint_D y \, dx dy$ .

*Indication.* On pourra utiliser l'**Exercice 2** pour se faciliter la vie.

**3.** En déduire les coordonnées  $(x_G, y_G)$  du centre de gravité du domaine  $D$  supposé homogène. Pour  $a, b$  et  $r$  paramètres réels donnés, on considère maintenant le domaine

$$D_{a,b,r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a, (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}.$$

**4.** Déterminer, en s'aidant d'une translation et d'une homothétie, les intégrales

$$I_{a,b,r} = \iint_{D_{a,b,r}} x \, dx \, dy \quad \text{et} \quad J = \iint_{D_{a,b,r}} y \, dx \, dy.$$

**Exercice 4 - Domaines en coordonnées polaires.**

Représenter chacun des domaines  $D_i \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  suivants; pour chacun d'eux donner un domaine  $\Delta_i \subset \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$  tel que l'application  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$  réalise une bijection de  $\Delta_i \setminus \{r = 0\}$  sur  $D_i \setminus \{(0, 0)\}$  :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \leq \sqrt{3}x, x \leq \sqrt{3}y\}, \\ D_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

**Exercice 5 - Calculs d'intégrales en coordonnées polaires.**

- Calculer  $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$  où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .
- Calculer l'aire des domaines  $D_i$  de l'**Exercice 4**.
- Calculer  $\iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$  où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, y \leq x\}$ .

**Exercice 6 - Dilatations et centre de gravité.**

Soit  $\varphi$  la dilatation de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi : (x', y') \mapsto (x = ax', y = by')$  avec  $a, b > 0$ .

- Montrer que  $\psi = \varphi^{-1}$  est une dilatation de  $\mathbb{R}^2$ .
- Rappeler les jacobiens respectifs de  $\varphi$  et de  $\psi$ .

On suppose que la restriction de  $\psi$  au domaine régulier  $\Delta$  induit une bijection  $\psi : \Delta \rightarrow D$  où  $D$  est un domaine régulier.

- Montrer que les centres de gravité de  $\Delta$  et de  $D$  se correspondent par  $\varphi$ .

Soit  $D$  le disque (plein) de  $\mathbb{R}^2$  de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1,  $D = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid (x')^2 + (y')^2 \leq 1\}$  et  $\mathcal{E}_{a,b}$  l'ellipse (pleine)  $\mathcal{E}_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ . On suppose ces domaines homogènes.

- Montrer que  $\varphi$  induit une bijection entre  $D$  et  $\mathcal{E}_{a,b}$ .
- En utilisant la question **3.** ci-dessus, déterminer les coordonnées du centre de gravité de  $\mathcal{E}_{a,b}$ .
- Calculer l'abscisse du centre de gravité de  $D^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$  en passant aux coordonnées polaires.
- En considérant la symétrie  $(x, y) \mapsto (y, x)$ , déterminer l'ordonnée de son centre de gravité.
- En utilisant **3.**, déterminer les coordonnées du centre de gravité de  $\mathcal{E}_{a,b}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

**Exercice 7 - Intégrales triples et pyramide.**

1. Représenter le domaine  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ .

2. En découpant en tranches horizontales, calculer le volume de  $D$ .

*Indication.* Calculer l'aire d'une tranche horizontale, à l'aide d'une homothétie (ou de Thalès).

3. Esquisser une preuve de la généralisation au volume d'une pyramide  $P$  (possiblement penchée), de hauteur  $h$  et de base un domaine régulier de  $\mathbb{R}^2$  d'aire  $A$ .

On suppose  $D$  homogène et on appelle  $G$  son centre de gravité.

4. Calculer l'intégrale  $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$ ; en déduire que la hauteur de  $G$  est  $\frac{1}{4}$ .

5. Esquisser une preuve du fait que la hauteur du centre de gravité de la pyramide générale  $P$  de la question 3., supposée homogène, est  $\frac{h}{4}$ .

6. On admet que l'application  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\psi(x, y, z) = (z, y, x)$  est une symétrie. Montrer que  $D$  est invariant par  $\psi$  et en déduire  $\iiint_D x \, dx \, dy \, dz$ .

7. Donner les coordonnées du centre de gravité de  $D$ , supposé homogène.

8. Soit  $\varphi$  la dilatation de  $\mathbb{R}^3$  définie par  $\varphi(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ . Déterminer et représenter l'image de  $D$  par  $\varphi$  et donner (sans calculs) les coordonnées de son centre de gravité.

*Indication.* On pourra s'inspirer de l'**Exercice 6**.

**Exercice 8 - Une intégrale triple sur le cube.**

Pour  $\theta \in \mathbb{R}^+$ , on note par  $\mathcal{C}_\theta$  le cube  $[0, \theta] \times [0, \theta] \times [0, \theta]$ .

1. Calculer  $I(\theta) = \iiint_{\mathcal{C}_\theta} \sin(x + y + z) \, dx \, dy \, dz$  en fonction de  $\theta$ .

2. Quel est le signe de  $I(1)$ ?

**Exercice 9 - Coordonnées cylindriques.**

1. Représenter  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$  et calculer son volume en utilisant le théorème de Fubini en tranches horizontales.

2. Calculer le même volume en coordonnées cylindriques.

3. Déterminer le centre de gravité de sa moitié supérieure,  $D^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$ , supposée homogène.

*Indication.* On pensera aux axes de symétries pour déterminer  $x_G$  et  $y_G$ .

4. Calculer le moment d'inertie de  $D$  en rotation autour de l'axe  $Oz$  :  $\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$ .

**Exercice 10 - Coordonnées sphériques.**

Calculer l'intégrale de  $f$  sur le domaine  $D$  avec

1.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$  et  $f(x, y, z) = xyz$ ,

2.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$  et  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$ , pour  $\alpha = 1$  et  $-1$ .

---

EXERCICES BONUS

---

**Exercice 11 - Centres de gravité.**

Calculer le centre de gravité des domaines  $D$  suivants, supposés homogènes :

1.  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, |y| \geq ax\}$  où  $a$  est un réel strictement positif.

2.  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, (x - 1)^2 + y^2 \geq 1\}$ .

*Indication.* (cf. cours – utiliser la propriété de barycentre du centre de gravité!)

**Exercice 12 - Coordonnées polaires (difficile !!)**

1. Dessiner le domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$ .

*Indication.* On remarquera que  $x^2 + y^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - 1$ .

2. Déterminer un domaine « polaire »  $\Delta$  correspondant à  $D$  (au sens de l'**Exercice 4**).

*Indication.* On se rappellera que si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, ce triangle est rectangle. (Ainsi que sa trigonométrie du triangle rectangle...)

3. Calculer  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  en coordonnées polaires.

*Indication.* On utilisera une intégration par parties pour « remplacer » arccos par sa dérivée sous l'intégrale, puis le changement de variable  $u = r^2$  pour calculer cette dernière.