PeiP 1A/2C — Polytech Paris-Saclay
Mathématiques 2 — 2021–2022

Feuille d'exercices n°3

Droites et plans vectoriels, systèmes linéaires

Exercice 1 - *Droites et plans vectoriels.*

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par les points de coordonnées $(4,6)$ et $(6,9)$. Donner une équation cartésienne et un vecteur générateur de $\mathcal{D}$.

2. Soient $\overrightarrow{u} = (1,0,-1)$ et $\overrightarrow{v} = (0,1,-1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et P le plan engendré $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Montrer que les vecteurs de P sont ceux dont les coordonnées vérifient $x+y+z=0$.

3. Déterminer des vecteurs $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$ engendrant le plan $P' \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x-y-3z=0$.

4. Déterminer un système linéaire (S) vérifié uniquement par les vecteurs de $P \cap P'$.

5. Donner un système linéaire échelonné réduit équivalent à (S).

6. Résoudre ce système et en déduire que l'intersection $P \cap P'$ est une droite de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera un vecteur générateur.

Exercice 2 - *Vecteurs générateurs vs équations cartésiennes.*

1. Donner deux vecteurs engendrant le plan P d'équation $x+2y+3z=0$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Donner une équation cartésienne du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\overrightarrow{v_1} = (1,1,2)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-1,2,1)$.

3. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$.

Indication. Pour un point (x,y,z) de la droite, exprimer y (resp. z) en fonction de x.

Exercice 3 - *Résolution de systèmes.*

1. Pour les systèmes suivants, déterminer un système linéaire échelonné réduit équivalent, donner le nombre de solutions, *puis* résoudre le système.

$$(S_1)\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=-1 \\ 5x-4y+8z=-4 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x-3y+z-t=0 \\ -x+2y-z-2t=1 \\ -3x+7y-3z-3t=2 \\ -x-z-8t=4 \end{cases}$$

2. Reformuler ces systèmes en termes de combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 - *Spécial Saint-Valentin.*

Charles a prévu d'acheter des fleurs à Catherine. Comme il est d'un naturel plutôt précis, il prévoit de dépenser exactement 24 € en achetant précisément deux douzaines de fleurs. Le fleuriste lui propose des iris (à 3 €), des roses (à 2 €) et des œillets (à 0,5 €). Charles sait que Catherine adore les iris ; que doit-il faire ?

Exercice 5 - *Systèmes à paramètres.*

Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. En discutant suivant les valeurs de m, résoudre :

$$(S_1)\begin{cases} x+my=0 \\ mx+y=0 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+y+3z=1 \\ -x+y+z=1 \\ x-y+mz=1 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x-y+5z=2 \\ 2x-5y+4z=m+2 \end{cases}$$

Exercice 6 - *Vrai-faux.* Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. Il existe un système linéaire de trois équations et trois inconnues qui possède exactement trois solutions.

2. Il existe un système à quatre équations et trois inconnues qui possède exactement une solution.

3. Il existe un système à trois équations et quatre inconnues qui possède exactement une solution.

4. Un système linéaire avec strictement moins d'inconnues que d'équations possède, ou bien une infinité de solutions, ou bien aucune.

5. Un système linéaire avec strictement moins d'équations que d'inconnues possède, ou bien une infinité de solutions, ou bien aucune.

Exercice 7 - *Systèmes et matrices (augmentées).*

Mettre les systèmes suivants sous forme d'une matrice augmentée $\big(A \mid Y_m\big)$ puis les résoudre en fonction de m. On spécifiera le rang de A :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + 5y + 4z = m \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = m \end{cases}$$

Exercice 8 - *Conditions de compatibilité et systèmes d'équations cartésiennes.*

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le plan $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{v} = (1, 2, -3, 1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = (1, -1, 1, -3)\,.$$

1. Montrer qu'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ est dans P si et seulement si un certain système linéaire $(S_{\overrightarrow{u}})$ est compatible. On en spécifiera les inconnues.

Indication. Écrire $\overrightarrow{u}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

2. Montrer que le système $(S_{\overrightarrow{u}})$ est compatible si et seulement si $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t)$ est solution d'un certain système linéaire homogène (S).

3. En déduire un système d'équations cartésiennes de P.

4. Procéder de même pour trouver un système d'équations cartésiennes du plan P' engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v}' = (1, 2, 3, 4)$ et $\overrightarrow{w}' = (1, -2, 3, -4)$.

Exercices bonus

Exercice 9 - *Système à paramètre.*

Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre. En discutant suivant les valeurs de a, résoudre :

$$(S_a) \begin{cases} x + y + z = 1 - a \\ ax + (1 - a)y + (1 - a)z = a^2 \\ ax + (1 + a)y + (1 + a)z = a - a^2 \end{cases}$$

Exercice 10 - *Rang d'un système linéaire.*

1. Déterminer le rang du système suivant en fonction des valeurs des paramètres a, b, c, α, β, γ :

$$(S) \begin{cases} x + ay + a^2 z = \alpha \\ x + by + b^2 z = \beta \\ x + cy + c^2 z = \gamma \end{cases}$$

2. Discuter l'existence et l'unicité des solutions, sans les calculer.