

Feuille d'exercices n°4
MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1 - *Exemples d'applications linéaires du plan.*

Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = (x, y)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 .

1. Rappeler l'expression de $f(\vec{v})$ où f est l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 associée à la matrice A dans la base canonique.

On considère dans \mathbb{R}^2 le triangle T de sommets les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$.

2. Déterminer l'image de T , par les applications linéaires associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $\lambda = a + ib = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ et f_λ la transformation de \mathbb{C} définie par $f_\lambda : z = x + iy \mapsto \lambda z$. On considère f_λ comme une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans lui-même : donner l'expression de sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 en fonction de a et b , puis en fonction de r et θ .

4. Spécifier, parmi les matrices A à J de la question 2., lesquelles sont de ce type (et déterminer λ).

Exercice 2 - *Application linéaire associée à une matrice.*

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on note respectivement par f et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ les applications linéaires associées à $X \mapsto AX$ et $X \mapsto BX$ (X écrit en colonne) dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Sans calcul, déterminer les vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$.

2. Calculer $f(x, y, z)$ de deux manières « différentes » :

- (i) en utilisant que $(x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ et la linéarité de f ;
- (ii) par calcul direct de AX .

3. Déterminer la matrice de l'application linéaire $f - 3g$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3 - \mathbb{R} comme espace vectoriel (de dimension 1).

1. Montrer que l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $x \mapsto (x, 2x, 3x)$ est une application linéaire et déterminer sa matrice dans les bases canoniques correspondantes.

2. Même question avec l'application $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$.

3. Plus généralement, on rappelle (ou on définit) que le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ de \mathbb{R}^n est

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

On fixe un vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, déterminer la matrice de l'application linéaire $S_{\vec{a}} : \vec{v} \mapsto \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle$.

4. L'application $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ est-elle linéaire ?

Exercice 4 - Une application linéaire utile.

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{2} + y, -\frac{x}{2} + z\right)$.

1. Donner la matrice de f quand on munit \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 de leurs bases canoniques respectives.

2. Représenter dans \mathbb{R}^2 l'image par f des trois axes $(0x)$, $(0y)$ et $(0z)$ de \mathbb{R}^3 , l'image des arêtes du cube $C = [0, 1]^3$ de \mathbb{R}^3 , l'image d'une figure quelconque située dans un plan vertical $x = c$.

3. Quelle est l'utilité de cette application f ?

4. Déterminer les vecteurs $\vec{v} = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 tels que $f(\vec{v}) = \vec{0}$.

Exercice 5 - Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 .

Soient $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . On rappelle (ou l'on définit !) que le produit vectoriel de \vec{a} et \vec{b} est le vecteur

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. On fixe $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ et on considère l'application $V_{\vec{a}} : \vec{v} \mapsto \vec{a} \wedge \vec{v}$. Montrer $V_{\vec{a}}$ est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.

2. On suppose que $\vec{a} = \vec{e}_1$, déterminer tous les vecteurs $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tels que $V_{\vec{e}_1}(\vec{v}) = 0$.

3. Même question avec $\vec{a} = (1, 2, 3)$.

4. Pour un vecteur \vec{a} quelconque, montrer que tous les points \vec{v} de la droite de \mathbb{R}^3 engendrée par \vec{a} vérifient $V_{\vec{a}}(\vec{v}) = 0$.

Exercice 6 - Produit de matrices.

1. Calculer, lorsque cela est possible, le produit AB , pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, (1 \ 2 \ 3) \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } (-1 \ 0 \ 2).$

2. Calculer les carrés de toutes les matrices de la question 2. de l'Exercice 1. Interpréter géométriquement les résultats lorsque c'est possible.

3. Montrer que si des matrices A et B commutent, i.e si $AB = BA$, alors $(AB)^2 = A^2 B^2$. (C'est par exemple le cas des matrices B et I de la question 2. de l'Exercice 1.)

4. Considérer l'exemple des matrices E et G de la question 2. de l'Exercice 1.

Exercice 7 - Projections orthogonales et symétries axiales dans \mathbb{R}^2 .

Dans \mathbb{R}^2 , on note R_θ la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et (D_θ) la droite engendrée par $\vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$.

1. Soit P_θ la projection orthogonale de \mathbb{R}^2 sur (D_θ) . Montrer (avec des arguments géométriques) que $P_\theta = R_\theta \circ P_0 \circ R_{-\theta}$. (P_0 est la projection orthogonale sur $(D_0) = (Ox)$!)
2. En déduire la matrice de P_θ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .
3. Vérifier qu'un vecteur de (D_θ) est bien laissé invariant par P_θ .
4. Soit S_θ la symétrie d'axe (D_θ) . Comme en question 1. ci-dessus, montrer que $S_\theta = R_\theta \circ S_0 \circ R_{-\theta}$ où S_0 est la symétrie d'axe (Ox) .
5. En déduire la matrice de S_θ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .
6. Vérifier que pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $P_\theta(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\vec{v} + S_\theta(\vec{v}))$. Interpréter ce fait géométriquement.

Exercice 8 - Matrice associée à un système linéaire.

Pour $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ donné, on considère le système linéaire

$$(S_y) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = y_2 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = y_3 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A telle que (S_y) soit équivalent à l'équation $AX = Y$ (pour X et Y vecteurs colonnes correspondant à \vec{x} et \vec{y}).
2. Déterminer le rang de A ; est-elle inversible?

Exercice 9 - Matrices inversibles (ou pas).

Décider si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 - Inverse à gauche.

Soient $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer BA . En déduire que si $AX = Y$ alors $X = BY$.
2. Peut-on en déduire que A est inversible?

Exercice 11 - Matrices 2×2 .

1. Calculer le déterminant des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer les valeurs des paramètres réels a et d pour lesquelles la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ est inversible et en donner l'inverse.