

Université de Montréal

INVARIANTS SPECTRAUX EN HOMOLOGIE
DE FLOER LAGRANGIENNE

par

Rémi Leclercq

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

en Mathématiques

Orientation Mathématiques fondamentales

juillet 2007

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

INVARIANTS SPECTRAUX EN HOMOLOGIE
DE FLOER LAGRANGIENNE

présentée par

Rémi Leclercq

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

François Lalonde

(président-rapporteur)

Octavian Cornea

(directeur de recherche)

Iosif Polterovich

(membre du jury)

Matthias Schwarz

(examineur externe)

Marlène Frigon

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

13 juillet 2007

SOMMAIRE

Soit (M, ω) une variété symplectique compacte ou convexe à l'infini. On considère une sous-variété lagrangienne L telle que

$$\omega|_{\pi_2(M,L)} = 0 \text{ et } \mu|_{\pi_2(M,L)} = 0$$

où μ est l'indice de Maslov. Etant donnée une sous-variété lagrangienne L' , transverse et isotope par une isotopie hamiltonienne à L , nous définissons des nombres spectraux lagrangiens d'ordre 2 associés aux classes d'homologie non nulles de L , en utilisant des techniques similaires à celles de Schwarz dans le cadre hamiltonien. Nous montrons que ces nombres ne dépendent que des deux sous-variétés lagrangiennes L et L' (théorème 4.5) et qu'ils généralisent de manière naturelle les invariants spectraux hamiltoniens introduits par Oh et Schwarz (proposition 4.7).

Nous introduisons de plus des nombres spectraux d'ordre supérieur via les suites spectrales introduites par Barraud et Cornea. Ces invariants sont nouveaux même dans le cas hamiltonien et, pour exemple, nous les calculons explicitement dans le cas Morse pour $L = (S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$, montrant par là-même qu'ils donnent des informations non triviales même dans le cadre de la théorie de Morse. Cet exemple conduit directement à un exemple dans le cadre symplectique, lorsqu'on l'étend au fibré cotangent de L .

Nous montrons que les invariants d'ordre 2 sont la contrepartie homologique de ces invariants d'ordre supérieur. Nous donnons un moyen de distinguer ces invariants d'ordre supérieur entre eux par l'intermédiaire d'un objet purement topologique et d'estimer ces différences en termes d'une quantité géométrique

ne dépendant que de la géométrie des sous-variétés lagrangiennes L et L' que nous nous étions données (théorème 4.24). Ceci constitue le résultat central de ce travail et nous conduit à des conséquences intéressantes concernant les invariants spectraux d'ordre 2. De plus, nous obtenons une minoration de la distance de Hofer entre L et L' en termes du cup-length de L et de notre quantité géométrique qui améliore la borne classique.

Mots clefs – Topologie et géométrie symplectiques, sous-variétés et intersections lagrangiennes, suites spectrales, distance de Hofer, fonctionnelle d'action, homologies de Morse et de Floer, invariants spectraux.

SUMMARY

Let (M, ω) be a symplectic manifold compact or convex at infinity. Consider a closed Lagrangian submanifold L such that

$$\omega|_{\pi_2(M,L)} = 0 \quad \text{and} \quad \mu|_{\pi_2(M,L)} = 0$$

where μ is the Maslov index. Given any Lagrangian submanifold L' , transverse and Hamiltonian isotopic to L , we define Lagrangian spectral numbers of order 2 associated to each non zero homology class of L , using techniques similar to the ones used by Schwarz in the Hamiltonian case. We show that these numbers only depend on the two Lagrangian submanifolds L and L' (Theorem 4.5) and that they naturally extend the Hamiltonian spectral invariants introduced by Oh and Schwarz (Proposition 4.7).

Moreover, we introduce higher order spectral numbers via spectral sequence machinery introduced by Barraud and Cornea. These invariants are new even in the Hamiltonian case and, as an example, we compute them explicitly in the Morse case, for $L = (S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$, showing that they carry non trivial information even in the Morse case. This example leads obviously to a symplectic one, when extended to the cotangent bundle of L .

We show that the order 2 spectral invariants are their homological counterparts. We provide a way to distinguish our higher order Lagrangian spectral invariants one from the other via a purely topological object and estimate their difference in terms of a geometric quantity only depending on the geometry of the two fixed Lagrangian submanifolds L and L' (Theorem 4.24). This is the main

result of our work and leads us to interesting consequences with respect to the order 2 spectral invariants. Moreover we get a bound for the Hofer's distance between L and L' in terms of the cup-length of L and our geometric quantity which is shown to improve the classical bound.

Keywords – Symplectic topology and geometry, Lagrangian submanifolds and Lagrangian intersections, spectral sequences, Hofer's distance, action functional, Morse and Floer homologies, spectral invariants.

Table des matières

Sommaire	iii
Summary	v
Table des figures	x
Remerciements	xi
Introduction	2
Chapitre 1. Homologies de Morse et de Floer	7
1.1. Homologie de Morse.....	7
1.2. Homologie de Floer lagrangienne.....	9
1.2.1. Définitions et concepts de base.....	10
1.2.2. Homologie de Floer lagrangienne.....	12
1.2.3. Le cas des fibrés cotangents.....	19
1.2.3.1. Structure symplectique, lagrangiens, convexité et π_2 relatif.	19
1.2.3.2. Isomorphisme entre homologies de Morse et de Floer.....	23
1.3. Morphismes de comparaison.....	25
1.3.1. Le morphisme de comparaison classique.....	25
1.3.2. Le morphisme de naturalité.....	28
1.3.3. Le morphisme de type PSS lagrangien.....	30
Chapitre 2. Structures algébriques	36
2.1. L’homologie de Morse comme anneau unitaire.....	37
2.2. L’homologie de Floer comme module sur l’homologie de Morse....	38

2.3.	Préservation des structures algébriques par les morphismes	45
2.3.1.	Le morphisme de naturalité, morphisme de modules	46
2.3.2.	Le PSS lagrangien, morphisme de modules	46
Chapitre 3.	Suites spectrales	49
3.1.	Définitions générales	49
3.1.1.	La tour de modules d'une suite spectrale	50
3.1.2.	Suite spectrale provenant d'une filtration	52
3.2.	Suite spectrale de Leray–Serre	54
3.2.1.	Fibrations, fibration de lacets	55
3.2.2.	La suite spectrale de Leray–Serre de la fibration de lacets	58
3.2.3.	Application : homologie de ΩS^n	60
3.3.	Suites spectrales de Barraud–Cornea	62
3.3.1.	Le cas Morse	62
3.3.1.1.	Construction de la suite spectrale	62
3.3.1.2.	Propriétés principales	66
3.3.1.3.	Exemple : suite spectrale "associée" à $S^2 \times S^4$	66
3.3.2.	Le cas Floer (lagrangien)	68
Chapitre 4.	Invariants spectraux	72
4.1.	Invariants spectraux d'ordre 2 ou homologiques	73
4.1.1.	Démonstration du théorème 4.5	79
4.1.1.1.	Indépendance relative en H et J	79
4.1.1.2.	Indépendance en J et continuité	81
4.1.1.3.	Fin de la démonstration	84
4.1.2.	Démonstration de la proposition 4.7	85
4.1.2.1.	Le morphisme BPS	86
4.1.2.2.	Invariants spectraux généralisés	89
4.1.3.	Démonstration de la proposition 4.8	92

4.2. Invariants spectraux d'ordre supérieur.....	95
4.2.1. Exemple : le cas de $(S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$	103
4.2.2. Démonstration du théorème 4.24.....	105
4.2.2.1. Existence de la quantité géométrique $r(L, L')$	105
4.2.2.2. Démonstration du théorème 4.24.....	108
4.2.3. Retour sur les invariants d'ordre 2.....	112
4.2.3.1. Démonstration des corollaires 4.25 et 4.26.....	112
4.2.3.2. Démonstration alternative (et extension) du corollaire 4.26.....	116
Index	118
Bibliographie	120

Table des figures

1.1	Définition de l'indice de maslov	16
1.2	Théorème de Gromov : bord de $\mathcal{M}_{x,y}(L, L; H, J)$	18
1.3	Principe du morphisme de comparaison	27
1.4	Définition du morphisme PSS lagrangien	31
1.5	Commutativité des morphismes PSS et de comparaison	32
2.1	Définition de la structure de modules sur $HF_*(L, L')$	40
2.2	Preuve de la structure de module (1)	43
2.3	Preuve de la structure de module (2)	44
2.4	Preuve de la préservation des structures par le PSS (1)	47
2.5	Preuve de la préservation des structures par le PSS (2)	48
3.1	L'homologie de l'espace des lacets de S^n	61
3.2	Les applications γ et q	64
3.3	Suite spectrale de Barraud–Cornea "associée" à $S^2 \times S^4$	67
4.1	Invariants spectraux dans le cas Morse	75
4.2	Démonstration du lemme 4.12	83
4.3	Morphismes PSS <i>lagrangien</i> et <i>hamiltonien</i>	90
4.4	La quantité géométrique $r(L, L')$	100
4.5	Construction de $r(L, L')$	107

REMERCIEMENTS

"– Merci! Merci! Merci! Merci!" – D. PENNAC, *Merci* (2004).

Je ne peux remercier comme il se doit Octav. Il n'a pas été mon directeur. Il n'a pas été quelqu'un avec qui j'aime discuter. Il n'a pas été un guide. Il n'a pas été "(très) sévère mais juste". Il n'a pas su m'encourager. Il n'a pas eu cette capacité de me faire sortir de son bureau presque chaque semaine avec le cœur au ventre et l'envie de faire des maths. Il a été tout cela et bien plus en même temps. Je remercie donc avec plaisir le directeur, la personne avec qui j'aime discuter, le guide et tous les autres ici. Comme je le peux.

Apparaît ici naturellement Bat 'speed' Gromov, alias Baptiste. Ma vie à Montréal n'aurait pas été la même sans lui et sa connaissance des curiosités touristiques de ses rues et de la localisation de ses bars. Mon doctorat aurait été très différent sans nos multiples conversations mathématiques (ou non), en tout lieu, en tout temps. Je remercie aussi chaleureusement Gabriel. Nos points communs (humour particulier et goûts cinématographiques) et nos différences (mauvaise foi et goûts cinématographiques) m'ont rendu le quotidien plus agréable encore. Ses commentaires sur le chapitre 3 m'ont donné du fil à retordre. Je remercie également tous les amis qui m'ont supporté avec plus ou moins de facilité. Je pense particulièrement à Clément et à ses opinions contradictoires (parfois avec elles-mêmes) et à Alex et ses sous-entendus explicites (souvent ceux des autres). Tous ont contribué au climat de travail dans lequel j'ai évolué les quatre dernières années.

Du point de vue de cette thèse en particulier, les discussions que j'ai eues avec Matthias Schwarz et Peter Albers ont été très intéressantes. Je tiens également à remercier François Lalonde pour s'y être intéressé très attentivement en plusieurs occasions et Leonid Polterovich dont les questions m'ont forcé à avancer.

De loin, mais avec force, je remercie aussi mes parents qui m'ont donné le goût du travail (toujours mieux fait, si possible). Leur support n'a été en aucun cas amoindri par la distance et a été amplifié lors de nos retrouvailles estivales (et autres). Merci à Jean-Marie aussi qui, je le crains, me surestime et va, j'en suis sûr, feuilleter cette thèse avec plaisir. Je me dois aussi (ô joie!) de mentionner ces heures passées au fond d'une classe près d'un radiateur et d'une fenêtre à découvrir les maths avec Guillaume. Ce que nous vivions par procuration dans la vie de l'autre. Il me plaît également de me rappeler ces longues heures pendant lesquelles je n'ai pas préparé le concours de l'agreg avec Mathieu. Ces heures à découvrir, apprécier et redemander des Woody Allen, des Kurosawa, des Kitano.

Dernière dans ces remerciements, pour compenser sa première place dans mes pensées, se trouve Eveline. Merci de m'encourager, me supporter, m'endurer et me reconforter quand j'en ai besoin dans la vie comme dans les maths. Merci de me laisser t'encourager, te supporter, t'endurer et te reconforter de mon mieux. Merci de ce que l'on partage (dans la vie comme dans les maths). Merci pour ça et pour tout ce que je ne mentionne pas ici (pourquoi? parce que!).

INTRODUCTION

En mécanique théorique, les structures symplectiques, les sous-variétés lagrangiennes et le cas particulier des fibrés cotangents par exemple apparaissent naturellement dans l'étude des équations de Hamilton, de Lagrange ou dans le processus de quantification. Depuis le théorème de compacité de Gromov, les courbes (pseudo) holomorphes jouent un rôle central en géométrie symplectique (à l'instar de la géométrie complexe). Du point de vue topologique, la construction de l'homologie de Floer repose sur ces objets. Le cas le plus général de cette théorie trouve son cadre dans les intersections lagrangiennes, une homologie de Floer basée sur les lagrangiens.

Certains résultats montrent que l'étude du groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique (M, ω) donne de nombreuses informations sur la structure symplectique de la variété en question. Citons pour exemple ce résultat de Banayaga, apparaissant dans [3].

Théorème. *Soient (M, ω) et (M', ω') deux variétés symplectiques compactes et sans bord. Si leurs groupes de difféomorphismes hamiltoniens associés sont isomorphes, alors les deux variétés sont conformément symplectomorphes i.e. il existe un difféomorphisme $f : M \rightarrow M'$ et une constante c tels que $f^*\omega' = c \cdot \omega$.*

La géométrie du groupe des difféomorphismes suscite donc un intérêt particulier (voir par exemple à ce sujet [32]). En particulier, dans cette étude, la distance de Hofer (introduite dans [15]) définie sur l'espace des difféomorphismes hamiltoniens est un outil essentiel.

Suivant une idée de Viterbo, dans le cadre de la théorie des fonctions génératrices [38], Oh et Schwarz ont défini des invariants spectraux ([28], [29] et [35]) dans le cadre de l'homologie de Floer hamiltonienne. Ceux-ci ont de nombreuses applications du point de vue de l'étude du groupe des difféomorphismes hamiltoniens. Oh [27] et Milinković [24] les ont également étudiés dans le cas du cotangent. Ils correspondent à un phénomène classique en analyse non-linéaire. En effet, il est connu que les changements topologiques dans la dynamique d'un système sont intimement reliés aux zéros de champs de vecteurs. En théorie de Morse, ceux-ci correspondent aux points critiques de la fonction étudiée. Même si l'homologie de Floer ne peut être, à proprement parler, considérée comme une homologie de Morse, ces deux constructions sont très semblables. Les générateurs de l'homologie de Floer sont les points critiques de la fonctionnelle d'action (qui joue le rôle de la fonction de Morse) et leurs interactions sont données par l'ensemble des courbes pseudo-holomorphes les "reliant" (jouant le rôle des lignes de flot). Les invariants spectraux sont des nombres réels quantifiant les "sauts" de l'action correspondant aux changements topologiques mentionnés précédemment. Ils donnent donc de l'information sur la dynamique du système.

Dans le cas plus général qui va nous intéresser ici (la théorie de Floer dans le cadre des intersections lagrangiennes), c'est la géométrie de l'ensemble des sous-variétés lagrangiennes de la variété symplectique étudiée qui est l'un des points centraux. L'ensemble des lagrangiens isotopes par une isotopie hamiltonienne à un lagrangien fixé bénéficie également d'une distance de Hofer (induite par celle définie sur l'ensemble des hamiltoniens). Les propriétés de cet espace métrique sont encore peu connues. Récemment, Iriyeh et Otofujii [17] ont obtenu d'intéressants résultats concernant ses géodésiques. En vue de l'étude de sa géométrie, nous avons, dans un premier temps, étendu les nombres spectraux à ce cadre général, de manière naturelle. Pour ce faire, nous avons utilisé (démarche inspirée de celle de Schwarz) l'isomorphisme introduit par Piunikhin, Salamon et Schwarz [31] qui donne dans ce contexte des résultats plus précis.

Comme de très nombreux outils sont nécessaires à leur définition, la première question qui se pose naturellement est de comprendre précisément de quels paramètres ils dépendent fondamentalement. Nous répondons à cette question de la manière la plus satisfaisante du point de vue de l'objectif fixé : *ces invariants spectraux ne dépendent que des sous-variétés lagrangiennes initialement fixées*. Celles-ci étant isotopes par une isotopie hamiltonienne, une telle paire de lagrangiens correspond à un couple $(L, \phi(L))$, où L est un lagrangien et ϕ un difféomorphisme hamiltonien. L'indépendance des invariants spectraux constitue un résultat surprenant en soi, dans la mesure où l'on aurait pu prévoir (au vu du cas hamiltonien) une dépendance plus fondamentale vis-à-vis du difféomorphisme ϕ . Outre le fait que leur définition soit une extension au cadre lagrangien de celle des invariants classiques, nous prouvons qu'ils les généralisent via un isomorphisme dû à Biran, Polterovich et Salamon [7] permettant de considérer l'homologie de Floer hamiltonienne comme une homologie de Floer lagrangienne.

La seconde étape était de réussir à distinguer toutes ces quantités. Pour parvenir à un tel résultat, nous avons utilisé les suites spectrales introduites par Barraud et Cornea [5]. En effet, l'idée est naturelle puisque ces outils algébriques permettent de détecter des demi-tubes particuliers, dits trajectoires de Floer, d'aire symplectique strictement positive séparant les générateurs de l'homologie de Floer. Or ces trajectoires de Floer induisent les différences recherchées entre invariants spectraux. De plus, l'existence de ces demi-tubes est repérée grâce à des objets reliés uniquement à la topologie de L (il s'agit, plus précisément, de différentielles non triviales dans les suites spectrales de Leray–Serre de fibrations de base L). Ceci a conduit au théorème principal de ce travail.

En outre, lors de la démonstration de ce théorème sont apparues d'autres quantités reliées plus généralement, non pas aux seules classes d'homologie de L (comme les invariants classiques) mais bien à toutes les classes apparaissant dans les suites spectrales de Leray–Serre mentionnées ci-dessus. Ces nouveaux invariants contiennent plus d'informations que les invariants classiques (même dans

le cas Morse). De plus, le critère de distinction que nous avons démontré s'applique de manière naturelle à ces nouveaux objets. Les différences entre invariants spectraux qu'il permet de détecter sont estimées via une quantité géométrique que nous introduisons en nous inspirant de la distance géométrique entre lagrangiens due à Barraud et Cornea [4]. Cette quantité est reliée uniquement à la géométrie des deux lagrangiens (transverses) considérés. Comme corollaire de toute cette machinerie nous parvenons à minorer la distance de Hofer entre deux sous-variétés lagrangiennes (transverses et isotopes par une isotopie hamiltonienne) en termes de notre constante géométrique et de leur cup-length.

De plus, cette étude a conduit à des objets d'intérêt propre. En particulier, l'homologie de Floer lagrangienne peut-être munie d'une structure de module permettant de conclure à la commutativité d'un certain diagramme, composé de morphismes construits via des méthodes très différentes. Cette commutativité est très surprenante en elle-même et la compréhension des phénomènes l'interdisant dans des cas plus généraux, probablement éclairante.

Les résultats que nous présentons ici sont en grande partie regroupés dans [20].

Plan de la thèse.

Dans le chapitre 1, nous rappelons les constructions de l'homologie de Morse et de Floer dans le cadre des intersections lagrangiennes. Nous donnons plus de détails sur le cas du cotangent qui a une importance particulière et fournit une classe d'exemples vérifiant les hypothèses techniques que nous nous imposons. Nous décrivons également les trois morphismes de comparaison qui vont nous intéresser par la suite : le morphisme de comparaison classique de l'homologie de Floer, le morphisme de naturalité et le morphisme PSS lagrangien.

Dans le chapitre 2, nous rappelons la structure de module donnée sur l'homologie par le produit d'intersection. Ensuite nous construisons une structure de module sur l'homologie de Floer en nous inspirant de la construction existant

dans le cadre hamiltonien [10]. Nous démontrons que les morphismes de naturalité et PSS lagrangien préservent ces structures.

Dans le chapitre 3, nous rappelons la définition générale de suite spectrale. Nous décrivons la construction des suites spectrales obtenues via un module différentiel gradué filtré et celles de Leray–Serre, obtenues de fibrations. Nous nous concentrons sur celle de la fibration de lacets d’un espace topologique. Nous donnons ensuite les grandes lignes des constructions des suites spectrales de Barraud–Cornea provenant d’un enrichissement adéquat des complexes de Morse et de Floer. Nous énonçons également les propriétés qu’elles vérifient et qui nous seront utiles par la suite et notamment leur lien avec la suite spectrale de Leray–Serre de certaines fibrations. Nous terminons en illustrant ces constructions dans un cas particulier.

Dans le chapitre 4, nous donnons les définitions précises des nombres spectraux homologiques et des nombres spectraux d’ordre supérieur que nous avons introduits. Nous prouvons leur invariance, le fait qu’ils généralisent les invariants classiques et leur premières propriétés. Nous introduisons ensuite une quantité géométrique et nous démontrons le théorème principal qui permet de distinguer les invariants spectraux les uns des autres et d’estimer leurs différences en fonction de cette quantité géométrique. Finalement, nous déduisons des propriétés intéressantes vérifiées par les invariants spectraux homologiques et nous présentons un exemple pour lequel les invariants d’ordre supérieur se calculent explicitement. Cet exemple montre qu’ils renferment strictement plus d’informations que les invariants spectraux classiques.

Chapitre 1

HOMOLOGIES DE MORSE ET DE FLOER

Nous présentons dans ce chapitre les homologies de Morse (section 1.1) et de Floer (dans le cadre des intersections lagrangiennes – section 1.2). Ensuite nous décrivons trois morphismes permettant de comparer ces homologies entre elles (section 1.3).

Toutes les homologies que nous considérons ici sont à coefficients dans \mathbb{Z}_2 . Il est possible d'étendre les résultats à des coefficients entiers en introduisant des systèmes d'orientations cohérentes des espaces de modules qui apparaissent dans ces constructions.

1.1. HOMOLOGIE DE MORSE

Nous introduisons ici l'homologie de Morse d'une variété L de dimension n , compacte, munie d'une fonction de Morse f et d'une métrique riemannienne g telle que la paire (f, g) soit Morse–Smale. Pour une description complète on pourra se référer à [25] et [12] pour une approche cellulaire ou [34] pour une approche plus analytique.

Soit L une variété lisse de dimension n , considérons une fonction lisse $f \in C^\infty(L, \mathbb{R})$. L'ensemble de ses *points critiques* est dénoté

$$\text{Crit}(f) := \{p \in L \mid d_p f = 0\}.$$

L'application f est dite *fonction de Morse* si chacun de ses points critiques est *non dégénéré*, c'est-à-dire que pour tout point critique p , le hessien de f en p est

non nul (il est bien connu que cette quantité, en un point critique, ne dépend pas de la carte choisie pour la calculer). Dans ce cas, le nombre de valeurs propres négatives de la hessienne, dénoté $i_f(p)$, est l'*indice de Morse* de p . L'ensemble des points critiques d'indice k de f est noté $\text{Crit}_k(f)$.

Soit g une métrique riemannienne sur L , nous dénotons par $\nabla^g f$ le gradient de f par rapport à g . Le *flot gradient* de $-f$, γ , est défini par l'équation

$$\frac{d}{dt}\gamma_t(x) + \nabla^g f(\gamma_t(x)) = 0.$$

Pour tout point critique p de f , les espaces de modules suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_p^s(f, g) &:= \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_t(x) = p\} \quad \text{et} \\ \mathcal{W}_p^u(f, g) &:= \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_t(x) = p\} \end{aligned}$$

sont dits *variétés stable et instable* de p et sont des variétés lisses de dimensions respectives $n - i_f(p)$ et $i_f(p)$.

On rappelle que deux sous-variétés N_1 et N_2 d'une variété M s'intersectent *transversalement* si en tout point de leur intersection $x \in N_1 \cap N_2$,

$$T_x M = T_x N_1 + T_x N_2.$$

La paire (f, g) est dite de *Morse–Smale* si pour tout couple de points critiques (p, q) de f , $\mathcal{W}_p^u(f, g)$ et $\mathcal{W}_q^s(f, g)$ s'intersectent transversalement. Dénotons cette intersection $\widehat{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g)$. Comme \mathbb{R} agit sur ces espaces (par translation le long des lignes de flot), on définit

$$\mathcal{M}_{p,q}(f, g) = \widehat{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g)/\mathbb{R}$$

qui est la *variété connectante* de p et q . La condition de transversalité (Morse–Smale) nous assure que c'est une variété lisse de dimension $i_f(p) - i_f(q) - 1$. Les composantes de dimension strictement positive de ces espaces de modules ne sont, en général, pas compactes mais admettent une compactification telle que

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g) = \bigcup_{r \in \text{Crit}(f)} \overline{\mathcal{M}}_{p,r}(f, g) \times \overline{\mathcal{M}}_{r,q}(f, g). \quad (1.1.1)$$

On définit les espaces vectoriels $CM_k(L; f, g) := \langle \text{Crit}_k(f) \rangle_{\mathbb{Z}_2}$ et on note par $\partial : CM_k(L; f, g) \rightarrow CM_{k-1}(L; f, g)$, le morphisme qui associe à tout point critique p d'indice k

$$\partial p = \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \#_2 \mathcal{M}_{p,q}(f, g) \cdot q$$

(étendu ensuite par linéarité sur $CM_k(L; f, g)$). Remarquons que la somme est prise sur l'ensemble des points critiques q dont l'indice vérifie $i_f(p) - i_f(q) = 1$. La variété $\mathcal{M}_{p,q}(f, g)$ est donc une union de points, finie (compacité de L) et, comme dans ce qui suit, $\#_2 \mathcal{M}_{p,q}(f, g)$ représente son cardinal modulo 2.

La formule (1.1.1) implique que $\partial \circ \partial = 0$ et donc que $(CM_*(L; f, g), \partial)$ est un complexe de chaînes. L'*homologie de Morse* de L est définie comme étant l'homologie de ce complexe :

$$HM_*(L; f, g) = H(CM_*(L; f, g), \partial).$$

Remarque 1.1. Contrairement à ce que suggèrent ces notations standard, la métrique g n'intervient pas dans la détermination des espaces vectoriels $CM_*(L; f, g)$ mais bien dans le comportement de la différentielle ∂ .

Remarque 1.2. Il est non trivial mais bien connu que cette homologie ne dépend pas de la paire (f, g) de Morse–Smale choisie et est isomorphe à l'homologie (cellulaire) de L . De fait, l'ensemble des variétés instables des points critiques de f correspond à une décomposition cellulaire de L (voir à ce sujet [25] et [12]). Une (autre) démonstration classique de l'indépendance fait intervenir un morphisme de comparaison tout à fait similaire à celui décrit dans le cas Floer (§1.3.1).

1.2. HOMOLOGIE DE FLOER LAGRANGIENNE

Cette théorie est exposée dans les articles [8], [26] et [5]. Même si l'homologie de Floer ne peut être considérée comme une homologie de Morse proprement définie, ces deux constructions sont très semblables.

1.2.1. Définitions et concepts de base

Une *variété symplectique* est un couple (M, ω) , où M est une variété lisse de dimension $2n$ et ω une 2-forme sur M , fermée ($d\omega = 0$) et non dégénérée (ω^n n'est jamais nulle). La $2n$ -forme ω^n est la *forme de volume symplectique* sur (M, ω) .

Une variété symplectique non compacte est dite *convexe à l'infini* si elle est la complétée symplectique d'une variété à bord de type contact. En fait, la définition exacte se formule en termes de fonctions pluri-subharmoniques. L'interprétation en termes de complétion que nous donnons ici provient alors de la caractérisation suivante.

Lemme 1.3. *Si une variété symplectique à bord admet un champ de vecteurs X satisfaisant $\mathcal{L}_X\omega = \omega$ à proximité de son bord et pointant vers l'extérieur sur son bord, alors elle est convexe à l'infini.*

Un champ de vecteurs vérifiant $\mathcal{L}_X\omega = \omega$ agit sur la forme symplectique en la dilatant par le facteur e^t (plus précisément, son flot vérifie : $(\phi^t)^*\omega = e^t\omega$) et est appelé *champ de vecteurs de Liouville*.

La condition de convexité à l'infini a pour but de pouvoir utiliser le théorème de compacité de Gromov (théorème que nous décrivons en §1.2.2 ci-dessous) dans le cas de variétés non compactes. En particulier, le fibré cotangent d'une variété compacte est une variété symplectique convexe à l'infini. Cette large classe d'exemples entre, par conséquent, dans le cadre que nous fixons ici. Nous ne donnerons donc pas plus de détails dans le cas général mais traiterons le cas des fibrés cotangents avec soin (§1.2.3) (dans le cas général, on pourra se référer à [23]).

Un *symplectomorphisme* entre deux variétés symplectiques $\phi : (M_0, \omega_0) \rightarrow (M_1, \omega_1)$ est un difféomorphisme entre M_0 et M_1 tel que le pullback de la forme symplectique ω_1 coïncide avec ω_0 i.e. $\phi^*\omega_1 = \omega_0$.

Un *lagrangien* (ou *sous-variété lagrangienne*) L d'une variété symplectique de dimension $2n$ est une sous-variété de dimension n telle que la restriction de la forme symplectique à TL est identiquement nulle au sens où

$$\forall x \in L, \forall \eta, \xi \in T_x L, \omega_x(\eta, \xi) = 0.$$

Nous énonçons ici le théorème de Weinstein qui affirme que pour tout lagrangien L d'une variété symplectique M , il existe un voisinage tubulaire qui est "symplectiquement" identique à un voisinage de L vue comme la section nulle de son fibré cotangent.

Théorème 1.4 (Voisinage tubulaire de Weinstein). *Soit (M, ω) une variété symplectique et L une sous-variété lagrangienne de M . Il existe un voisinage \mathcal{U} de L dans M , un voisinage \mathcal{V} de la section nulle de T^*L , $(T^*L)_0$, et un symplectomorphisme $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ tel que $\phi(L) = (T^*L)_0$.*

Un *hamiltonien* est une fonction à valeurs réelles, lisse, définie sur une variété symplectique. Pour des raisons de régularité, nous serons amenés à considérer des hamiltoniens dépendant du temps i.e. des fonctions lisses

$$H : I \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

où I désigne l'intervalle $[0, 1]$. Par l'intermédiaire de la forme symplectique, une telle application induit une famille de *champs de vecteurs hamiltoniens* $X_H : I \times M \rightarrow TM$ (X_H^t étant dit *gradient symplectique* de H_t), vérifiant :

$$\forall t \in I, \forall x \in M, \forall \xi \in T_x M, \omega_x(X_H^t(x), \xi) = -d_x H_t(\xi).$$

Remarquons que ceci définit (à t fixé) un unique champ de vecteurs puisque la forme symplectique est non dégénérée. La famille X_H engendre à son tour une famille à un paramètre de difféomorphismes, $\phi_H : I \times M \rightarrow M$, tels que :

$$\forall t \in I, \forall x \in M, \partial_t \phi_H^t(x) = X_H^t(\phi_H^t(x)).$$

La formule de Cartan

$$\frac{d}{dt}(\phi_H^t)^* \omega|_{t=0} = \mathcal{L}_{X_H} \omega = d(\iota_{X_H} \omega) + \iota_{X_H} d\omega$$

donne que ces difféomorphismes préservent la forme symplectique et forment, par conséquent, une famille de symplectomorphismes. Réciproquement, tout symplectomorphisme ϕ obtenu ainsi ($\phi = \phi_H^1$ pour un certain hamiltonien H) est dit *difféomorphisme hamiltonien*. L'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de la variété symplectique (M, ω) est dénoté $\text{Ham}(M, \omega)$.

Deux sous-variétés lagrangiennes L et L' sont dites *isotopes* s'il existe une famille lisse à un paramètre $\{L_t\}_{t \in I}$ de sous-variétés lagrangiennes telle que $L_0 = L$ et $L_1 = L'$. Cette isotopie est dite *isotopie hamiltonienne* s'il existe une telle famille et un hamiltonien H tel que $L_t = \phi_H^t(L)$ pour tout t .

Enfin, une *structure presque complexe* est un endomorphisme du tangent $J : TM \rightarrow TM$ tel que $J^2 = -\text{id}$. Elle est dite *dominée* par la forme symplectique ω si $\omega(\eta, J\eta) > 0$ pour tout vecteur tangent η non nul. Elle est dite *compatible* avec ω si pour tout $x \in M$ et tout couple de vecteurs de $T_x M$, (η, ξ) , $\omega(J\eta, J\xi) = \omega(\eta, \xi)$. Une fois données une forme symplectique et une structure presque complexe dominée et compatible avec elle, $\omega(-, J-)$ constitue une métrique riemannienne. Un simple calcul montre que le gradient d'un hamiltonien H par rapport à cette métrique est en relation avec le champ de vecteurs symplectique qu'il induit. Plus précisément, il vient, avec nos conventions de signe

$$J(x)\nabla H_t(x) = X_H^t(x).$$

1.2.2. Homologie de Floer lagrangienne

On se donne une variété symplectique (M, ω) compacte ou convexe à l'infini et deux sous-variétés lagrangiennes L et L' , isotopes par une isotopie hamiltonienne, compactes et sans bord, telles que

$$\omega|_{\pi_2(M, L)} = 0 \tag{1.2.1}$$

(cette condition correspond à l'*asphéricité symplectique* i.e. $\omega|_{\pi_2(M)} = 0$ du cas hamiltonien). On se donne également un hamiltonien H et une structure presque complexe J , dominée et compatible avec ω . Tous les hamiltoniens considérés dans

la suite sont supposés nuls, hors d'un sous-ensemble compact de M .

Nous supposons que L' et $\phi_H^1(L)$ s'intersectent transversalement. On définit tout d'abord l'ensemble des chemins de L à L' :

$$\mathcal{P}(L, L') := \{\gamma \in C^\infty(I, M) \mid \gamma(0) \in L, \gamma(1) \in L'\}.$$

Fixons $\eta \in \mathcal{P}(L, L')$ et dénotons $\mathcal{P}_\eta(L, L')$ la composante connexe de $\mathcal{P}(L, L')$ contenant η . On définit ensuite la *fonctionnelle action* $\mathcal{A}_{L, L'; H, \eta} : \mathcal{P}_\eta(L, L') \rightarrow \mathbb{R}$, dénotée également $\mathcal{A}_{H, \eta}$ ou \mathcal{A} quand aucune confusion n'est possible :

$$\mathcal{A}_{H, \eta}(x) = - \int_{I \times I} \bar{x}^* \omega + \int_I H(t, x(t)) dt \quad (1.2.2)$$

où l'on a choisi une application $\bar{x} : I \times I \rightarrow M$ telle que

$$\bar{x}(0, -) = \eta, \bar{x}(1, -) = x \text{ et } \bar{x}(I, 0) \subset L, \bar{x}(I, 1) \subset L'. \quad (1.2.3)$$

L'existence d'une telle application \bar{x} vient du choix de se placer dans la composante connexe de η . La première intégrale est bien définie (i.e. ne dépend pas du choix d'une telle application) par la condition (1.2.1).

Remarque 1.5. La définition précédente de la fonctionnelle action a la particularité de dépendre du choix de η . En effet, un choix différent d'élément de référence (dans la même classe d'homotopie i.e. $\eta' \in \mathcal{P}_\eta(L, L')$) translate l'action par la constante $-\int_{I \times I} \bar{\eta}'^* \omega$ ($\bar{\eta}'$ vérifiant les conditions (1.2.3), avec $x = \eta'$). Si dans le cas hamiltonien, il est naturel de normaliser l'hamiltonien (en particulier pour définir la norme de Hofer), dans le cas lagrangien, une normalisation naturelle pour l'action est de la translater de sorte qu'elle s'annule sur le chemin η choisi :

$$\mathcal{A}'_H(x) = - \int_{I \times I} \bar{x}^* \omega + \int_I H(t, x(t)) dt - \int_I H(t, \eta(t)) dt. \quad (1.2.4)$$

Ces choix vont apparaître à quelques endroits clés que nous mettrons en évidence, tout au long de ces lignes.

Les points critiques de la fonctionnelle action sont exactement les *orbites du champ de vecteurs hamiltonien*, dont les extrémités initiale et finale sont respectivement sur L et L' et appartenant à la composante connexe de η :

$$\mathcal{I}(L, L'; \eta, H) := \text{Crit}(\mathcal{A}_{H, \eta}) = \{x \in \mathcal{P}_\eta(L, L') \mid \dot{x}(t) = X_H^t(x(t))\}.$$

Cet ensemble est en bijection avec un sous-ensemble des points de $L \cap (\phi_H^1)^{-1}(L')$ (et donc avec un sous-ensemble de $\phi_H^1(L) \cap L'$), puisque

$$\dot{x}(t) = X_H^t(x(t)) \text{ ssi } x(t) = \phi_H^t(x(0)) \text{ ssi } x(0) \in L \cap (\phi_H^1)^{-1}(L').$$

Remarquons que $\phi_H^1(L) \cap L'$ est de cardinalité finie par les hypothèses de transversalité et de compacité que nous avons faites.

Une application lisse $u : \mathbb{R} \times I \rightarrow M$ vérifiant l'équation

$$\bar{\partial}_{J, H}(u) := \partial_s u + J_t(u)(\partial_t u - X_H^t(u)) = 0 \quad (1.2.5)$$

et telle que $u(\mathbb{R}, 0) \subset L$ et $u(\mathbb{R}, 1) \subset L'$ est dite *trajectoire de Floer*. On définit l'ensemble

$$\mathcal{S}(L, L') := \{u \in C^\infty(\mathbb{R} \times I, M) \mid u(\mathbb{R}, 0) \subset L, u(\mathbb{R}, 1) \subset L'\}$$

et pour x et $y \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, fixés

$$\mathcal{S}_{x, y}(L, L') := \{u \in \mathcal{S}(L, L') \mid u(-\infty, -) = x, u(+\infty, -) = y\}.$$

On définit l'*énergie* d'une application lisse $u \in \mathcal{S}(L, L')$ par la formule :

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_I \int_{\mathbb{R}} (\|\partial_s u\|^2 + \|\partial_t u - X_H^t(u)\|^2) ds dt$$

où $\|-\|$ est la norme induite par la métrique $g(-, -) = \omega(-, J-)$. Lorsque u est une trajectoire de Floer i.e. qu'elle vérifie l'équation (1.2.5), l'énergie s'exprime également

$$E(u) = \int_{\mathbb{R} \times I} \|\partial_s u\|^2.$$

Une trajectoire de Floer u est d'énergie finie si et seulement s'il existe des orbites x et y de l'hamiltonien telles que $u(-\infty, -) = x$ et $u(+\infty, -) = y$. Dans un tel cas, l'énergie de u mesure la différence d'action entre ses extrémités, i.e.

$$E(u) = \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y). \quad (1.2.6)$$

Notons que cette égalité implique en particulier que la valeur de la fonctionnelle action décroît strictement le long des trajectoires de Floer, puisque l'énergie d'une trajectoire de Floer non constante est une quantité strictement positive.

On définit les espaces de modules des trajectoires de Floer d'énergie finie

$$\widehat{\mathcal{M}}(L, L'; H, J) := \{u \in \mathcal{S}(L, L') \mid E(u) < \infty, \bar{\partial}_{J,H}(u) = 0\}$$

et pour x et $y \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, fixés

$$\widehat{\mathcal{M}}_{x,y}(L, L'; H, J) := \{u \in \widehat{\mathcal{M}}(L, L'; H, J) \mid u(-\infty, -) = x, u(+\infty, -) = y\}.$$

Comme l'énergie d'une trajectoire de Floer est finie si et seulement si elle "relie" deux orbites de l'hamiltonien, il vient l'égalité

$$\widehat{\mathcal{M}}(L, L'; H, J) = \bigcup_{x, y \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \widehat{\mathcal{M}}_{x,y}(L, L'; H, J).$$

\mathbb{R} agit sur ces espaces de modules, par translation le long des trajectoires de Floer, et l'on définit :

$$\mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J) := \widehat{\mathcal{M}}_{x,y}(L, L'; H, J)/\mathbb{R}. \quad (1.2.7)$$

Un couple (H, J) est dit *régulier* si la linéarisation de l'opérateur $\bar{\partial}_{J,H}$ défini par l'équation (1.2.5) est surjective pour tout u de $\widehat{\mathcal{M}}(L, L'; H, J)$. L'ensemble des couples réguliers est de seconde catégorie de Baire et donc le choix d'un tel couple est générique (on pourra, à ce sujet, se référer à [23]). Pour un tel choix, les espaces de modules $\mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J)$ sont des variétés dont la dimension est donnée par l'*indice de Maslov*. Celui-ci est défini comme suit.

Il est bien connu que l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de \mathbb{R}^{2n} , dénoté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$, est isomorphe au quotient $U(n)/O(n)$ et que son groupe fondamental

$\pi_1(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}))$ est isomorphe à \mathbb{Z} . On peut donc associer à $\gamma : S^1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$, sa classe d'homotopie vue comme un élément de \mathbb{Z} , appelé indice de Maslov de γ .

Le sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ constitué des n -plans qui ne sont pas transverses à un lagrangien fixé (par exemple le lagrangien vertical) est une sous-variété singulière de codimension 1 admettant une orientation canonique. D'un point de vue géométrique, le procédé précédent revient en fait à compter (avec signes) le nombre d'intersections entre cette sous-variété singulière et l'image du lacet γ . Il nous reste à associer à deux orbites de H un tel lacet.

Les orbites x_0 et $x_1 \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$ étant données, on choisit $u \in \mathcal{S}_{x_0, x_1}(L, L')$ et on trivialisise u^*TM . On construit alors un lacet γ en le décomposant comme suit (voir aussi la figure 1.1) :

- $\gamma_i(t) = (\phi_H^t)_*^{-1} T_{x_i(1)} L'$, qui en tout t , donne un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$, identifié à un sous-espace de $T_{x_i(1-t)} M$, avec $\gamma_i(0) = T_{x_i(1)} L'$ et $\gamma_i(1)$ transverse à $T_{x_i(0)} L = T_{u(0,0)} L$, pour $i \in \{0, 1\}$,
- on relie $\gamma_0(1)$ à $\gamma_1(1)$ par un chemin γ' tel que, en tout t , $\gamma'(t) \subset T_{u(t,0)} M$ soit transverse à $T_{u(t,0)} L$,
- et on relie $\gamma_0(0)$ à $\gamma_1(0)$ par le chemin $\gamma''(t) = T_{u(1-t,1)} L'$.

Le lacet γ , défini comme la concaténation $\gamma_0 \# \gamma' \# (-\gamma_1) \# \gamma''$, est le lacet de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ utilisé pour le calcul de l'indice de Maslov [39].

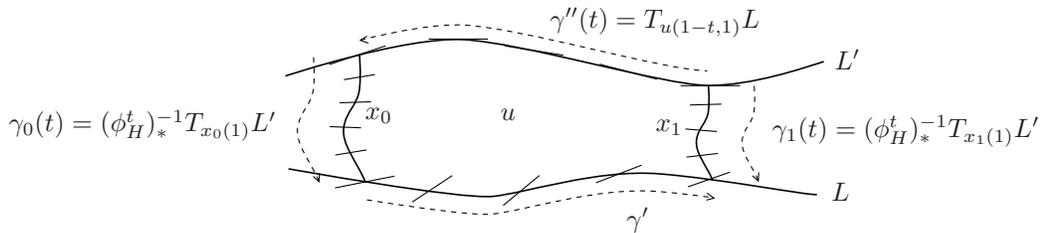


FIG. 1.1. Définition de l'indice de maslov

Le résultat obtenu ne dépend pas de la trivialisisation ni du choix de γ' puisque deux telles trivialisations sont homotopes et que l'on demande à γ' d'être constamment transverse à $T_{u(t,0)} L$.

Nous supposons tout au long de ce texte que

$$\mu|_{\pi_2(M,L)} = 0. \quad (1.2.8)$$

Cette condition nous assure que, pour u et $v \in \mathcal{S}(x_0, x_1)$, $\mu(u) = \mu(v)$. On peut donc définir $\mu(x_0, x_1) := \mu(w)$, pour un quelconque $w \in \mathcal{S}_{x_0, x_1}(L, L')$. L'application μ étant additive, au sens où pour x, y et $z \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$,

$$\mu(x, z) = \mu(x, y) + \mu(y, z),$$

on fixe un élément $z_0 \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$ et on définit $\mu(x)$, pour tout élément x de $\mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, comme étant $\mu(x, z_0)$.

Remarque 1.6. A nouveau, il est important de remarquer (à l'instar de la remarque 1.5 où nous discutons le changement de référence de l'action), qu'un changement de référence pour l'indice de Maslov (z_0 remplacé par z'_0) entraîne une translation des indices de tous les éléments de $\mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, par la constante $\delta = \mu(z_0, z'_0)$. A nouveau, ce choix sera souvent sous-entendu, et mis en évidence lors des passages où il est crucial de le faire judicieusement (morphisme PSS §1.3.3, morphisme de naturalité §1.3.2 et commutativité du diagramme (4.1.8) par exemple).

La condition de régularité de la paire (H, J) et la définition de l'indice de Maslov, combinées à des arguments de théorie de Fredholm, permettent de conclure que $\mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J)$ est une variété lisse de dimension $\mu(x) - \mu(y) - 1$. En outre, leur composante de dimension strictement positive n'est pas compacte en général mais admet une compactification. Celle-ci provient du théorème de compacité de Gromov qui décrit les limites de suites d'éléments de tels espaces de module. Dans la mesure où les notations nécessaires sont extrêmement lourdes, nous le décrivons ici de manière heuristique, pour une description précise, on pourra consulter [14] ou [16].

Lorsque la dimension de l'espace de modules $\mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J)$ est 1, et que l'on étudie une suite de telles trajectoires de Floer $\{u_n\}$, dont la suite des énergies est bornée (i.e. pour tout n , $E(u_n) < c < \infty$), convergeant vers u , un élément de son bord, u peut être de trois types différents (voir la figure 1.2 dans le cas où $L = L'$) :

- A. u est une trajectoire de Floer brisée (similaire au cas Morse),
- B. u est une trajectoire de Floer sur laquelle une sphère est attachée,
- C. u est une trajectoire de Floer à laquelle est attaché un disque à bord dans L ou L' .

Les cas B. et C. témoignent du phénomène de "bubbling".

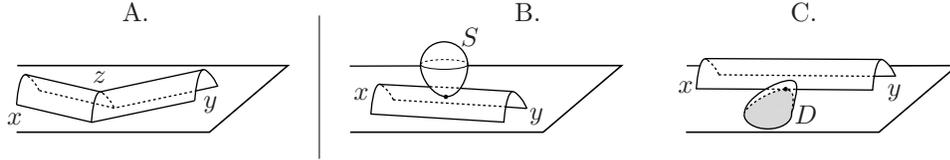


FIG. 1.2. Théorème de Gromov : bord de $\mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J)$

Sous nos hypothèses, il vient :

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_{x,y}(L, L'; H, J) = \bigcup_{z \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \overline{\mathcal{M}}_{x,z}(L, L'; H, J) \times \overline{\mathcal{M}}_{z,y}(L, L'; H, J). \quad (1.2.9)$$

En effet, la condition (1.2.1) interdit tout bubbling dans la mesure où l'on ne peut obtenir ni disque pseudo-holomorphe à bord dans L ou L' , ni sphère pseudo-holomorphe sur les demi-tubes limites. On peut alors conclure par le théorème de Gromov et le processus de recollement de trajectoires de Floer (pour une description de ce processus dans le cas où $\mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J) > 1$, on peut se référer à [5]).

On définit alors le complexe de chaînes $(CF_*(L, L'; \eta; H, J), \partial)$, en posant pour espaces vectoriels

$$CF_k(L, L'; \eta; H, J) := \langle x \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H) \mid \mu(x) = k \rangle_{\mathbb{Z}_2}$$

et comme différentielle l'application linéaire dont l'action sur la base est

$$\partial(x) = \sum_{y \mid \mu(y) = \mu(x) - 1} \#_2 \mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J) \cdot y. \quad (1.2.10)$$

La formule (1.2.9) assure que $\partial \circ \partial = 0$. Prendre l'homologie de ce complexe de chaînes donne alors l'*homologie de Floer lagrangienne* de M relativement aux lagrangiens L et L' :

$$HF_*(L, L'; \eta; H, J) := H(CF_*(L, L'; \eta; H, J), \partial)$$

Remarque 1.7. Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette homologie ne dépend pas de la paire régulière (H, J) choisie par la démonstration classique (§1.3.1). De plus, sous nos hypothèses nous verrons que cette homologie est l'homologie de L (§1.3.3).

1.2.3. Le cas des fibrés cotangents

Comme le suggère le théorème de Weinstein (théorème 1.4 ci-dessus), les fibrés cotangents de variétés sont des variétés symplectiques particulièrement intéressantes lors de l'étude des sous-variétés lagrangiennes. En outre, sans rentrer dans les détails, il nous faut également signaler que du point de vue de la Physique, ces espaces apparaissent de manière naturelle comme espaces de phase. Finalement, ils font également apparaître un autre lien profond entre les homologies de Morse et de Floer.

Nous détaillons ici ce cas particulier. Dans un premier temps, nous montrons qu'il vérifie chacune des hypothèses que nous avons imposées (§1.2.3.1). On peut se référer à [23] pour plus de détails encore. Dans un second temps, nous décrivons une identification entre les complexes de Morse et de Floer (§1.2.3.2). Cette identification est due à Floer [9].

1.2.3.1. Structure symplectique, lagrangiens, convexité et π_2 relatif

Etant donnée une variété lisse et fermée (compacte et sans bord), M , rappelons que son fibré cotangent T^*M est le fibré vectoriel "dual" de son fibré tangent TM i.e. T^*M est le fibré $\pi : T^*M \rightarrow M$ dont la fibre en un point $p \in M$, T_p^*M est l'ensemble des 1-formes de T_pM (applications linéaires de T_pM dans \mathbb{R}). Ce fibré vectoriel admet la 1-forme privilégiée suivante.

Définition 1.8. On appelle *forme de Liouville* de T^*M la 1-forme donnée par

$$\lambda_\xi(v) := \xi(d_\xi\pi(v)),$$

pour tout $\xi \in T^*M$ et tout $v \in T_\xi(T^*M)$.

Autrement dit, pour $\xi \in T^*M$ fixé, la forme de Liouville induit une forme linéaire sur $T_\xi(T^*M)$ qui est la composition

$$\lambda_\xi : T_\xi(T^*M) \xrightarrow{d_\xi\pi} T_{\pi(\xi)}M \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}$$

où $d_\xi\pi$ est la différentielle de la projection $\pi : T^*M \rightarrow M$ au point ξ . Donnons à présent une description de l'espace tangent à T^*M permettant de simplifier les écritures.

Lemme 1.9. *Il existe un isomorphisme (non canonique) :*

$$T(T^*M) \simeq TM \oplus T^*M \tag{1.2.11}$$

*provenant de la donnée d'une connexion sur T^*M .*

La démonstration de ce lemme va comme suit. Etant donnée une métrique g sur M , il existe sur TM une connexion dite de Levi–Civita ∇ . Soit ξ un élément de T^*M , la fibre $T_\xi(T_{\pi(\xi)}M) \simeq \ker(d_\xi\pi)$ est dite espace vertical de $T_\xi(T^*M)$. Posons $p := \pi(\xi) \in M$. Si l'on se donne une section locale $s : M \rightarrow T^*M$ telle que $s(p) = \xi$ et $\nabla_X s = 0$ pour tout vecteur $X \in T_pM$, la partie horizontale de $T_\xi(T^*M)$ est définie comme l'image de $d_p s$. Il vient donc

$$T_\xi(T^*M) = d_p s(T_pM) \oplus \ker(d_\xi\pi) \simeq T_pM \oplus T_p^*M \tag{1.2.12}$$

puisque $d_p s$ est injective (par la propriété définissant une section $\pi \circ s = \text{id}_M$).

Remarque 1.10. On a choisi ici la connexion de Levi–Civita, ce qui n'intervient pas à ce niveau mais sera intéressant par la suite.

La condition $\nabla_X s = 0$, pour tout X , assure l'indépendance de la décomposition vis-à-vis du choix de la section utilisée (elle ne dépend donc que de la dérivée covariante, ∇ , choisie).

Cette décomposition nous permet d'écrire tout vecteur tangent $v_\xi \in T_\xi(T^*M)$ (avec $p = \pi(\xi) \in M$) s'écrit $v^{\text{hori}} \oplus v^{\text{vert}}$ et de l'identifier à un couple (v, w^*) avec

$v \in T_p M$ et $w \in T_p^* M$. Le vecteur v est alors donné par $d_\xi \pi(v_\xi)$ et le vecteur v^{hori} par $d_p s(v)$.

En vue de cette décomposition, la forme de Liouville s'exprime donc par la formule $\lambda_\xi(v, w^*) := \xi(v)$.

Une autre caractérisation de la forme de Liouville est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.11. *La forme de Liouville est l'unique 1-forme de T^*M telle que pour toute 1-forme α de M , $\alpha^* \lambda = \alpha$.*

En effet, pour tout point p de M et tout vecteur v de $T_p M$, on a

$$\begin{aligned} (\alpha^* \lambda)_p(v) &= \lambda_{\alpha_p}(d_p \alpha(v)) \\ &= \alpha_p(d_{\alpha_p} \pi \circ d_p \alpha(v)) = \alpha_p(v) \end{aligned}$$

puisque $\pi \circ \alpha = \text{id}$ et donc $d_{\alpha_p} \pi \circ d_p \alpha(v) = d_p(\pi \circ \alpha)(v) = v$.

Vient à présent la définition de la *structure symplectique canonique* donnée sur le fibré cotangent.

Lemme 1.12. *L'espace total du fibré cotangent T^*M , muni de la 2-forme donnée comme l'opposé de la différentielle de la forme de Liouville, $\omega := -d\lambda$, est une variété symplectique. De plus, la section nulle de T^*M en est une sous-variété lagrangienne.*

La démonstration de ce lemme est complètement évidente lorsque l'on écrit la forme de Liouville en coordonnées locales. De plus, la 2-forme ainsi définie est donnée explicitement, après l'identification (1.2.11) par la formule

$$\omega((v, w^*), (r, s^*)) = s^*(v) - w^*(r).$$

Remarquons également que le lemme 1.11 donne immédiatement que

$$\alpha^* \omega = \alpha^*(-d\lambda) = -d(\alpha^* \lambda) = -d\alpha.$$

Ceci conduit au lemme suivant.

Lemme 1.13. *Le graphe d'une 1-forme α est une sous-variété lagrangienne de (T^*M, ω) si et seulement si α est fermée.*

Finalement, pour achever de justifier le fait que cette classe d'espaces fournit bien des exemples de variétés symplectiques entrant dans le cadre que nous nous sommes fixés ici, il nous reste à démontrer le lemme suivant.

Lemme 1.14. *L'espace total T^*M est convexe à l'infini. De plus, le deuxième groupe d'homotopie relatif de T^*M par rapport à la section nulle $(T^*M)_0 \simeq M$ est nul.*

La convexité à l'infini est facilement démontrée via le lemme 1.3. En effet, le champ de vecteurs radial dans les fibres de T^*M est un champ de Liouville défini globalement sur T^*M . Ce champ de vecteurs X est donné par l'intermédiaire de l'identification (1.2.12) par

$$X(\xi) := 0 \oplus \xi \in T_p L \oplus T_p^* L \simeq T_\xi(T^*L)$$

pour tout $\xi \in T^*L$. La formule de Cartan nous donne

$$\mathcal{L}_X \omega = d(\iota_X \omega) + \iota_X d\omega = d(\iota_X \omega)$$

puisque ω est fermée. De plus en $\xi \in T^*L$, pour tout $v = v^{\text{hori}} \oplus v^{\text{vert}}$,

$$\begin{aligned} (\iota_X \omega)_\xi(v) &= \omega(X(\xi), v) = v^{\text{vert}}(X(\xi)^{\text{hori}}) - X(\xi)^{\text{vert}}(v^{\text{hori}}) \\ &= -\xi(v^{\text{hori}}) = -\lambda_\xi(v). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\mathcal{L}_X \omega = d(\iota_X \omega) = d(-\lambda) = \omega.$$

En ce qui concerne le second groupe d'homotopie relatif, ceci est vrai dans le cas général des fibrés vectoriels. En effet, l'espace total E se rétracte sur la section nulle B impliquant en particulier que l'espace total et sa section nulle ont

même type d’homotopie. La longue suite exacte (en homotopie) de paire donne la trivialité des groupes d’homotopies $\pi_n(E, B)$. Dans notre cas, $\pi_2(T^*M, M) = 0$.

En particulier, pour les fibrés cotangents, les hypothèses (1.2.1) et (1.2.8) sont vérifiées. Ils satisfont donc toutes les conditions que nous avons imposées jusqu’à présent et sont par conséquent d’excellents candidats pour ce que nous étudions par la suite.

1.2.3.2. *Isomorphisme entre homologies de Morse et de Floer*

La construction suivante a été introduite par Floer [9]. Elle met en évidence un lien étroit entre les homologies de Morse et de Floer dans le cas des fibrés cotangents. Si l’on se donne une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sa différentielle est une 1-forme exacte et son graphe, Γ_{df} , est par conséquent (lemme 1.13) une sous-variété lagrangienne de T^*M . Les points critiques de f correspondent alors aux points d’intersection de la section nulle et de Γ_{df} . De plus, la condition de non dégénérescence de la hessienne de f en chacun de ses points critiques correspond à la transversalité de cette intersection.

On se donne une métrique g sur M telle que la paire (f, g) soit Morse–Smale. Cette métrique induit une décomposition du type (1.2.12) via la connexion de Levi–Civita qui lui est associée. Elle induit une métrique sur T^*M (également notée g) par la formule

$$g_\xi((v, w), (v', w')) = g_{\pi(\xi)}(v, v') + g_{\pi(\xi)}(w^\#, w'^\#)$$

pour tout $\xi \in T^*M$ et tout (v, w) et $(v', w') \in T_\xi(T^*M)$. La notation $\#$ indique ici l’isomorphisme entre les fibres T_pM et T_p^*M donné par la non dégénérescence de la métrique g . La transformation inverse est notée \flat . Ces isomorphismes (dits musicaux) sont définis par

$$g_p(w^\#, -) = w \text{ et } g_p(v, -) = v^\flat.$$

Remarquons que g s’écrit alors

$$g_\xi((v, w), (v', w')) = v^\flat(v') + w(w'^\#).$$

Avec ces notations, on définit la structure presque complexe J sur $T(T^*M)$ par

$$J(v, w) := (-w^\#, v^\flat)$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \omega((v, w), J(v', w')) &= \omega((v, w), (-w'^\#, v'^\flat)) \\ &= v^\flat(v) - w(-w'^\#) = g((v, w), (v', w')) \end{aligned}$$

puisque $v^\flat(v) = g(v', v) = g(v, v') = v^\flat(v')$.

Considérons à présent une ligne de flot de f , γ , "reliant" deux de ses points critiques x et y . Celle-ci vérifie :

$$g(\partial_s(\gamma(s)), -) = -d_{\gamma(s)}f(-) \quad \text{et} \quad \gamma(-\infty) = x, \gamma(+\infty) = y.$$

Définissons l'hamiltonien $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule $H(\xi) := f(\pi(\xi))$ (on rappelle que π est la projection du fibré cotangent). Cet hamiltonien induit un champ de vecteurs X_H induisant à son tour une famille à un paramètre de symplectomorphismes ϕ_H^t . Ceux-ci permettent de définir une famille à un paramètre de structures presque complexes J_t par $J_t := d\phi_H^t \circ J \circ (d\phi_H^t)^{-1}$.

On définit alors $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow T^*M$ par $u(s, t) := \phi_H^t(\gamma(s))$. Comme le champ de vecteurs hamiltonien est indépendant du temps, il vient

$$\partial_s u + J_t \partial_t u = 0.$$

De plus, elle vérifie

$$\begin{aligned} u(s, 0) &= (\gamma(s), 0) \in M, \quad u(s, 1) = (\gamma(s), d_{\gamma(s)}f) \in \Gamma_{df} \quad \text{et} \\ u(-\infty, t) &= (x, 0), \quad u(+\infty, t) = (y, 0) \end{aligned}$$

i.e. $u \in \mathcal{M}_{x,y}(0, J_t)$. Parallèlement Floer montre que si f est C^2 -petite, cette application associant à une ligne de flot de f une telle trajectoire de Floer est surjective. En particulier, les générateurs et les différentielles des complexes $CM_*(M; f, g)$ et $CF_*(M, \Gamma_{df}; 0, J_t)$ sont identifiés. On obtient par là-même un isomorphisme entre

les homologies respectives.

L'action définie par la formule (1.2.2) vérifie de plus la propriété suivante :

$$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y) = f(x) - f(y). \quad (1.2.13)$$

Pour cela, on calcule l'énergie de la courbe u définie ci-dessus.

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} u^* \omega = \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} u^* (-d\lambda) \\ &= - \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} d(u^* \lambda) \end{aligned}$$

Par le théorème de Stokes, on sait que cette quantité est égale à l'intégrale de la forme de Liouville sur le bord du domaine. De plus cette forme est identiquement nulle sur la section nulle et pour tout s , $\phi_H^1(\gamma(s)) = d_{\gamma(s)} f$. On obtient donc

$$\begin{aligned} E(u) &= - \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d_{\gamma(s)} f}(\partial_s \gamma(s)) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} df(\partial_s \gamma(s)) \\ &= f(x) - f(y) \end{aligned}$$

On conclut par la formule (1.2.6).

Cet isomorphisme et l'égalité (1.2.13) vont nous permettre de transporter de manière immédiate des résultats de "type Morse" en résultats de "type Floer" (ceci sera utilisé pour construire des exemples – voir les remarques 3.30 et 4.30 des §3.3.2 et §4.2.1).

1.3. MORPHISMES DE COMPARAISON

1.3.1. Le morphisme de comparaison classique

Ce morphisme, construit au niveau des complexes de chaînes, induit un isomorphisme en homologie. Celui-ci implique l'indépendance de l'homologie de Floer lagrangienne par rapport à la paire régulière (H, J) choisie. Il existe une version de ce morphisme en théorie de Morse, comme évoqué en remarque 1.2.

On se donne $H^{01} : \mathbb{R} \times ([0, 1] \times M) \rightarrow \mathbb{R}$ et $J^{01} : \mathbb{R} \times M \rightarrow \text{End}(TM)$ respectivement deux familles d'hamiltoniens et de structures presque complexes ω -compatibles, telles qu'il existe un réel R vérifiant

$$\forall s \leq -R, (H_s^{01}, J_s^{01}) = (H_0, J_0) \text{ et } \forall s \geq R, (H_s^{01}, J_s^{01}) = (H_1, J_1)$$

(on note H_s^{01} pour $H^{01}(s, -, -)$ et J_s^{01} pour $J^{01}(s, -)$). De plus on demande l'existence d'un compact contenant les supports de tous ces hamiltoniens. La famille H^{01} induit un champ de vecteurs $X^{01} : \mathbb{R} \times [0, 1] \times M \rightarrow TM$ tel que

$$\forall s, t, x, \xi, \quad \omega(X^{01}(s, t, x), \xi) = -d_x H_s^{01}(t, x)(\xi)$$

dont le "flot" est la famille de symplectomorphismes $\phi^{01} : \mathbb{R} \times [0, 1] \times M \rightarrow M$ vérifiant

$$\forall s, t, x, \quad \partial_t \phi^{01}(s, t, x) = X^{01}(s, t, \phi^{01}(s, t, x)).$$

L'équation satisfaite par les trajectoires de Floer (1.2.5) devient dans ce cas

$$\bar{\partial}_{H^{01}, J^{01}}(u) = \partial_s u(s, t) + J_s^{01}(u(s, t)) \partial_t u(s, t) + \nabla_x^s H_s^{01}(t, u(s, t)) = 0. \quad (1.3.1)$$

Dans cette formule, $\nabla_x^s H^{01}$ désigne le gradient induit par la métrique associée à J_s^{01} . Il vérifie $\nabla_x^s H_s^{01}(t, x) = -J_s^{01}(x)(X^{01}(s, t, x))$. Le fait que leur énergie soit finie est à nouveau équivalent à l'existence d'orbites vers lesquelles $u : \mathbb{R} \times I \rightarrow M$ converge quand le paramètre s tend vers $\pm\infty$. On définit les espaces de modules

$$\mathcal{M}_{x_0, y_1}(L, L'; H^{01}, J^{01}) := \left\{ u : \mathbb{R} \times I \rightarrow M \left| \begin{array}{l} \bar{\partial}_{H^{01}, J^{01}}(u) = 0, \\ u(\mathbb{R}, 0) \subset L, u(\mathbb{R}, 1) \subset L', \\ u(-\infty, -) = x_0, u(+\infty, -) = y_1 \end{array} \right. \right\}. \quad (1.3.2)$$

La paire (H^{01}, J^{01}) est dite régulière si la linéarisation de l'opérateur $\bar{\partial}_{H^{01}, J^{01}}$ défini par (1.3.1) est surjectif en tout $u \in \mathcal{M}_{x_0, y_1}(L, L'; H^{01}, J^{01})$. Pour un tel choix de paire régulière, ces espaces de modules sont des variétés de dimension $\mu(x_0, y_1)$

(adapté), compactifiables (Gromov) de sorte que $\partial\overline{\mathcal{M}}_{x_0,y_1}(L, L'; H^{01}, J^{01})$ soit l'union disjointe

$$\begin{aligned} & \bigcup_{y_0 \in \mathcal{I}_0} \overline{\mathcal{M}}_{x_0,y_0}(L, L'; H_0, J_0) \times \overline{\mathcal{M}}_{y_0,y_1}(L, L'; H^{01}, J^{01}) \\ & \bigcup_{x_1 \in \mathcal{I}_1} \overline{\mathcal{M}}_{x_0,x_1}(L, L'; H^{01}, J^{01}) \times \overline{\mathcal{M}}_{x_1,y_1}(L, L'; H_1, J_1) \end{aligned}$$

où $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}(L, L'; \eta, H_i)$, pour $i = 0, 1$. La formule

$$\psi^{01}(x_0) := \sum_{y_1 \in \mathcal{I}_1 \mid \mu(x_0, y_1) = 1} \#_2 \mathcal{M}_{x_0, y_1}(L, L'; H^{01}, J^{01}) \cdot y_1$$

définit un morphisme de complexes de chaînes qui induit un morphisme

$$\psi^{01} : HF_*(L, L'; H_0, J_0) \rightarrow HF_*(L, L'; H_1, J_1)$$

en homologie. La figure 1.3 illustre les espaces de modules $\overline{\mathcal{M}}_{x_0,y_1}(L, L'; H^{01}, J^{01})$ et leur bord.

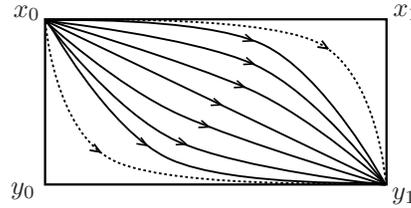


FIG. 1.3. Principe du morphisme de comparaison

Remarque 1.15. On peut montrer que ce morphisme est canonique au sens où il est indépendant de la paire (H^{01}, J^{01}) choisie. Pour cela, on considère une homotopie entre deux telles homotopies et on réitère le processus décrit ci-dessus (avec un paramètre supplémentaire).

On peut ensuite montrer que composer deux tels morphismes est équivalent à construire le morphisme de comparaison associé à la concaténation des homotopies. On peut enfin montrer qu'utiliser l'homotopie constante donne l'identité sur le complexe. En particulier, on en déduit que c'est isomorphisme en homologie.

1.3.2. Le morphisme de naturalité

Ce morphisme est bien connu et est décrit en particulier dans [5]. Il identifie les générateurs des complexes $CF_*(L, L'; H, J)$ et $CF_*(L, L''; 0, \tilde{J})$, avec $L'' := (\phi_H^1)^{-1}(L')$ et $\tilde{J} := \phi_H^* J$, et préserve l'action.

On définit tout d'abord

$$b_H : \begin{cases} \mathcal{P}(L, L'') & \rightarrow \mathcal{P}(L, L') \\ x & \mapsto [t \mapsto \phi_H^t(x(t))] \end{cases} .$$

Ceci induit une application $b_H : \mathcal{P}_{\eta'}(L, L'') \rightarrow \mathcal{P}_{\eta}(L, L')$, où $\eta' \in \mathcal{P}(L, L'')$ satisfait $\eta = b_H(\eta')$. Comme l'intersection $L \cap L''$ est transverse, b_H identifie $\mathcal{I}(L, L''; \eta', 0)$ et $\mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$.

Pour tout $u \in \mathcal{M}_{x,y}(L, L''; 0, \tilde{J})$, on définit \tilde{u} par $\tilde{u}(s, t) := \phi_H^t(u(s, t))$. Le lemme suivant repose sur un calcul et justifie que l'on puisse comparer les homologies de Floer lagrangiennes calculées pour les paires (H, J) et $(0, \tilde{J})$. De plus, il est la première étape dans l'identification des espaces de modules qui définissent les différentielles des deux complexes.

Lemme 1.16. *(H, J) est une paire régulière si et seulement si $(0, \tilde{J})$ est régulière. De plus, pour tout $u \in \mathcal{M}_{x,y}(L, L''; H, J)$, $\bar{\partial}_{J,H}(\tilde{u}) = (\phi_H)_*(\bar{\partial}_{\tilde{J},0}(u))$.*

Les conditions aux frontières pour u et \tilde{u} correspondent évidemment. Il nous reste, pour identifier les différentielles à montrer que l'énergie est conservée.

Lemme 1.17. *Le morphisme de naturalité préserve l'action des générateurs au sens où $\mathcal{A}'_H(b_H(x)) = \mathcal{A}'_0(x)$, pour tout $x \in \mathcal{I}(L, L''; \eta', 0)$.*

Pour ce lemme, l'action doit être normalisée et est donc définie par la formule (1.2.4). Ceci provient d'un simple calcul que nous effectuons ici *pour illustrer le choix de normalisation de l'action effectué* (voir la remarque 1.5).

Démonstration. On exprime $\mathcal{A}'_0(x)$. Pour cela on se donne une application $\bar{x} : \mathbb{R} \times I \rightarrow M$ satisfaisant les conditions (1.2.3) i.e. telle que $\bar{x}(-\infty, t) = \eta(t)$, $\bar{x}(+\infty, t) = x(t)$, $\bar{x}(\mathbb{R}, 0) \subset L$ et $\bar{x}(\mathbb{R}, 1) \subset L''$. Il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_0(x) &= - \int \bar{x}^* \omega = - \int \omega(\partial_s \bar{x}, \partial_t \bar{x}) \\ &= - \int \omega(d\phi_H^t(\partial_s \bar{x}), d\phi_H^t(\partial_t \bar{x})) \end{aligned}$$

puisque ϕ_H^t est un symplectomorphisme. On utilise ensuite que

$$\begin{aligned} \partial_s(\phi_H^t(\bar{x})) &= d\phi_H^t(\partial_s \bar{x}) \\ \partial_t(\phi_H^t(\bar{x})) &= d\phi_H^t(\partial_t \bar{x}) + \partial_t \phi_H^t(\bar{x}) \\ &= d\phi_H^t(\partial_t \bar{x}) + X_H^t(\phi_H^t(\bar{x})) \end{aligned}$$

et que $b_H(\bar{x}) = \phi_H^t(\bar{x}) = \overline{b_H(x)}$ (i.e. vérifie les conditions (1.2.3) pour $b_H(x)$). On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_0(x) &= - \int \overline{b_H(x)}^* \omega + \int \omega(\partial_s \bar{x}, X_H^t(\phi_H^t(\bar{x}))) \\ &= - \int \overline{b_H(x)}^* \omega + \int d_{\phi_H^t(\bar{x})} H_t(\partial_s(\phi_H^t(\bar{x}))) \\ &= - \int \overline{b_H(x)}^* \omega + \int \partial_s [H_t(\phi_H^t(\bar{x}))] \end{aligned}$$

On intègre finalement le second terme du membre de droite par rapport à s

$$\int_{\mathbb{R} \times I} \partial_s [H_t(\phi_H^t(\bar{x}))] ds dt = \int_I (H_t(\phi_H^t(x(t))) - H_t(\phi_H^t(\eta(t)))) dt$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_0(x) &= - \int \overline{b_H(x)}^* \omega + \int H_t(b_H(x)) - \int H_t(\eta') \\ &= \mathcal{A}'_H(x) \end{aligned}$$

L'action est donc préservée. □

Un corollaire immédiat de ce lemme et de la formule (1.2.6) est qu'il en va de même pour l'énergie des trajectoires de Floer se correspondant. Il vient donc que l'application b_H induit une bijection

$$b_H : \mathcal{M}_{x,y}(L, L''; 0, \tilde{J}) \rightarrow \mathcal{M}_{b_H(x), b_H(y)}(L, L'; H, J)$$

qui donne le morphisme désiré :

$$b_H : CF_*(L, (\phi_H^1)^{-1}(L'); \eta'; 0, \phi_H^* J) \rightarrow CF_*(L, L'; \eta; H, J).$$

Remarque 1.18. L'action est préservée pour un bon choix de références η et η' telles que $b_H(\eta') = \eta$. Il y a également ici la nécessité d'un choix cohérent pour les deux références de l'indice de Maslov. On prend donc (pour que le morphisme de naturalité préserve les degrés) des références $z'_0 \in \mathcal{I}(L, L''; \eta', 0)$ et $z_0 \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$ telles que $b_H(z'_0) = z_0$.

1.3.3. Le morphisme de type PSS lagrangien

Le morphisme PSS hamiltonien introduit par Piunikhin, Salamon et Schwarz [31] a été adapté au contexte des intersections lagrangiennes, dans le cas des fibrés cotangents par Katić et Milinković [18] et en toute généralité par Barraud et Cornea [4], et Albers [2]. Ce morphisme compare les complexes de Morse et de Floer et induit un isomorphisme en homologie (sous nos hypothèses).

On se donne à nouveau une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique (M, ω) , munie d'une paire (f, g) de Morse–Smale. On choisit (H, J) une paire régulière sur M (ces choix étant génériques).

A $p \in \text{Crit}(f)$ et $x \in \mathcal{I}(L, L; \eta, H)$, sont associés les espaces de modules

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p^f(g) &:= \left\{ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow L \mid -\nabla f(\gamma(t)) = \frac{d\gamma(t)}{dt}, \gamma(-\infty) = p \right\} = \mathcal{W}_p^u(f, g) \\ \mathcal{M}_x^H(J) &:= \left\{ u : \mathbb{R} \times I \rightarrow M \mid \begin{array}{l} \partial_s u + J\partial_t u + \beta(s)\nabla H(u) = 0 \\ u(+\infty, t) = x(t), u(\mathbb{R}, \{0, 1\}) \subset L \end{array} \right\} \end{aligned}$$

où $\beta(s)$ est une fonction lisse, croissante valant 0 pour $s \leq 1/2$ et 1 pour $s \geq 1$. Pour nos choix de paires (f, g) et (H, J) , $\mathcal{M}_x^H(J)$ est une variété lisse de dimension $\mu(x)$ et

$$\mathcal{M}_{p,x}^{f,H} := \{ (\gamma, u) \in \mathcal{M}_p^f(g) \times \mathcal{M}_x^H(J) \mid u(-\infty, -) = \gamma(0) \}$$

une variété lisse de dimension $(i_f(p) - \mu(x))$ (ceci requiert un choix particulier de z_0 , la référence de l'indice de Maslov). La composante de dimension 0 de ces espaces de modules est compacte tandis que celle de dimension 1 admet une compactification telle que (voir la figure 1.4)

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_{p,x}^{f,H} = \bigcup_{p' \in \text{Crit}(f)} \mathcal{M}_{p,p'}(f,g) \times \mathcal{M}_{p',x}^{f,H} \quad (1.3.3)$$

$$\bigcup_{x' \in \mathcal{I}(L,L;\eta,H)} \mathcal{M}_{p,x'}^{f,H} \times \mathcal{M}_{x',x}(L,L;H,J) \quad (1.3.4)$$

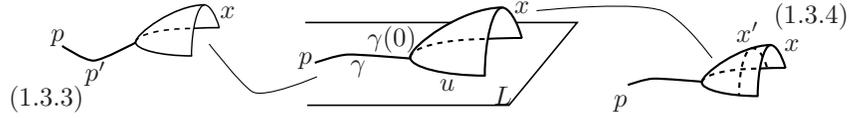


FIG. 1.4. Définition du morphisme PSS lagrangien

Le morphisme $\phi_f^H : CM_*(L; f, g) \rightarrow CF_*(L, L; H, J)$, défini sur les générateurs par la formule

$$\phi_f^H(p) := \sum_{x \mid \mu(x) = i_f(p)} \#_2 \mathcal{M}_{p,x}^{f,H} \cdot x$$

induit un morphisme $\phi_f^H : HM_*(L; f, g) \rightarrow HF_*(L, L; H, J)$. De manière similaire, les espaces de modules

$$\mathcal{M}_f^q(g) := \left\{ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow L \mid -\nabla f(\gamma(t)) = \frac{d\gamma(t)}{dt}, \gamma(+\infty) = q \right\} = \mathcal{W}_q^s(f, g),$$

$$\mathcal{M}_H^y(J) := \left\{ u : \mathbb{R} \times I \rightarrow M \mid \begin{array}{l} \partial_s u + J \partial_t u + \beta(-s) \nabla H(u) = 0 \\ u(-\infty, t) = y(t), u(\mathbb{R}, \{0, 1\}) \subset L \end{array} \right\} \text{ et}$$

$$\mathcal{M}_{H,f}^{y,q} := \{ (u, \gamma) \in \mathcal{M}_H^y(J) \times \mathcal{M}_f^q(g) \mid \gamma(0) = u(+\infty, -) \}$$

permettent de définir

$$\psi_H^f(y) := \sum_{q \mid i_f(q) = \mu(y)} \#_2 \mathcal{M}_{H,f}^{y,q} \cdot q$$

induisant le morphisme $\psi_H^f : HF_*(L, L; H, J) \rightarrow HM_*(L; f, g)$.

Ces deux morphismes commutent avec les morphismes de comparaison classiques des homologies de Morse et de Floer.

Lemme 1.19. *Les diagrammes suivant commutent :*

$$\begin{array}{ccc}
 HF_*(L, L; H_0, J_0) & \xrightarrow{\psi^{01}} & HF_*(L, L; H_1, J_1) \\
 & \searrow \psi_{H_0}^f & \nearrow \phi_f^{H_1} \\
 & HM_*(L; f, g) &
 \end{array} \tag{1.3.5}$$

$$\begin{array}{ccc}
 HM_*(L; f_0, g_0) & \xrightarrow{\psi_{\text{Morse}}^{01}} & HM_*(L; f_1, g_1) \\
 & \searrow \phi_{f_0}^H & \nearrow \psi_H^{f_1} \\
 & HF_*(L, L; H, J) &
 \end{array} \tag{1.3.6}$$

Les cobordismes utilisés pour la preuve sont illustrés par la figure 1.5. Ils sont similaires à ceux utilisés par Albers pour démontrer que les morphismes $\phi_f^H \circ \psi_H^f$ et $\psi_H^f \circ \phi_f^H$ induisent l'identité en homologie (ce qui est une conséquence directe du lemme pour $(H_0, J_0) = (H_1, J_1)$ et $(f_0, g_0) = (f_1, g_1)$).

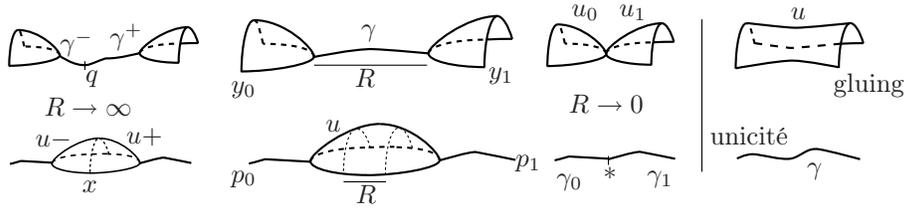


FIG. 1.5. Commutativité des morphismes PSS et de comparaison

DÉMONSTRATION. Nous donnons ici les grandes idées de la preuve dans la mesure où, si le résultat est nouveau, il n'apporte qu'une légère amélioration au résultat bien connu affirmant que le morphisme PSS induit un isomorphisme en homologie (voir [2] et [4]) et les techniques de démonstration sont par conséquent extrêmement similaires.

Diagramme (1.3.5) – On se donne une famille à un paramètre de structures presque complexes $\{J_s^{01}\}_{s \in \mathbb{R}}$, telle que

$$J_s^{01} = J_0 \text{ pour } s \leq -1, \quad J_s^{01} = J \text{ pour } |s| < 1/2 \text{ et } J_s^{01} = J_1 \text{ pour } s \geq 1.$$

A $y_i \in \mathcal{I}(L, L; \eta, H_i)$ ($i = 0, 1$), sont associés les espaces de modules suivants :

$$\mathcal{M}_R^{\phi \circ \psi}(y_0, y_1) := \left\{ \begin{array}{l} (u_0, \gamma, u_1) \in \mathcal{M}_{H_0}^{y_0}(\bar{J}_0) \times C^\infty([0, R], M) \times \mathcal{M}_{y_1}^{H_1}(\bar{J}_1) \\ \left. \begin{array}{l} \nabla f(\gamma(t)) = \frac{d\gamma(t)}{dt} \\ u_0(+\infty) = \gamma(0) \\ u_1(-\infty) = \gamma(R) \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

où \bar{J}_0 et \bar{J}_1 sont deux familles un paramètre de structures presque complexes, vérifiant

$$\begin{aligned} \bar{J}_0 &= J_0 \text{ si } s \leq -1 \text{ et } \bar{J}_0 = J \text{ si } s \leq -1/2, \\ \bar{J}_1 &= J_1 \text{ si } s \geq 1 \text{ et } \bar{J}_1 = J \text{ si } s \geq 1/2. \end{aligned}$$

Définissons l'ensemble

$$\mathcal{M}^{\phi \circ \psi}(y_0, y_1) := \bigcup_{R>0} \mathcal{M}_R^{\phi \circ \psi}(y_0, y_1).$$

Il existe des choix génériques des paramètres, pour lesquels $\mathcal{M}^{\phi \circ \psi}(y_0, y_1)$ est une variété lisse de dimension $\mu(y_0) - \mu(y_1) + 1$. De plus sa composante de dimension 0 est compacte. La formule :

$$\varphi(y_0) := \sum_{y_1 | \mu(y_1) = \mu(y_0) + 1} \#_2 \mathcal{M}^{\phi \circ \psi}(y_0, y_1) \cdot y_1$$

définit donc une homotopie de chaînes

$$\varphi : CF_*(L, L; H_0, J_0) \rightarrow CF_*(L, L; H_1, J_1).$$

Sa composante de dimension 1 admet une compactification telle que

$$\partial \overline{\mathcal{M}}^{\phi \circ \psi}(y_0, y_1) = \bigcup_{x_0 \in \mathcal{I}(L, L; \eta, H_0)} \mathcal{M}_{y_0, x_0}(L, L'; H_0, J_0) \times \mathcal{M}^{\phi \circ \psi}(x_0, y_1) \quad (1.3.7)$$

$$\bigcup \mathcal{M}_0^{\phi \circ \psi}(y_0, y_1) \quad (1.3.8)$$

$$\bigcup_{q \in \text{Crit}(f)} \mathcal{M}_{H_0, f}^{y_0, q} \times \mathcal{M}_{q, y_1}^{f, H_1} \quad (1.3.9)$$

$$\bigcup_{x_1 \in \mathcal{I}(L, L; \eta, H_1)} \mathcal{M}^{\phi \circ \psi}(y_0, x_1) \times \mathcal{M}_{x_1, y_1}(L, L'; H_1, J_1) \quad (1.3.10)$$

Les bords (1.3.7) et (1.3.10) apparaissent lorsque le paramètre R converge vers un nombre réel, tandis que (1.3.8) et (1.3.9) apparaissent lorsqu'il converge respectivement vers 0 et l'infini. Le bord (1.3.8), $\mathcal{M}_0^{\phi \circ \psi}(y_0, y_1)$, est constitué de paires de disques (voir la figure 1.5), qui sont pseudo-holomorphes dans un voisinage de leur point commun. On peut donc effectuer leur gluing (voir [13], [6]). Cette procédure hautement non triviale conduit alors à une trajectoire de Floer, élément des espaces de modules définissant le morphisme de comparaison classique (1.3.2). Ainsi il vient

$$\partial\varphi + \varphi\partial = \phi_f^{H_1} \circ \psi_{H_0}^f + \psi^{01}.$$

Le diagramme (1.3.5) commute donc.

Diagramme (1.3.6) – On se donne à présent deux couples (f_0, g_0) , (f_1, g_1) et une homotopie régulière (f^{01}, g^{01}) telle que

$$(f_s^{01}, g_s^{01}) = (f_0, g_0) \text{ pour } s < -1 \text{ et } (f_s^{01}, g_s^{01}) = (f_1, g_1) \text{ pour } s > 1.$$

On définit les ensembles suivants

$$\mathcal{M}_R^{\psi \circ \phi}(p_0, p_1) := \left\{ (\gamma_0, U_R, \gamma_1) \in \mathcal{W}_{p_0}^u(f^{01}, g^{01}) \times C^\infty(\mathbb{R} \times I, M) \times \mathcal{W}_{p_1}^s(f^{01}, g^{01}) \right. \\ \left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \partial_s U_R + J\partial_t U_R + \alpha_R(s)\nabla H(U_R) = 0, \\ U_R(-\infty, -) = \gamma_0(0), U_R(+\infty, -) = \gamma_1(0) \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

où α_R est une fonction "cut-off" i.e. une fonction lisse dont la valeur est 1 pour $|s| < R$ et 0 dès que $|s| > R + 1$. Nous supposons également que la famille des fonctions α_R est bornée en norme C^1 uniformément en R (cette condition technique est nécessaire pour obtenir un estimé sur l'énergie des disques – voir [2]).

Définissons

$$\mathcal{M}^{\psi \circ \phi}(p_0, p_1) := \bigcup_{R>0} \mathcal{M}_R^{\psi \circ \phi}(p_0, p_1)$$

qui est à nouveau, pour des choix génériques des paramètres une variété lisse de dimension $i_{f^{01}}(p_0) - i_{f^{01}}(p_1) + 1$. Le bord de sa composante de dimension 1, après

compactification, est l'union disjointe

$$\partial\overline{\mathcal{M}}^{\psi\circ\phi}(p_0, p_1) = \bigcup_{q_0 \in \text{Crit}(f^{01})} \mathcal{M}_{p_0, q_0}(f^{01}, g^{01}) \times \mathcal{M}_R^{\psi\circ\phi}(q_0, p_1) \quad (1.3.11)$$

$$\bigcup \mathcal{M}_0^{\psi\circ\phi}(p_0, p_1) \quad (1.3.12)$$

$$\bigcup_{x \in \mathcal{I}(L, L; \eta, H)} \mathcal{M}_{p_0, x}^{f_0, H} \times \mathcal{M}_{H, f_1}^{x, p_1} \quad (1.3.13)$$

$$\bigcup_{q_1 \in \text{Crit}(f^{01})} \mathcal{M}_R^{\psi\circ\phi}(p_0, q_1) \times \mathcal{M}_{q_1, q_0}(f^{01}, g^{01}) \quad (1.3.14)$$

A nouveau, lorsque le paramètre R converge vers un nombre réel, on obtient (1.3.11), (1.3.14), tandis que (1.3.13) et (1.3.12) apparaissent lorsqu'il converge respectivement vers l'infini et vers 0. Dans le cas où la limite est l'infini, le produit obtenu conduit à la composition $\phi_{f_0}^H \circ \psi_{f_1}^{f_1}$. Lorsque R converge vers 0, on obtient un disque pseudo-holomorphe dont la frontière est incluse dans L , et dont l'aire symplectique est nulle (puisque $\omega|_{\pi_2(M, L)} = 0$). Il doit donc être constant. Ainsi, lorsque R converge vers 0, nous obtenons finalement deux points critiques p_0 et p_1 , et une ligne de flot (de f^{01}) élément de leur variété connectante (par unicité des lignes de flot passant par un point, ici le "disque" trivial), avec les mêmes indices de Morse. Ceci est donc un élément des espaces de modules définissant le morphisme de comparaison classique en théorie de Morse ψ_{Morse}^{01} . Ceci achève la démonstration de la commutativité du diagramme (1.3.6). \square

Chapitre 2

STRUCTURES ALGÈBRIQUES

Dans ce chapitre, nous rappelons dans un premier temps comment s'interprète le produit d'intersection en homologie de Morse (section 2.1) pour donner l'anneau homologique $(HM_*(M), \cdot)$. Ensuite nous montrons que le \mathbb{Z}_2 -espace vectoriel gradué $HF_*(L, L')$ peut être muni d'un produit externe et donc d'une structure de module sur $HM_*(M)$ (section 2.2). Cette construction est nouvelle dans le cadre lagrangien mais est directement inspirée de résultats provenant du cadre hamiltonien apparaissant dans [10].

Enfin (section 2.3), nous montrons que deux des trois morphismes rappelés précédemment (section 1.3) préservent ces structures i.e. que le morphisme de naturalité (§1.3.2) et le morphisme PSS (§1.3.3) sont des morphismes de modules. A nouveau, ces résultats s'inspirent du cas hamiltonien (introduits par Floer et étudiés par Le et Ono [19]).

Ces résultats sont intéressants en eux-mêmes et conduisent également à une démonstration très simple et purement algébrique de la proposition 4.9. Cette proposition permet de résoudre la difficulté majeure de la preuve de l'invariance des nombres spectraux qui sont le principal sujet d'étude ici (voir définition 4.2 et théorème 4.5).

Remarquons finalement que le morphisme de comparaison classique de l'homologie de Floer (§1.3.1) est également un morphisme de modules (la preuve utilisant des techniques tout à fait identiques à celles utilisées pour le morphisme PSS). Cela dit, ce fait n'intervient pas dans la suite et nous ne donnerons par conséquent pas plus de détails à ce sujet.

2.1. L'HOMOLOGIE DE MORSE COMME ANNEAU UNITAIRE

Nous rappelons ici rapidement le produit d'intersection dans sa version homologie de Morse puisqu'il est bien connu. Sa construction est instructive dans la mesure où la construction du produit externe de l'homologie de Floer comme module sur l'homologie de Morse s'en inspire. De plus, les espaces de modules permettant de le définir apparaissent explicitement dans la suite (preuve de l'associativité de cette structure de module, section 2.2 et préservation des structures par les morphismes, section 2.3).

Le *produit d'intersection* est défini sur les complexes de chaînes :

$$CM_k(L; f_1, g) \otimes CM_l(L; f_2, g) \longrightarrow CM_{k+l-n}(L; f_3, g)$$

où f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions de Morse et g une métrique telles que pour tout i et tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{W}_{p_i}^u(f_i, g)$ et $\mathcal{W}_{p_j}^s(f_j, g)$ s'intersectent transversalement pour tout p_i et tout p_j , points critiques respectifs de f_i et f_j . Cette condition sera désignée dans la suite par *condition de Morse–Smale étendue*. Remarquons que cette condition implique en particulier que les trois paires (f_i, g) ($i = 1, 3$) sont Morse–Smale. Ces choix sont génériques.

A $p \in \text{Crit}(f_1)$, $q \in \text{Crit}(f_2)$ et $r \in \text{Crit}(f_3)$, sont associés les espaces de modules suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(p,q);r}(f_1, f_2, f_3; g) := \\ \{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathcal{W}_p^u(f_1, g) \times \mathcal{W}_q^u(f_2, g) \times \mathcal{W}_r^s(f_3, g) \mid \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_3(0)\}. \end{aligned}$$

Sous nos hypothèses, ce sont des variétés lisses de dimension :

$$d(p, q; r) = i_{f_1}(p) + i_{f_2}(q) - i_{f_3}(r) - n.$$

Leur composante de dimension 0 est compacte et l'on peut donc définir sur les générateurs (puis étendre par bilinéarité) le produit :

$$p \cdot q := \sum_{r \mid d(p,q;r)=0} \#_2 \mathcal{M}_{(p,q);r}(f_1, f_2, f_3; g) \cdot r.$$

On peut montrer que cette formule induit un produit en homologie qui est indépendant des choix des fonctions de Morse et de la métrique. Nous rappelons que l'unité de l'anneau $(HM_*(L), \cdot)$ est $[L]$, la classe fondamentale de L .

Remarque 2.1. Il est également utile de souligner que cette construction peut être réalisée avec deux fonctions de Morse (et non trois) en considérant indifféremment les espaces de modules $\mathcal{M}_{(p,q);r}(f_1, f_2, f_1; g)$ ou $\mathcal{M}_{(p,q);r}(f_1, f_2, f_2; g)$. Remarquons par exemple que lorsque $f_3 = f_1$, l'espace $\mathcal{M}_{(p,q);r}(f_1, f_2, f_1; g)$ est constitué des paires de lignes de flot

$$(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{M}_{p,r}(f_1, g) \times \mathcal{W}_q^u(f_2, g) \text{ telles que } \gamma_1(0) = \gamma_2(0).$$

Cette remarque sera utilisée implicitement par la suite.

2.2. L'HOMOLOGIE DE FLOER COMME MODULE SUR L'HOMOLOGIE DE MORSE

Définissons de manière similaire un produit externe sur $HF_*(L, L')$:

$$HM_*(L) \otimes HF_*(L, L') \xrightarrow{*} HF_*(L, L')$$

Comme précédemment, il est défini au niveau des chaînes.

Remarque 2.2. Les sous-variétés lagrangiennes L et L' étant fixées, nous allons dans toute la suite de ce chapitre les supprimer des notations des espaces de modules qui vont apparaître. Par exemple, les espaces de modules $\mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J)$ définis par (1.2.7) seront dénotés $\mathcal{M}_{x,y}(H, J)$.

Nous choisissons une paire Morse–Smale (f, g) sur L et une paire régulière (H, J) sur la variété symplectique. Nous associons à $p \in \text{Crit}(f)$ et $x, y \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, les espaces de modules suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(p,x);y}(f, g; H, J) := \\ \{(\gamma, u) \in \mathcal{W}_p^u(f, g) \times \mathcal{M}_{x,y}(H, J) \mid \gamma(0) = u(0, 0)\}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Il existe des choix génériques des paramètres pour lesquels ce sont des variétés lisses, de dimension

$$d(p, x; y) = \mu(x) - \mu(y) + i_f(p) - n.$$

En effet, elles sont la pré-image de la diagonale $\Delta \subset L \times L$ par l'application d'évaluation

$$(\text{ev}, \text{ev}) : \begin{cases} \mathcal{W}_p^u(f, g) \times \mathcal{M}_{x,y}(H, J) & \rightarrow L \times L \\ (\gamma, u) & \mapsto (\gamma(0), u(0, 0)) \end{cases}$$

et il existe un choix générique des paramètres pour lesquels cette application est transverse à Δ (il s'agit ici de combiner les arguments apparaissant dans [11] et [23] – concernant les espaces de modules de trajectoires de Floer et la transversalité des applications d'évaluation).

Leur composante de dimension 0 est compacte, ainsi la formule

$$p * x := \sum_{y | d(p,x;y)=0} \#_2 \mathcal{M}_{(p,x);y}(f, g; H, J) \cdot y$$

définit un produit

$$* : CM_k(L; f, g) \times CF_l(L, L'; H, J) \rightarrow CF_{k+l-n}(L, L'; H, J),$$

lorsqu'elle est étendue par bilinéarité. De plus leur composante de dimension 1 admet une compactification dont le bord est donné par l'union disjointe (voir la figure 2.1)

$$\bigcup_{p' \in \text{Crit}(f)} \mathcal{M}_{p,p'}(f, g) \times \mathcal{M}_{(p',x);y}(f, g; H, J) \quad (2.2.2)$$

$$\bigcup_{x' \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \mathcal{M}_{x,x'}(H, J) \times \mathcal{M}_{(p,x');y}(f, g; H, J) \quad (2.2.3)$$

$$\bigcup_{y' \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \mathcal{M}_{(p,x);y'}(f, g; H, J) \times \mathcal{M}_{y',y}(H, J) \quad (2.2.4)$$

Le produit $*$ commute donc avec les applications de bord des complexes et induit par là-même un produit en homologie.

Lemme 2.3. $(HF_*(L, L'; H, J), *)$ est un module sur l'anneau $(HM_*(L; f, g), \cdot)$.

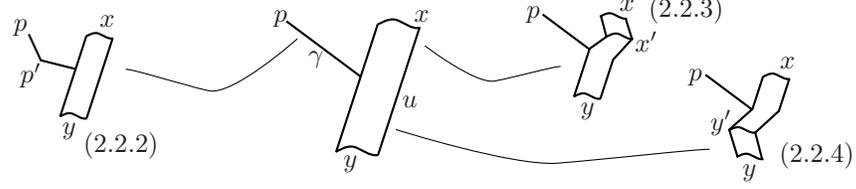


FIG. 2.1. Définition de la structure de modules sur $HF_*(L, L')$

DÉMONSTRATION. La difficulté principale est de montrer que pour tout couple de classes d'homologie de Morse de L , (α, β) , la relation :

$$(\alpha \cdot \beta) * a = \alpha * (\beta * a)$$

est satisfaite. On se donne deux fonctions de Morse f_1 et f_2 et une métrique g sur L , vérifiant la condition de Morse–Smale étendue définie au début de la section 2.1. Nous choisissons également une paire régulière (H, J) . Nous devons prouver que les applications définies respectivement par

$$\varphi^+(p, q, x) := (p \cdot q) * x \text{ et } \varphi^-(p, q, x) := p * (q * x)$$

pour $p \in \text{Crit}(f_1)$, $q \in \text{Crit}(f_2)$ et $x \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, induisent le même morphisme en homologie. Définissons respectivement les espaces de modules

$$\mathcal{M}_{(p,q,x);y}^+(f_1, f_2, g; H, J) \text{ et } \mathcal{M}_{(p,q,x);y}^-(f_1, f_2, g; H, J)$$

comme les unions

$$\begin{aligned} & \bigcup_{r \in \text{Crit}(f_1)} \mathcal{M}_{(p,q);r}(f_1, f_2, f_1; g) \times \mathcal{M}_{(r,x);y}(f_1, g; H, J) \text{ et} \\ & \bigcup_{z \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \mathcal{M}_{(q,x);z}(f_2, g; H, J) \times \mathcal{M}_{(p,z);y}(f_1, g; H, J). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \varphi^+(p, q, x) &= \left(\sum_r \#_2 \mathcal{M}_{(p,q);r}(f_1, f_2, f_1; g) \cdot r \right) * x \\ &= \sum_r \sum_y \#_2 \mathcal{M}_{(p,q);r}(f_1, f_2, f_1; g) \#_2 \mathcal{M}_{(r,x);y}(f_1, g; L, H, J) \cdot y \\ &= \sum_y \#_2 \mathcal{M}_{(p,q,x);y}^+(f_1, f_2, g; L, H, J) \cdot y \end{aligned}$$

et un calcul similaire conduit à

$$\varphi^-(p, q, x) = \sum_y \#_2 \mathcal{M}_{(p,q,x);y}^-(f_1, f_2, g; H, J) \cdot y.$$

Nous allons, dans les deux étapes suivantes définir des espaces de modules

$$\mathcal{M}_{(p,q,x);y}^0(f_1, f_2, g; H, J)$$

et un morphisme

$$\varphi^0(p, q, x) := \sum_y \#_2 \mathcal{M}_{(p,q,x);y}^0(f_1, f_2, g; H, J) \cdot y$$

et nous allons prouver successivement les égalités

$$H_*(\varphi^+) = H_*(\varphi^0) = H_*(\varphi^-). \quad (2.2.5)$$

Remarque 2.4. Lorsque $q = m$, le maximum de f_2 ,

$$\varphi^+(p, m, x) = (p \cdot m) * x = p * x = p * (m * x) = \varphi^-(p, m, x).$$

En effet, dans ce cas $i_{f_2}(m) = n$ et les espaces de modules définissant $m * x$ et $p \cdot m$ ont des dimensions telles que, même au niveau des chaînes, on a $m * x = x$ et $p \cdot m = p$. Ainsi, dans ce qui suit q , n'est pas le maximum de f_2 .

(Etape 1) Tout d'abord, pour $R > 0$, nous définissons les espaces de modules suivants (voir la figure 2.2)

$$\mathcal{M}_{(p,q,x);y}^R(f_1, f_2, g; H, J) := \left\{ (\gamma_1^R, \gamma_2, u) \in \mathcal{W}_p^u(f_1, g) \times \mathcal{W}_q^u(f_2, g) \times \mathcal{M}_{x,y}(H, J) \left| \begin{array}{l} \gamma_1^R(0) = \gamma_2(0) \\ \gamma_1^R(R) = u(0, 0) \end{array} \right. \right\}$$

où $p \in \text{Crit}(f_1)$, $q \in \text{Crit}(f_2)$, x et $y \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$. Dénotons leur union par :

$$\mathcal{M}_{(p,q,x);y}(f_1, f_2, g; H, J) := \bigcup_{R>0} \mathcal{M}_{(p,q,x);y}^R(f_1, f_2, g; H, J).$$

Cet espace de modules est une variété de dimension

$$d(p, q, x; y) = \mu(x) - \mu(y) + i_{f_1}(p) + i_{f_2}(q) - 2n + 1$$

comme la pré-image de $\Delta \times \Delta := \{(x, x; y; y) \mid (x, y) \in L^2\} \subset (L \times L)^2$ par l'application d'évaluation

$$\text{Ev} : \begin{cases} \mathcal{W}_p^u(f_1, g) \times \mathcal{W}_q^u(f_2, g) \times \mathcal{M}_{x,y}(H, J) \rightarrow (L \times L)^2 \\ (\gamma_1, \gamma_2, u) \mapsto (\gamma_1(0), \gamma_2(0); \gamma_1(R), u(0, 0)) \end{cases}$$

pour des choix génériques des paramètres (le +1 additionnel vient du paramètre R supplémentaire).

Sa composante de dimension 0 est compacte et nous définissons

$$F(p, q, x) := \sum_{y \mid d(p,q,x;y)=0} \#_2 \mathcal{M}_{(p,q,x);y}(f_1, f_2, g; H, J) \cdot y.$$

Posons $\mathcal{M}_{(p,q,x);z}^0(f_1, f_2, g; H, J)$ comme l'espace obtenu de $\mathcal{M}_{(p,q,x);z}^R(f_1, f_2, g; H, J)$ lorsque le paramètre R converge vers 0. Remarquons que nous obtenons l'espace de modules $\mathcal{M}_{(p,q,x);z}^+(f_1, f_2, g; H, J)$, lorsque R converge vers l'infini. Le bord de la compactification de sa composante de dimension 1 est donc (voir la figure 2.2) :

$$\bigcup_{p' \in \text{Crit}(f_1)} \mathcal{M}_{p,p'}(f_1, g) \times \mathcal{M}_{(p',q,x);y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.2.6)$$

$$\bigcup_{q' \in \text{Crit}(f_2)} \mathcal{M}_{q,q'}(f_2, g) \times \mathcal{M}_{(p,q',x);y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.2.7)$$

$$\bigcup_{x' \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \mathcal{M}_{x,x'}(H, J) \times \mathcal{M}_{(p,q,x');y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.2.8)$$

$$\bigcup_{y' \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \mathcal{M}_{(p,q,x);y'}(f_1, f_2, g; H, J) \times \mathcal{M}_{y',y}(H, J) \quad (2.2.9)$$

$$\bigcup \mathcal{M}_{(p,q,x);y}^+(f_1, f_2, g; H, J) \bigcup \mathcal{M}_{(p,q,x);y}^0(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.2.10)$$

Les bords (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) et (2.2.9) apparaissent lorsque R converge vers un nombre réel strictement positif. Leur somme représente $\partial F + F\partial$. Les applications φ^+ et φ^0 , comptant respectivement le cardinal modulo 2 des espaces de modules $\mathcal{M}_{(p,q,x);y}^+(f_1, f_2, g; H, J)$ et $\mathcal{M}_{(p,q,x);y}^0(f_1, f_2, g; H, J)$ induisent donc la même application en homologie i.e. la première égalité de (2.2.5), $H_*(\varphi^+) = H_*(\varphi^0)$, est donc démontrée.

(*Etape 2*) Nous construisons d'autres espaces de modules, dans l'esprit de ce

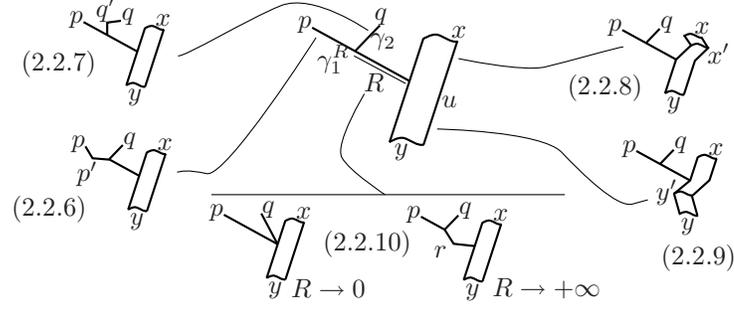


FIG. 2.2. Preuve de la structure de module (1)

qui a été fait lors de l'étape précédente. A $p \in \text{Crit}(f_1)$, $q \in \text{Crit}(f_2)$, $x, y \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, nous associons les espaces de modules

$$\widehat{\mathcal{M}}_{(p,q,x);y}^S(f_1, f_2, g; H, J) := \left\{ (\gamma_1, \gamma_2^S, u) \in \mathcal{W}_p^u(f_1, g) \times \mathcal{W}_q^u(f_2, g) \times \mathcal{M}_{x,y}(H, J) \left| \begin{array}{l} \gamma_1(0) = u(0, 0) \\ \gamma_2^S(0) = u(S, 0) \end{array} \right. \right\}$$

et on désigne leur union par

$$\widehat{\mathcal{M}}_{(p,q,x);y}(f_1, f_2, g; H, J) := \bigcup_{S < 0} \widehat{\mathcal{M}}_{(p,q,x);y}^S(f_1, f_2, g; H, J)$$

(voir la figure 2.3). Il existe des choix génériques des paramètres pour lesquels cet espace est une variété dont la dimension est donnée par

$$\widehat{d}(p, q, x; y) = i_{f_1}(p) + i_{f_2}(q) + \mu(x) - \mu(y) - 2n + 1$$

(il faut à nouveau considérer l'application d'évaluation appropriée). Comme précédemment, la composante de dimension 0 de ces espaces est compacte. Ceci nous permet de définir le morphisme

$$G(p, q, x) := \sum_{y | \widehat{d}(p,q,x;y)=0} \widehat{\mathcal{M}}_{(p,q,x);y}(f_1, f_2, g; H, J) \cdot y.$$

De plus, le bord de la compactification de sa composante de dimension 1 est donné par l'union disjointe (voir la figure 2.3)

$$\bigcup_{p' \in \text{Crit}(f_1)} \mathcal{M}_{p,p'}(f_1, g) \times \widehat{\mathcal{M}}_{(p',q,x);y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.2.11)$$

$$\bigcup_{q' \in \text{Crit}(f_2)} \mathcal{M}_{q,q'}(f_2, g) \times \widehat{\mathcal{M}}_{(p,q',x);y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.2.12)$$

$$\bigcup_{x' \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \mathcal{M}_{x,x'}(H, J) \times \widehat{\mathcal{M}}_{(p,q,x');y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.2.13)$$

$$\bigcup_{y' \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \widehat{\mathcal{M}}_{(p,q,x);y'}(f_1, f_2, g; H, J) \times \mathcal{M}_{y',y}(H, J) \quad (2.2.14)$$

lorsque le paramètre S converge vers un nombre réel strictement négatif et

$$\bigcup \mathcal{M}_{(p,q,x);y}^-(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.2.15)$$

$$\bigcup \{\Gamma\} \times \mathcal{M}_{(p,x);y}(f_1, g; H, J) \quad (2.2.16)$$

$$\bigcup \mathcal{M}_{(p,q,x);y}^0(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.2.17)$$

lorsqu'il converge vers $-\infty$ (2.2.15), (2.2.16) et 0 (2.2.17). Si elle existe, Γ est l'unique ligne de flot de f_2 appartenant à la variété instable du point critique q , atteignant $x(0)$.

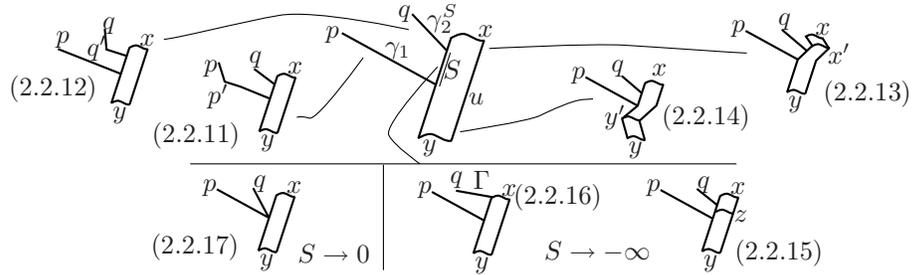


FIG. 2.3. Preuve de la structure de module (2)

Les bords (2.2.11), (2.2.12), (2.2.13) et (2.2.14) représentent ensemble $\partial G + G\partial$. Comme $q \neq m$, le maximum de f_2 (voir la remarque 2.4), sa variété instable a une codimension d'au moins 1. Pour des choix génériques, le bord (2.2.16) n'apparaît donc pas et $H_*(\varphi^0) = H_*(\varphi^-)$. La seconde égalité de (2.2.5) est donc démontrée ce qui achève la preuve du lemme. \square

Remarque 2.5. Par des méthodes standard, on peut montrer que cette construction ne dépend pas de f_1, f_2, g, H et J .

Il est bien connu que la "demi" paire de pantalon induit un produit en homologie de Floer lagrangienne qui donne une description alternative de la même structure de modules :

$$\begin{array}{ccc}
 HM_*(L) \otimes HF_*(L, L) & \xrightarrow{\phi_f^H \otimes \text{id}} & HF_*(L, L) \otimes HF_*(L, L) \\
 & \searrow * & \downarrow \text{demi-PP} \\
 & & HF_*(L, L)
 \end{array}$$

Cependant cette construction nécessite des perturbations hamiltoniennes différentes aux extrémités. Le morphisme de naturalité n'est donc pas, a priori, compatible avec les espaces de modules apparaissant dans cette description.

2.3. PRÉSERVATION DES STRUCTURES ALGÈBRIQUES PAR LES MORPHISMES

Nous prouvons ici que les morphismes de naturalité et PSS, définis précédemment (section 1.3), préservent ces structures algébriques. Plus précisément nous prouvons le lemme suivant :

Lemme 2.6. *Pour tout $\alpha \neq 0$ de $HM_*(L)$ et tout $b \neq 0$ de $HF_*(L, L')$, l'on a*

$$b_H(\alpha * b) = \alpha * b_H(b), \quad (2.3.1)$$

pour tout $\beta \neq 0$ de $HM_(L)$, tel que $\alpha \cdot \beta \neq 0$, l'on a*

$$\phi_f^H(\alpha \cdot \beta) = \alpha * \phi_f^H(\beta). \quad (2.3.2)$$

Remarque 2.7. Nous pourrions également prouver que le morphisme de comparaison classique préserve lui aussi les structures de modules. La démonstration de ce fait est très similaire à la démonstration de l'égalité (2.3.2). Cela dit nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite.

2.3.1. Le morphisme de naturalité, morphisme de modules

Rappelons que le morphisme de naturalité (plus précisément, son inverse b_H^{-1}) fait correspondre de manière unique :

- à y et $z \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, deux éléments y' et $z' \in \mathcal{I}(L, L''; \tilde{\eta}, 0)$,
- à $u \in \mathcal{M}_{y,z}(L, L'; H, J)$, un élément $u' \in \mathcal{M}_{y',z'}(L, L''; 0, \tilde{J})$

(les notations utilisées ici sont les mêmes que celles introduites en §1.3.2). De plus, $u'(0, 0) = (\phi_H^0)^{-1}(u(0, 0)) = u(0, 0)$. Nous pouvons donc en déduire que b_H^{-1} induit une bijection entre les espaces de modules (2.2.1) des deux situations respectives et transporte donc le produit externe de $HM_*(L)$ –module de $HF_*(L, L'; H, J)$, sur celui de $HF_*(L, L''; 0, \tilde{J})$. L'égalité (2.3.1) est prouvée et le morphisme de naturalité est, par conséquent, un isomorphisme de $HM_*(L)$ –modules.

2.3.2. Le PSS lagrangien, morphisme de modules

La preuve de (2.3.2) est *formellement* la même que celle du lemme 2.3. On choisit des fonctions de Morse f_1 et f_2 et une métrique g sur L satisfaisant les mêmes conditions de régularité. On se donne également une paire régulière (H, J) .

Dans un premier temps, on remarque (à l'instar de la remarque 2.4) que ce que l'on veut démontrer est satisfait, même au niveau des chaînes, dans le cas où la classe d'homologie α est représentée par le maximum m de f_1 . Dans un second temps, on reproduit les deux étapes de la démonstration.

(*Etape 1*) Dans ce cas, $\mathcal{M}_{(p,q);y}^R(f_1, f_2, g; H, J)$ est défini comme étant l'ensemble

$$\left\{ (\gamma_1, \gamma_2^R, u) \in \mathcal{W}_p^u(f_1, g) \times \mathcal{W}_q^u(f_2, g) \times \mathcal{M}_y^H(J) \left| \begin{array}{l} \gamma_1(0) = \gamma_2^R(0) \\ \gamma_2^R(R) = u(-\infty, -) \end{array} \right. \right\}$$

(voir la figure 2.4). On rappelle que l'espace $\mathcal{M}_y^H(J)$ a servi dans la construction du morphisme PSS (§1.3.3). A nouveau, $\mathcal{M}_{(p,q);y}^0(f_1, f_2, g; H, J)$ est obtenu de cet ensemble lorsque le paramètre R converge vers 0 et $\mathcal{M}_{(p,q);y}^+(f_1, f_2, g; H, J)$ désigne à présent l'union

$$\bigcup_{r \in \text{Crit}(f_1)} \mathcal{M}_{(p,q);r}(f_1, f_2, f_2; g) \times \mathcal{M}_{r,y}^{f_2, H}.$$

Le bord de l'espace de module est maintenant (voir la figure 2.4) :

$$\bigcup_{p' \in \text{Crit}(f_1)} \mathcal{M}_{p,p'}(f_1, g) \times \mathcal{M}_{(p',q);y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.3.3)$$

$$\bigcup_{q' \in \text{Crit}(f_2)} \mathcal{M}_{q,q'}(f_2, g) \times \mathcal{M}_{(p,q');y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.3.4)$$

$$\bigcup_{y' \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \mathcal{M}_{(p,q);y'}(f_1, f_2, g; H, J) \times \mathcal{M}_{y',y}(H, J) \quad (2.3.5)$$

$$\bigcup \mathcal{M}_{(p,q);y}^+(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.3.6)$$

$$\bigcup \mathcal{M}_{(p,q);y}^0(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.3.7)$$

Les bords (2.3.3), (2.3.4), et (2.3.5) apparaissent lorsque le paramètre R converge vers un nombre strictement positif et représentent $\partial F + F\partial$, tandis que (2.3.6) et (2.3.7) apparaissent respectivement lorsqu'il converge vers l'infini et 0. Ceci prouve $H_*(\varphi^+) = H_*(\varphi^0)$.

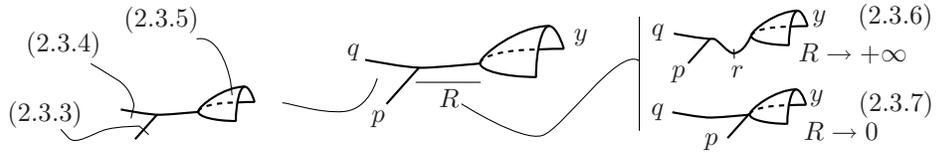


FIG. 2.4. Preuve de la préservation des structures par le PSS (1)

(Etape 2) L'ensemble $\widehat{\mathcal{M}}_{(p,q);y}^S(f_1, f_2, g; H, J)$ est défini comme étant (voir la figure 2.5)

$$\left\{ (\gamma_1^S, \gamma_2, u) \in \mathcal{W}_p^u(f_1, g) \times \mathcal{W}_q^u(f_2, g) \times \mathcal{M}_y^H(J) \left| \begin{array}{l} \gamma_1^S(0) = u(S, 0) \\ \gamma_2(0) = u(-\infty, 0) \end{array} \right. \right\}$$

et $\mathcal{M}_{(p,q);y}^-(f_1, f_2, g; H, J) := \bigcup_{x \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \mathcal{M}_{q,x}^{f_2, H} \times \mathcal{M}_{(p,x);y}(f_1, g; H, J)$. De plus, ici, $\mathcal{M}_{(p,q);y}^0(f_1, f_2, g; H, J)$ est vu comme la limite de $\widehat{\mathcal{M}}_{(p,q);y}^S(f_1, f_2, g; H, J)$ lorsque S converge vers $-\infty$. Lorsque le paramètre S converge vers un nombre réel, il

vient (voir la figure 2.5)

$$\bigcup_{p' \in \text{Crit}(f_1)} \mathcal{M}_{p,p'}(f_1, g) \times \widehat{\mathcal{M}}_{(p',q);y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.3.8)$$

$$\bigcup_{q' \in \text{Crit}(f_2)} \mathcal{M}_{q,q'}(f_2, g) \times \widehat{\mathcal{M}}_{(p,q');y}(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.3.9)$$

$$\bigcup_{x \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)} \widehat{\mathcal{M}}_{(p,q);x}(f_1, f_2, g; H, J) \times \mathcal{M}_{x,y}(H, J) \quad (2.3.10)$$

qui représentent $\partial G + G\partial$. Sinon on obtient

$$\bigcup \mathcal{M}_{(p,q);y}^-(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.3.11)$$

$$\bigcup \{\Gamma\} \times \mathcal{M}_{q,y}^{f_2, H} \quad (2.3.12)$$

$$\bigcup \mathcal{M}_{(p,q);y}^0(f_1, f_2, g; H, J) \quad (2.3.13)$$

le paramètre S convergeant vers $+\infty$ (2.3.11), (2.3.12) et vers $-\infty$ (2.3.13). Si elle existe, Γ est ici l'unique ligne de flot de f_1 appartenant à la variété instable du point critique p , atteignant $y(0)$. Pour des choix génériques, (2.3.12) n'apparaît pas et l'égalité (2.3.2) est prouvée.

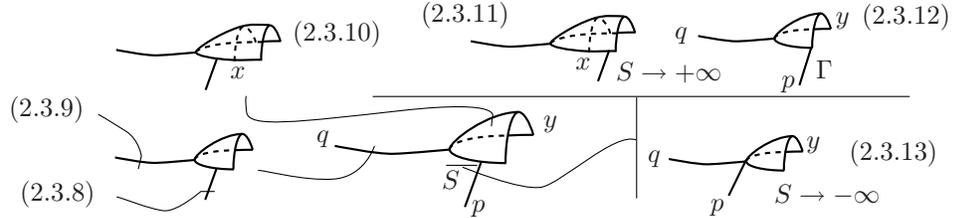


FIG. 2.5. Preuve de la préservation des structures par le PSS (2)

Chapitre 3

SUITES SPECTRALES

Dans ce chapitre nous rappelons (section 3.1) la définition générale de suite spectrale. Nous décrivons ensuite la suite spectrale de Leray–Serre liée à une fibration (section 3.2) en nous attachant au cas particulier, qui va nous intéresser par la suite, de la fibration de lacets sur un espace topologique. Finalement, nous rappelons la construction des suites spectrales de Barraud–Cornea ainsi que les liens qui les unissent aux fibrations de Leray–Serre (section 3.3). Nous donnons aussi les principales propriétés de ces suites spectrales. Nous traitons également, dans ce chapitre et le suivant, plusieurs exemples détaillés, illustrant ces constructions (§3.2.3, §3.3.1.3 et §4.2.1).

Les invariants d’ordre supérieur définis par la suite (section 4.2) reposent sur ces constructions et la façon de les distinguer (théorème 4.24), essentiellement sur les propriétés décrites ici.

Pour les détails et les preuves concernant les suites spectrales (en toute généralité), on pourra se référer à [21] et pour la partie sur les liens entre suites spectrales et fibrations, à [1] et [37]. Concernant les suites spectrales de Barraud–Cornea, les constructions sont effectuées dans [5] et [4].

3.1. DÉFINITIONS GÉNÉRALES

Définition 3.1. Un *module différentiel bigradué* sur un anneau R est une famille de R -modules, $E_{*,*} = \{E_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$, munie d’une différentielle, i.e. une application linéaire $d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-s,q+s-1}$, pour un certain entier s , vérifiant $d^2 = 0$.

Définition 3.2. Une *suite spectrale* (de type homologique) est une famille de R -modules différentiels bigradués, $E = (E_{*,*}^r, d^r)$ pour $r \in \mathbb{N}^*$ dont les différentielles d^r sont de bidegré $(-r, r - 1)$ et tels que pour tout triplet (p, q, r) , $E_{p,q}^{r+1}$ est isomorphe à $H_{p,q}(E_{*,*}^r, d^r)$.

Remarque 3.3. Procédons à quelques remarques avant de poursuivre.

- La notation $H_{p,q}(E_{*,*}^r, d^r)$ est décrite plus précisément dans le paragraphe suivant.
- Le r -ème module différentiel gradué, $E_{*,*}^r = \{E_{p,q}^r\}_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ est appelé r -ème page de la suite spectrale (ou page r).
- La page r (modules et différentielle) induit les modules de la page $r + 1$ mais pas sa différentielle.
- Enfin, notons que nous nous restreignons aux suites spectrales à caractère homologique bien que les résultats énoncés par la suite aient chacun un équivalent cohomologique.

3.1.1. La tour de modules d'une suite spectrale

Détaillons les espaces qui apparaissent lors du processus d'homologie (passage de la page r à la page $r + 1$). Nous conservons, pour le moment, tous les indices, pour éviter toute ambiguïté. Définissons pour tout couple (p, q) d'entiers relatifs :

$$Z_{p,q}^2 = \ker(d_2 : E_{p,q}^2 \rightarrow E_{p-2,q+1}^2) \text{ et } B_{p,q}^2 = \text{im}(d_2 : E_{p+2,q-1}^2 \rightarrow E_{p,q}^2).$$

Comme $d^2 = 0$, on a immédiatement les inclusions de sous-modules :

$$B_{p,q}^2 \subset Z_{p,q}^2 \subset E_{p,q}^2$$

qui permettent de définir $H_{p,q}(E_{*,*}^2, d_2) := Z_{p,q}^2/B_{p,q}^2$ qui est isomorphe, par définition de la suite spectrale, à $E_{p,q}^3$. Si l'on note

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{p,q}^3 &= \ker(d_3 : E_{p,q}^3 \rightarrow E_{p-3,q+2}^3) \subset Z_{p,q}^2/B_{p,q}^2 \text{ et} \\ \bar{B}_{p,q}^3 &= \text{im}(d_3 : E_{p+3,q-2}^3 \rightarrow E_{p,q}^3) \subset Z_{p,q}^2/B_{p,q}^2, \end{aligned}$$

$H_{p,q}(E_{*,*}^3, d_3)$ est défini comme leur quotient et correspond à nouveau à $E_{p,q}^4$. De plus, il existe des sous-modules de $Z_{p,q}^2$, dénotés $Z_{p,q}^3$ et $B_{p,q}^3$ tels que

$$\bar{Z}_{p,q}^3 \simeq Z_{p,q}^3/B_{p,q}^2 \quad \text{et} \quad \bar{B}_{p,q}^3 \simeq B_{p,q}^3/B_{p,q}^2.$$

On remarque que $E_{p,q}^4$ satisfait :

$$E_{p,q}^4 \simeq \bar{Z}_{p,q}^3/\bar{B}_{p,q}^3 \simeq (Z_{p,q}^3/B_{p,q}^2)/(B_{p,q}^3/B_{p,q}^2) \simeq Z_{p,q}^3/B_{p,q}^3.$$

Les r premières pages étant données, la page $r + 1$ est obtenue selon la même construction. Pour une paire d'indices appropriés (que nous omettons à présent par souci de clarté),

$$\bar{Z}^r := \ker d^r \quad \text{et} \quad \bar{B}^r := \text{im } d^r$$

(dont le quotient est $H(E_{*,*}^r, d^r)$) sont des sous-modules de $E^r \simeq Z^{r-1}/B^{r-1}$. Il existe donc des sous-modules Z^r et B^r de Z^{r-1} tels que

$$\bar{Z}^r \simeq Z^r/B^{r-1} \quad \text{et} \quad \bar{B}^r \simeq B^r/B^{r-1}. \quad (3.1.1)$$

Par définition des suites spectrales, E^{r+1} est isomorphe à $H(E_{*,*}^r, d^r)$ et vérifie

$$E^{r+1} \simeq \bar{Z}^r/\bar{B}^r \simeq Z^r/B^r.$$

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 3.4. La *tour de modules* de la suite spectrale $E = (E_{*,*}^r, d^r)$ est la suite d'inclusions de modules suivante :

$$B^2 \subset B^3 \subset \dots \subset B^n \subset \dots \subset \dots \subset Z^n \subset \dots \subset Z^3 \subset Z^2 \subset E^2.$$

Cette suite d'inclusions nous permet de définir les trois modules suivants :

$$B^\infty := \bigcup_n B^n \subset Z^\infty := \bigcap_n Z^n \quad \text{et} \quad E^\infty := Z^\infty/B^\infty.$$

Connaître ces modules donne de nombreuses informations du fait de théorèmes de convergence (par exemple, le théorème 3.10 ci-dessous, pour les suites spectrales induites par des modules différentiels gradués filtrés dont la filtration est bornée). Un cas intéressant est donné par la situation suivante.

Définition 3.5. Soit N un entier non nul, on dit que la suite spectrale $E = (E_{*,*}^r, d^r)$ dégénère au N -ème terme si $d^r = 0$ pour tout $r \geq N$.

Lemme 3.6. Dans le cas où la suite spectrale dégénère, sa tour de modules s'écrit

$$B^2 \subset B^3 \subset \dots B^N = B^{N+1} = \dots B^\infty \subset Z^\infty = \dots Z^{N+1} = Z^N \subset \dots Z^3 \subset Z^2.$$

Ceci implique en particulier que $E^\infty = Z^\infty/B^\infty = Z^N/B^N = E^N$.

Démonstration. En effet, pour des valeurs de s supérieures à N , $\text{im } d_s = 0$ i.e. $\bar{B}^s = 0$. Par la propriété définissant B^s (3.1.1), il vient alors que $B^{s+1} = B^s$.

De plus, les modules que nous avons définis précédemment forment la courte suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow Z^{n+1}/B^n \xrightarrow{i} Z^n/B^n \xrightarrow{d_{n+1}} B^{n+1}/B^n \longrightarrow 0$$

puisque $\ker d_{n+1} \simeq Z^{n+1}/B^n$ et que $\text{im } d_{n+1} \simeq B^{n+1}/B^n$. On a donc pour tout n :

$$B^{n+1}/B^n \simeq (Z^n/B^n)/(Z^{n+1}/B^n) \simeq Z^n/Z^{n+1}.$$

On en déduit alors que $Z^{s+1} = Z^s$ pour $s > N$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

3.1.2. Suite spectrale provenant d'une filtration

Définition 3.7. Une *filtration* F_* d'un R -module C est une famille croissante de sous-modules de C , $\{F_p C\}$ pour $p \in \mathbb{Z}$:

$$\dots \subset F_p C \subset F_{p+1} C \subset \dots C.$$

Une filtration est dite *bornée* s'il existe des entiers s et t tels que :

$$\{0\} = F_s C \subset F_{s-1} C \subset \dots F_{t+1} C \subset F_t C = C.$$

Remarquons que si l'on munit un R -module *gradué* C_* d'une filtration F_* , on peut définir pour tout entier n , des sous-modules $F_p C_n := F_p C_* \cap C_n$ qui forment une filtration de C_n (dite *restriction de la filtration F_* à C_n*). Les modules $F_p C_n$ conduisent également au module bigradué $E_{*,*}^0$ dont l'élément $E_{p,q}^0(C_*, F_*)$ pour

deux entiers p et q est donné par $E_{p,q}^0(C_*, F_*) = F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q}$. Ceci permet de définir la notion de convergence d'une suite spectrale.

Définition 3.8. Une suite spectrale $E = (E_{*,*}^r, d^r)$ converge vers le module gradué C_* si celui-ci admet une filtration F_* telle que pour tout couple d'entiers relatifs (p, q) , $E_{p,q}^\infty \simeq E_{p,q}^0(C_*, F_*)$.

L'étape naturelle suivante est de munir un R -module *différentiel et gradué* (C_*, d) d'une filtration.

Définition 3.9. Un *module différentiel gradué filtré* \mathcal{C} est un triplet (C_*, d, F_*) tel que

- i. la paire (C_*, d) est un module différentiel gradué (la différentielle d étant ici de degré -1),
- ii. F_* est une filtration du module C_* préservée par la différentielle, i.e. pour tout entier p , $d(F_p C_*) \subset F_p C_*$.

La filtration F_* est dite *bornée* si, pour tout entier n , la filtration restreinte à C_n est bornée.

Le théorème suivant (théorème 3.10) indique que tout module différentiel gradué filtré (C_*, d, F_*) induit une suite spectrale qui converge (lorsque la filtration est bornée) vers l'homologie de (C_*, d) . Ceci implique en particulier l'existence d'une filtration de cette homologie. Celle-ci est donnée par la condition ii. de la définition précédente, de la façon suivante.

La condition ii. implique que l'on peut restreindre d au sous-module gradué $F_p C_*$ (la différentielle restreinte est aussi dénotée d), de sorte que $(F_p C_*, d)$ soit un sous-module différentiel gradué de (C_*, d) . Son homologie $H(F_p C_*, d)$ induit alors une filtration de l'homologie du complexe total $H(C_*, d)$ via les applications d'inclusion $i_p : F_p C_* \rightarrow C_*$. Les sous-modules filtrant sont donnés par

$$F_p H(C_*, d) := \text{im} (H(F_p C_*, d) \xrightarrow{H(i_p)} H(C_*, d)).$$

Théorème 3.10. *Tout module différentiel gradué filtré (C_*, d, F_*) induit une suite spectrale $E = (E_{*,*}^r, d^r)$ telle que $E_{p,q}^1 \simeq H_{p+q}(F_p C_* / F_{p-1} C_*)$. De plus, si la filtration est bornée alors E converge vers $H(C_*, d)$, i.e.*

$$E_{p,q}^\infty \simeq F_p H_{p+q}(C_*, d) / F_{p-1} H_{p+q}(C_*, d).$$

Ce théorème intervient comme étape finale de la construction des suites spectrales de Barraud–Cornea (voir §3.3.1 et §3.3.2). Sa démonstration est hautement technique et nous ne décrivons ici que les modules apparaissant dans la construction. Pour une démonstration complète on pourra se référer à [21].

La tour de modules de la suite spectrale donnée par le module différentiel gradué filtré (C_*, d, F_*) est la suivante. On définit :

$$Z_{p,q}^r := F_p C_{p+q} \cap d^{-1}(F_{p-r} C_{p+q-1}) \quad \text{et} \quad B_{p,q}^r := F_p C_{p+q} \cap d(F_{p+r} C_{p+q+1})$$

i.e. ces modules sont respectivement constitués des éléments de $F_p C_{p+q}$ tels que

$$Z_{p,q}^r - \text{leur bord (i.e. leur image par la différentielle) sont dans } F_{p-r} C_{p+q-1},$$

$$B_{p,q}^r - \text{ils sont les bords d'éléments de } F_{p+r} C_{p+q+1}.$$

Les modules "limites" sont donnés quant à eux comme

$$Z_{p,q}^\infty := \ker d \cap F_p C_{p+q} \quad \text{et} \quad B_{p,q}^\infty := \text{im } d \cap F_p C_{p+q}.$$

Finalement on peut poser

$$E_{p,q}^r := Z_{p,q}^r / (Z_{p-1,q+1}^{r-1} + B_{p,q}^{r-1}).$$

Il reste donc à construire les différentielles d^r et vérifier que l'on obtient bien, via ces définitions, une suite spectrale (i.e. que les modules $E_{p,q}^{r+1}$ sont isomorphes à $H_{p,q}(E_{*,*}^r, d^r)$), satisfaisant, de plus, les propriétés énoncées.

3.2. SUITE SPECTRALE DE LERAY–SERRE

Nous traitons ici une classe d'exemples de suites spectrales très importante en elle-même, induisant de nombreux résultats. Elle est de plus très utile dans le cadre particulier qui nous intéresse. En effet, c'est à la suite spectrale de Leray–Serre d'une fibration appropriée que les suites spectrales introduites par Barraud

et Cornea sont comparables. C'est de cette comparaison que sont issus les invariants spectraux d'ordre supérieur de la section 4.2.

3.2.1. Fibrations, fibration de lacets

Définition 3.11. Une application continue $\ell : E \rightarrow B$ possède la *propriété de relèvement des homotopies* par rapport à l'espace Y si, pour toute homotopie $h : Y \times I \rightarrow E$ et toute fonction continue $g : Y \times \{0\} \rightarrow E$ telles que pour tout $y \in Y$ l'on ait $\ell \circ g(y, 0) = h(y, 0)$, il existe une homotopie $\bar{h} : Y \times I \rightarrow E$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{g} & E \\ i \downarrow & \nearrow \bar{h} & \downarrow \ell \\ Y \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Définition 3.12. Une application $\ell : E \rightarrow B$ qui possède la propriété de relèvement des homotopies par rapport à toute n -cellule est dite *fibration de Serre*. Si elle la possède par rapport à tout espace topologique Y , elle est dite *fibration* (de Hurewicz).

La *fibres* de la fibration $\ell : E \rightarrow B$ en un point $x \in B$ est l'ensemble

$$F_x := \ell^{-1}(\{x\}) \subset E.$$

Remarque 3.13. Il est clair qu'une fibration est un cas particulier de fibration de Serre. On sait également (par une récurrence – voir [37] pour la démonstration de cette propriété) que la condition d'être une fibration de Serre est équivalente à avoir la propriété de relèvement des homotopies par rapport à tout complexe CW (i.e. un espace topologique muni d'une décomposition cellulaire).

Lorsque B est connexe par arcs, toutes les fibres sont homotopiquement équivalentes. Dans ce cas, la notation F (sans point de base x spécifié) désigne le type d'homotopie de F_x (pour n'importe quel point x de B).

Soit deux fibrations $\ell_0 : E_0 \rightarrow B_0$ et $\ell_1 : E_1 \rightarrow B_1$, de fibres respectives F_0 et F_1 . Un *morphisme de fibrations* est la donnée de deux applications continues f et

\bar{f}) telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & E_1 \\ \ell_0 \downarrow & & \downarrow \ell_1 \\ B_0 & \xrightarrow{f} & B_1 \end{array}$$

En particulier, un tel morphisme préserve les fibres i.e. $\bar{f}((F_0)_x) \subset (F_1)_{f(x)}$.

Nous décrivons à présent la fibration (de l'espace) de lacets d'un espace topologique. Soit B un espace topologique connexe par arcs et x_0 un point de B . On définit l'espace des chemins de B , pointés en x_0 , comme étant

$$P_{x_0}B := \{\lambda : [0, 1] \rightarrow B \mid \lambda \text{ continue et } \lambda(0) = x_0\}.$$

Lemme 3.14. *L'application d'évaluation en 1, $ev_1 : P_{x_0}B \rightarrow B$, est une fibration. La fibre en x_0 de cette fibration est l'espace des lacets de B , pointés en x_0*

$$\Omega_{x_0}B := \{\lambda \in P_{x_0}B \mid \lambda(1) = x_0\}.$$

La démonstration de ce lemme est peu intéressante en elle-même. Il est possible (et peu difficile) de montrer explicitement que cette application admet la propriété de relèvement des homotopies.

Comme nous avons supposé B connexe par arcs, pour tout x_0 et x_1 , points de B , $P_{x_0}B$, $P_{x_1}B$ et $\Omega_{x_0}B$, $\Omega_{x_1}B$ sont identifiés deux à deux (de manière non canonique) par la donnée d'un chemin dans B reliant x_0 à x_1 . Dans la suite, nous sous-entendrons le point de base x_0 , PB et ΩB désignant toujours les espaces des chemins et des lacets pointés de l'espace B .

Définition 3.15. Cette fibration $\Omega B \hookrightarrow PB \xrightarrow{ev_1} B$ est la fibration de lacets de l'espace topologique B .

L'une des applications de cette fibration est donnée par le lemme ci-dessous. Ce résultat sera utilisé en §3.2.3, dans le but de construire la suite spectrale associée à la fibration de lacets de S^n .

Lemme 3.16. *Pour tout $n > 1$, on a $\pi_n(B) \simeq \pi_{n-1}(\Omega B)$.*

Remarque 3.17. Nous ne donnerons pas la preuve intégrale de ce lemme ici puisque c'est un résultat classique de théorie de l'homotopie. Notons que s'il semble immédiat (à tout le moins de manière heuristique), sa démonstration n'en est pas moins assez technique. Elle repose essentiellement sur les deux propriétés générales suivantes.

(P1) Le pullback d'une fibration est une fibration. Les fibres de ces deux fibrations ont même type d'homotopie.

(P2) L'espace total et la fibre d'une fibration de base contractile ont le même type d'homotopie.

La propriété (P1) est tout à fait évidente au vu de la définition même de fibration. La propriété (P2) est, quant à elle, plus délicate. On peut se référer à [1] ou [37] pour deux démonstrations (différentes) de ce fait.

Ceci étant acquis, on se donne une fibration $\ell : E_0 \rightarrow B$ et on fait le pullback de la fibration de lacets $PB \rightarrow B$ au-dessus de E par ℓ . On obtient ainsi le diagramme de fibrations (propriété (P1)) suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_1 & \xlongequal{\quad} & \Omega B \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_0 & \hookrightarrow & E_1 & \xrightarrow{p_1} & PB \\
 \parallel & & \downarrow p'_1 & & \downarrow \text{ev}_1 \\
 F_0 & \hookrightarrow & E_0 & \xrightarrow{\ell} & B
 \end{array}$$

où $E_1 = \{(\lambda, e) \in PB \times E_0 \mid \text{ev}_1(\lambda) = \lambda(1) = \ell(e)\}$, et p_1, p'_1 les deux projections. L'espace PB étant contractile, la propriété (P2) implique que E_1 a le même type d'homotopie que F_0 . Si l'on réitère ce processus en remplaçant la fibration

$\ell : E_0 \rightarrow B$ par $p'_1 : E_1 \rightarrow E_0$ puis par $p'_2 : E_2 \rightarrow E_1$, etc., on obtient

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 F_2 & \xlongequal{\quad} & \Omega E_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F_1 \simeq E_2 & \xrightarrow{p_2} & PE_0 \\
 \downarrow p'_2 & & \downarrow \text{ev}_1 \\
 E_1 & \xrightarrow{p'_1} & E_0
 \end{array} & \text{puis} & \begin{array}{ccc}
 F_3 & \xlongequal{\quad} & \Omega E_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F_2 \simeq E_3 & \xrightarrow{p_3} & PE_1 \\
 \downarrow p'_3 & & \downarrow \text{ev}_1 \\
 E_2 & \xrightarrow{p'_2} & E_1
 \end{array} \quad \dots
 \end{array}$$

Les espaces de lacets PE_0 et PE_1 étant contractiles, la propriété **(P2)** donne

$$E_2 \simeq F_1 \simeq \Omega B \quad \text{et} \quad E_3 \simeq F_2 \simeq \Omega E_0.$$

On obtient donc des fibrations à homotopie près :

$$\Omega B \longrightarrow F_0 \longrightarrow E_0 \quad \text{et} \quad \Omega E_0 \longrightarrow \Omega B \longrightarrow F_0.$$

Ce processus induit, pour la fibration initiale $\ell : E_0 \rightarrow B$, une suite de fibrations à homotopie près :

$$\dots \rightarrow \Omega^n F_0 \xrightarrow{\Omega^n i} \Omega^n E_0 \xrightarrow{\Omega^n \ell} \Omega^n B \longrightarrow \Omega^{n-1} F_0 \longrightarrow \dots \rightarrow \Omega B \longrightarrow F_0 \xrightarrow{i} E_0 \xrightarrow{\ell} B.$$

Celle-ci conduit presque immédiatement à une longue suite exacte :

$$\begin{aligned}
 \dots \longrightarrow \pi_n(F_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E_0) \xrightarrow{\ell_*} \pi_n(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(F_0) \longrightarrow \dots \\
 \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(F_0) \longrightarrow \pi_0(E_0) \longrightarrow \pi_0(B),
 \end{aligned}$$

et on conclut la preuve du lemme en utilisant que pour la fibration de lacets l'espace $E_0 = PB$ est contractile et que l'on a donc pour tout $n > 1$, $\pi_n(E_0) = 0$.

3.2.2. La suite spectrale de Leray–Serre de la fibration de lacets

Sous certaines hypothèses, une fibration induit une suite spectrale. Ceci constitue le théorème de Leray–Serre que nous énonçons ci-dessous, après une rapide définition.

Définition 3.18. Une suite spectrale $E = (E_{*,*}^r, d^r)$ est dite *de premier quadrant* si pour toute page r , $E_{p,q}^r = 0$ dès que p ou q est strictement négatif.

Théorème 3.19 (La suite spectrale de Leray–Serre en homologie). *Soit G un groupe abélien et $F \longrightarrow E \xrightarrow{\ell} B$ une fibration dont la base B est un complexe CW, connexe par arcs et la fibre F est connexe. Alors il existe une suite spectrale de premier quadrant, $(E_{*,*}^r, d^r)$ convergeant vers $H_*(E, G)$, avec $E_{p,q}^2 \simeq H_p(B, H_q(F, G))$, l’homologie de B avec coefficients locaux dans l’homologie de la fibre F . De plus, cette suite spectrale est naturelle par rapport aux morphismes de fibrations.*

Les grandes lignes de la démonstration de ce théorème sont les suivantes. L’espace B étant un complexe CW, il vient avec une décomposition cellulaire. Dénotons par B^k son k -squelette (i.e. le sous-complexe CW constitué des cellules de dimension $i \leq k$ de B). Ces espaces donnent une filtration *topologique* de B . Si B est une variété de dimension n , on a

$$\emptyset = B^{-1} \subset B^0 \subset B^1 \dots \subset B^n = B.$$

L’application ℓ permet de relever cette filtration en une filtration de E , en posant $E^k := \ell^{-1}(B^k)$. Ceci induit une filtration *algébrique* (i.e. au sens de la définition 3.7) du complexe de chaînes cubiques de E , $(\mathcal{S}_*(E), d)$. La suite spectrale $(E_{*,*}^r, d^r)$ est alors donnée par le théorème 3.10 pour cette filtration particulière.

Remarquons que *dans le cas de la fibration des lacets*, E^k est l’ensemble des chemins de B dont l’extrémité initiale est le point x_0 fixé par avance et l’extrémité finale appartient au k -squelette B^k . En particulier, si B^0 est constitué du seul point x_0 , E^0 est l’ensemble des lacets de B basés en x_0 . On obtient donc la filtration

$$\emptyset \hookrightarrow \Omega B = E^0 \hookrightarrow E^1 \hookrightarrow \dots \quad E^k \hookrightarrow PB$$

qui nous donne une filtration de $\mathcal{S}_*(PB)$ par les $\mathcal{S}_*(E^k)$.

Remarque 3.20. Même si nous avons énoncé le théorème de Leray–Serre en toute généralité, nous allons dans la suite nous restreindre au cas où $G = \mathbb{Z}_2$,

puisque c'est le cas que nous avons traité jusqu'ici. Nous ne précisons plus les coefficients dans la suite.

De plus, pour éviter les complexités techniques introduites par les systèmes de coefficients locaux, nous allons nous placer dans le cas particulier où la base B est non seulement connexe par arcs mais également simplement connexe (i.e. $\pi_1(B)$ trivial). Ceci implique en particulier que le système de coefficients locaux induit par la fibre est simple et donc que les modules de la seconde page de la suite spectrale donnée par le théorème de Leray–Serre vérifient

$$E_{p,q}^2 \simeq H_p(B, H_q(F)) \simeq H_p(B) \otimes H_q(F).$$

En effet, dans ce cas le théorème des coefficients universels donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_p(B) \otimes H_q(F) \longrightarrow H_p(B, H_q(F)) \longrightarrow \text{Tor}(H_{p-1}(B), H_q(F)) \longrightarrow 0$$

et le module de torsion est nul (par le choix des coefficients).

3.2.3. Application : homologie de ΩS^n

Nous décrivons ici une application bien connue de la suite spectrale de Leray–Serre. En effet, le calcul des pages 2 et n de la suite spectrale de Leray–Serre de la fibration de lacets de S^n permet de déduire l'homologie de son espace de lacets ΩS^n . Nous en utiliserons le résultat plus tard (§3.3.1.3 puis §4.2.1).

Proposition 3.21.

$$H_p(\Omega S^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{quand } (n-1) \text{ divise } p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Considérons la fibration des lacets sur S^n ,

$$\Omega S^n \hookrightarrow PS^n \xrightarrow{\ell} S^n$$

Le théorème 3.19 affirme l'existence d'une suite spectrale de premier quadrant dont la deuxième page a pour modules : $E_{p,q}^2 = H_p(S^n) \otimes H_q(\Omega S^n)$ (voir aussi la remarque 3.20).

Comme les groupes d'homotopie de S^n d'ordre 2 à $n - 1$ sont nuls, le lemme 3.16 nous permet de conclure que les groupes d'homotopie de ΩS^n d'ordre 1 à $n - 2$ le sont également. Le théorème de Hurewicz implique que les groupes $H_p(\Omega S^n)$ sont nuls pour $0 < p < n - 1$. Les différentielles des pages $2 \leq r \leq n - 1$ et $r > n$ sont donc nulles. Il vient que E^2 est isomorphe à E^n et E^∞ à E^{n+1} .

Le théorème de Leray–Serre affirme que E^∞ est isomorphe à l'homologie de l'espace total PS^n . Comme celui-ci est contractile, $E_{0,0}^\infty \simeq \mathbb{Z}_2$ et pour un couple (p, q) non nul, $E_{p,q}^\infty = 0$. On a représenté cette situation (la n -ème page de la suite spectrale) en figure 3.1.

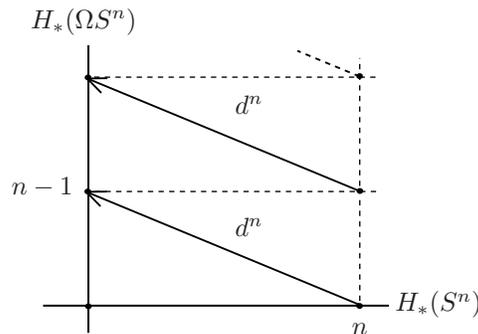


FIG. 3.1. L'homologie de l'espace des lacets de S^n

Les trois points de coordonnées $(0, 0)$, $(n, 0)$ et $(0, n - 1)$ représentent donc ici trois copies de \mathbb{Z}_2 . Comme $d^n : \mathbb{Z}_2 \simeq E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n \simeq \mathbb{Z}_2$ est non nulle, c'est un isomorphisme. De plus, comme sur la page suivante, seul $E_{0,0}^{n+1}$ est non nul, $E_{n,n-1}^n \neq 0$ (puisque $E_{p,q}^n \simeq H_p(S^n) \otimes H_q(\Omega S^n)$) doit disparaître à l'étape suivante et donc $d^n : \mathbb{Z}_2 \simeq E_{n,n-1}^n \rightarrow E_{0,2n-2}^n$ doit être un isomorphisme, ce qui permet enfin de conclure que $E_{0,2n-2}^n$ est isomorphe à \mathbb{Z}_2 . Il vient donc $H_{2n-2}(\Omega S^n) \simeq \mathbb{Z}_2$. En itérant ce raisonnement, on obtient le résultat désiré. \square

3.3. SUITES SPECTRALES DE BARRAUD–CORNEA

3.3.1. Le cas Morse

Nous allons donner beaucoup de détails dans cette section dans la mesure où ces constructions sont à la base des résultats du chapitre 4. De plus, du fait de la grande similarité de ces constructions dans les cas Morse et Floer, ceci nous permettra de survoler plus rapidement le cas Floer.

3.3.1.1. Construction de la suite spectrale

On se donne une variété lisse L de dimension n , compacte et connexe par arcs, munie d'une paire Morse–Smale (f, g) . Nous supposons également que f est *auto-indexée*. Cette condition signifie que pour tout point critique de f ,

$$f(p) = i_f(p).$$

La construction de Barraud et Cornea repose sur les deux idées suivantes. Le complexe de Morse classique est enrichi (par produit tensoriel avec le complexe des chaînes cubiques de l'espace des lacets de L) de sorte que l'on puisse prendre en compte les espaces de modules (i.e. dans ce cas, les variétés connectantes de paires de points critiques) de toute dimension. Ce complexe enrichi admet une filtration préservant sa différentielle et le théorème 3.10 est alors invoqué.

On se donne un plongement de l'intervalle $[0, 1]$ dans L , w , passant par tous les points critiques de f . Dénotons par q la projection de L sur $\tilde{L} := L/\text{im}(w)$.

Remarque 3.22. Tous les points critiques de f sont envoyés sur un point distingué, $*$, de \tilde{L} . Ce point va servir de point de base (implicite). De plus les lignes de flot de f sur L peuvent à présent être considérées comme des lacets (pointés) de \tilde{L} .

Choisissons un espace topologique X simplement connexe et donnons nous une application continue $l : \tilde{L} \rightarrow X$.

Pour deux points critiques p et q de f , dénotons par $C_{p,q}L$ l'ensemble des applications continues $C^0([0, f(p) - f(q)], L)$ et par $\gamma_{p,q}$ l'application

$$\gamma_{p,q} : \mathcal{M}_{p,q}(f, g) \longrightarrow C_{p,q}L$$

qui associe à un point x de la variété connectante de p et q , l'unique ligne de flot le représentant, paramétrée par l'intervalle $[0, f(p) - f(q)]$ (elle est illustrée en figure 3.2). En effet, rappelons que $\mathcal{M}_{p,q}(f, g)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de lignes de flot de f après quotient par les reparamétrisations. Si la ligne de flot γ_x représente x , $\gamma_{p,q}(x)$ est donné par

$$\gamma_{p,q}(x)(t) = \gamma_x(t') \text{ avec } f(p) - f(\gamma_x(t')) = t$$

pour tout t dans l'intervalle $[0, f(p) - f(q)]$. L'élément t' est déterminé de manière unique puisque f décroît strictement le long de ses lignes de flot. L'application $\gamma_{p,q}$ est compatible avec la formule de compactification des espaces de modules (1.1.1), et induit donc une application

$$\bar{\gamma}_{p,q} : \bar{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g) \longrightarrow C_{p,q}L.$$

On se donne un espace topologique Y . Nous décrivons ici une façon (topologique) de lui associer un anneau différentiel.

Définition 3.23. On appelle *espace des lacets de Moore* de l'espace topologique Y , et l'on note par $\Omega'Y$, l'espace des lacets de Y paramétrés par un intervalle de longueur arbitraire. Plus précisément, on a

$$\Omega'Y := \{\gamma \in C^0([0, a], Y) \mid 0 \leq a \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque 3.24. Remarquons que l'espace des lacets de Y est évidemment inclus dans l'espace de ses lacets de Moore et que ces deux espaces ont même type d'homotopie. De plus, $\Omega'Y$ muni de l'opération de concaténation de lacets $\#$ est un monoïde.

Dénotons comme précédemment par $\mathcal{S}_*(\Omega'Y)$ le *complexe de chaînes cubiques* de $\Omega'Y$. Il est muni d'un produit, $\cdot : \mathcal{S}_*(\Omega'Y) \times \mathcal{S}_*(\Omega'Y) \rightarrow \mathcal{S}_*(\Omega'Y)$, provenant

de la concaténation dans $\Omega'Y$ et de l'existence d'un produit dans le complexe de chaînes cubiques, $\times : \mathcal{S}_p(A) \times \mathcal{S}_q(B) \rightarrow \mathcal{S}_{p+q}(A \times B)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_k(\Omega'Y) \times \mathcal{S}_l(\Omega'Y) & \xrightarrow{\times} & \mathcal{S}_{k+l}(\Omega'Y \times \Omega'Y) \\ & \searrow & \downarrow \mathcal{S}_{k+l}(\#) \\ & & \mathcal{S}_{k+l}(\Omega'Y) \end{array}$$

(avec $A = B = \Omega'Y$). Muni de ce produit, $\mathcal{R}_*^Y := \mathcal{S}_*(\Omega'Y)$ est un anneau différentiel.

Nous allons faire intervenir l'anneau différentiel $\mathcal{R}_*^X = \mathcal{S}_*(\Omega'X)$ dans la construction. Définissons l'application

$$\mathcal{Q}_{p,q} : C_{p,q}L \longrightarrow \Omega'\tilde{L}$$

comme la projection par q des chemins dans L , et dénotons par $\Phi_{p,q}$ la composition

$$\Phi_{p,q} = \mathcal{Q}_{p,q} \circ \bar{\gamma}_{p,q} : \overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g) \longrightarrow \Omega'\tilde{L}.$$

L'application l induit des applications

$$\Omega'l : \Omega'\tilde{L} \rightarrow \Omega'X \quad \text{et} \quad (\Omega'l)_* : \mathcal{R}_*^{\tilde{L}} \longrightarrow \mathcal{R}_*^X$$

préservant la multiplication. La figure 3.2 illustre la construction des applications q et γ en basse dimension (on a oublié les indices p et q), l'application Φ est la composée des deux.

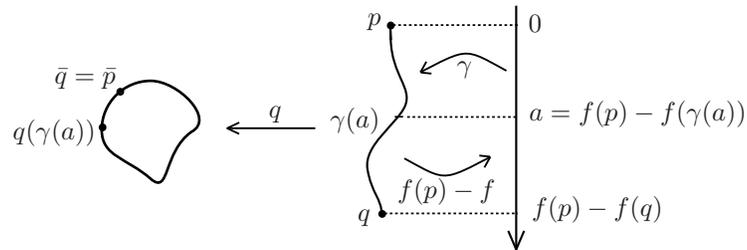


FIG. 3.2. Les applications γ et q

Appelons j_* l'application induite au niveau du complexe de chaînes (cubiques) par l'inclusion de $(\overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g), \emptyset)$ dans $(\overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g), \partial\overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g))$. Le dernier ingrédient est un système de chaînes représentant $\overline{\mathcal{M}}(f, g)$.

Définition 3.25. Un *système de chaînes* représentant l'espace de module $\overline{\mathcal{M}}(f, g)$ est une famille

$$\zeta = \{s_{pq} \in \mathcal{S}_{i_f(p)-i_f(q)-1}(\overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g)) \mid p, q \in \text{Crit}(f)\}$$

telle que

- i. la chaîne $\sigma_{pq} := j_*(s_{pq}) \in \mathcal{S}_{i_f(p)-i_f(q)-1}(\overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g), \partial\overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g))$ représente la classe fondamentale de $\overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g)$ relativement à sa frontière,
- ii. $\partial s_{pq} = \sum_r s_{pr} \times s_{rq}$.

Un tel système représentant $\overline{\mathcal{M}}(f, g)$ existe. Il peut être construit par induction en utilisant ii.

Dénotons par

$$a_{pq} := (\Omega'l)_* \circ (\Phi_{p,q})_*(s_{pq}) \in \mathcal{R}_*^X.$$

On forme le \mathcal{R}_*^X -module à gauche $\mathcal{C}_*^X = \mathcal{R}_*^X \otimes CM_*(L; f, g)$ que l'on munit d'un endomorphisme défini par la formule

$$d'(a \otimes p) = (da) \otimes p + a \cdot (\partial p)$$

où d est la différentielle de \mathcal{R}_*^X et $\partial : CM_*(L; f, g) \rightarrow \mathcal{C}_*^X$ est donné par

$$\partial(p) = \sum_{q \in \text{Crit}f} a_{pq} \otimes q. \quad (3.3.1)$$

Remarquons que ∂ "étend" la différentielle classique du complexe de Morse, en prenant en compte tous les espaces de modules non vides. Barraud et Cornea ont montré que $d'^2 = 0$. Ainsi (\mathcal{C}_*^X, d') est un module différentiel gradué sur \mathcal{R}_*^X . C'est le *complexe de Morse étendu*. Il admet la filtration suivante :

$$F_k \mathcal{C}_*^X = \mathcal{R}_*^X \otimes \langle \text{Crit}_j(f) \mid j \leq k \rangle_{\mathbb{Z}_2} = \bigoplus_{j \leq k} \mathcal{R}_*^X \otimes CM_j(L; f, g).$$

La suite spectrale qui nous intéresse est celle produite par cette filtration (théorème 3.10) :

$$EM(L; f, g; X) = (EM_{*,*}^r(L; f, g; X), d^r).$$

3.3.1.2. Propriétés principales

Barraud et Cornea ont démontré deux propriétés importantes de cette suite spectrale qui vont être très utiles par la suite. On se donne comme précédemment un espace topologique X simplement connexe et une application continue $l : \tilde{L} \rightarrow X$. On fait le pullback de la fibration de lacets de X sur L par l :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega X & \xlongequal{\quad} & \Omega X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E_l & \xrightarrow{\pi_1} & PX \\
 \pi_2 \downarrow & & \downarrow \text{ev}_1 \\
 L & \xrightarrow{l} & X
 \end{array}$$

où π_1 et π_2 désignent les projections. Par le théorème 3.19, une suite spectrale est associée à la fibration obtenue. Dénotons là $E_X(L)$.

Proposition 3.26 (Barraud–Cornea). *Les modules de la seconde page de la suite spectrale $EM(L; f, g; X)$ vérifient*

$$EM_{p,q}^2(L; f, g; X) \simeq H_q(\Omega X) \otimes HM_p(L; f, g). \quad (3.3.2)$$

De plus, il existe un isomorphisme de suites spectrales entre les suites spectrales $E_X(L)$ et $EM(L; f, g; X)$ à partir de la page 2.

En particulier, pour $E_X(L)$, il est à noter que la base X étant simplement connexe, l'homologie à coefficients locaux dans l'homologie de la fibre devient juste un produit tensoriel (voir la remarque 3.20), ce qui permet de retrouver l'isomorphisme (3.3.2). De plus, elle converge vers l'homologie triviale de l'espace total de cette fibration : l'espace des chemins sur X , qui est contractile.

3.3.1.3. Exemple : suite spectrale "associée" à $S^2 \times S^4$

Nous illustrons la construction de la suite spectrale de Barraud–Cornea dans le cas Morse en calculant explicitement celle associée à une certaine fonction de

Morse sur $S^2 \times S^4$. Cet exemple est suffisamment simple pour être intégralement décrit et induira par la suite (§4.2.1) un exemple où les invariants spectraux d'ordre supérieur de la section 4.2 délivrent des informations intéressantes. Nous utilisons ici les résultats provenant de l'exemple traité en §3.2.3.

Nous considérons donc $S^2 \times S^4$, muni de la fonction de Morse donnée comme somme des fonctions "hauteur" sur chacune des deux sphères :

$$f_n : S^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } f(x_1, \dots, x_n) = x_n, \quad (3.3.3)$$

$$f : S^2 \times S^4 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } f(x, y) = f_2(x) + f_4(y). \quad (3.3.4)$$

La fonction f a quatre points critiques,

$$\begin{aligned} p_6 &= (\max(f_2), \max(f_4)), & p_4 &= (\min(f_2), \max(f_4)), \\ p_2 &= (\max(f_2), \min(f_4)), & p_0 &= (\min(f_2), \min(f_4)), \end{aligned}$$

dont les indices dénotent les indices de Morse i.e. $i_f(p_i) = i$. Les espaces de modules de lignes de flot non vides sont les suivants :

$$\mathcal{M}_{p_6, p_4}, \mathcal{M}_{p_6, p_2}, \mathcal{M}_{p_6, p_0} \text{ et } \mathcal{M}_{p_4, p_0}, \mathcal{M}_{p_2, p_0}.$$

Dénotons par α (resp. β) le générateur de $H_1(\Omega S^2)$ (resp. $H_3(\Omega S^4)$) vu comme élément de l'homologie de $\Omega S^2 \times \Omega S^4 = \Omega(S^2 \times S^4)$. Ils représentent les classes fondamentales de \mathcal{M}_{p_6, p_4} et \mathcal{M}_{p_2, p_0} (pour α) et \mathcal{M}_{p_6, p_2} et \mathcal{M}_{p_4, p_0} (pour β), au sens de la définition 3.25. On dénote par γ le produit $\alpha \cdot \beta$. La différentielle du complexe étendu (3.3.1) donne en particulier

$$\partial p_6 = \alpha \otimes p_4 + \beta \otimes p_2 + \gamma \otimes p_0, \quad \partial p_4 = \beta \otimes p_0, \quad \partial p_2 = \alpha \otimes p_0 \text{ et } \partial p_0 = 0.$$

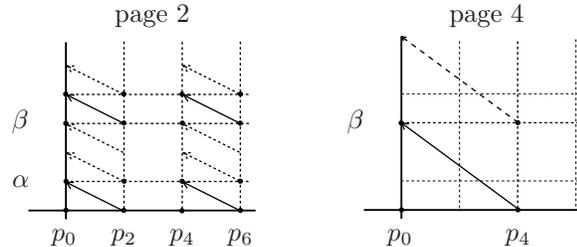


FIG. 3.3. Suite spectrale de Barraud–Cornea "associée" à $S^2 \times S^4$

Sur la figure 3.3, nous avons représenté les pages 2 et 4 de cette suite spectrale (la différentielle de la page 3 étant nulle, les modules apparaissant dans les pages 3 et 4 sont les mêmes).

1. Nous avons utilisé des flèches en trait plein pour représenter des flèches "génératrices"

page 2 – $\partial^2 p_2 = \alpha \otimes p_0$, $\partial^2 p_6 = \alpha \otimes p_4$ et les exceptions (voir 3. ci-dessous),
page 4 – $\partial^4 p_4 = \beta \otimes p_0$,

2. et des flèches en pointillés pour les flèches qu'elles induisent

page 2 – $\partial^2(\delta \otimes p_2) = (\delta \cdot \alpha) \otimes p_0$ et $\partial^2(\delta \otimes p_6) = (\delta \cdot \alpha) \otimes p_4$, pour tout $\delta \in H_*(\Omega(S^2 \times S^4))$ (produit de α et de β),
page 4 – $\partial^4(\delta \otimes p_4) = (\delta \cdot \beta) \otimes p_0$, pour tout $\delta \in H_*(\Omega(S^2 \times S^4))$ (produit de β).

3. Il est important de remarquer qu'aucune flèche, à la page 2 n'a pour image $\beta \otimes p_i$ ($i = 0, 2, 4$ et 6). Donc a priori, ces quatre éléments devraient survivre à la page 3. Cependant,

$$\partial^2(\beta \otimes p_2) = (\beta \cdot \alpha) \otimes p_0 \neq 0,$$

$$\partial^2(\beta \otimes p_6) = (\beta \cdot \alpha) \otimes p_4 \neq 0$$

(ces deux flèches sont les exceptions mentionnées au point 1.). Donc seules les classes $\beta \otimes p_0$ et $\beta \otimes p_4$ survivent. Elles disparaissent à la page 4 comme mentionné au point 2. A la page 5, tous les modules sont à présent nuls à part celui à l'origine. La suite spectrale dégénère donc trivialement à partir de la page 5 et converge bien vers l'homologie de l'espace (contractile) des chemins de $S^2 \times S^4$ (isomorphisme avec la suite spectrale de Leray–Serre par la proposition 3.26 et le théorème de Leray–Serre 3.19).

3.3.2. Le cas Floer (lagrangien)

Cette construction est analogue à celle effectuée dans le cas Morse. On se donne une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ et deux sous-variétés lagrangiennes L et L' compactes et connexes par arcs. On se donne également

une paire régulière (H, J) . On choisit un plongement w de l'intervalle $[0, 1]$ dans L passant par $x(0)$ pour tout $x \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$. On pose

$$\widetilde{M} := M/\text{im}(w) \quad \text{et} \quad \widetilde{L} := L/\text{im}(w)$$

et on dénote par q les projections :

$$M \rightarrow \widetilde{M}, \quad L \rightarrow \widetilde{L}, \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_\eta(L, L') \rightarrow \mathcal{P}_\eta(\widetilde{L}, L').$$

A présent, $C_{x,y}\mathcal{P}$ désigne $C^0([0, \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y)], \mathcal{P}_\eta(L, L'))$ pour tout x et tout $y \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$ et on définit une application

$$\bar{\gamma}_{x,y} : \overline{\mathcal{M}}_{x,y}(L, L'; H, J) \rightarrow C_{x,y}\mathcal{P}.$$

L'application d'évaluation en 0 permet de définir

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{x,y} &= \text{ev}_0 \circ q : C_{x,y}\mathcal{P} \rightarrow \Omega'\widetilde{L} \quad \text{et} \\ \Phi_{x,y} &= \mathcal{Q}_{x,y} \circ \bar{\gamma}_{x,y} : \overline{\mathcal{M}}(x, y) \rightarrow \Omega'\widetilde{L}. \end{aligned}$$

Les points critiques de f étant remplacés par ceux de la fonctionnelle action et l'indice de Morse par celui de Maslov, le reste de la procédure est *formellement* tout à fait identique et conduit au *complexe de Floer étendu* (\mathcal{C}_*^X, d') qui admet la filtration

$$F_k \mathcal{C}_*^X = \mathcal{R}_*^X \otimes \langle x \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H) \mid \mu(x) \leq k \rangle_{\mathbb{Z}_2} = \bigoplus_{j \leq k} \mathcal{R}_*^X \otimes CF_j(L, L'; H, J).$$

On en déduit à nouveau (théorème 3.10) la suite spectrale désirée :

$$EF(L, L'; \eta; H, J; X) = (EF_{*,*}^r(L, L'; \eta; H, J; X), d^r).$$

Deux propriétés de cette suite spectrale (démontrées par Barraud et Cornea [5]) vont être d'une grande utilité dans le chapitre suivant :

Proposition 3.27 (Barraud–Cornea). *La suite spectrale $EF(L, L'; \eta; H, J; X)$ vérifie les propriétés suivantes :*

- (1) $EF_{p,q}^2(L, L'; \eta; H, J; X) \simeq H_q(\Omega X) \otimes HF_p(L, L'; \eta; H, J)$,
- (2) si $d^r \neq 0$, il existe x et y , éléments de $\mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, tels que $\mu(x, y) = r$ et $\mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J)$ est non vide.

De plus, Barraud et Cornea ont montré [4] que l'on peut étendre naturellement les morphismes de comparaison, naturalité et PSS lagrangien aux suites spectrales correspondantes. Plus précisément on a, avec les notations de la section 1.3,

Proposition 3.28 (Barraud–Cornea). *Il existe une extension du morphisme*
1. *de comparaison*

$$\Psi^{H,H'} : EF(L, L'; \eta; H, J; X) \longrightarrow EF(L, L'; \eta; H', J'; X),$$

2. *de naturalité*

$$B_H : EF(L, (\phi_H^1)^{-1}(L'); \eta'; 0, \phi_H^* J; X) \longrightarrow EF(L, L'; \eta; H, J; X),$$

3. *PSS lagrangien, lorsque $L' = L$,*

$$\Phi_f^H : EM(L; f, g; X) \longrightarrow EF(L, L; \eta; H, J; X).$$

Ces morphismes induisent des isomorphismes à partir de la page 2 des suites spectrales correspondantes.

Remarque 3.29. Ces morphismes sont tout d'abord construits sur les complexes étendus, comme leurs contre-parties homologiques respectives (section 1.3), mais en incluant les espaces de modules de lignes de flot de Morse et de trajectoires de Floer de toute dimension.

Il est important (pour la suite) de remarquer que le troisième isomorphisme coïncide avec le morphisme PSS lagrangien, décrit en §1.3.3, quand il est restreint aux éléments des modules (voir (3.3.2) avec $q = 0$)

$$EM_{p,0}^2(L; f, g; X) \simeq H_0(\Omega X) \otimes HM_p(L; f, g) \simeq HM_p(L; f, g).$$

Du fait de l'existence d'un morphisme de comparaison de type Floer classique, la suite spectrale de Barraud et Cornea dans le cas Floer sera parfois dénotée $EF(L, L'; X)$ (à moins que l'on ne doive insister sur certains des paramètres utilisés pour sa construction).

En rapprochant cette proposition de la proposition 3.26, il vient directement un isomorphisme entre les suites spectrales $E_X(L)$ et $EF(L, L'; X)$ dès la page 2.

Remarque 3.30. L'exemple traité précédemment (§3.3.1.3) donne directement un exemple en théorie de Floer lagrangienne par la procédure décrite en §1.2.3. En effet, choisir la fonction de Morse suffisamment petite en norme C^2 permet d'obtenir une identification

- entre les points critiques de la fonction f et les points d'intersection du graphe de sa différentielle et de la section nulle dans le cotangent $(T^*M)_0 \cap \Gamma_{df}$, et
- entre les lignes de flot de f et les trajectoires de Floer correspondantes.

Les suites spectrales de Morse et de Floer de Barraud–Cornea sont par conséquent, dans ce cas-ci, totalement identifiées.

Chapitre 4

INVARIANTS SPECTRAUX

Dans ce chapitre, nous introduisons les invariants spectraux lagrangiens. Nous définissons tout d'abord les nombres spectraux d'ordre 2 (section 4.1) dans la mesure où ceux-ci sont plus familiers aux lecteurs. En effet, cette construction est très similaire à celle des invariants spectraux définis par Oh et Schwarz dans le cadre hamiltonien. Nous nous attachons à démontrer leur invariance vis-à-vis des nombreux outils intervenant dans leur construction (§4.1.1). Nous montrons ensuite que les invariants que nous introduisons ici sont une généralisation des invariants hamiltoniens (§4.1.2). Nous terminons cette section en démontrant deux de leurs premières propriétés (§4.1.3).

Dans un second temps, nous définissons les invariants spectraux d'ordre supérieur (section 4.2). Ceux-ci font intervenir les suites spectrales de Barraud–Cornea. Comme nous le verrons par l'intermédiaire d'un exemple (§4.2.1), ces invariants donnent strictement plus d'informations sur le spectre de l'action que leurs homologues d'ordre 2. Nous démontrons, de plus, qu'il est aisé de les distinguer à partir de la connaissance des suites spectrales associées à certaines fibrations de lacets et que leur différence est alors minorée par une quantité géométrique dépendant des deux lagrangiens considérés (§4.2.2). Cette propriété a, comme nous le verrons finalement (§4.2.3), plusieurs corollaires intéressants concernant les invariants spectraux d'ordre 2.

Dans chacune de ces deux sections, nous commençons par donner leur définition et énoncer leurs propriétés. Les démonstrations sont renvoyées en fin de section pour plus de clarté.

4.1. INVARIANTS SPECTRAUX D'ORDRE 2 OU HOMOLOGIQUES

Rappelons que l'homologie de Morse d'une variété L de dimension n , $HM_*(L)$, a été définie en section 1.1, que l'homologie lagrangienne d'une variété symplectique (M, ω) respectivement à deux sous-variétés lagrangiennes isotopes par une isotopie hamiltonienne L et L' , $HF_*(L, L')$, a été définie en section 1.2. Cette homologie admet une *filtration par l'action* qui consiste en ne conserver que les générateurs dont l'action se situe sous un niveau $\nu \in \mathbb{R}$ fixé. En effet, on peut définir les espaces vectoriels

$$CF_*^\nu(L, L'; H, J) := \langle x \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H) \mid \mathcal{A}_H(x) < \nu \rangle_{\mathbb{Z}_2}.$$

Comme l'action décroît strictement le long des trajectoires de Floer, la différentielle du complexe de Floer définie par la formule (1.2.10), induit une différentielle

$$\partial^\nu : CF_p^\nu(L, L'; H, J) \longrightarrow CF_{p-1}^\nu(L, L'; H, J)$$

de sorte que $(CF_*^\nu(L, L'; H, J), \partial^\nu)$ soit un sous-complexe du complexe de Floer. Nous noterons son inclusion dans le complexe total par

$$i^\nu : CF_*^\nu(L, L'; H, J) \hookrightarrow CF_*(L, L'; H, J). \quad (4.1.1)$$

et par $i_*^\nu := H_*(i^\nu)$ l'application induite en homologie. Rappelons enfin que les homologies de Morse et de Floer sont reliées par un morphisme de type PSS (§1.3.3) :

$$\phi : HM_*(L) \longrightarrow HF_*(L, L').$$

Remarque 4.1. Comme nous l'avons remarqué précédemment (remarque 1.2, §1.3.1 et §1.3.3), ni les homologies de Morse et de Floer (à isomorphisme près), ni le morphisme de type PSS ne dépendent des choix des paires (f, g) et (H, J) . Cependant l'action de $\phi_f^H(p)$ ($p \in CM_*(L; f, g)$) en dépend a priori. Nous conservons

donc ces notations dans la définition suivante. Comprendre cette dépendance fait l'objet de la remarque 4.4 et du théorème 4.5.

Définition 4.2. Soit x un élément non nul de $HF_*(L, L'; H, J)$, on note

$$\tilde{\sigma}_{L,L'}(x; H, J, \eta) := \inf\{\nu \in \mathbb{R} \mid x \in \text{im}(i_*^\nu)\}. \quad (4.1.2)$$

Soit α une classe non nulle d'homologie (de Morse) de L . Son *nombre spectral lagrangien homologique* (ou *d'ordre 2 relatif*) associé est le nombre

$$\begin{aligned} \sigma_L(\alpha; H, J, \eta; f, g) &:= \inf\{\nu \in \mathbb{R} \mid \phi_f^H(\alpha) \in \text{im}(i_*^\nu)\} \\ &= \tilde{\sigma}_{L,L}(\phi_f^H(\alpha); H, J, \eta). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Enfin, si 1 dénote le générateur de $HM_0(L; f, g)$, on définit le *nombre spectral homologique (absolu)* de α par

$$c_L(\alpha; H, J; f, g) := \sigma_L(\alpha; H, J, \eta; f, g) - \sigma_L(1; H, J, \eta; f, g). \quad (4.1.4)$$

Remarque 4.3. La première définition (4.1.2) va nous permettre de simplifier l'écriture dans la preuve du théorème 4.5 (§4.1.1.3), cependant il nous semblait naturel de la mentionner si tôt puisqu'elle contient l'idée fondamentale des nombres spectraux.

La définition des nombres spectraux relatifs (4.1.3) est tout à fait équivalente à celle de Schwarz [35] dans le cas hamiltonien, pour une variété symplectique (M, ω) compacte, symplectiquement asphérique (i.e. ω s'annule sur $\pi_2(M)$) dont la première classe de Chern s'annule sur $\pi_2(M)$ (ces conditions sont à rapprocher respectivement des conditions (1.2.1) et (1.2.8) dans notre situation). Dans ce cas particulier, l'homologie considérée est l'homologie de Floer hamiltonienne de M (sans référence à des sous-variétés lagrangiennes). La construction de cette homologie est faite en tout détail dans [33] par exemple. Sous les hypothèses de trivialité des restrictions de la forme symplectique et de la première classe de Chern au groupe $\pi_2(M)$, l'homologie de Floer hamiltonienne est isomorphe à l'homologie de Morse par le morphisme PSS [31]. Elle admet la même filtration par l'action et avec les mêmes notations, les nombres spectraux hamiltoniens,

$\rho(\alpha; H, J)$, sont définis par l'infimum (4.1.3) pour une classe $\alpha \in H_*(M)$, non nulle. Le fait que les nombres spectraux lagrangiens d'ordre 2 sont une généralisation des nombres spectraux hamiltoniens est l'objet de la proposition 4.7. Cette généralisation a été évoquée dans [4].

La définition des nombres spectraux absolus (4.1.4) vient de la remarque 1.5 que nous avons faite au sujet de l'action. En effet, dans le cas hamiltonien, les générateurs de l'homologie considérés sont les orbites du champ de vecteurs symplectique d'un hamiltonien fixé qui sont contractiles (i.e. dans la même classe d'homotopie que le point). Cette restriction permet de définir l'action de manière "absolue". Dans le cas lagrangien un chemin de référence η doit être spécifié et *l'action dépend de façon cruciale de ce choix*. Comme un changement de chemin de référence, dans la même classe d'homotopie, induit une translation de l'action par une constante, les nombres spectraux lagrangiens (absolus) ne dépendent pas du chemin choisi. Ce sont ces nombres que nous appellerons par la suite nombres (puis invariants) spectraux lagrangiens (d'ordre 2).

La figure 4.1 illustre les invariants de la définition 4.2 dans le cas de la théorie de Morse pure. Dans ce cadre, l'on observe uniquement à quel moment une classe d'homologie de la variété L apparaît dans l'homologie de Morse filtrée par les valeurs de la fonction de Morse elle-même.

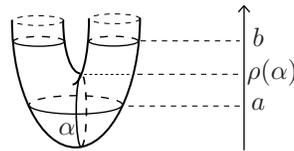


FIG. 4.1. Invariants spectraux dans le cas Morse

Remarque 4.4. Les nombres spectraux de la définition 4.2 sont invariants par rapport à la paire (f, g) (invariance donnée directement par le diagramme (1.3.6) du lemme 1.19). Nous les noterons donc dans la suite respectivement $\sigma_L(\alpha; H, J, \eta)$ et $c_L(\alpha; H, J)$.

En outre, pour toute classe α d'homologie de L non nulle, $\sigma_L(\alpha; H, J, \eta)$ est une valeur critique de la fonctionnelle action. En effet, ce sont ses points critiques qui induisent des changements dans la filtration par l'action de l'homologie de Floer et donc modifient l'application d'inclusion du complexe filtré dans le complexe total.

Le premier théorème important (théorème 4.5 ci-dessous) donne l'invariance de ces nombres spectraux et permet de définir les invariants spectraux d'ordre 2 ou homologiques. Il fait intervenir la *distance de Hofer* qui est définie comme suit. Un hamiltonien est dit *normalisé* si pour tout t , $\int_M H_t \omega^n = 0$ dans le cas où la variété M est compacte et s'il est à support compact sinon. Dès que le support d'un hamiltonien est compact, on peut définir les quantités

$$E^+(H) := \int_I \sup H_t dt \quad \text{et} \quad E^-(H) := \int_I \inf H_t dt$$

qui induisent une norme sur l'ensemble des hamiltoniens normalisés, donnée par la formule $\|H\| := E^+(H) - E^-(H)$. Cette norme induit enfin la *distance de Hofer* sur les ensembles de difféomorphismes hamiltoniens et de sous-variétés lagrangiennes isotopes (par une isotopie hamiltonienne) à un lagrangien L fixé :

$$d(\phi, \psi) = d(\text{id}, \phi^{-1}\psi) \quad \text{avec} \quad d(\text{id}, \varphi) := \inf\{\|H\| \mid \phi_H^1 = \varphi\} \quad \text{et}$$

$$\nabla(L_0, L_1) := \inf\{\|H\| \mid \phi_H^1(L_0) = L_1\}.$$

Théorème 4.5. *Les nombres spectraux (absolus) de la définition 4.2 ne dépendent que de L et de $(\phi_H^1)^{-1}(L)$. En d'autres termes, pour toute sous-variété lagrangienne L' , isotope à L par une isotopie hamiltonienne, et toute classe d'homologie non nulle $\alpha \in H_*(L)$, nous pouvons lui associer son invariant spectral lagrangien d'ordre 2 (ou homologique)*

$$c(\alpha; L, L') := c_L(\alpha; H, J) = \sigma_L(\alpha; H, J, \eta) - \sigma_L(1; H, J, \eta)$$

avec H tel que $\phi_H^1(L') = L$. De plus, l'application $c(\alpha; L, -)$ est continue sur l'ensemble des sous-variétés lagrangiennes isotopes à L par une isotopie hamiltonienne, muni de la distance de Hofer.

Sa démonstration s’effectue en deux étapes. La première étape consiste à démontrer la commutativité du diagramme (4.1.8). Cette commutativité étant en soi un résultat suffisamment surprenant, elle fait l’objet de la proposition 4.9. Sa démonstration s’appuie sur les structures algébriques et leur préservation par les morphismes de naturalité et PSS (chapitre 2). Inspirée de méthodes utilisées par Seidel [36], cette démonstration est originale dans le cas lagrangien et a été évoquée dans le cas hamiltonien dans [23]. La seconde étape repose sur un lemme obtenu de méthodes classiques dans le cas hamiltonien. La démonstration est présentée intégralement en §4.1.1 par souci de clarté.

Remarque 4.6. Dans le cas hamiltonien mentionné en remarque 4.3, les nombres spectraux sont également indépendants de la structure presque complexe J et ne dépendent de l’hamiltonien H que par le difféomorphisme au temps 1 qu’il induit, ϕ_H^1 . Ceci autorise Schwarz à associer à tout difféomorphisme hamiltonien $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$ et à toute classe $\alpha \in H_*(M)$, non nulle, l’invariant spectral

$$\rho(\alpha; \phi) := \rho(\alpha; H, J)$$

pour H tel que $\phi_H^1 = \phi$.

En outre, ces quantités induisent des applications continues $\rho(\alpha; -)$ sur l’ensemble des difféomorphismes hamiltoniens, muni de la distance de Hofer.

Les invariants spectraux lagrangiens sont une généralisation naturelle des invariants spectraux hamiltoniens, dans le sens précis donné par la proposition suivante.

Proposition 4.7. *Soit Δ la diagonale dans $M \times M$, et $\alpha \in H_*(M)$ une classe d’homologie non nulle de M . Dénotons par $\underline{\alpha}$ la classe d’homologie de $\Delta \simeq M$ correspondant à α et par Γ_ϕ le graphe de ϕ . Il vient*

$$c(\underline{\alpha}; \Delta, \Gamma_\phi) = \rho(\alpha; \phi) - \rho(1; \phi). \quad (4.1.5)$$

En particulier, $c([\Delta]; \Delta, \Gamma_\phi) = \rho([M]; \phi) - \rho(1; \phi)$ (1 dénote le générateur de $H_0(M) \simeq H_0(\Delta)$).

L'identification entre ces deux situations est faite par l'intermédiaire du morphisme introduit par Biran–Polterovich–Salamon [7].

Les invariants spectraux lagrangiens vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 4.8. *Soit $\alpha \in H_*(L)$, $\alpha \neq 0$. Dénotons par $\alpha' \in H_{n-*}(L)$ la classe Hom-duale du Poincaré dual de α . Avec ces notations, il vient pour tout $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$*

$$c(\alpha; L, \phi(L)) = c([L]; L, \phi^{-1}(L)) - c(\alpha'; L, \phi^{-1}(L)). \quad (4.1.6)$$

En particulier $c([L]; L, \phi(L)) = c([L]; L, \phi^{-1}(L))$. De plus,

$$0 \leq c(\alpha; L, L') \leq \nabla(L, L'). \quad (4.1.7)$$

Les démonstrations de ces deux propositions sont laissées respectivement en §4.1.2 et §4.1.3 par souci de clarté.

L'encadrement (4.1.7) de la proposition 4.8 donne immédiatement une amélioration à la borne connue dans le cas hamiltonien, via l'identification donnée par la proposition 4.7. De fait dans le cas hamiltonien, la majoration connue de la différence $\rho([M]; \phi) - \rho(1, \phi)$ est donnée en termes de la norme de Hofer du difféomorphisme hamiltonien ϕ . Plus précisément, on a

$$0 < \rho([M]; \phi) - \rho(1, \phi) \leq d(\text{id}, \phi).$$

Or dans [30], Ostrover exhibe une famille de difféomorphismes hamiltoniens $\{\varphi_t\}$, $t \in [0, \infty)$ pour laquelle il existe une constante c telle que :

$$d(\text{id}, \varphi_t) \rightarrow \infty \text{ pour } t \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \nabla(\Gamma_{\text{id}}, \Gamma_{\varphi_t}) = c \text{ pour tout } t.$$

Pour une telle famille, la différence entre les invariants spectraux associés à $[M]$ et 1 reste majorée puisque

$$\rho([M]; \varphi_t) - \rho(1; \varphi_t) = c([\Delta]; \Delta, \Gamma_{\varphi_t}) \leq \nabla(\Delta, \Gamma_{\varphi_t}) = c.$$

4.1.1. Démonstration du théorème 4.5

Comme mentionné dans l'introduction, cette démonstration s'appuie sur la commutativité d'un diagramme (proposition 4.9) et sur un lemme (lemme 4.11) qui sont démontrés respectivement dans les deux paragraphes suivants. La proposition repose sur les structures algébriques définies et étudiées au chapitre 2, tandis que le lemme, sur des méthodes plus classiques en homologie de Floer. Dans le troisième (et dernier) paragraphe, nous rassemblons tous ces résultats et achevons par là-même la démonstration du théorème 4.5 donnant l'invariance et la continuité des nombres spectraux définis en définition 4.2.

4.1.1.1. Indépendance relative en H et J

La première étape consiste à démontrer la commutativité énoncée dans la proposition 4.9 ci-dessous. Cette proposition, intéressante en elle-même, découle *directement* de l'étude des structures algébriques du chapitre 2.

Proposition 4.9. *Pour toutes deux paires régulières (H, J) et (H', J') , telles que $\phi_H^* J = \phi_{H'}^* J' =: \tilde{J}$ et $(\phi_H^1)^{-1}(L) = (\phi_{H'}^1)^{-1}(L) =: L_0$, le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc}
 HM_*(L; f, g) & \xrightarrow{\phi_f^H} & HF_*(L, L; H, J) \\
 \phi_f^{H'} \downarrow & & \downarrow b_H^{-1} \\
 HF_*(L, L; H', J') & \xrightarrow{b_{H'}^{-1}} & HF_*(L, L_0; 0, \tilde{J})
 \end{array} \tag{4.1.8}$$

Démonstration. Soit (H, J) et (H', J') deux paires régulières telles que

$$\phi_H^* J = \phi_{H'}^* J' =: \tilde{J} \text{ et } (\phi_H^1)^{-1}(L) = (\phi_{H'}^1)^{-1}(L) =: L_0.$$

Définissons l'automorphisme $\Phi : HM_*(L) \rightarrow HM_*(L)$ comme la composition

$$\Phi := (\phi_f^{H'})^{-1} \circ b_{H'}^{-1} \circ b_H^{-1} \circ \phi_f^H : HM_*(L) \longrightarrow HM_*(L).$$

Comme $[L]$ engendre $HM_n(L)$, $\Phi([L]) = [L]$ (rappelons que, comme nous utilisons \mathbb{Z}_2 comme corps de coefficients, les signes sont arbitraires). De plus, $[L]$ est l'unité

de l'anneau $(HM_*(L), \cdot)$ et Φ préserve la structure de *module* de $HM_*(L)$. Il vient donc pour toute classe d'homologie $a \in HM_*(L)$,

$$\Phi(a) = \Phi(a \cdot [L]) = a \cdot \Phi([L]) = a \cdot [L] = a.$$

L'isomorphisme Φ est l'identité et la proposition est prouvée. \square

Remarque 4.10. Choix des références de l'indice de Maslov et de la fonctionnelle action.

Référence de l'action. Le morphisme PSS ne requiert pas de choix précis du chemin de référence η . Par contre les choix de ces chemins doivent être cohérents à travers le morphisme de naturalité. Il suffit dans notre cas de choisir, pour le cas où l'hamiltonien est nul, un point de l'intersection $\eta_0 \in L \cap L_0$ et de transporter ce choix par b_H et $b_{H'}$ i.e. choisir $\eta := b_H(\eta_0)$ et $\eta' := b_{H'}(\eta_0)$ chemins de $\mathcal{P}(L, L)$.

Graduation. Nous avons vu lors de la construction du morphisme PSS que demander que ϕ_f^H (respectivement $\phi_f^{H'}$) respecte les degrés, revient à imposer la référence de l'indice de Maslov $z_0 \in \mathcal{I}(L, L; \eta, H)$ (respectivement $z'_0 \in \mathcal{I}(L, L; \eta', H')$). De la même façon, le morphisme de naturalité b_H (respectivement $b_{H'}$) respecte les degrés si la référence pour l'indice de Maslov choisie dans $\mathcal{I}(L, L; \eta_0, 0)$, \tilde{z}_0 (respectivement \tilde{z}'_0) vérifie $b_H(\tilde{z}_0) = z_0$ (respectivement $b_{H'}(\tilde{z}'_0) = z_0$). Pour s'assurer que les degrés sont préservés au niveau du diagramme (4.1.8), il convient de montrer que \tilde{z}_0 et \tilde{z}'_0 ont "même degré" i.e. $\delta := \mu(\tilde{z}_0, \tilde{z}'_0) = 0$. De fait, l'application Φ satisfait précisément

$$\begin{array}{ccc} HM_*(L; f, g) & \xrightarrow{b_H^{-1} \circ \phi_f^H} & HF_*(L, L_0; 0, \tilde{\mathcal{J}}; \tilde{z}_0) \\ \Phi \downarrow & & \parallel \tilde{z}_0 \leftrightarrow \tilde{z}'_0 \\ HM_{*+\delta}(L; f, g) & \xleftarrow{(\phi_f^{H'})^{-1} \circ b_{H'}} & HF_{*+\delta}(L, L_0; 0, \tilde{\mathcal{J}}; \tilde{z}'_0) \end{array}$$

par additivité de l'indice de Maslov. En particulier, pour la classe fondamentale de L , $\Phi([L]) \in HM_{n+\delta}(L; f, g)$ et est donc nulle si $\delta > 0$. De même, si 1 engendre $HM_0(L; f, g)$, $\Phi(1) \in HM_\delta(L; f, g)$ et est nulle si $\delta < 0$. Dans les deux cas, l'injectivité de Φ est contredite. Ainsi $\delta = 0$ et Φ préserve bien les degrés.

4.1.1.2. *Indépendance en J et continuité*

Cette étape repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.11. *Pour toutes deux paires régulières (H, J) et (H', J') , et toute classe d'homologie non nulle $\alpha \in H_*(L)$, l'on a*

$$E_-(H' - H) + a_{\eta, \eta'} \leq \sigma_L(\alpha; H', J', \eta') - \sigma_L(\alpha; H, J, \eta) \leq E_+(H' - H) + a_{\eta, \eta'} \quad (4.1.9)$$

où $a_{\eta, \eta'} := \int u_{\eta, \eta'}^* \omega$ pour toute application $u_{\eta, \eta'}$ vérifiant les conditions (1.2.3) pour $x = \eta'$. De plus, on a

$$|c_L(\alpha; H', J') - c_L(\alpha; H, J)| \leq \|H' - H\|. \quad (4.1.10)$$

Avant de nous lancer dans sa démonstration proprement dite, nous allons énoncer et prouver un lemme intermédiaire. Pour (H, J) et (H', J') deux paires régulières données, définissons l'homotopie $\tilde{G}_s := H + \beta(s)(H' - H)$, où β une fonction lisse, croissante, valant 0 pour $s < -1$ et 1 pour $s > 1$. Choisissons une famille lisse à un paramètre de structures presque complexes J_s interpolant entre J et J' et telle que la paire (\tilde{G}_s, J_s) soit régulière. Le morphisme de comparaison classique en homologie de Floer (rappelé en section 1.3.1) induit par cette paire, vérifie la propriété suivante :

Lemme 4.12. *Pour tout $x \in \mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, si $\psi^{H, H'}(x) = x' + \sum_y a_y \cdot y$ alors*

$$\mathcal{A}_{H', \eta'}(x') - \mathcal{A}_{H, \eta}(x) \leq E_+(H' - H) + a_{\eta, \eta'} \quad (4.1.11)$$

avec $a_{\eta, \eta'}$ défini lors du lemme précédent.

Démonstration. En effet, le fait que le coefficient de x' dans l'expression de $\psi^{H, H'}(x)$ est non nul, implique que l'espace de modules $\mathcal{M}_{x, x'}(L, L'; \tilde{G}_s, J_s)$ (1.3.2) est non vide. Pour l'un quelconque de ses éléments, l'on sait que

$$u^* \omega = \omega(\partial_s u, \partial_t u) = \omega(\partial_s u, J \partial_s u) + \omega(\partial_s u, X_{\tilde{G}_s})$$

et donc que

$$0 \leq \int_{\mathbb{R} \times I} \|\partial_s u\|^2 = \int_{\mathbb{R} \times I} u^* \omega - \int_{\mathbb{R} \times I} d_u \tilde{G}_s(\partial_s u). \quad (4.1.12)$$

Or, par définition de \tilde{G} , on a l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times I} d_u \tilde{G}_s(\partial_s(u)) &= \int_{\mathbb{R} \times I} d_u H(\partial_s u) + \int_{\mathbb{R} \times I} \beta(s)(d_u H' - d_u H)(\partial_s u) \\ &= \int_I H_t(x') - H_t(x) + \int_{\mathbb{R} \times I} \partial_s [\beta(s)(H' - H) \circ u] \\ &\quad - \int_{\mathbb{R} \times I} \dot{\beta}(s)(H' - H) \circ u \\ &= \int_I H_t(x') - H_t(x) + \int_I H'_t(x') - H_t(x') \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \dot{\beta}(s) \left(\int_I (H' - H) \circ u dt \right) ds \\ &= \int_I H'_t(x') - H_t(x) - \int_{\mathbb{R}} \dot{\beta}(s) \left(\int_I (H' - H) \circ u dt \right) ds. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

De plus, si l'on se donne deux applications \bar{x} et \bar{x}' vérifiant (1.2.3) respectivement pour x et x' , avec références respectives η et η' , "recoller" \bar{x} à u puis à $-\bar{x}'$ (dénotant, avec un léger abus de langage, $\bar{x}'(1-s, t)$) donne une bande $u_{\eta, \eta'}$ (cette décomposition est illustrée en figure 4.2). On a donc

$$\int_{\mathbb{R} \times I} u^* \omega = \int_{\mathbb{R} \times I} u_{\eta, \eta'}^* \omega + \int_{\mathbb{R} \times I} \bar{x}'^* \omega - \int_{\mathbb{R} \times I} \bar{x}^* \omega. \quad (4.1.14)$$

On déduit de (4.1.12), (4.1.13) et (4.1.14) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times I} \|\partial_s u\|^2 &= - \left(- \int_{\mathbb{R} \times I} \bar{x}'^* \omega + \int_I H'_t(y) \right) + \left(- \int_{\mathbb{R} \times I} \bar{x}^* \omega + \int_I H_t(x) \right) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R} \times I} u_{\eta, \eta'}^* \omega + \int_{\mathbb{R}} \dot{\beta}(s) \left(\int_I (H' - H) \circ u dt \right) ds. \end{aligned}$$

Par définition de l'action (1.2.2), et par positivité de $\int \|\partial_s u\|^2$, il vient

$$\mathcal{A}_{H', \eta'}(x') - \mathcal{A}_{H, \eta}(x) \leq \int_{\mathbb{R} \times I} u_{\eta, \eta'}^* \omega + \int_{\mathbb{R}} \dot{\beta}(s) \left(\int_I (H' - H) \circ u dt \right) ds.$$

On conclut par définition de $E_+(H' - H)$. \square

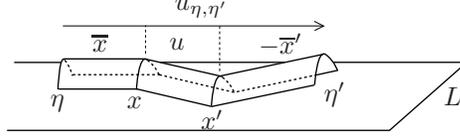


FIG. 4.2. Démonstration du lemme 4.12

Remarque 4.13. Il va nous être utile de remarquer, dès à présent, que pour une application $u_{\eta, \eta'}$ donnée, $u_{\eta', \eta}(s, t) := u_{\eta, \eta'}(-s, t)$ vérifie les hypothèses requises par la définition de $a_{\eta', \eta}$ et l'on a donc

$$a_{\eta, \eta'} = \int_{\mathbb{R} \times I} u_{\eta, \eta'}^* \omega = - \int_{\mathbb{R} \times I} u_{\eta', \eta}^* \omega = -a_{\eta', \eta}.$$

On peut à présent procéder à la démonstration du lemme 4.11.

Démonstration. (lemme 4.11) On rappelle que l'on a défini pour toute classe d'homologie non nulle de $HF_*(L, L; H, J)$ la quantité $\tilde{\sigma}_{L, L}(x; H, J, \eta)$, (4.1.2), définition 4.2, et qu'elle vérifie

$$\sigma_L(\alpha; H, J, \eta) = \tilde{\sigma}_{L, L}(\phi_f^H(\alpha); H, J, \eta).$$

L'inégalité (4.1.11) du lemme précédent implique que, pour tout élément non nul x de $HF_*(L, L; H, J)$, l'on a

$$\tilde{\sigma}_{L, L}(\psi^{H, H'}(x); H', J', \eta') \leq \tilde{\sigma}_{L, L}(x; H, J, \eta) + E_+(H' - H) + a_{\eta, \eta'}.$$

Le lemme 1.19 implique de plus que $\phi_f^{H'} = \psi^{H, H'} \circ \phi_f^H$. Ainsi, pour $\alpha \neq 0$, élément de $H_*(L)$, il vient

$$\begin{aligned} \sigma_L(\alpha; H', J', \eta') &= \tilde{\sigma}_{L, L}(\phi_f^{H'}(\alpha); H', J', \eta') = \tilde{\sigma}_{L, L}(\psi^{H, H'} \circ \phi_f^H(\alpha); H', J', \eta') \\ &\leq \tilde{\sigma}_{L, L}(\phi_f^H(\alpha); H, J, \eta) + E_+(H' - H) + a_{\eta, \eta'} \\ &= \sigma_L(\alpha; H, J, \eta) + E_+(H' - H) + a_{\eta, \eta'}. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Intervertir H et H' , J et J' , η et η' donne l'inégalité suivante :

$$\sigma_L(\alpha; H, J, \eta) - \sigma_L(\alpha; H', J', \eta') \leq E_+(H - H') + a_{\eta', \eta}.$$

On la multiplie par (-1) et on utilise le fait que $E_+(-K) = -E_-(K)$ et la remarque 4.13. Il vient

$$\sigma_L(\alpha; H', J', \eta') - \sigma_L(\alpha; H, J, \eta) \geq E_-(H' - H) + a_{\eta, \eta'}. \quad (4.1.16)$$

Réunir (4.1.15) et (4.1.16) donne l'encadrement (4.1.9). Ecrire cet encadrement pour $\alpha = 1$ (le générateur de $H_0(L)$) et le soustraire au précédent donne l'inégalité (4.1.10). \square

4.1.1.3. *Fin de la démonstration*

Nous avons à notre disposition tous les outils nécessaires, nous les rassemblons ici de manière à clore la preuve du théorème 4.5 donnant l'indépendance et la continuité des nombres spectraux. Puisque le morphisme de naturalité préserve l'action, la proposition 4.9 implique que (les notations pour les chemins donnant la référence de l'action sont les mêmes que celles précisées en remarque 4.10)

$$\begin{aligned} \sigma_L(-; H, J, \eta) &= \tilde{\sigma}_{L, L_0}(b_H^{-1} \circ \phi_f^H(-); 0, \tilde{J}, \eta_0) \\ &= \tilde{\sigma}_{L, L_0}(b_{H'}^{-1} \circ \phi_f^{H'}(-); 0, \tilde{J}, \eta_0) = \sigma_L(-; H', J', \eta') \end{aligned}$$

dès que les deux conditions

$$\phi_H^* J = \phi_{H'}^* J' =: \tilde{J} \text{ et } (\phi_H^1)^{-1}(L) = (\phi_{H'}^1)^{-1}(L) =: L_0$$

sont satisfaites. De plus, comme corollaire immédiat du lemme 4.11, en posant $H = H'$ (et $\eta = \eta'$), il vient que les invariants spectraux $\sigma_L(-; H, J, \eta)$ et $c_L(-; H, J)$ ne dépendent pas de la structure presque complexe. Les invariants absolus $c_L(-; H, J)$ dépendent donc uniquement de L et L_0 . Nous posons

$$c(-; L, L_0) := \sigma_L(-; H, J, \eta) - \sigma_L(1; H, J, \eta)$$

pour tout hamiltonien tel que $\phi_H^1(L_0) = L$.

La partie concernant la continuité est un corollaire de l'inégalité (4.1.10) (lemme 4.11). En effet, donnons-nous L , L_0 et L_1 trois sous-variétés de M isotopes (par une isotopie hamiltonienne). Dénotons par G et H des hamiltoniens

normalisés tels que $\phi_G^1(L_1) = L_0$ et $\phi_H^1(L_0) = L$. Alors, le difféomorphisme hamiltonien $\psi := \phi_H^1 \circ \phi_G^1$ satisfait $\psi^{-1}(L) = L_1$. De plus, il est l'extrémité finale de l'isotopie hamiltonienne donnée par :

$$H'_t := H_t + G_t \circ (\phi_H^t)^{-1}.$$

Comme ϕ_H^t est un symplectomorphisme, le lemme 4.11 implique que l'on ait pour toute classe d'homologie de L non nulle, α , l'inégalité

$$|c(\alpha; L, L_0) - c(\alpha; L, L_1)| \leq \|H - H'\| = \|G \circ (\phi_H)^{-1}\| = \|G\|.$$

Comme le membre de gauche de l'inégalité ne dépend pas du choix de l'hamiltonien G , dès qu'il vérifie $\phi_G^1(L_1) = L_0$, on obtient en prenant l'infimum

$$|c(\alpha; L, L_0) - c(\alpha; L, L_1)| \leq \nabla(L_0, L_1).$$

Ceci implique en particulier que $c(\alpha; L, -)$ est continue sur l'ensemble des lagrangiens isotopes à L par une isotopie hamiltonienne, muni de la distance de Hofer.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.5.

4.1.2. Démonstration de la proposition 4.7

Cette proposition indique que la notion d'invariants spectraux que nous étudions est une généralisation naturelle des invariants spectraux définis dans le cadre hamiltonien par Oh et Schwarz.

De fait, dans un premier temps nous décrivons un isomorphisme (dû à Biran, Polterovich et Salamon) permettant de considérer l'homologie de Floer *hamiltonienne* d'une variété symplectique (M, ω) comme l'homologie de Floer *lagrangienne* de la variété symplectique $(M \times M, \omega \oplus (-\omega))$ respectivement aux sous-variétés lagrangiennes Δ et Γ_ϕ (respectivement diagonale du produit et graphe d'un certain difféomorphisme hamiltonien ϕ). Ensuite nous démontrons la proposition 4.7 donnant l'égalité des invariants spectraux hamiltoniens et lagrangiens sous cette identification.

4.1.2.1. Le morphisme BPS

Ce morphisme a été introduit par Biran, Polterovich et Salamon dans [7].

Commençons par établir quelques notations. Étant donnée une variété symplectique (M, ω) , le couple $(\underline{M}, \underline{\omega})$ défini comme étant $(M \times M, \omega \oplus (-\omega))$ est une variété symplectique. Dénotons par $\pi_i : \underline{M} \rightarrow M$, $i = 1, 2$, les projections sur les composantes respectives du produit. Rappelons que l'espace tangent de la variété obtenue est également le produit des espaces tangents, plus précisément $T_{(x_1, x_2)}\underline{M} \simeq T_{x_1}M \times T_{x_2}M$. On note également par π_i , $i = 1, 2$, les projections respectives associées.

Soit (H, J) une paire constituée d'un hamiltonien et d'une structure presque complexe ω -compatible sur M . On munit \underline{M} de la paire $(\underline{H}, \underline{J})$, constituée de l'hamiltonien défini par

$$\underline{H}_t(x_1, x_2) := H_t(x_1) + H_{1-t}(x_2)$$

et de la structure presque complexe donnée par

$$\underline{J}_t := (\underline{\phi}^t)^*(J_t \times -J_{1-t}) = ((\phi_H^t)^*J_t \times -(\phi_H^{1-t} \circ (\phi_H^1)^{-1})^*J_{1-t})$$

pour $t \in [0, 1/2]$.

Remarque 4.14. Par souci de clarté, j'abandonne momentanément la référence aux deux hamiltoniens considérés ici, dans la notation du champ de vecteurs symplectique et du "flot" symplectique qu'ils induisent, X^t et ϕ^t (resp. \underline{X}^t et $\underline{\phi}^t$) se référant dorénavant à H (resp. \underline{H}). En particulier, ϕ^1 dénote ϕ_H^1 . On note son graphe Γ_{ϕ^1} .

Lemme 4.15 (Biran–Polterovich–Salamon). *Avec ces notations, les complexes $(CF_*(M, \omega; H, J), \partial)$ et $(CF_*(\Delta, \Gamma_{\phi^1}; 0, \underline{J}), \partial)$ sont identifiés. De plus, sous cette identification, l'action des générateurs est préservée (à une constante additive près).*

L'isomorphisme induit en homologie par cette identification est dénoté :

$$\text{BPS} : HF_*(M, \omega) \longrightarrow HF_*(\Delta, \Gamma_{\phi^1}).$$

Démonstration. Nous donnons ici les idées de la démonstration, pour plus de détails, on pourra se référer à [7].

Identification des espaces vectoriels. L'hamiltonien \underline{H} détermine une famille à un paramètre de champs de vecteurs donnés par

$$\underline{X}^t(x_1, x_2) = (X^t(x_1), -X^{1-t}(x_2))$$

dont le "flot" correspond à

$$\underline{\phi}^t(x_1, x_2) = (\phi^t(x_1), \phi^{1-t} \circ (\phi^1)^{-1}(x_2)).$$

Les éléments $\underline{p} = (p_1, p_2)$ de l'intersection $\Delta \cap \Gamma_{\phi^1}$ vérifient $p_1 = p_2 = \phi^1(p_1)$ et sont donc en bijection avec les points fixes de ϕ^1 . Il en va de même pour les générateurs de l'homologie de Floer hamiltonienne de (M, ω) puisqu'il s'agit des orbites périodiques, de période 1 du champ de vecteurs hamiltonien, i.e. des lacets $t \mapsto x(t)$ tels que $x(t) = \phi^t(x(0))$ où $x(0)$ est un point fixe de ϕ^1 .

De plus, ϕ^1 étant un symplectomorphisme, son graphe est un lagrangien de $M \times M$ (de par la définition de $\underline{\omega} = \omega \oplus (-\omega)$). Les générateurs des complexes de Floer respectivement hamiltonien de (M, ω) et lagrangien de $(\underline{M}, \underline{\omega})$ relativement aux sous-variétés lagrangiennes Δ et Γ_{ϕ^1} se correspondent donc par la bijection

$$CF_*(M, \omega; H, J) \ni \{t \mapsto \phi^t(x(0))\} \leftrightarrow (x(0), x(0)) \in CF_*(\Delta, \Gamma_{\phi^1}; 0, \underline{J}).$$

Identification des différentielles. Les conditions nécessaires à la construction des homologies respectives, i.e. la transversalité de l'intersection $\Delta \cap \Gamma_{\phi^1}$ et le fait que H vérifie $\det(d\phi^1 - \text{id}) \neq 0$, sont équivalentes.

On fait correspondre à $u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow M$ l'application $\underline{u} : \mathbb{R} \times [0, 1/2] \rightarrow \underline{M}$, définie par

$$\underline{u}(s, t) := (\underline{\phi}^t)^{-1}(u(s, t), u(s, 1-t)) = ((\phi^t)^{-1}(u(s, t)), \phi^1 \circ (\phi^{1-t})^{-1}(u(s, 1-t))).$$

On remarque immédiatement que

$$\begin{aligned}\underline{u}(s, 0) &= (u(s, 0), u(s, 1)) = (u(s, 0), u(s, 0)) && \in \Delta \subset \underline{M}, \\ \underline{u}(s, 1/2) &= ((\phi^{1/2})^{-1}(u(s, 1/2)), \phi^1(\phi^{1/2})^{-1}(u(s, 1/2))) && \in \Gamma_{\phi^1} \subset \underline{M}.\end{aligned}$$

De plus, ces choix donnent les équivalences suivantes

$$\partial_s u + J\partial_t u + \nabla H_t(u) = 0 \quad \text{ssi} \quad \partial_s \underline{u} + \underline{J}\partial_t \underline{u} = 0 \quad (4.1.17)$$

$$u(\pm\infty, t) = x^\pm(t) \quad \text{ssi} \quad \underline{u}(\pm\infty, t) = \underline{x}^\pm \quad (4.1.18)$$

où $\underline{x}^\pm := (x^\pm(0), x^\pm(0))$. En effet, en projetant la relation $\partial_s \underline{u} + \underline{J}\partial_t \underline{u} = 0$ sur le premier facteur par π_1 , il vient

$$\begin{aligned}\pi_1(\partial_s \underline{u} + \underline{J}_t \partial_t \underline{u}) &= \partial_s((\phi^t)^{-1}u) + (d\phi^t)^{-1}J_t d\phi^t(\partial_t((\phi^t)^{-1}(u))) \\ &= (d\phi^t)^{-1}[\partial_s u + J_t(\partial_t u - X_t \circ \phi^t((\phi^t)^{-1}(u)))] \\ &= (d\phi^t)^{-1}[\partial_s u + J_t \partial_t u + \nabla H_t(u)]\end{aligned}$$

On définit $v(s, t) := u(s, 1 - t)$ et $\psi^t := \phi^{1-t} \circ (\phi^1)^{-1}$, pour alléger les notations apparaissant dans le calcul suivant. La seconde projection donne ainsi

$$\begin{aligned}\pi_2(\partial_s \underline{u} + \underline{J}_t \partial_t \underline{u}) &= \partial_s((\psi^t)^{-1}(v)) + (d\psi^t)^{-1}J_{1-t}d\psi^t(\partial_s((\psi^t)^{-1}(v))) \\ &= (d\psi^t)^{-1}[\partial_s v + J_{1-t}(\partial_t v - X_{1-t} \circ \psi^t((\psi^t)^{-1}(v)))] \\ &= (d\psi^t)^{-1}[\partial_s v + J_{1-t} \partial_t v + \nabla H_{1-t}(v)]\end{aligned}$$

Cette dernière se réécrit, en rétablissant u et $\phi^{1-t} \circ (\phi^1)^{-1}$, comme

$$\begin{aligned}\pi_2(\partial_s \underline{u} + \underline{J}_t \partial_t \underline{u}) &= d\phi^1 \circ (d\phi^{1-t})^{-1}[\partial_s(u(s, 1 - t)) + J_{1-t} \partial_t u(s, 1 - t) \\ &\quad + \nabla H_{1-t}(u(s, 1 - t))].\end{aligned}$$

Ces deux calculs étant valides pour $t \in [0, 1/2]$, ils donnent, ensemble, l'équivalence (4.1.17). L'équivalence (4.1.18) vient directement de la définition de \underline{u} : si l'on sait que les limites $x^\pm := u(\pm\infty, -)$ sont des orbites périodiques (de période

1) de l'hamiltonien H , il vient

$$\begin{aligned} \underline{u}(\pm\infty, t) &= ((\phi^t)^{-1}(u(\pm\infty, t)), \phi^1 \circ (\phi^{1-t})^{-1}(u(\pm\infty, 1-t))) \\ &= ((\phi^t)^{-1}(x^\pm(t)), \phi^1 \circ (\phi^{1-t})^{-1}(x^\pm(1-t))) \\ &= (x^\pm(0), x^\pm(0)) = \underline{x}^\pm \end{aligned}$$

et inversement. Ceci prouve que les espaces de modules définissant les différentielles respectives sont identifiés et achève ainsi la démonstration de l'identification des deux complexes.

Préservation de l'action. Le point précédent donne déjà que l'énergie de u est finie si et seulement si celle de \underline{u} l'est. En fait, ces énergies sont égales. En effet, par définition de \underline{u} ,

$$\partial_s \underline{u}(s, t) = d\underline{\phi}^t(\partial_s u(s, t), \partial_s u(s, 1-t)).$$

En réintroduisant les notations $v(s, t) := u(s, 1-t)$ et $\psi^t := \phi^{1-t} \circ (\phi^1)^{-1}$, l'énergie de \underline{u} s'exprime comme

$$\begin{aligned} E(\underline{u}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \|\partial_s \underline{u}\|^2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \underline{\omega}(\partial_s \underline{u}, \underline{J}_t \partial_s \underline{u}) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (d\phi^t)^{-1*} \omega(\partial_s u, J_t \partial_s u) - \int_0^{\frac{1}{2}} (d\psi^t)^{-1*} \omega(\partial_s v, J_{1-t} \partial_s v) \\ &= \int_0^1 \omega(\partial_s u, J_t \partial_s u) = E(u) \end{aligned}$$

Comme l'énergie d'une trajectoire de Floer ne dépend que de ses extrémités, par la formule (1.2.6), les actions de générateurs se correspondant sont identiques à une constante additive près. \square

4.1.2.2. Invariants spectraux généralisés

Il reste à montrer l'égalité (4.1.5) i.e. pour toute classe d'homologie α de M

$$c(\underline{\alpha}; \Delta, \Gamma_\phi) = \rho(\alpha; \phi) - \rho(1; \phi)$$

où $\underline{\alpha}$ désigne la classe d'homologie de la diagonale $\Delta \simeq M$ correspondant à α . Rappelons que pour un difféomorphisme hamiltonien, Γ_ϕ dénote son graphe.

Remarque 4.16. Pour parvenir à démontrer ce résultat, il nous faut revenir un peu sur la théorie de Floer dans le cadre hamiltonien. Comme mentionné en remarque 4.3, toute la théorie homologique sans référence à des lagrangiens a été étudiée avec force détail dans [33]. Les générateurs de l’homologie sont alors (comme décrits au début de la démonstration du lemme 4.15) les orbites du champ de vecteurs hamiltonien engendré par H , de période 1. Comme nous venons de le remarquer en rappelant la construction du morphisme BPS, cette homologie peut-être vue comme une homologie lagrangienne.

Suivant toujours la remarque 4.3, remarquons que le morphisme PSS est apparu en premier lieu dans ce cadre [31]. Le principe de construction est tout à fait identique à celui utilisé dans notre contexte (et décrit en section 1.3.3). Les espaces de modules utilisés pour le définir sont tout à fait équivalents à ceux du cas lagrangiens. Ils sont comparés sur la figure 4.3 et définis précisément ci-dessous.



FIG. 4.3. Morphismes PSS *lagrangien* et *hamiltonien*

Plus précisément, une fois donnée une fonction de Morse f sur M , p l’un de ses points critiques et y une orbite périodique du champ de vecteurs hamiltonien induit par H , ce sont les espaces suivants :

$$\mathcal{M}_{p,y}^{f,H} := \{ (\gamma, v) \in \mathcal{M}_p^f(g) \times \mathcal{M}_y^H(J) \mid v(-\infty, -) = \gamma(0) \}$$

où $\mathcal{M}_y^H(J)$ est l’ensemble des applications lisses $v : M \times S^1 \rightarrow M$ telles que

$$\partial_s v(s, t) + J(v(s, t)) \partial_t v(s, t) + \beta(s) \nabla H_t(v(s, t)) = 0$$

et vérifiant $v(+\infty, -) = y$. Ici, comme dans le cas lagrangien, β est une fonction lisse valant 0 pour $s < 1/2$ et 1 pour $s > 1$.

Nous pouvons à présent revenir à la démonstration de la proposition 4.7. On rappelle que l’espace tangent du produit $M \times M$ en un point (x, y) est le produit

des espaces tangents à M , respectivement en x et en y . De plus, en un point de la diagonale $(x, x) \in \Delta$, il vient

$$T_{(x,x)}\Delta = \Delta' \subset T_x M \times T_x M$$

(Δ' est la diagonale du produit $T_x M \times T_x M$). Si l'on se donne (f, g) , une paire Morse–Smale définie sur M , la paire $(\underline{f}, \underline{g})$ définie sur Δ par

$$\underline{f}(x, x) := f(x) \text{ et } \underline{g}_{x,x}((v, v), (w, w)) := g_x(v, w)$$

est une paire Morse–Smale sur Δ . De plus, les points critiques de f et ses lignes de flot par rapport à la métrique g s'identifient respectivement aux points critiques de \underline{f} et à ses lignes de flot par rapport à la métrique \underline{g} .

La procédure décrite dans le paragraphe précédent conduit à une identification des espaces de modules définissant les morphismes PSS dans les cas hamiltonien et lagrangien. Ceci provient des raisons suivantes :

- i. le choix des paires (f, g) et $(\underline{f}, \underline{g})$,
- ii. les conditions au bord des disques du PSS lagrangien permet d'en recoller les deux projections sur M après reparamétrisation (vérification identique à celle effectuée dans le paragraphe précédent sur l'identification des différentielles des complexes de Floer hamiltonien et lagrangien),
- iii. similarité des équations différentielles satisfaites et
- iv. unicité des lignes de flot de f passant par le point $\pi_1(\underline{u}(-\infty, -))$.

Le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{array}{ccc} HM_*(M; f, g) & \xlongequal{\quad} & HM_*(\underline{M}; \underline{f}, \underline{g}) \\ \text{PSS} \downarrow & & \downarrow \text{naturalite} \circ \text{PSS} \\ HF_*(M, \omega; H, J) & \xlongequal{\text{BPS}} & HF_*(\Delta, \Gamma_{\phi^1}; 0, \underline{J}) \end{array}$$

Le fait que le morphisme BPS préserve l'action à une constante additive près, permet alors de conclure l'égalité recherchée dans la mesure où cette constante additive va s'annuler dans l'expression donnant $c(-; \Delta, \Gamma_{\phi})$ comme une différence d'invariants relatifs.

4.1.3. Démonstration de la proposition 4.8

Nous démontrons à présent la proposition 4.8 énonçant les premières propriétés des invariants spectraux. Nous commençons par un lemme utile à la démonstration de l'encadrement (4.1.7).

Lemme 4.17. *Au niveau des générateurs des complexes de chaînes des homologies de Morse et Floer, les morphismes ϕ_f^H et ψ_H^f (définis en §1.3.3) vérifient :*

$$p \in \text{Crit}_k f, \phi_f^H(p) = \sum_{\mu(y)=k} a_y y \text{ avec } a_x \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A}_H(x) \leq E_+(H),$$

$$y \in \mathcal{I}(L, L; \eta, H), \psi_H^f(y) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A}_H(y) \geq E_-(H).$$

Remarque 4.18. Ce lemme est à rapprocher du lemme 4.12. Leurs démonstrations sont basées sur la même idée : exprimer l'énergie d'une trajectoire de Floer (perturbée) en fonction de la valeur de l'action du (des) générateur(s) considéré(s) et des quantités E_+ et E_- . L'énergie étant positive, on obtient l'inégalité recherchée.

Démonstration. On définit l'énergie d'un élément $(\gamma, u) \in \mathcal{M}_{p,x}^{f,H}$, parallèlement à l'énergie des trajectoires de Floer, par la formule :

$$E(u, \gamma) := \int_{\mathbb{R} \times I} \|\partial_s u\|^2.$$

On rappelle que l'application u est une trajectoire de Floer perturbée par une interpolation entre l'hamiltonien identiquement nul et l'hamiltonien H donné. Plus précisément, elle vérifie

$$\partial_s u + J\partial_t u + \beta(s)\nabla H(u) = 0$$

où $\beta(s)$ est une fonction lisse, croissante valant 0 pour $s \leq 1/2$ et 1 pour $s \geq 1$. La quantité $E(u, \gamma)$ dépend en fait, de la valeur de la fonctionnelle action sur x et de la variation de la perturbation de l'hamiltonien par rapport à s . En effet,

on a :

$$\begin{aligned}
E(u, \gamma) &= \int_{\mathbb{R} \times I} \omega(\partial_s u, J \partial_s u) \\
&= \int_{\mathbb{R} \times I} \omega(\partial_s u, \partial_t u) - \int_{\mathbb{R} \times I} \beta(s) \cdot \omega(\partial_s u, X_H^t(u)) \\
&= \int u^* \omega - \int_{\mathbb{R} \times I} \beta(s) d_u H_t(\partial_s u) \\
&= \int u^* \omega - \int_I [\beta(s) H_t(u(s, t))]_{s=-\infty}^{+\infty} dt + \int_{\mathbb{R} \times I} \beta'(s) H_t(u) \\
&= -\mathcal{A}_H(x) + \int_{\mathbb{R} \times I} \beta'(s) H_t(u)
\end{aligned}$$

Il vient donc, lorsque l'espace de module $\mathcal{M}_{p,x}^{f,H}$ est non vide,

$$0 \leq E(u, \gamma) \leq E_+(H) - \mathcal{A}_H(x) \text{ et donc } \mathcal{A}_H(x) \leq E_+(H).$$

De la même façon, on montre que si $\mathcal{M}_{H,f}^{y,p}$ est non vide, $\mathcal{A}_H(y) \geq E_-(H)$. Ceci démontre le lemme. \square

Passons maintenant à la démonstration de la proposition proprement dite.

Démonstration. (Proposition 4.8)

Egalité 4.1.6 – Cette première affirmation vient de ce qu'il existe une version de la dualité de Poincaré pour les homologies de Morse et de Floer, compatible avec le morphisme PSS. En effet, étant donné un hamiltonien H sur M , on dénote par H' l'hamiltonien défini par $H'(t, x) := H(1 - t, x)$. On obtient une identification

$$CF_*(L, L; H, J) \ni x \leftrightarrow x' \in CF_{n-*}(L, L; H', J)$$

où x et x' sont *géométriquement* la même orbite munie des orientations opposées i.e. $x'(t) = x(1 - t)$. Associer à une trajectoire de Floer u la trajectoire u' définie par $u'(s, t) = u(-s, 1 - t)$ conduit à un isomorphisme canonique $HF_*(L, L; H, J) \simeq HF_{n-*}(L, L; H', J)$ et donc, par l'intermédiaire du morphisme de naturalité à un isomorphisme

$$HF_*(L, L'; 0, \tilde{J}) \simeq HF_{n-*}(L, L''; 0, \tilde{J})$$

où L' et L'' vérifient

$$\phi_H^1(L') = L \text{ et } \phi_H^1(L) = L''$$

(ceci demande aussi pour éviter les translations de degrés de choisir les références des indices de Maslov se correspondant, z_0 et z'_0). De plus cet isomorphisme préserve la valeur absolue de l'action et inverse son signe, c'est-à-dire que pour $x \in L \cap L'$ et x' lui correspondant, l'action vérifie $\mathcal{A}_{H',\eta'}(x') = -\mathcal{A}_{H,\eta}(x)$ pour le choix évident de référence $\eta'(t) = \eta(1-t)$.

Parallèlement, on se donne une fonction de Morse f sur L et l'on dénote $-f$ par f' . Du point de vue des espaces définissant le morphisme PSS lagrangien (et son inverse) on obtient clairement $\mathcal{M}_{p,x}^{f,H} = \mathcal{M}_{H',f'}^{x',p'}$. Il vient donc, en homologie,

$$\phi_f^H(\alpha) = a \text{ si et seulement si } \phi_{f'}^{H'}(\alpha') = a'$$

et donc $\sigma_L(\alpha; H, J, \eta) = -\sigma_L(\alpha'; H', J, \eta')$. En particulier pour $\alpha = 1$,

$$\sigma_L(1; H, J, \eta) = -\sigma_L(1'; H', J, \eta') = -\sigma_L([L]; H', J, \eta')$$

puisque $1' = [L]$. Il vient donc

$$\begin{aligned} c(\alpha; L, L') &= \sigma_L(\alpha; H, J, \eta) - \sigma_L(1; H, J, \eta) \\ &= -\sigma_L(\alpha'; H', J, \eta') + \sigma_L([L]; H', J, \eta') \\ &= c([L]; L, L'') - c(\alpha'; L, L'') \end{aligned}$$

en introduisant $\sigma_L(1; H', J, \eta')$ deux fois avec les signes opposés.

Encadrement (4.1.7) – Le fait que les invariants spectraux sont tous positifs ou nuls vient trivialement comme corollaire du point (2.) du corollaire 4.26 ci-dessous (nous renvoyons donc à la section 4.2 pour sa preuve).

La majoration quant à elle vient du lemme 4.17. En effet, ce lemme conduit à l'encadrement :

$$E_-(H) \leq \sigma_L(\alpha; H, J, \eta) + a_\eta \leq E_+(H)$$

où a_η est une constante ne dépendant que de η (un changement du chemin de référence η pour η' dans la même classe d'homotopie conduisant à une différence donnée par $a_{\eta,\eta'}$ comme défini pour le lemme 4.11). Pour $\alpha = 1$, le générateur de

$H_0(L)$, on a donc également

$$E_-(H) \leq \sigma_L(1; H, J, \eta) + a_\eta \leq E_+(H).$$

Par définition des invariants spectraux il vient, en soustrayant ces deux encadrements :

$$E_-(H) - E_+(H) \leq c(\alpha; L, L') \leq E_+(H) - E_-(H)$$

ou encore

$$|c(\alpha; L, L')| \leq \|H\|.$$

Comme le membre de gauche ne dépend pas de l'hamiltonien utilisé pourvu qu'il satisfasse $\phi_H^1(L') = L$, on prend l'infimum des normes de ces hamiltoniens, ce qui conduit à la majoration désirée par définition de la norme de Hofer. \square

4.2. INVARIANTS SPECTRAUX D'ORDRE SUPÉRIEUR

Rappelons que l'on dénote par $E_X(L)$ la suite spectrale de Leray–Serre associée au pullback de la fibration des lacets d'un espace topologique simplement connexe, X , au-dessus de L (§3.3.1.2). Cette suite spectrale renferme notamment, à la page 2, toute l'information contenue dans l'homologie de L . L'existence d'un morphisme de type PSS reliant les suites spectrales de Morse et de Floer de Barraud–Cornea permet d'étendre la définition des invariants spectraux (définition 4.2) à tous les éléments non nuls de $E_X(L)$. Ces nouveaux invariants, dits *invariants spectraux lagrangiens d'ordre supérieur* (leur ordre dépendant de la page contenant les classes auxquelles ils sont associés), sont intéressants dans la mesure où

- ils correspondent aux invariants spectraux (d'ordre 2) de la section précédente lorsqu'ils sont associés à un élément de l'homologie de L (vu comme un élément de $E_X^2(L)$),
- ils délivrent strictement plus d'informations que leur contre-partie homologique,
- ils offrent un cadre naturel à la principale propriété satisfaite par les invariants spectraux lagrangiens.

Cette propriété, énoncée précisément en théorème 4.24, se comprend de la façon suivante. Si $E_X(L)$ admet une différentielle non triviale, il existe (au moins) deux de ses éléments dont les invariants spectraux associés sont distincts. De plus, il existe une quantité géométrique (ne dépendant que de la géométrie des deux sous-variétés lagrangiennes considérées) minorant leur différence. La version homologique de cette propriété a d'intéressantes conséquences concernant les invariants spectraux d'ordre 2.

Dans la suite de l'introduction à ce chapitre, nous donnons la définition et nous énonçons les résultats relatifs aux invariants spectraux d'ordre supérieur, ainsi que les corollaires concernant leur contrepartie homologique. En particulier nous introduisons la quantité géométrique mentionnée ci-dessus dont la définition est inspirée de la distance géométrique due à Barraud et Cornea [4]. Nous donnons ensuite un exemple de calcul explicite de ces invariants (section 4.2.1) illustrant le fait qu'ils contiennent strictement plus d'informations que les invariants classiques (même dans le cas Morse). Nous démontrons leur principale propriété (section 4.2.2), décrite ci-dessus. Nous concluons ce chapitre, en démontrant les propriétés satisfaites par les invariants spectraux homologiques découlant de cette machinerie (section 4.2.3).

Commençons par une remarque qui va nous permettre de simplifier les notations dans la définition des invariants spectraux d'ordre supérieur. Rappelons que les modules de la seconde page de $E_X(L)$ s'identifient aux produits tensoriels (théorème 3.19)

$$E_{p,q}^2(L; X) \simeq H_q(\Omega X) \otimes H_p(L).$$

De plus, cette suite spectrale étant de premier quadrant, pour tout entier r , les différentielles

$$d^r : E_{0,0}^r(L; X) \longrightarrow E_{-r,r-1}^r(L; X) \simeq 0 \quad \text{et} \quad d^r : 0 \simeq E_{r,1-r}^r(L; X) \longrightarrow E_{0,0}^r(L; X)$$

sont nulles. Ainsi, pour tout r ,

$$E_{0,0}^r(L; X) \simeq E_{0,0}^2(L; X) \simeq H_0(\Omega X) \otimes H_0(L).$$

Il existe donc, pour tout entier r , un élément $\mathbf{1}^r$ engendrant $E_{0,0}^r(L; X)$ et correspondant, par les isomorphismes précédents, au produit tensoriel $1 \otimes 1$ des générateurs respectifs de $H_0(\Omega X)$ et $H_0(L)$. C'est cet élément qui va servir à la normalisation des invariants spectraux d'ordre supérieur.

De plus, dans le cas des invariants spectraux d'ordre 2, l'inclusion du sous-complexe (4.1.1) dans le complexe total fait partie d'une courte suite exacte

$$0 \longrightarrow CF^\nu(L, L'; H, J) \xrightarrow{i^\nu} CF(L, L'; H, J) \xrightarrow{p^\nu} CF_{>\nu}(L, L'; H, J) \longrightarrow 0$$

où $CF_{>\nu}(L, L'; H, J)$ est défini comme le quotient

$$CF_{>\nu}(L, L'; H, J) := CF(L, L'; H, J) / CF^\nu(L, L'; H, J).$$

Les applications i^ν et p^ν induisent des morphismes entre les suites spectrales associées respectivement à ces trois complexes. Cependant, cette courte suite exacte induit une longue suite exacte en homologie mais *pas nécessairement en termes de suites spectrales*. Ceci amène aux définitions suivantes.

Définition 4.19. Soit $\alpha \neq 0$ un élément de $EM_{*,*}^r(f, g; X)$. Ses *nombre spectraux lagrangiens relatifs d'ordre supérieur* associés sont

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta) &:= \inf\{\nu \in \mathbb{R} \mid \Phi_f^H(\alpha) \in \text{im}(i_\nu)\}, \\ \underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta) &:= \inf\{\nu \in \mathbb{R} \mid q_\nu(\Phi_f^H(\alpha)) = 0\}, \end{aligned}$$

et ses *nombre spectraux lagrangiens (absolus)*

$$\begin{aligned} \bar{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L') &:= \bar{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta) - \bar{\sigma}_{X,[l]}^r(\mathbf{1}^r; L, H, J, \eta), \\ \underline{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L') &:= \underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta) - \underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\mathbf{1}^r; L, H, J, \eta). \end{aligned}$$

où $\mathbf{1}^r$ est le générateur de $EM_{0,0}^r(f, g; X)$ spécifié ci-dessus et H tout hamiltonien tel que $\phi_H^1(L') = L$.

On rappelle que Φ_f^H dénote l'extension du morphisme PSS aux suites spectrales (proposition 3.28).

Remarque 4.20. Comme notre notation le sous-entend, les nombres spectraux de la définition 4.19 satisfont les mêmes propriétés d'indépendance que leurs homologues d'ordre 2. En effet, le diagramme (4.1.8) induit un diagramme commutatif pour les suites spectrales impliquées. De plus l'estimée (4.1.11) reste valide. Ainsi la proposition 4.9 et le lemme 4.11 s'appliquent également dans cette situation.

Remarquons que l'on a toujours l'inclusion $\text{im}(i^\nu) \subset \ker(p^\nu)$. De plus, l'on sait que les modules de la seconde page de la suite spectrale $E_{p,0}^2(L; X)$ sont isomorphes à $H_p(L)$ (théorème 3.19). Ainsi sur ces modules, $\bar{\sigma}_{X,[l]}^2(-; L, H, J, \eta)$ et $\underline{\sigma}_{X,[l]}^2(-; L, H, J, \eta)$ peuvent être comparés à $\sigma_L(-; H, J, \eta)$. Il vient de ces deux remarques le lemme suivant.

Lemme 4.21. *Les nombres spectraux relatifs d'ordre supérieur vérifient*

$$\underline{\sigma}_{X,[l]}^r(-; L, H, J, \eta) \leq \bar{\sigma}_{X,[l]}^r(-; L, H, J, \eta)$$

avec égalité (au moins) pour $r = 2$. Dans ce cas, pour une base $\{x_i\}$ de $H_q(\Omega X)$ et des éléments α_j non nuls de $H_p(L)$, il vient :

$$\bar{\sigma}_{X,[l]}^2(\alpha; L, H, J, \eta) = \underline{\sigma}_{X,[l]}^2(\alpha; L, H, J, \eta) = \max_j \{\sigma_L(\alpha_j; H, J, \eta)\}$$

où $\alpha := \sum_j x_j \otimes \alpha_j \in E_{p,q}^2(L; X)$. En particulier, si 1 dénote le générateur de $H_0(\Omega X)$, pour tout $\beta \neq 0$ de $H_*(L)$, l'on a

$$\bar{\sigma}_{X,[l]}^r(1 \otimes \beta; L, H, J, \eta) = \bar{\sigma}_{X,[l]}^r(1 \otimes \beta; L, H, J, \eta) = \sigma_L(\beta; H, J, \eta).$$

En particulier, ce lemme implique que pour tout r , par définition de l'élément de référence $\mathbf{1}^r$,

$$\underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\mathbf{1}^r; L, H, J, \eta) = \sigma_L(1; H, J, \eta)$$

en choisissant $\beta = 1 \in H_0(L)$ dans la dernière affirmation. On a donc une nouvelle expression pour les *invariants spectraux d'ordre supérieur* :

$$\begin{aligned}\bar{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L') &:= \bar{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta) - \sigma_L(1; H, J, \eta), \\ \underline{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L') &:= \underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta) - \sigma_L(1; H, J, \eta)\end{aligned}$$

où comme à la section précédente 1 désigne le générateur de $H_0(L)$. De plus, ceci conduit au fait que les invariants spectraux d'ordre supérieur vérifient les mêmes propriétés que leur version relative :

Lemme 4.22. *Les invariants spectraux d'ordre supérieur vérifient*

$$\underline{c}_{X,[l]}^r(-; L, L') \leq \bar{c}_{X,[l]}^r(-; L, L')$$

avec égalité pour $r = 2$. Pour tout $\alpha := \sum_j x_j \otimes \alpha_j \in EM_{p,q}^2(f, g; X)$, il vient :

$$\bar{c}_{X,[l]}^2(\alpha; L, L') = \underline{c}_{X,[l]}^2(\alpha; L, L') = \max_j \{c(\alpha_j; L, L')\}.$$

En particulier, ceci donne $\bar{c}_{X,[l]}^2(1 \otimes \beta; L, L') = \underline{c}_{X,[l]}^2(1 \otimes \beta; L, L') = c(\beta; L, L')$.

Nous introduisons à présent une quantité géométrique, inspirée de la distance géométrique entre sous-variétés lagrangiennes introduite par Barraud et Cornea [4]. Nous en donnons ici la définition et nous la justifions plus précisément en §4.2.2.1.

Cette quantité est définie pour toute paire de sous-variétés lagrangiennes transverses de la façon suivante. Soit x un élément de $L \cap L'$. Il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un plongement, e_ε^x , de la boule $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{C}^n$ dans M tels que

- i. $(e_\varepsilon^x)^*(\omega) = \omega_0$ et $e_\varepsilon^x(0) = x$,
 - ii. $(e_\varepsilon^x)^{-1}(L) = \mathbb{R}^n \cap B(0, \varepsilon)$ et $(e_\varepsilon^x)^{-1}(L') = i\mathbb{R}^n \cap B(0, \varepsilon)$.
- (4.2.1)

Définition 4.23. Soient L et L' deux sous-variétés lagrangiennes compactes et transverses, nous définissons

$$r(L, L') := \sup \left\{ \varepsilon > 0 \left| \begin{array}{l} \forall x \in L \cap L', \exists e_\varepsilon^x \text{ satisfaisant les conditions (4.2.1),} \\ \text{et tel que } x \neq y \Rightarrow \text{im } e_\varepsilon^x \cap \text{im } e_\varepsilon^y = \emptyset \end{array} \right. \right\}.$$

Cette quantité géométrique est illustrée par la figure 4.4.

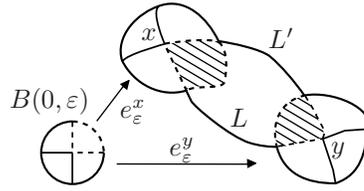


FIG. 4.4. La quantité géométrique $r(L, L')$

Comme le nombre de points d'intersection entre L et L' est fini, cette constante géométrique est un réel strictement positif (dès que $L \cap L' \neq \emptyset$). De plus, elle permet de minorer les différences entre invariants spectraux que la suite spectrale de Leray–Serre met en évidence. Le théorème suivant précise cette idée. C'est le théorème principal concernant les invariants spectraux lagrangiens. L'existence de cette constante et la démonstration du théorème sont reportées en §4.2.2.

Théorème 4.24. *Si $d^r(\alpha) = \beta \neq 0$ dans $E_X(L)$, alors*

$$\begin{aligned} \underline{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L') - \underline{c}_{X,[l]}^r(\beta; L, L') &\geq 0 \text{ et} \\ \bar{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L') - \bar{c}_{X,[l]}^r(\beta; L, L') &\geq \frac{\pi r(L, L')^2}{2} \end{aligned}$$

pour toute sous-variété lagrangienne L' , transverse et isotope par une isotopie hamiltonienne à L .

L'homologue d'ordre 2, pour les invariants de la définition 4.2, du théorème 4.24 est donné par le corollaire suivant. Il s'obtient de manière évidente en combinant les résultats du lemme 4.22 (deuxième partie) et du théorème 4.24.

Corollaire 4.25. *Soit X un espace topologique $(r-1)$ -connexe et $\{x_i\}$ une base de $H_{r-1}(\Omega X)$. S'il existe une différentielle de $E_X(L)$*

$$d^r : H_0(\Omega X) \otimes H_p(L) \simeq E_{p,0}^r \rightarrow E_{p-r,r-1}^r$$

non triviale i.e. s'il existe un élément non nul $\alpha \in H_p(L)$ tel que

$$d^r(1 \otimes \alpha) = \sum x_i \otimes \beta_i \neq 0,$$

alors, pour toute sous-variété lagrangienne L' , isotope par une isotopie hamiltonnienne et transverse à L , on a l'inégalité

$$\forall i \in I, c(\alpha; L, L') - c(\beta_i; L, L') \geq \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

Cette propriété des invariants spectraux homologiques et le grand choix des espaces X et des fonctions l , apparaissant dans la construction de la suite spectrale $E_X(L)$, conduisent au corollaire suivant.

Corollaire 4.26. *Le produit d'intersection défini sur $H_*(L)$ est dénoté par \cdot , la classe fondamentale de L , par $[L]$.*

(1.) *Pour $\alpha \in H_k(L)$ et $\beta \in H_*(L)$, avec $1 < k < n - 1$ et $\alpha \cdot \beta \neq 0$, il vient*

$$c(\alpha \cdot \beta; L, L') \leq c(\beta; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

(2.) *Si $\alpha \neq 0$ est élément de $H_k(L)$ avec $1 < k < n - 1$, alors :*

$$\frac{\pi r(L, L')^2}{2} \leq c(\alpha; L, L') \leq c([L]; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

Il est à noter que le résultat reste vrai pour toute classe d'homologie de L non nulle, de degré $0 < k < n$. Ceci peut-être démontré en utilisant un système de coefficients locaux dans les suites spectrales utilisées. De plus une autre démonstration provient des structures algébriques introduites au chapitre 2. Nous donnons la démonstration du corollaire tel qu'il est énoncé ci-dessus, en termes de suites spectrales et cette démonstration alternative (du corollaire "étendu") en §4.2.3.

La version "étendue" de l'affirmation (2.) du corollaire 4.26 permet de conclure immédiatement que les invariants spectraux lagrangiens homologiques sont tous positifs. Ceci achève la démonstration de l'encadrement (4.1.7) de la proposition 4.8. De plus, cet encadrement et l'affirmation (2.) du corollaire précédent donnent pour $\alpha = [L]$ l'encadrement suivant.

Corollaire 4.27. *Pour toute paire de sous-variétés lagrangiennes L et L' , isotopes (par une isotopie hamiltonienne) et transverses, on a*

$$0 < \pi r(L, L')^2 \leq c([L]; L, L') \leq \nabla(L, L').$$

Enfin, l'extension du corollaire 4.26 a une autre application immédiate intéressante. En effet, il permet de minorer la distance de Hofer entre deux lagrangiens isotopes (par une isotopie hamiltonienne) et transverses en terme de la constante géométrique $r(L, L')$ et du cup-length de L .

Rappelons la définition de cette dernière quantité (avec comme tout au long de ce texte, \mathbb{Z}_2 comme anneau de coefficients).

Définition 4.28. Le *cup-length* de L est la longueur de la "plus grande chaîne" de classes d'homologie de L dont le produit d'intersection n'est pas nul. Plus précisément, on définit

$$\text{cl}(L) := \max \left\{ k + 1 \mid \exists \alpha_i \in H_{d_i}(L), 1 \leq i \leq k, \text{ tels que } \begin{array}{l} 0 < d_i < n, \text{ et} \\ \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Corollaire 4.29. *Soit $\text{cl}(L)$ le cup-length de L (avec coefficients dans \mathbb{Z}_2), il vient*

$$\nabla(L, L') \geq \text{cl}(L) \cdot \frac{\pi r(L, L')^2}{2}$$

pour toute sous-variété lagrangienne L' , isotope par une isotopie hamiltonienne et transverse à L .

Démonstration. Pour une telle famille maximale $\{\alpha_i\}$, nous avons

$$c([L]; L, L') = \sum_{1 \leq l \leq \text{cl}(L)} c(\beta_{l-1}; L, L') - c(\beta_l; L, L')$$

où $\beta_0 = [L]$, $\beta_l = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_l$ ($1 \leq l \leq \text{cl}(L) - 1$) et $\beta_{\text{cl}(L)} = 1$. Le corollaire 4.26 (version "étendue") donne alors

$$c([L]; L, L') \geq \text{cl}(L) \cdot \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

La preuve de ce corollaire s'achève donc avec le corollaire 4.27. \square

4.2.1. Exemple : le cas de $(S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$

Nous présentons ici un exemple pour lequel les invariants spectraux d'ordre supérieur peuvent être calculés explicitement. Ces calculs utilisent la description de la suite spectrale de Barraud–Cornea de $S^2 \times S^4$ faite en §3.3.1.3. Ils montrent que ces invariants délivrent strictement plus d'informations que les invariants classiques (même dans le cas Morse).

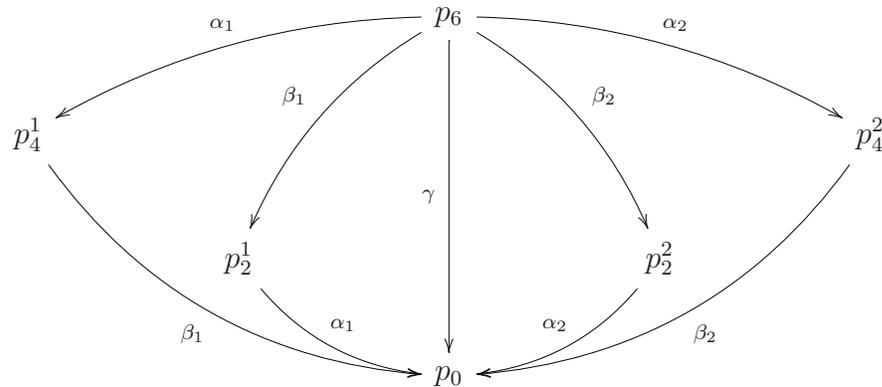
Considérons donc la variété lisse $(S^2 \times S^4)_{[1]} \# (S^2 \times S^4)_{[2]}$ (on rappelle que le symbole $\#$ désigne la somme connexe) munie de la fonction de Morse respectant les deux composantes " $f = f_{[1]} \# f_{[2]}$ ", définie par

$$\text{pour } i = 1, 2, x \in (S^2 \times S^4)_{[i]}, \quad f(x) := f_{[i]}(x)$$

sur chaque composante et étendue sur la somme connexe. La notation $[i]$ n'est utilisée ici que pour pouvoir identifier la copie de $S^2 \times S^4$ sur laquelle vivent les différents points critiques, etc. Les fonctions $f_{[i]}$ sont des fonctions de Morse définies sur chacune des composantes $[i]$ comme en (3.3.3 et 3.3.4). Enfin, nous perturbons un peu la fonction f , de sorte qu'elle n'ait qu'un unique point critique d'indice 6 en lieu et place de deux points critiques d'indice 6 et un point critique d'indice 5. Nous effectuons la même perturbation au niveau du minimum.

Elle admet donc 6 points critiques, dénotés $p_6, p_4^1, p_4^2, p_2^1, p_2^2, p_0$ tels que, comme en §3.3.1.3, $\text{Ind}_f(p_i) = i$ et de plus ici $p_i^j \in (S^2 \times S^4)_{[j]}$.

Représentons ses points critiques et le système de chaînes représentant $\overline{\mathcal{M}}(f, g)$ (définition 3.25) par le diagramme suivant



Une flèche entre deux points critiques indique que leur variété connectante est non vide et l'on a spécifié l'élément du système de chaînes représentant sa classe fondamentale. A nouveau ici, α_i et β_i sont les générateurs respectifs de $H_1(\Omega S^2)$ et $H_3(\Omega S^4)$, vus comme éléments de l'homologie de $(\Omega S^2 \times \Omega S^4)_{[i]} = \Omega(S^2 \times S^4)_{[i]}$ pour $i = 1$ et 2 . L'élément γ dénote ici $\alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2$. On en déduit que la différentielle du complexe enrichi envoie le générateur p_6 sur

$$\partial p_6 = \partial^2 p_6 + \partial^4 p_6 + \partial^6 p_6 = (\alpha_1 \otimes p_4^1 + \alpha_2 \otimes p_4^2) + (\beta_1 \otimes p_2^1 + \beta_2 \otimes p_2^2) + \gamma \otimes p_0.$$

Les éléments $\alpha_i \otimes p_4^i$ survivent jusqu'à la deuxième page de la suite spectrale de Morse et leurs invariants spectraux associés respectivement sont

$$\bar{c}^2(\alpha_i \otimes p_4^i) = c(p_4^i) = f_{[i]}(p_4^i).$$

De plus,

$$\partial^2(\alpha_i \otimes p_4^i) = 0 \text{ et } \partial^2 p_6 = \alpha_1 \otimes p_4^1 + \alpha_2 \otimes p_4^2.$$

Donc à la troisième page ces deux classes survivent et sont identifiées (puisque leur somme est un bord) :

$$[\alpha_1 \otimes p_4^1] = [\alpha_2 \otimes p_4^2] \neq 0.$$

On en déduit que l'invariant spectral associé est

$$\bar{c}^3(\alpha_1 \otimes p_4^1) = \min\{f_{[1]}(p_4^1), f_{[2]}(p_4^2)\}. \quad (4.2.2)$$

On est donc capable de produire aisément un exemple pour lequel

$$\bar{c}^3(\alpha_1 \otimes p_4^1) < \bar{c}^2(\alpha_1 \otimes p_4^1) = c(p_4^1)$$

en perturbant légèrement $f_{[2]}$ autour de p_4^2 .

Remarque 4.30. A nouveau, cet exemple se transporte à un exemple de type Floer, dans le cotangent de $(S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$ grâce

- à l’isomorphisme dû à Floer et décrit en §1.2.3 et
- à la remarque 3.30.

Le fait que les différences d’action entre les points critiques de f (vus comme des points d’intersection entre les deux lagrangiens que sont le graphe de df et la section nulle dans le cotangent) soient égales aux différences de valeurs de la fonction de Morse f elle-même, rend l’adaptation à ce cas totalement immédiate.

4.2.2. Démonstration du théorème 4.24

Dans cette section, nous justifions la définition et la non nullité de la quantité géométrique $r(L, L')$. Ensuite nous démontrons le théorème 4.24, donnant un moyen de distinguer les invariants spectraux lagrangiens d’ordre supérieur dès qu’une différentielle non triviale apparaît dans la suite spectrale $E_X(L)$ et comparant la différence entre ces invariants à $r(L, L')$.

4.2.2.1. Existence de la quantité géométrique $r(L, L')$

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. On se donne deux lagrangiens transverses dont l’intersection est non vide. Soit $x \in L \cap L'$, nous justifions ci-dessous l’existence d’un plongement symplectique de la boule $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{C}^n$ vérifiant les conditions (4.2.1). Les trois étapes suivantes sont illustrées en figure 4.5.

1. *On se ramène à $(T^*L, \omega_{\text{can}})$.* Par le théorème de Weinstein (théorème 1.4), il existe un voisinage \mathcal{U} de L dans M , un voisinage \mathcal{V} de $(T^*L)_0$ (la section nulle de T^*L) et un symplectomorphisme $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ tel que $\phi(L) = (T^*L)_0$.

Comme ϕ préserve la forme symplectique, la composante connexe de $\phi(L' \cap \mathcal{U})$ contenant $\phi(x)$ est un lagrangien de T^*L et ϕ étant un difféomorphisme, l'intersection des images reste transverse en $\phi(x)$. On peut donc supposer que $(M, \omega) = (T^*L, \omega_{\text{can}})$ avec L la section nulle et que L' est un lagrangien transverse à L en x .

2. *On se ramène à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.* L'hypothèse de transversalité signifie que localement, dans un voisinage ouvert de x , $\mathcal{W} \subset T^*L$, L' est le graphe d'une application $f : T_x^*L \cap \mathcal{W} \rightarrow L$:

$$L' \cap \mathcal{W} = \{(f(x), x) \in (L, T_x^*L \cap \mathcal{W})\} \subset T^*L.$$

Quitte à rétrécir \mathcal{W} , on peut supposer que $\mathcal{W} \cap L$ est un ouvert trivialisant de L comme

- base du fibré T^*L : on peut donc considérer \mathcal{W} comme un ouvert de $(\mathcal{W} \cap L) \times \mathbb{R}^n$
- variété : \mathcal{W} peut être vu comme un ouvert de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, contenant 0 tel que
 - i. $L = \mathcal{W} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^n)$,
 - ii. L' est le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$.

3. *Le cas $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.* Dénotons par $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, le difféomorphisme défini par

$$\psi(x, y) = (x, y - f(x)).$$

Il préserve ω puisque (on exhibe le calcul pour $n = 1$ par souci de simplification, il est identique dans le cas $n > 1$)

$$\psi^*\omega = \psi^*(dx \wedge dy) = d(\pi_1 \circ \psi) \wedge d(\pi_2 \circ \psi)$$

où π_1 et π_2 sont les projections sur les coordonnées. Il vient

$$\psi^*\omega = dx \wedge (dy - f'(x)dx) = dx \wedge dy = \omega.$$

De plus, on a clairement

$$\begin{aligned}\psi(0, y) = (0, y) &\Rightarrow \psi(L) = L, \\ \psi(x, f(x)) = (x, 0) &\Rightarrow \psi(L') = \mathbb{R}^n \times \{0\}.\end{aligned}$$

Ceci signifie que l'on a trouvé un voisinage ouvert \mathcal{U}' de $x \in M$, symplectomorphe à un voisinage ouvert \mathcal{V}' de 0 de \mathbb{C}^n tel que les intersections $L \cap \mathcal{U}'$ et $L' \cap \mathcal{U}'$ correspondent respectivement aux n -plans $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ (intersectés avec \mathcal{V}'). L'ouvert \mathcal{V}' contient une boule, centrée en 0, de rayon $\varepsilon > 0$. Cette boule transportée par le symplectomorphisme inverse vérifie donc les conditions (4.2.1). En un point d'intersection quelconque un tel plongement existe donc.

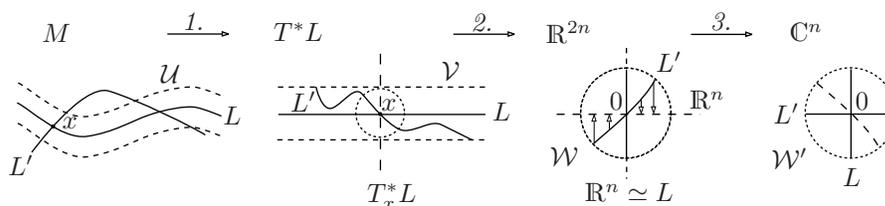


FIG. 4.5. Construction de $r(L, L')$

Remarquons que si $L \cap L' \neq \emptyset$, comme L et L' sont compactes et transverses, leur intersection est un nombre fini de points. La quantité $r(L, L')$ est par conséquent strictement positive.

Remarque 4.31. On rappelle que dans le contexte de l'homologie de Floer lagrangienne et sous nos hypothèses (conditions (1.2.1) sur ω et (1.2.8) sur l'indice de Maslov), l'homologie de Floer lagrangienne est isomorphe à l'homologie de L et est par conséquent non triviale. L'intersection entre L et tout autre lagrangien L' isotope par une isotopie hamiltonienne est donc non vide.

La quantité géométrique $r(-, -)$ vérifie évidemment deux propriétés qui seront d'intérêt pour la suite.

Lemme 4.32. *Pour tous deux lagrangiens compacts dont l'intersection est non vide et transverse, $r(-, -)$ vérifie*

$$r(L, L') = r(L', L).$$

De plus, pour tout lagrangien compact L et tout symplectomorphisme ψ tel que l'intersection $L \cap \psi(L)$ soit non vide et transverse, on a

$$r(L, \psi(L)) = r(L, \psi^{-1}(L)).$$

La première identité est évidente puisque qu'il existe un symplectomorphisme de \mathbb{C}^n échangeant \mathbb{R}^n et $i\mathbb{R}^n$. La seconde vient de ce que l'image par le symplectomorphisme ψ de tout plongement satisfaisant les propriétés (4.2.1) pour la paire $(\psi^{-1}(L), L)$ les vérifie pour la paire $(L, \psi(L))$. On conclut avec la première affirmation.

4.2.2.2. Démonstration du théorème 4.24

Dans ce paragraphe, nous prouvons le théorème 4.24. Nous rappelons que ce théorème donne un moyen de détecter des différences entre les invariants spectraux d'ordre supérieur et de minorer leur différence en fonction de $r(L, L')$.

Remarque 4.33. Comme nous avons un large choix d'espaces X , et d'applications l , apparaissant dans la construction de la suite spectrale $E_X(L)$, ce théorème conduit à de nombreux exemples. Le corollaire 4.26 illustre bien ce fait.

De plus, lorsqu'il est possible de choisir $X = L$, la seconde page de $E_L(L)$ est non triviale. En outre, cette suite spectrale converge vers l'homologie d'un espace contractile (par le théorème 3.19). Ainsi de nombreuses différentielles non nulles apparaissent (voir la section 4.2.1 pour un tel exemple).

DÉMONSTRATION. (théorème 4.24) Cette preuve se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on commence par montrer que la condition donnée par la non trivialité d'une différentielle à la page r de la suite spectrale implique, *pour toute structure presque complexe*, l'existence d'orbites de différence d'indices r ,

reliées par une trajectoire de Floer dont l'énergie minore la différence entre leurs invariants spectraux respectifs (formule (4.2.3) ci-dessous). Ensuite *on fixe une structure presque complexe* adaptée aux propriétés définissant la constante géométrique $r(L, L')$ pour obtenir le résultat.

Première étape – On se donne un hamiltonien H tel que $L = \phi_H^1(L')$ et une structure presque complexe J de sorte que la paire (H, J) soit régulière. On rappelle qu'en §3.3.2 nous avons dénoté par Φ_f^H l'extension du morphisme PSS aux suites spectrales de Barraud–Cornea. Dénotons par

$$a = \Phi_f^H(\alpha) \in EF_{p,q}^r(L, L; H, J; X) \quad \text{et} \quad b = \Phi_f^H(\beta) \in EF_{p-r,q+r-1}^r(L, L; H, J; X).$$

Par hypothèse, ces éléments satisfont $d^r a = b \neq 0$. Dans toute la suite de cette démonstration, nous allons dénoter l'action $\mathcal{A}_{H,\eta}$ par \mathcal{A} . On rappelle enfin que les applications d'inclusion et de projection

$$\begin{aligned} i^\nu &: CF^\nu(L, L; H, J) \longrightarrow CF(L, L; H, J) \quad \text{et} \\ p^\nu &: CF(L, L; H, J) \longrightarrow CF_{>\nu}(L, L; H, J) \end{aligned}$$

du complexe filtré dans le complexe total et du complexe total vers le quotient, induisent des morphismes (également dénotés i^ν et p^ν) entre les suites spectrales correspondantes.

Soit ε un (petit) nombre réel strictement positif. Posons

$$\nu = \underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\beta; L, H, J, \eta) - \varepsilon.$$

Par définition de $\underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\beta; L, H, J, \eta)$, nous savons que $p^\nu(b) \neq 0$. Comme p^ν est un morphisme de suites spectrales, il vient

$$d^r(p^\nu(a)) = p^\nu(d^r a) = p^\nu(b)$$

et donc $p^\nu(a) \neq 0$. La première inégalité du théorème est démontrée pour les nombres spectraux relatifs et donc, en introduisant deux fois $\sigma_L(1; H, J, \eta)$ avec des signes opposés, pour les invariants spectraux.

Rappelons également que, par la construction générale d'une suite spectrale provenant d'une filtration (théorème 3.10), $EF_{p,q}^r(L, L; H, J; X)$ est constitué de classes d'équivalence d'éléments de $F_p \mathcal{C}_{p+q}^X$ dont le bord appartient à $F_{p-r} \mathcal{C}_{p+q-1}^X$. On peut donc, par définition de $\bar{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta)$, choisir un représentant de a , $\sum_{k \leq p} r_k \otimes \gamma_k$, tel que

$$r_k \otimes \gamma_k \in \mathcal{R}_{p+q-k} \otimes CF_k(L, L; H, J),$$

$$\forall k, \mathcal{A}(\gamma_k) \leq \bar{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta) + \varepsilon.$$

Supposons que pour tout $\gamma \in \mathcal{I}(L, L; \eta, H)$ tel que $\mathcal{A}(\gamma) \geq \underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\beta; L, H, J, \eta) - 2\varepsilon$, l'espace de module $\mathcal{M}_{\gamma_k, \gamma}(L, L; H, J)$ soit vide pour tout k . On en déduit que $p^\nu(a)$ est un cycle d'ordre $(r-1)$ dans la suite spectrale $EF^{>\nu}(L, L; H, J; X)$. De plus son image par la r -ème différentielle est bien définie et doit être 0. Ceci contredit le fait que $p^\nu(b) \neq 0$.

Il existe donc un élément $\gamma_0 \in \mathcal{I}(L, L; \eta, H)$ et un indice k tel que

$$\mathcal{A}(\gamma_0) \geq \underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\beta; L, H, J, \eta) - 2\varepsilon \text{ et } \mathcal{M}_{\gamma_k, \gamma_0}(L, L; H, J) \neq \emptyset.$$

On en déduit qu'il existe une trajectoire de Floer $u \in \mathcal{M}_{\gamma_k, \gamma_0}(L, L; H, J)$ et que son énergie vérifie

$$E(u) = \mathcal{A}(\gamma_k) - \mathcal{A}(\gamma_0) \leq \bar{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta) - \underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\beta; L, H, J, \eta) + 3\varepsilon.$$

Rappelons enfin que le morphisme de naturalité identifie des trajectoires de Floer de même énergie. Comme, de plus, ε peut être choisi arbitrairement petit, on obtient l'existence, pour toute structure presque complexe J , de deux points d'intersection x_J et $y_J \in L \cap L'$ et d'une trajectoire de Floer $u_J \in \mathcal{M}_{x_J, y_J}(L, L'; 0, \tilde{J})$ tels que

$$E(u_J) \leq \bar{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta) - \underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\beta; L, H, J, \eta)$$

et donc à nouveau :

$$E(u_J) \leq \bar{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L') - \underline{c}_{X,[l]}^r(\beta; L, L') \tag{4.2.3}$$

(rappelons que $\tilde{J} := \phi_H^* J$ est le pullback de la structure presque complexe J par la famille de difféomorphismes hamiltoniens, ϕ_H^t comme décrit en §1.3.2).

Seconde étape – Fixons à présent $\delta > 0$ et posons $r_\delta := r(L, L') - \delta$. Nous choisissons $\{e_{r_\delta}^x \mid x \in L \cap L'\}$ une famille finie de plongements de la boule standard de \mathbb{C}^n de rayon $B(0, r_\delta)$, comme en définition 4.23 i.e. satisfaisant (4.2.1) :

- i. $(e_{r_\delta}^x)^*(\omega) = \omega_0$ and $e_{r_\delta}^x(0) = x$,
- ii. $(e_{r_\delta}^x)^{-1}(L) = \mathbb{R}^n \cap B(0, r_\delta)$ and $(e_{r_\delta}^x)^{-1}(L') = i\mathbb{R}^n \cap B(0, r_\delta)$.

Choisissons J^δ une structure presque complexe qui coïncide sur l'image des plongements $\text{im } e_{r_\delta}^x$ avec les transportées des structures presque complexes $(e_{r_\delta}^x)_* J_0$.

Remarquons que si J^δ n'est pas régulière, nous pouvons choisir une suite de structures presque complexes, $\{J_n\}_n$, telle que $\{\tilde{J}_n\}_n$ converge vers J^δ . Le processus décrit en *première étape* conduit alors à une suite d'orbites $\{(x_n, y_n)\}_n$ et à une suite de trajectoires de Floer $\{u_n\}_n$ (avec, pour tout n , $u_n \in \mathcal{M}_{x_n, y_n}(L, L'; 0, \tilde{J}_n)$) vérifiant l'inégalité (4.2.3).

Comme le cardinal de l'intersection $L \cap L'$ est fini, $\{(x_n, y_n)\}_n$ admet une sous-suite constante, (x, y) . En nous restreignant à cette sous-suite, nous obtenons une sous-suite de trajectoires de Floer $\{u_k\}_k \subset \mathcal{M}_{x, y}(L, L'; 0, \tilde{J}_k)$ ayant à présent les mêmes extrémités x et y . Comme l'énergie des trajectoires de Floer ne dépend que de leurs extrémités, du fait de la formule (1.2.6), tous les éléments u_k de cette sous-suite ont donc la même énergie. Ainsi, le théorème de compacité de Gromov implique l'existence d'une trajectoire de Floer limite J^δ -pseudo-holomorphe, u_δ , dont l'énergie satisfait (4.2.3).

Par définition des plongements $e_{r_\delta}^x$, l'aire symplectique est préservée i.e.

$$\text{Aire}_\omega(\text{im } u_\delta \cap \text{im } e) = \text{Aire}_{\omega_0}(e^{-1}(\text{im } u_\delta \cap \text{im } e))$$

où e désigne indépendamment $e_{r_\delta}^x$ et $e_{r_\delta}^y$. De plus, par le choix même de la structure presque complexe J^δ , $e^{-1}(\text{im } u_\delta \cap \text{im } e)$ est une courbe J_0 -pseudo-holomorphe dont la frontière s'appuie sur $\mathbb{R}^n \cup i\mathbb{R}^n \cup \partial B(0, r_\delta)$. Elle s'étend donc, par symétrie, à une

courbe pseudo-holomorphe, contenant 0 dans son intérieur, et dont la frontière s'appuie sur $\partial B(0, r_\delta)$, l'aire initiale ayant été multipliée par 4 dans ce processus. L'inégalité isopérimétrique implique que l'aire de cette nouvelle courbe est au moins πr_δ^2 (on pourra se référer à [16] ou à [23] pour des détails à propos de ces outils standard). Nous obtenons donc

$$\text{Aire}_\omega(\text{im } u_\delta \cap \text{im } e) \geq \frac{\pi}{4} r_\delta^2.$$

Puisque ceci est vrai pour les deux extrémités et que les plongements ont été choisis de sorte que $\text{im } e_{r_\delta}^x \cap \text{im } e_{r_\delta}^y = \emptyset$, il vient

$$E(u_\delta) \geq \text{Aire}_\omega(\text{im } u_\delta \cap \text{im } e_{r_\delta}^x) + \text{Aire}_\omega(\text{im } u_\delta \cap \text{im } e_{r_\delta}^y) \geq \frac{\pi}{2} r_\delta^2.$$

Ainsi pour tout $\delta > 0$,

$$\bar{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L') - \underline{c}_{X,[l]}^r(\beta; L, L') \geq \frac{\pi}{2} (r(L, L') - \delta)^2.$$

Faire tendre δ vers 0 achève donc la démonstration du théorème 4.24. \square

4.2.3. Retour sur les invariants d'ordre 2

Nous procédons à présent aux démonstrations des propriétés des invariants spectraux homologiques définis en section 4.1, induites par le théorème 4.24.

4.2.3.1. Démonstration des corollaires 4.25 et 4.26

Dans un premier temps, nous démontrons la contrepartie homologique du théorème 4.24. Celle ci nous donne un moyen de distinguer les invariants spectraux d'ordre 2 les uns des autres dès l'apparition de *certaines* différentielles non triviales dans la suite spectrale de Leray–Serre du pullback de la fibration des lacets de l'espace X au-dessus du lagrangien L .

Démonstration. (Corollaire 4.25) L'hypothèse de $(r - 1)$ -connexité de l'espace X , implique que les pages s pour $2 \leq s \leq r$ sont toutes identiques à la page 2. On a donc en particulier

$$E_{p,q}^r(L; X) \simeq H_q(\Omega X) \otimes H_p(L).$$

Supposons à présent que $d^r\alpha = \beta \neq 0$ où $\alpha \in H_p(L)$ est identifié avec $1 \otimes \alpha \in E_{p,0}^r(L; X)$ et β dénote $\sum_i x_i \otimes \beta_i$ avec β_i élément de $H_{p-r}(L)$. Remarquons que dès lors que nous avons fait le choix d'une base ordonnée $\{x_i\}$ de $H_{r-1}(\Omega X)$, les coefficients β_i sont uniquement déterminés. La conclusion du corollaire :

$$\forall i, c(\alpha; L, L') - c(\beta_i; L, L') \geq \frac{\pi r(L, L')^2}{2}$$

vient donc immédiatement de la seconde partie du lemme 4.21 :

$$\begin{aligned} \bar{c}_{X,[l]}^r(1 \otimes \alpha; L, L') &= c(\alpha; L, L') \text{ et} \\ \underline{c}_{X,[l]}^r(\beta; L, L') &= \max_i \{c(\beta_i; L, L')\} \end{aligned}$$

et du théorème 4.24, appliqué dans ce cas particulier. \square

Nous donnons à présent une démonstration du corollaire 4.26 utilisant le théorème 4.24. Pour cela, nous rappelons la notion de *Hom-dualité* puis la définition des *espaces d'Eilenberg-MacLane*.

Dans notre cas où \mathbb{Z}_2 est le corps de coefficients, il existe un isomorphisme naturel (donné par le théorème des coefficients universels)

$$H^n(Y, \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(H_n(Y, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2), \quad (4.2.4)$$

pour tout espace topologique Y . En particulier ceci permet de définir pour une classe non nulle $\alpha \in H_k(Y)$ sa classe *Hom-duale*, $\bar{\alpha} \in H^k(Y)$, correspondant par l'isomorphisme précédent à un élément (aussi dénoté) $\bar{\alpha} \in \text{Hom}(H_n(Y), \mathbb{Z}_2)$ tel que $\bar{\alpha}(\alpha) = 1$ (1 étant ici l'élément non nul de \mathbb{Z}_2).

Définition 4.34. Etant donné un groupe abélien π et un entier n , l'*espace d'Eilenberg-MacLane* $K(\pi, n)$ est un espace topologique dont tous les groupes d'homotopie sont triviaux, à part le n -ème, valant π .

Ceci implique par le théorème de Hurewicz que tous les groupes d'homologie $H_p(K(\pi, n), \pi)$ sont nuls pour $1 < p < n$ et $H_n(K(\pi, n), \pi) = \pi$. Dans la suite, nous noterons par ι_n le générateur de $H_n(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2)$. Nous regroupons dans

le lemme suivant les différentes propriétés de ces espaces dont nous allons nous servir par la suite.

Lemme 4.35. *Les espaces d'Eilenberg–MacLane existent pour tout choix du groupe abélien π et de l'entier n . Ils satisfont la propriété suivante :*

$$\Omega K(\pi, n) = K(\pi, n - 1). \quad (4.2.5)$$

De plus, pour tout espace topologique Y , il existe un isomorphisme

$$H^n(Y, \pi) \simeq [Y; K(\pi, n)]. \quad (4.2.6)$$

En ce qui concerne l'isomorphisme (4.2.6), rappelons que pour deux espaces topologiques A et B , la notation $[A; B]$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence d'homotopie d'applications continues de A dans B . Dans notre cas ($\pi = \mathbb{Z}_2$), l'isomorphisme est alors donné par l'application

$$\begin{aligned} [Y; K(\mathbb{Z}_2, n)] &\rightarrow H^n(Y) \\ [l] &\mapsto l^*(\overline{\iota_n}) \end{aligned}$$

où $\overline{\iota_n}$ est la classe Hom–duale de ι_n . Remarquons que si $\alpha \in H_n(Y)$ est une classe non nulle et que $[l]$ correspond à $\overline{\alpha}$ par cet isomorphisme, alors $l_*(\alpha) = \iota_n$.

Dans la preuve suivante, nous allons appliquer ceci, pour $Y = L$, un lagrangien. Nous notons par $\tilde{\alpha} \in H^{n-k}(L)$ la classe Poincaré duale de la classe $\alpha \in H_k(L)$. De plus, comme précédemment, $\alpha \in H_p(L)$ sera identifié à $1 \otimes \alpha \in E_{p,0}^r(L; X)$.

Démonstration. (Corollaire 4.26) Donnons nous une classe $\alpha \in H_k(L)$, non nulle, avec $k > 1$. Nous venons de montrer que sa classe Hom–duale, $\overline{\alpha} \in H^k(L)$, correspond à la classe d'homotopie d'une application $l : L \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, k)$ telle que $l_*(\alpha) = \iota_k$, le générateur de $H_k(K(\mathbb{Z}_2, k), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. Par la propriété (4.2.5) des espaces d'Eilenberg–MacLane, il vient

$$H_{k-1}(\Omega K(\mathbb{Z}_2, k), \mathbb{Z}_2) \simeq H_k(K(\mathbb{Z}_2, k), \mathbb{Z}_2).$$

Il existe donc une différentielle non triviale dans la suite spectrale $E_X(L)$:

$$d^k \alpha = \iota_k \otimes 1 \in H_{k-1}(\Omega K(\mathbb{Z}_2, k), \mathbb{Z}_2) \otimes H_0(L).$$

Le corollaire 4.25, avec $X = K(\mathbb{Z}_2, k)$ qui est $(k-1)$ -connexe, permet donc de conclure, pour toute sous-variété lagrangienne $L' := \phi^{-1}(L)$, isotope à L que

$$\frac{\pi r(L, L')^2}{2} \leq c(\alpha; L, L') - c(1; L, L') \quad (4.2.7)$$

avec $c(1; L, L') = 0$.

Il existe une version cohomologique de la suite spectrale de Leray–Serre $E_X(L)$ telle que

- i. la différentielle définie à la page r a pour bidegré $(r, 1-r)$,
- ii. les modules de la page $r+1$ sont obtenus en prenant la cohomologie des modules de la page r ,
- iii. la seconde page admet un produit qui coïncide (du fait de notre choix d'utiliser des coefficients dans \mathbb{Z}_2) avec le produit cup sur les classes de cohomologie.

Nous adaptons la première partie de la démonstration, en remplaçant α par la classe Hom–duale de son Poincaré dual $\bar{\alpha}$ et $K(\mathbb{Z}_2, k)$ par $K(\mathbb{Z}_2, n-k)$. Ainsi dans la version cohomologique de la suite spectrale $E_X(L)$, il existe une différentielle non triviale $d^{n-k} \overline{\iota_{n-k}} \otimes 1 = \bar{\alpha}$, dès que $k < n-1$. Par iii., nous savons que pour toute classe de cohomologie γ ,

$$d^{n-k}(\overline{\iota_{n-k}} \otimes \gamma) = \bar{\alpha} \cup \gamma.$$

En posant $\gamma = \overline{\alpha \cdot \beta}$ nous obtenons alors que $d^{n-k}(\overline{\iota_{n-k}} \otimes \overline{\alpha \cdot \beta}) = \bar{\beta}$. Ainsi, dans $E_{K(\mathbb{Z}_2, n-k)}(L)$, la différentielle satisfait

$$d^{n-k} \beta = \iota_{n-k} \otimes (\alpha \cdot \beta).$$

Le corollaire 4.25 implique alors que

$$c(\alpha \cdot \beta; L, L') \leq c(\beta; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

Ceci prouve la première assertion du corollaire 4.26. Prendre $\beta = [L]$ dans cette inégalité, combiné avec (4.2.7), démontre la seconde. \square

4.2.3.2. Démonstration alternative (et extension) du corollaire 4.26

Comme mentionné dans l'introduction de la section 4.2, nous donnons à présent une démonstration alternative du corollaire 4.26, étendu aux valeurs de k , $1 \leq k \leq n - 1$. Cette démonstration est intéressante en soi et repose sur les espaces de modules définissant la structure de module sur l'homologie de Floer lagrangienne décrite en section 2.2. Nous ne donnons que peu de détails dans la mesure où elle est très fortement inspirée du cas hamiltonien [35] avec l'ajout de l'utilisation de la constante géométrique $r(L, L')$ (définition 4.23).

Corollaire 4.26'.

(1.) Pour $\alpha \in H_k(L)$ et $\beta \in H_*(L)$, avec $0 < k < n$ et $\alpha \cdot \beta \neq 0$, il vient

$$c(\alpha \cdot \beta; L, L') \leq c(\beta; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

(2.) Si $\alpha \neq 0$ est élément de $H_k(L)$ avec $0 < k < n$, alors :

$$\frac{\pi r(L, L')^2}{2} \leq c(\alpha; L, L') \leq c([L]; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

Démonstration. Les espaces de modules permettant de définir la structure de module sur $HF_*(L, L')$ (2.2.1) sont tels que, si p n'est pas le maximum de la fonction de Morse f choisie, $\mathcal{M}_{(p,x);y} \neq \emptyset$ implique qu'il existe une trajectoire de Floer connectant x à y . La première étape est de montrer que, dans ce cas,

$$\mathcal{A}_H(x) \geq \mathcal{A}_H(y) + \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

La démonstration de cette étape est la même que dans le cas hamiltonien en incluant la procédure utilisée lors de la démonstration du théorème 4.24 avec les structures presque complexes J^δ , définies pour l'occasion. La seconde étape consiste à prouver que

$$c(\alpha \cdot \beta; L, L') \leq c(\beta; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}$$

dès que $\alpha \cdot \beta \neq 0$ et $\alpha \neq [L]$ (ceci se déduit directement de la définition même des invariants spectraux et de l'inégalité précédente). Choisir alors $\beta = [L]$ donne

$$c(\alpha; L, L') \leq c([L]; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}$$

pour toute classe d'homologie non nulle $\alpha \in H_k(L)$, avec $k < n$. Soit $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$ tel que $\phi(L) = L'$, avec les notations de la proposition 4.8, pour un tel $\alpha \neq [L]' = 1$, il vient

$$c(\alpha'; L, \phi^{-1}(L)) \leq c([L]; L, \phi^{-1}(L)) - \frac{\pi r(L, \phi^{-1}(L))^2}{2}.$$

L'assertion (4.1.6) de cette même proposition donne alors

$$c([L]; L, \phi(L)) - c(\alpha; L, \phi(L)) \leq c([L]; L, \phi^{-1}(L)) - \frac{\pi r(L, \phi^{-1}(L))^2}{2}.$$

De plus, comme $c([L]; L, \phi(L)) = c([L]; L, \phi^{-1}(L))$ (par la proposition 4.8) et $r(L, \phi(L)) = r(L, \phi^{-1}(L))$ (par le lemme 4.32),

$$c(\alpha; L, \phi(L)) \geq \frac{\pi r(L, \phi(L))^2}{2}.$$

Ceci achève la démonstration. □

Index

- $\mathcal{A}_{L,L';H,\eta}$, 13
- b_H , 28
- B_H , 70
- $c(\alpha; L, L')$, 74
- $\bar{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L')$, $\underline{c}_{X,[l]}^r(\alpha; L, L')$, 97
- $CF_*(L, L'; \eta; H, J)$, 18
- $\text{cl}(L)$, 102
- $CM_*(L; f, g)$, 9
- $\bar{\partial}_{J,H}$, 14
- $HF_*(L, L')$, 18
- $HM_*(L)$, 9
- $\mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$, 14
- $i_f(p)$, 8
- $K(\pi, n)$, 113
- $\mathcal{M}_{p,q}(f, g)$, 8
- $\mathcal{M}_{x,y}(L, L'; H, J)$, 15
- μ , 17
- $\mathcal{P}(L, L')$, $\mathcal{P}_\eta(L, L')$, 13
- ϕ_H , 11
- ϕ_f^H , 31
- Φ_f^H , 70
- ψ^{01} , 27
- $\Psi^{H,H'}$, 70
- $r(L, L')$, 99
- $\tilde{\sigma}_{L,L'}(x; H, J, \eta)$, $\sigma_L(\alpha; H, J, \eta)$, 74
- $\bar{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta)$, $\underline{\sigma}_{X,[l]}^r(\alpha; L, H, J, \eta)$, 97
- $\mathcal{W}_p^s(f, g)$, $\mathcal{W}_p^u(f, g)$, 8
- X_H , 11
- bubbling, 18
- convexité à l'infini, 10
- cup-length, 102
- espace, 56
 - des chemins, 56
 - des lacets, 56
 - des lacets de Moore, 63
- espace d'Eilenberg–MacLane, 113
- fibré cotangent, 19
- fibration, 55
 - de Hurewicz, 55
 - de lacets, 56
 - de Serre, 55
 - morphisme, 56
 - relèvement des homotopies, 55
- filtration, 52
 - bornée, 52, 53
 - par l'action, 73
- Floer, 18
 - complexe, 18
 - complexe étendu, 69
 - homologie, 18
- fonctionnelle action, 13
- hamiltonien, 11
 - champ de vecteurs, 11
 - difféomorphisme, 11

- hamiltonien normalisé, 76
- indice, 8
 - de Maslov, 15, 17
 - de Morse, voir Morse
- invariant spectral, 72
 - d'ordre supérieur, 97, 99
 - hamiltonien, 74
 - homologique, 74
- isotopie, 12
 - hamiltonienne, 12
- lagrangien, 10
- Liouville, 10
 - champ de vecteurs, 10, 22
 - forme de, 19
- module différentiel gradué, 49
 - filtré, 53
- morphisme, 25
 - BPS, 87
 - de comparaison, 27, 70
 - de naturalité, 30, 70
 - de type PSS, 31, 70
- Morse, 7
 - complexe étendu, 65
 - fonction, 7
 - fonction auto-indexée, 62
 - homologie, 9
 - indice, 8
- Morse–Smale, 8
 - étendue, 37
- nombre spectral, voir invariant spectral
- norme de Hofer, 76
 - pour difféomorphismes hamiltoniens, 76, 78
 - pour hamiltoniens, 76
- pour lagrangiens, 76, 78
- relèvement des homotopies, voir fibration
- structure presque complexe, 12
- suite spectrale, 49
 - convergence, 53
 - dégénère, 52
 - de Barraud–Cornea, 62
 - de Leray–Serre, 59
 - de premier quadrant, 58
 - provenant d'une filtration, 54
 - tour de modules, 51
- symplectique, 10
 - forme, 10
 - variété, 10
- symplectomorphisme, 10
- système de chaînes représentant, 65
- tour de modules, voir suite spectrale
- trajectoire de Floer, 14
- variété, 8
 - connectante, 8
 - instable, 8
 - stable, 8

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. AGUILAR, S. GITLER, C. PRIETO, *Algebraic topology from a homotopy viewpoint*, Springer, 2002.
- [2] P. ALBERS, *A Lagrangian Piunikhin–Salamon–Schwarz morphism and two comparison homomorphisms in Floer homology*, arXiv :math.SG/0512037 (2005).
- [3] A. BANYAGA, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its applications 400, Kluwer Academic Publisher’s Group, 1997.
- [4] J.-F. BARRAUD, O. CORNEA, *Homotopical dynamics in Symplectic Topology*, Morse theoretic methods in non-linear analysis and in symplectic topology, NATO Science Series II., 217 (2005), 109–148.
- [5] J.-F. BARRAUD, O. CORNEA, *Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence*, Ann. of Math. (to appear).
- [6] P. BIRAN, O. CORNEA, *Quantum structures for monotone Lagrangians and relative packing* (in preparation).
- [7] P. BIRAN, L. POLTEROVICH, D. SALAMON, *Propagation in hamiltonian dynamics and relative symplectic homology*, Duke Math. J., 119 (2003), 65–118.
- [8] A. FLOER, *The unregularized gradient flow of the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math., 41 (1988), 775–813.
- [9] A. FLOER, *Witten’s complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Differential Geom., 30 (1989), 207–221.
- [10] A. FLOER, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys., 120 (1989), 575–611.
- [11] A. FLOER, H. HOFER, D. A. SALAMON, *Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action*, Duke Math. J., 80 (1996), 251–292.

- [12] J. M. FRANKS, *Morse–Smale flows and homotopy theory*, *Topology*, 18 (1979), 199–215.
- [13] K. FUKAYA, Y.-G. OH, H. OHTA, K. ONO, *Lagrangian intersection Floer theory – anomaly and obstruction*, Preprint.
- [14] M. GROMOV, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, *Invent. Math.*, 82 (1985), 307–347.
- [15] H. HOFER, *On the topological properties of symplectic maps*, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 115A (1990), 25–38.
- [16] C. HUMMEL, *Gromov’s Compactness Theorem for Pseudo-holomorphic Curves*, *Progress in Mathematics*, 151, Birkhäuser, 1997.
- [17] H. IRIYEH, T. OTOFUJI, *Geodesics of Hofer’s metric on the space of Lagrangian submanifolds*, *Manuscripta math.*, 122 (2007), 391–406.
- [18] J. KATIĆ, D. MILINKOVIĆ, *Piunikhin–Salamon–Schwarz isomorphisms for Lagrangian intersections*, *Diff. Geom. and its Appl.*, 22 (2005), 215–227.
- [19] H. V. LE, K. ONO, *Cup-length estimate for symplectic fixed points*, *Contact and symplectic geometry*, 8, Cambridge 1994 (ed. C. B. Thomas), Publ. Newton Inst., Cambridge Univ. Press (1996), 268–295.
- [20] R. LECLERCQ, *Spectral invariants in Lagrangian Floer theory*, arXiv : math.SG/0612235 (2006).
- [21] J. MCCLEARY, *A user’s guide to spectral sequences*, *Cambridge studies in Mathematics*, second edition, 2001.
- [22] D. MCDUFF, D. A. SALAMON, *J–holomorphic curves and quantum cohomology*, *University Lecture Series*, Amer. Math. Soc., 6, 1994.
- [23] D. MCDUFF, D. A. SALAMON, *J–holomorphic curves and symplectic topology*, *Colloquium Publications*, Amer. Math. Soc., 52, 2004.
- [24] D. MILINKOVIĆ, *On equivalence of two constructions of invariants of Lagrangian submanifolds*, *Pacific J. of Math.*, 195 (2000), 371–415.
- [25] J. W. MILNOR, *Morse theory*, *Ann. of Math. Stu.*, Princeton University Press, Fifth printing, 1973.
- [26] Y. G. OH, *Floer cohomology for Lagrangian intersections discs and pseudo-holomorphic discs I,II*, *Comm. Pure Appl. Math*, 46 (1993), 949–994, 995–1012.

- [27] Y. G. OH, *Symplectic topology as the geometry of action functional I*, J. Diff. Geom., 46 (1997), 499–577.
- [28] Y. G. OH, *Spectral invariants and length minimizing property of Hamiltonian paths*, Asian J. Math., 9 (2005), 1–18.
- [29] Y. G. OH, *Spectral invariants, analysis of the Floer moduli space, and geometry of the Hamiltonian diffeomorphism group*, Duke Math. J., 130 (2005), 199–295.
- [30] Y. OSTROVER, *A comparison of Hofer’s metrics on Hamiltonian diffeomorphisms and Lagrangian submanifolds*, Comm. Contemp. Math, 5 (2003), 803–811.
- [31] S. PIUNIKHIN, D. SALAMON, M. SCHWARZ, *Symplectic Floer–Donaldson theory and quantum cohomology*, Contact and symplectic geometry, 8, Cambridge 1994 (ed. C. B. Thomas), Publ. Newton Inst., Cambridge Univ. Press (1996), 171–200.
- [32] L. POLTEROVICH, *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, 2001.
- [33] D. SALAMON, *Lectures on Floer homology*, Notes for lectures held at the IAS/Park City Graduate Summer School on Symplectic Geometry and Topology, July 1997.
- [34] M. SCHWARZ, *Morse homology*, Progress in Mathematics, 111, Birkhäuser, 1993.
- [35] M. SCHWARZ, *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds*, Pacific J. of Math., 193 (2000), 419–461.
- [36] P. SEIDEL, π_1 of symplectic automorphisms groups and invertible in quantum homology ring Geom. Funct. Anal., 7 (1997), 1046–1095.
- [37] R. M. SWITZER, *Algebraic topology – homology and homotopy*, Classics in mathematics, Springer, reprint of the first edition, 2002.
- [38] C. VITERBO, *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, Math. Ann., 292 (1992), 685–710.
- [39] C. VITERBO, *Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d’action et indice des systèmes hamiltoniens*, Bull. Soc. Math. France, 115 (1987), 361–390.