Invariants spectraux en homologie de Floer lagrangienne

Rémi Leclercq

Vendredi 13

Motivation

(M, ω) variété symplectique

Motivation

(M, ω) variété symplectique
$H : M \to \mathbb{R}$ induit $\omega(X_H, -) = -dH$ et $\partial_t \phi_H^t = X_H(\phi_H^t)$

Motivation

(M, ω) variété symplectique
$H : M \to \mathbb{R}$ induit $\omega(X_H, -) = -dH$ et $\partial_t \phi_H^t = X_H(\phi_H^t)$

Théorie de Floer hamiltonienne

Etude de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

Motivation

(M, ω) variété symplectique
$H : M \to \mathbb{R}$ induit $\omega(X_H, -) = -dH$ et $\partial_t \phi_H^t = X_H(\phi_H^t)$

Théorie de Floer hamiltonienne

Etude de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.
$\mathrm{Ham}(M, \omega) = \{\phi \,|\, \exists H \text{ tel que } \phi = \phi_H^1\}$.

Motivation

(M, ω) variété symplectique
$H : M \to \mathbb{R}$ induit $\omega(X_H, -) = -dH$ et $\partial_t \phi_H^t = X_H(\phi_H^t)$

Théorie de Floer hamiltonienne

Etude de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.
$\mathrm{Ham}(M, \omega) = \{\phi \mid \exists H \text{ tel que } \phi = \phi_H^1\}$.

Distance de Hofer : $d(\mathrm{id}, \phi) = \min\{\|H\| \mid \phi = \phi_H^1\}$.

Motivation

(M, ω) variété symplectique
$H : M \to \mathbb{R}$ induit $\omega(X_H, -) = -dH$ et $\partial_t \phi_H^t = X_H(\phi_H^t)$

Théorie de Floer hamiltonienne

Etude de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.
$\mathrm{Ham}(M, \omega) = \{\phi \,|\, \exists H$ tel que $\phi = \phi_H^1\}$.

Distance de Hofer : $d(\mathrm{id}, \phi) = \min\{\|H\| \,|\, \phi = \phi_H^1\}$.

Les intersections lagrangiennes

Etude $\mathrm{Ham}(M, \omega; L_0)$ (L_0 lagrangien donné).

Motivation

(M,ω) variété symplectique
$H : M \to \mathbb{R}$ induit $\omega(X_H, -) = -dH$ et $\partial_t \phi_H^t = X_H(\phi_H^t)$

Théorie de Floer hamiltonienne

Etude de $\mathrm{Ham}(M,\omega)$.
$\mathrm{Ham}(M,\omega) = \{\phi \,|\, \exists H \text{ tel que } \phi = \phi_H^1\}$.

Distance de Hofer : $d(\mathrm{id},\phi) = \min\{\|H\| \,|\, \phi = \phi_H^1\}$.

Les intersections lagrangiennes

Etude $\mathrm{Ham}(M,\omega;L_0)$ (L_0 lagrangien donné).
$\mathrm{Ham}(M,\omega;L_0) = \{L \,|\, \exists \phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega) \text{ tel que } \phi(L_0) = L\}$.

Motivation

(M, ω) variété symplectique
$H : M \to \mathbb{R}$ induit $\omega(X_H, -) = -dH$ et $\partial_t \phi_H^t = X_H(\phi_H^t)$

Théorie de Floer hamiltonienne

Etude de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.
$\mathrm{Ham}(M, \omega) = \{\phi \,|\, \exists H \text{ tel que } \phi = \phi_H^1\}$.

Distance de Hofer : $d(\mathrm{id}, \phi) = \min\{\|H\| \,|\, \phi = \phi_H^1\}$.

Les intersections lagrangiennes

Etude $\mathrm{Ham}(M, \omega; L_0)$ (L_0 lagrangien donné).
$\mathrm{Ham}(M, \omega; L_0) = \{L \,|\, \exists \phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega) \text{ tel que } \phi(L_0) = L\}$.

Distance de Hofer : $\nabla(L_0, L) = \min\{\|H\| \,|\, \phi_H^1(L_0) = L\}$.

Invariants spectraux

Contexte

- Cadre des fonctions génératrices : Viterbo (R^{2n}).

Invariants spectraux

Contexte

- Cadre des fonctions génératrices : Viterbo (R^{2n}).
- En homologie de Floer Hamiltonienne,
  - Schwarz (cas symplectiquement asphérique)
  - Oh (cas général)

Invariants spectraux

Contexte

- Cadre des fonctions génératrices : Viterbo (R^{2n}).
- En homologie de Floer Hamiltonienne,
  - Schwarz (cas symplectiquement asphérique)
  - Oh (cas général)
- Cas du cotangent : Oh et Milinković.

Invariants spectraux

Contexte

- Cadre des fonctions génératrices : Viterbo (R^{2n}).
- En homologie de Floer Hamiltonienne,
  - Schwarz (cas symplectiquement asphérique)
  - Oh (cas général)
- Cas du cotangent : Oh et Milinković.

Résultats

- Extension au cas lagrangien (plus général), avec utilisation du PSS (approche de Schwarz).

Invariants spectraux

Contexte

- Cadre des fonctions génératrices : Viterbo (R^{2n}).
- En homologie de Floer Hamiltonienne,
  - Schwarz (cas symplectiquement asphérique)
  - Oh (cas général)
- Cas du cotangent : Oh et Milinković.

Résultats

- Extension au cas lagrangien (plus général), avec utilisation du PSS (approche de Schwarz).
- Utilisation des suites spectrales de Barraud–Cornea et définition d'invariants spectraux d'ordre supérieur.

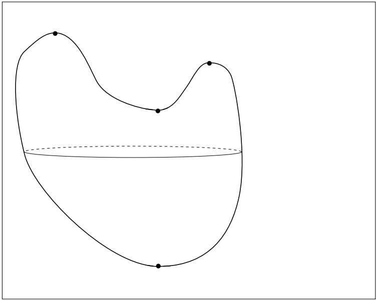
Homologie de Morse

Homologie de Morse

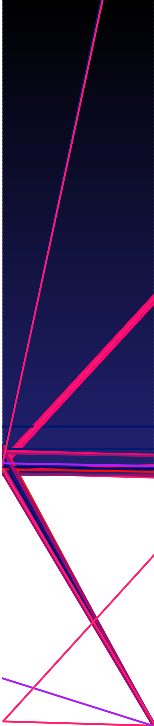
L^n variété lisse, (f, g) une paire *Morse–Smale*.

Homologie de Morse
Exemple en images

$L = S^2$, fonction hauteur.



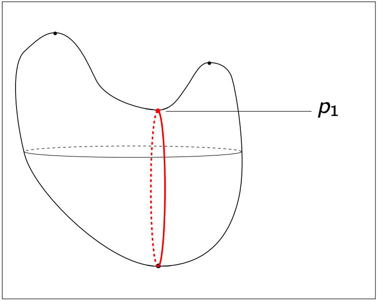
4 générateurs de l'homologie.



Homologie de Morse

Exemple en images

$L = S^2$, fonction hauteur.



La différentielle

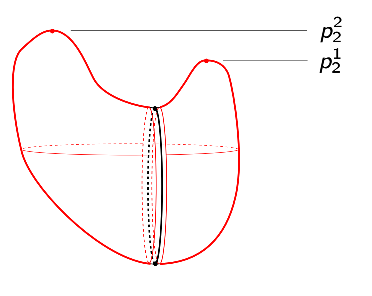
- $\partial p_0 = 0$
- $\partial p_1 = 2p_0 = 0$

p_1 (indice 1)
Correspond à une 1-cellule (un intervalle)

Homologie de Morse

Exemple en images

$L = S^2$, fonction hauteur.



La différentielle

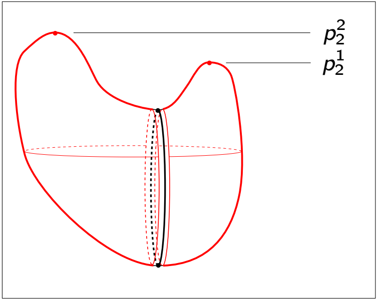
- $\partial p_0 = 0$
- $\partial p_1 = 2p_0 = 0$
- $\partial p_2^i = p_1 \ (i = 1, 2)$

p_2^1 et p_2^2 (indice 2)
Correspondent à deux 2-cellules (deux disques)

Homologie de Morse

Exemple en images

$L = S^2$, fonction hauteur.



$$HM_0(L; f, g) = \mathbb{Z}_2\langle p_0 \rangle$$
$$HM_1(L; f, g) = 0$$
$$HM_2(L; f, g) = \mathbb{Z}_2\langle p_2^1 + p_2^2 \rangle$$

Nombres spectraux (Morse)

Filtration : $CM_*^\nu := \mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$

Nombres spectraux (Morse)

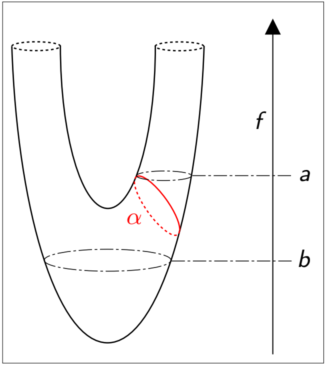
Filtration : $CM_*^\nu := \mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$

$$\sigma(\alpha) = \min\{\nu \,|\, \alpha \in \mathrm{im}(i_*^\nu : HM_*^\nu(L; f, g) \to HM_*(L; f, g))\}$$

Nombres spectraux (Morse)

Filtration : $CM_*^\nu := \mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$

$$\sigma(\alpha) = \min\{\nu \,|\, \alpha \in \mathrm{im}(i_*^\nu : HM_*^\nu(L; f, g) \to HM_*(L; f, g))\}$$

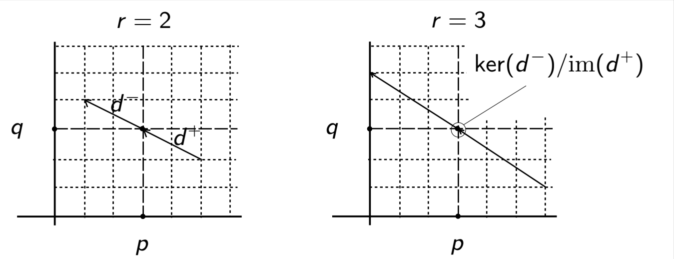


$$b \leq \sigma(\alpha) \leq a$$

Suite spectrale

Une suite spectrale est un livre

- les pages sont des complexes de chaînes bigradués
- la différentielle de la page r est de degré $(-r, r-1)$
- l'homologie de la page r donne les modules de la page $r+1$



Suite spectrale

Constructions classiques

Théorème

Tout module différentiel gradué filtré (C_*, d, F_*) *induit une suite spectrale* $E = (E^r_{*,*}, d^r)$ *telle que*

$E^1_{p,}$ 1p;

Suite spectrale

Constructions classiques

Théorème

Tout module différentiel gradué filtré (C_*, d, F_*) induit une suite spectrale $E = (E^r_{*,*}, d^r)$ telle que $E^1_{p,q} \simeq H_{p+q}(F_p C_*/F_{p-1} C_*)$. De plus, si la filtration est bornée alors E converge vers $H(C_*, d)$, i.e.

$$E^\infty_{p,q} \simeq F_p H_{p+q}(C_*, d)/F_{p-1} H_{p+q}(C_*, d).$$

Théorème (Leray–Serre)

Soit $\ell : E \to B$ une fibration de fibre F, connexe, de base B (complexe CW), connexe par arcs. Il existe une suite spectrale de premier quadrant, $(E^r_{*,*}, d^r)$ convergeant vers $H_*(E, G)$, avec $E^2_{p,q} \simeq H_p(B, H_q(F, G))$, l'homologie de B avec coefficients locaux dans l'homologie de la fibre F.

Suite spectrale de Barraud–Cornea

Construction

Soit L une variété lisse et (f, g) paire Morse-Smale

Lignes de flot vues comme lacets

- w chemin plongé dont l'image contient $\mathrm{Crit}(f)$
- on considère $\widetilde{L} = L/\mathrm{im}(w)$

Une ligne de flot est ainsi vue comme un élément de $\Omega'_{\{*\}}\widetilde{L}$

Suite spectrale de Barraud–Cornea

Construction

Soit L une variété lisse et (f, g) paire Morse-Smale

Lignes de flot vues comme lacets

- w chemin plongé dont l'image contient $\mathrm{Crit}(f)$
- on considère $\widetilde{L} = L/\mathrm{im}(w)$

Une ligne de flot est ainsi vue comme un élément de $\Omega'_{\{*\}}\widetilde{L}$

Variétés connectantes vues comme des chaînes cubiques

- *système de chaînes représentant* $\overline{\mathcal{M}}(f, g)$:

$$a_{pq} \leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{p,q}(f, g)$$

- complexe cubique $\mathcal{R}_* := \mathcal{S}_*(\Omega'\widetilde{L})$

$\mathcal{R}_*$ est un module différentiel admettant un produit

Suite spectrale de Barraud–Cornea

Construction

On enrichit le complexe de chaînes usuel par cet anneau

$$(\mathcal{C}_*(L; f, g), d) = (\mathcal{R}_* \otimes CM_*(L; f, g), d)$$

$$d(a \otimes p) = \partial a \otimes p + \sum_q [(a \cdot a_{pq}) \otimes q]$$

Suite spectrale de Barraud–Cornea

Construction

On enrichit le complexe de chaînes usuel par cet anneau

$$(\mathcal{C}_*(L; f, g), d) = (\mathcal{R}_* \otimes CM_*(L; f, g), d)$$
$$d(a \otimes p) = \partial a \otimes p + \sum_q [(a \cdot a_{pq}) \otimes q]$$

Il admet une filtration (par le degré)

$$F_k\mathcal{C}_* = \mathcal{R}_* \otimes \langle \mathrm{Crit}_j(f) \,|\, j \leq k \rangle_{\mathbb{Z}_2} = \bigoplus_{j \leq k} \mathcal{R}_* \otimes CM_j(L; f, g)$$

Définition

La suite spectrale de Barraud–Cornea associée à L et à la paire (f, g) est la suite spectrale obtenue de cette filtration. Elle est dénotée $EM(L; f, g)$.

Suite spectrale de Barraud–Cornea

Propriétés

On suppose L simplement connexe.

1. Si la différentielle de la page r est non triviale, il existe des points critiques p et q tels que
    - leur différence d'indice de Morse est r,
    - leur variété connectante est non vide.

Suite spectrale de Barraud–Cornea

Propriétés

On suppose L simplement connexe.

1. Si la différentielle de la page r est non triviale, il existe des points critiques p et q tels que
   - leur différence d'indice de Morse est r,
   - leur variété connectante est non vide.

2. $EM^r(L; f, g)$ est isomorphe à $E^r(L)$ $(r \geq 2)$. Donc
   - la page 2 est isomorphe au produit tensoriel $EM^2_{p,q}(L; f, g) \simeq H_q(\Omega L) \otimes H_p(L)$,
   - la page "limite" est triviale.

Nombres spectraux d'ordre supérieur

(version Morse)

homologiques / ordre 2 ordre supérieur

Nombres spectraux d'ordre supérieur

(version Morse)

homologiques / ordre 2

ordre supérieur

Filtration du complexe usuel par f : CM_*^ν

$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu\rangle$

$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

Nombres spectraux d'ordre supérieur

(version Morse)

homologiques / ordre 2

Filtration du complexe usuel par f : CM_*^ν

$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$

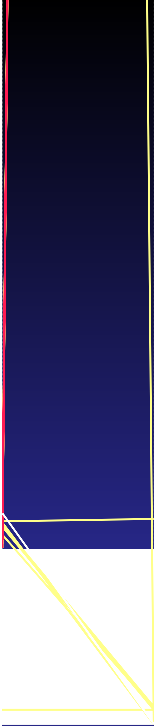
$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

ordre supérieur

Filtration du complexe enrichi par f : $\mathcal{C}_*^\nu$

$\mathcal{R}_* \otimes \mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$

$i_*^\nu : E(\mathcal{C}_*^\nu \to \mathcal{C}_*)$



Nombres spectraux d'ordre supérieur
(version Morse)

homologiques / ordre 2

Filtration du complexe usuel par f : CM_*^ν

$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$

$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

Homologie $H_*(L)$.

ordre supérieur

Filtration du complexe enrichi par f : $\mathcal{C}_*^\nu$

$\mathcal{R}_* \otimes \mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$

$i_*^\nu : E(\mathcal{C}_*^\nu \to \mathcal{C}_*)$

Suite spectrale $E(L)$.

Nombres spectraux d'ordre supérieur
(version Morse)

homologiques / ordre 2

Filtration du complexe usuel par f : CM_*^ν
$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$
$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

Homologie $H_*(L)$.

ordre supérieur

Filtration du complexe enrichi par f : $\mathcal{C}_*^\nu$
$\mathcal{R}_* \otimes \mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$
$i_*^\nu : E(\mathcal{C}_*^\nu \to \mathcal{C}_*)$

Suite spectrale $E(L)$.

Définition (nombres spectraux homologiques)

Pour $0 \neq \alpha \in HM_*(L; f, g)$,

$$\sigma(\alpha) = \min\{\nu \,|\, \alpha \in \mathrm{im}(i_*^\nu)\}.$$

Nombres spectraux d'ordre supérieur (version Morse)

homologiques / ordre 2

Filtration du complexe usuel par f : CM_*^ν
$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu\rangle$
$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

Homologie $H_*(L)$.

ordre supérieur

Filtration du complexe enrichi par f : $\mathcal{C}_*^\nu$
$\mathcal{R}_* \otimes \mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu\rangle$
$i_*^\nu : E(\mathcal{C}_*^\nu \to \mathcal{C}_*)$

Suite spectrale $E(L)$.

Définition (nombres spectraux d'ordre supérieur)

Pour $0 \neq \alpha \in EM_*^r(L; f, g)$,

$$\sigma^r(\alpha) = \min\{\nu \,|\, \alpha \in \mathrm{im}(i_*^\nu)\}.$$

Nombres spectraux d'ordre supérieur

Exemple de $S^2 \times S^4$ avec f, somme des fonctions "hauteur"

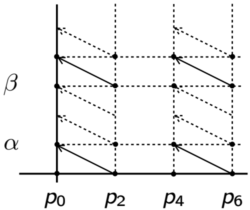
$$\begin{aligned}
p_6 &= (\max(f_2), \max(f_4)), \\
p_4 &= (\min(f_2), \max(f_4)), \\
p_2 &= (\max(f_2), \min(f_4)), \\
p_0 &= (\min(f_2), \min(f_4)).
\end{aligned}$$

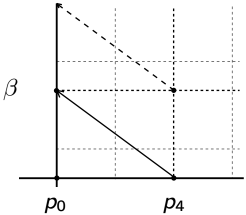
Nombres spectraux d'ordre supérieur

Exemple de $S^2 \times S^4$ avec f, somme des fonctions "hauteur"

$$
\begin{aligned}
p_6 &= (\max(f_2), \max(f_4)),\\
p_4 &= (\min(f_2), \max(f_4)),\\
p_2 &= (\max(f_2), \min(f_4)),\\
p_0 &= (\min(f_2), \min(f_4)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& p_6 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "\gamma"'] & \\
p_4 \arrow[dr, "\beta"'] & & p_2 \arrow[dl, "\alpha"] \\
& p_0 &
\end{tikzcd}
$$





Nombres spectraux d'ordre supérieur

Exemple de $(S^2 \times S^4)_{[1]} \# (S^2 \times S^4)_{[2]}$, avec $f = f_{[1]} \# f_{[2]}$

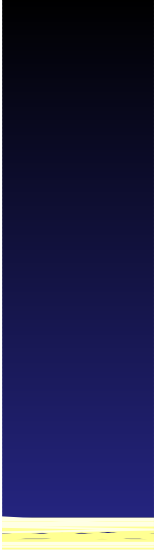
$$
\begin{tikzcd}
 & & & p_6 \arrow[dlll, bend right, "\alpha_1"'] \arrow[ddll, bend right, "\beta_1"] \arrow[ddd, "\gamma"'] \arrow[ddrr, bend left, "\beta_2"'] \arrow[drrr, bend left, "\alpha_2"] & & & \\
p_4^1 \arrow[ddrrr, bend right, "\beta_1"'] & & & & & & p_4^2 \arrow[ddlll, bend left, "\beta_2"] \\
 & p_2^1 \arrow[drr, bend right, "\alpha_1"] & & & & p_2^2 \arrow[dll, bend left, "\alpha_2"'] & \\
 & & & p_0 & & &
\end{tikzcd}
$$

Nombres spectraux d'ordre supérieur

Exemple de $(S^2 \times S^4)_{[1]} \# (S^2 \times S^4)_{[2]}$, avec $f = f_{[1]} \# f_{[2]}$

$$
\begin{tikzcd}
 & & p_6 \arrow[dll, bend right, "\alpha_1"'] \arrow[dl, bend right, "\beta_1"'] \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, bend left, "\beta_2"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_2"] & & \\
p_4^1 \arrow[drr, bend right, "\beta_1"'] & p_2^1 \arrow[dr, bend right, "\alpha_1"] & & p_2^2 \arrow[dl, bend left, "\alpha_2"'] & p_4^2 \arrow[dll, bend left, "\beta_2"] \\
 & & p_0 & &
\end{tikzcd}
$$

- comme précédemment : $\sigma^2(\alpha_i \otimes p_4^i) = \sigma(p_4^i) = f_{[i]}(p_4^i)$



Nombres spectraux d'ordre supérieur

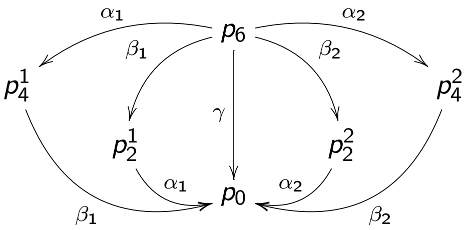
Exemple de $(S^2 \times S^4)_{[1]} \# (S^2 \times S^4)_{[2]}$, avec $f = f_{[1]} \# f_{[2]}$

$$
\begin{tikzcd}
 & & p_6 \arrow[dll, bend right, "\alpha_1"'] \arrow[ddl, bend right, "\beta_1"'] \arrow[ddd, "\gamma"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta_2"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_2"] & & \\
p_4^1 \arrow[ddrr, bend right, "\beta_1"'] & & & & p_4^2 \arrow[ddll, bend left, "\beta_2"] \\
 & p_2^1 \arrow[dr, bend right, "\alpha_1"] & & p_2^2 \arrow[dl, bend left, "\alpha_2"'] & \\
 & & p_0 & &
\end{tikzcd}
$$

- comme précédemment : $\sigma^2(\alpha_i \otimes p_4^i) = \sigma(p_4^i) = f_{[i]}(p_4^i)$
- de plus $\partial^2(\alpha_i \otimes p_4^i) = 0$ et $\partial^2 p_6 = \alpha_1 \otimes p_4^1 + \alpha_2 \otimes p_4^2$
- donc à la page 3 : $[\alpha_1 \otimes p_4^1] = [\alpha_2 \otimes p_4^2] \neq 0$

Nombres spectraux d'ordre supérieur

Exemple de $(S^2 \times S^4)_{[1]} \# (S^2 \times S^4)_{[2]}$, avec $f = f_{[1]} \# f_{[2]}$



- comme précédemment : $\sigma^2(\alpha_i \otimes p_4^i) = \sigma(p_4^i) = f_{[i]}(p_4^i)$
- de plus $\partial^2(\alpha_i \otimes p_4^i) = 0$ et $\partial^2 p_6 = \alpha_1 \otimes p_4^1 + \alpha_2 \otimes p_4^2$
- donc à la page 3 : $[\alpha_1 \otimes p_4^1] = [\alpha_2 \otimes p_4^2] \neq 0$

L'invariant spectral associé à $\alpha_1 \otimes p_4^1$ est $\sigma^3(\alpha_1 \otimes p_4^1) = \min\{f_{[1]}(p_4^1), f_{[2]}(p_4^2)\}$.

La théorie de Floer (lagrangienne)

Le contexte plus précis de ce travail

Les objets de base

- (M^{2n}, ω) compacte ou convexe à l'infini
- L et L' lagrangiens tels que
  - L et L' sont compactes
  - $\omega|_{\pi_2(M,L)} = 0$

La théorie de Floer (lagrangienne)

Le contexte plus précis de ce travail

Les objets de base

- (M^{2n}, ω) compacte ou convexe à l'infini
- L et L' lagrangiens tels que
  - L et L' sont compactes
  - $\omega|_{\pi_2(M,L)} = 0$
- η un chemin de L à L'

La théorie de Floer (lagrangienne)

Le contexte plus précis de ce travail

Les objets de base

- (M^{2n}, ω) compacte ou convexe à l'infini
- L et L' lagrangiens tels que
  - L et L' sont compactes
  - $\omega|_{\pi_2(M,L)} = 0$
- η un chemin de L à L'
- une paire (H, J)
  - régularité
  - $L \cap \phi_H^1(L)$ transverse

La théorie de Floer (lagrangienne)

Le contexte plus précis de ce travail

Les objets de base

- (M^{2n}, ω) compacte ou convexe à l'infini
- L et L' lagrangiens tels que
  - L et L' sont compactes
  - $\omega|_{\pi_2(M,L)} = 0$
- η un chemin de L à L'
- une paire (H, J)
  - régularité
  - $L \cap \phi_H^1(L)$ transverse

$$\mathcal{P}_\eta(L, L') = \{\gamma \in C^\infty(I, M) |\, \gamma(0) \in L,\, \gamma(1) \in L',\, [\gamma] = [\eta]\}$$

La théorie de Floer (lagrangienne)

Le contexte plus précis de ce travail

Les objets de base

- (M^{2n}, ω) compacte ou convexe à l'infini
- L et L' lagrangiens tels que
  - L et L' sont compactes
  - $\omega|_{\pi_2(M,L)} = 0$
- η un chemin de L à L'
- une paire (H, J)
  - régularité
  - $L \cap \phi_H^1(L)$ transverse

$$\mathcal{P}_\eta(L, L') = \{\gamma \in C^\infty(I, M) |\, \gamma(0) \in L,\, \gamma(1) \in L',\, [\gamma] = [\eta]\}$$

$$\mathcal{A}_{H,\eta}(\gamma) = -\int_{I\times I} \bar{\gamma}^*\omega + \int_I H(t, \gamma(t))\, dt$$

Homologie de Floer (lagrangienne)

Homologie de Floer (lagrangienne)

On construit le complexe de chaînes $(CF_*(L, L'; \eta, H, J), \partial)$

- générateurs : orbites du champ de vecteurs hamiltonien (dans la classe d'homotopie de η)
  $\mathrm{Crit}(\mathcal{A})$ ou $\mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$ ou $\mathcal{I}(\eta, H)$,
- graduation : indice de Maslov $(\mu|_{\pi_2(M,L)} = 0)$,
- différentielle : compte les trajectoires de Floer entre les orbites.

Homologie de Floer (lagrangienne)

On construit le complexe de chaînes $(CF_*(L, L'; \eta, H, J), \partial)$

- générateurs : orbites du champ de vecteurs hamiltonien (dans la classe d'homotopie de η)
  $\mathrm{Crit}(\mathcal{A})$ ou $\mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$ ou $\mathcal{I}(\eta, H)$,
- graduation : indice de Maslov ($\mu|_{\pi_2(M,L)} = 0$),
- différentielle : compte les trajectoires de Floer entre les orbites.

Compactification et recollement : $\partial \circ \partial = 0$

$$\begin{aligned} HF_*(L, L'; \eta, H, J) &:= H(CF_*(L, L'; \eta, H, J), \partial) \\ &\simeq HM_*(L; f, g) \qquad\qquad (L = L') \end{aligned}$$

Nombres spectraux lagrangiens

Définition

Théorie de Morse

Théorie de Floer

Théorie de Morse

Filtration par f : CM_*^ν

$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$

$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

Théorie de Floer

Filtration par $\mathcal{A}$: CF_*^ν

$\mathbb{Z}_2\langle x \in \mathcal{I}(\eta, H) \,|\, \mathcal{A}(x) < \nu \rangle$

$i_*^\nu : H(CF_*^\nu \to CF_*)$

Nombres spectraux lagrangiens

Définition

Théorie de Morse

Filtration par f : CM_*^ν

$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit}\, f \,|\, f(p) < \nu \rangle$

$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

Homologie $H_*(L)$.

Théorie de Floer

Filtration par $\mathcal{A}$: CF_*^ν

$\mathbb{Z}_2\langle x \in \mathcal{I}(\eta, H) \,|\, \mathcal{A}(x) < \nu \rangle$

$i_*^\nu : H(CF_*^\nu \to CF_*)$

Nombres spectraux lagrangiens

Définition

Théorie de Morse

Filtration par f : CM_*^ν
$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu \rangle$
$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

Homologie $H_*(L)$.

Théorie de Floer

Filtration par $\mathcal{A}$: CF_*^ν
$\mathbb{Z}_2\langle x \in \mathcal{I}(\eta, H) \,|\, \mathcal{A}(x) < \nu \rangle$
$i_*^\nu : H(CF_*^\nu \to CF_*)$

Homologie $H_*(L)$
(par le PSS : ϕ_f^H).

Définition (nombres spectraux de Morse)

Pour $0 \neq \alpha \in HM_*(L; f, g)$,

$$\sigma(\alpha) = \min\{\nu \,|\, \alpha \in \mathrm{im}(i_*^\nu)\}.$$

Théorie de Morse

Filtration par f : CM_*^ν
$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu\rangle$
$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

Homologie $H_*(L)$.

Théorie de Floer

Filtration par $\mathcal{A}$: CF_*^ν
$\mathbb{Z}_2\langle x \in \mathcal{I}(\eta, H) \,|\, \mathcal{A}(x) < \nu\rangle$
$i_*^\nu : H(CF_*^\nu \to CF_*)$

Homologie $H_*(L)$
(par le PSS : ϕ_f^H).

Définition (nombres spectraux (relatifs) lagrangiens)

Pour $0 \neq \alpha \in HM_*(L; f, g)$,

$$\sigma(\alpha) = \min\{\nu \,|\, \phi_f^H(\alpha) \in \mathrm{im}(i_*^\nu)\}.$$

Ils dépendent a priori de (f, g), (H, J), η.

Nombres spectraux lagrangiens

Définition

Théorie de Morse

Filtration par f : CM_*^ν

$\mathbb{Z}_2\langle p \in \mathrm{Crit} f \,|\, f(p) < \nu\rangle$

$i_*^\nu : H(CM_*^\nu \to CM_*)$

Homologie $H_*(L)$.

Théorie de Floer

Filtration par $\mathcal{A}$: CF_*^ν

$\mathbb{Z}_2\langle x \in \mathcal{I}(\eta, H) \,|\, \mathcal{A}(x) < \nu\rangle$

$i_*^\nu : H(CF_*^\nu \to CF_*)$

Homologie $H_*(L)$ (par le PSS : ϕ_f^H).

Définition (nombres spectraux (absolus) lagrangiens)

Pour $0 \neq \alpha \in HM_*(L; f, g)$,

$$c(\alpha) = \sigma(\alpha) - \sigma(1).$$

Ils dépendent a priori de (f, g), (H, J).

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Théorème

Les nombres spectraux lagrangiens ne dépendent que de L et $(\phi_H^1)^{-1}(L)$. On définit

$$c(\alpha; L, L') := c(\alpha; H, J) \ \textit{ avec } \ \phi_H^1(L') = L.$$

Démonstration.

Etape 1 – Commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
HM_*(L; f, g) \arrow[r, "\phi_f^H"] \arrow[d, "\phi_f^{H'}"'] & HF_*(L, L; H, J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\
HF_*(L, L; H', J') \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L, L_0; 0, \widetilde{J})
\end{tikzcd}$$

Etape 2 – Lemme technique. □

Proposition

Soit (H, J) et (H', J') régulières telles que

- $\phi_H^* J = \phi_{H'}^* J' =: \widetilde{J}$ *et*
- $(\phi_H^1)^{-1}(L) = (\phi_{H'}^1)^{-1}(L) =: L_0$.

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} HM_*(L; f, g) \arrow[r, "\phi_f^H"] \arrow[d, "\phi_f^{H'}"'] & HF_*(L, L; H, J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\ HF_*(L, L; H', J') \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L, L_0; 0, \widetilde{J}) \end{tikzcd}$$

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Commutativité du diagramme

Proposition

Soit (H, J) et (H', J') régulières telles que

- $\phi_H^* J = \phi_{H'}^* J' =: \widetilde{J}$ *et*
- $(\phi_H^1)^{-1}(L) = (\phi_{H'}^1)^{-1}(L) =: L_0$.

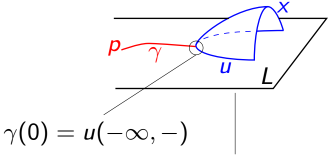
Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} HM_*(L; f, g) \arrow[r, "\phi_f^H"] \arrow[d, "\phi_f^{H'}"'] \arrow[dr, dashed] & HF_*(L, L; H, J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\ HF_*(L, L; H', J') \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L, L_0; 0, \widetilde{J}) \end{tikzcd}$$

$(\eta_0 \in L \cap L_0,\ \eta := b_H(\eta_0)$ *et* $\eta' := b_{H'}(\eta_0))$

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Commutativité du diagramme



$$\begin{tikzcd}
HM_*(L; f, g) \arrow[r, "\phi_f^H"] \arrow[d, "\phi_f^{H'}"'] & HF_*(L, L; H, J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\
HF_*(L, L; H', J') \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L, L_0; 0, \widetilde{J})
\end{tikzcd}$$

Le morphisme PSS lagrangien

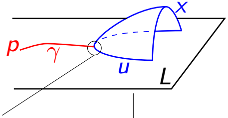
$$\mathcal{M}_{p,x}^{f,H} := \left\{ (\gamma, u) \in \mathcal{M}_p^f(g) \times \mathcal{M}_x^H(J) \middle| \; u(-\infty, -) = \gamma(0) \right\}$$

Le PSS $\phi_f^H : HM_*(L; f, g) \to HF_*(L, L; H, J)$ est induit par

$$\phi_f^H(p) := \sum \#_2 \mathcal{M}_{p,x}^{f,H} \cdot x$$

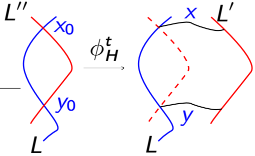
Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Commutativité du diagramme



$\gamma(0) = u(-\infty, -)$

$$\begin{tikzcd}
HM_*(L; f, g) \arrow[r, "\phi_f^H"] \arrow[d, "\phi_f^{H'}"'] & HF_*(L, L; H, J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\
HF_*(L, L; H', J') \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L, L_0; 0, \widetilde{J})
\end{tikzcd}$$



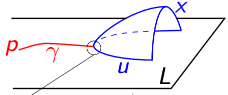
Le morphisme de naturalité

$$b_H : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(L, L'') & \to & \mathcal{P}(L, L') \\ x & \mapsto & [t \mapsto \phi_H^t(x(t))] \end{array} \right.$$

Pour $\eta = b_H(\eta')$, b_H identifie $\mathcal{I}(L, L''; \eta', 0)$ et $\mathcal{I}(L, L'; \eta, H)$.
En particulier, $b_H(x_0) = x$ tel que $x(0) = x_0$ (idem pour y).

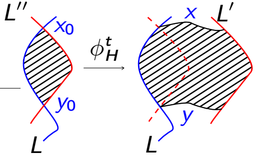
Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Commutativité du diagramme



$\gamma(0) = u(-\infty, -)$

$$\begin{tikzcd} HM_*(L;f,g) \arrow[r, "\phi_f^H"] \arrow[d, "\phi_f^{H'}"'] & HF_*(L,L;H,J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\ HF_*(L,L;H',J') \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L,L_0;0,\widetilde{J}) \end{tikzcd}$$



Le morphisme de naturalité

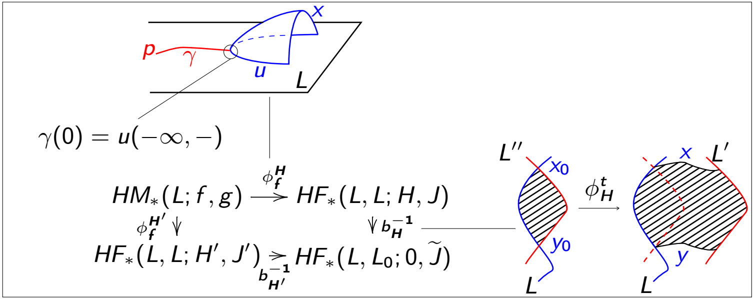
$$b_H : \mathcal{M}_{x,y}(L, L''; 0, \widetilde{J}) \to \mathcal{M}_{b_H(x), b_H(y)}(L, L'; H, J)$$

Identification totale des complexes :

$$b_H : CF_*(L, (\phi_H^1)^{-1}(L'); \eta'; 0, \phi_H^* J) \to CF_*(L, L'; \eta; H, J).$$

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Commutativité du diagramme



Démonstration.

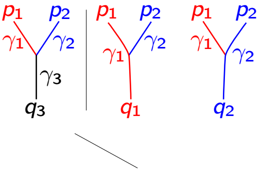
$$\Phi = (\phi_f^{H'})^{-1} \circ b_{H'} \circ b_H^{-1} \circ \phi_f^H : HM_*(L; f, g) \longrightarrow HM_*(L; f, g)$$

Structures algébriques sur $HM_*(L; f, g)$ et sur $HF_*(L, L'; H, J)$
Φ préserve ces structures, de sorte que

$$\Phi(a) = \Phi(a \cdot [L]) = a \cdot \Phi([L]) = a \cdot [L] = a.$$

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Commutativité du diagramme



$$\begin{tikzcd}
HM_*(L; f, g) \arrow[r, "\phi_f^H"] \arrow[d, "\phi_f^{H'}"'] & HF_*(L, L; H, J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\
HF_*(L, L; H', J') \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L, L_0; 0, \widetilde{J})
\end{tikzcd}$$

Structure d'anneau de $HM_*(L; f, g)$

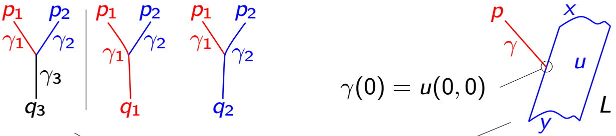
$$p_1 \cdot p_2 := \sum_{r \mid \mathrm{d}(p_1, p_2; q_3) = 0} \#_2 \mathcal{M}_{(p_1, p_2); q_3}(f_1, f_2, f_3; g) \cdot q_3$$

induit

$$CM_k(L; f_1, g) \otimes CM_l(L; f_2, g) \xrightarrow{\cdot} CM_{k+l-n}(L; f_3, g)$$

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Commutativité du diagramme



$$\begin{tikzcd} HM_*(L;f,g) \arrow[r, "\phi_f^H"] \arrow[d, "\phi_f^{H'}"'] & HF_*(L,L;H,J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\ HF_*(L,L;H',J') \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L,L_0;0,\widetilde{J}) \end{tikzcd}$$

Structure de $HM_*(L;f,g)$–module de $HF_*(L,L';H,J)$

$$\mathcal{M}_{(p,x);y}(f,g;H,J) := \{(\gamma,u)\in \mathcal{W}_p^u(f,g)\times\mathcal{M}_{x,y}(H,J) \,|\, \gamma(0)=u(0,0)\}$$

$$p * x := \sum_{y|\,\mathrm{d}(p,x;y)=0} \#_2\mathcal{M}_{(p,x);y}(f,g;H,J)\cdot y$$

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Le lemme technique

Soit $E^+(H) := \int_I \sup H_t \, dt$ et $E^-(H) := \int_I \inf H_t \, dt$.

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Le lemme technique

Soit $E^+(H) := \int_I \sup H_t \, dt$ et $E^-(H) := \int_I \inf H_t \, dt$.

Lemme

(H, J) et (H', J') régulières, $0 \neq \alpha \in H_*(L)$:

$$E_-(H' - H) + a_{\eta,\eta'} \leq \sigma_L(\alpha; H', J', \eta') - \sigma_L(\alpha; H, J, \eta) \leq E_+(H' - H) + a_{\eta,\eta'}$$

où $a_{\eta,\eta'} := \int u^*\omega$ pour toute application u vérifiant

$$u(0, -) = \eta, \;\; u(1, -) = \eta' \;\; \text{et} \;\; u(I, 0) \subset L, \;\; u(I, 1) \subset L'.$$

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Le lemme technique

Soit $E^+(H) := \int_I \sup H_t \, dt$ et $E^-(H) := \int_I \inf H_t \, dt$.

Lemme

(H, J) et (H', J') régulières, $0 \neq \alpha \in H_*(L)$:

$$E_-(H' - H) + a_{\eta,\eta'} \leq \sigma_L(\alpha; H', J', \eta') - \sigma_L(\alpha; H, J, \eta)$$
$$\leq E_+(H' - H) + a_{\eta,\eta'}$$

où $a_{\eta,\eta'} := \int u^*\omega$ pour toute application u vérifiant

$$u(0, -) = \eta, \; u(1, -) = \eta' \; \text{ et } \; u(I, 0) \subset L, \; u(I, 1) \subset L'.$$

Corollaire

- *Indépendance en J des nombres spectraux*

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Le lemme technique

Soit $E^+(H) := \int_I \sup H_t \, dt$ et $E^-(H) := \int_I \inf H_t \, dt$.

Lemme

(H, J) et (H', J') régulières, $0 \neq \alpha \in H_*(L)$:

$$E_-(H' - H) + a_{\eta,\eta'} \leq \sigma_L(\alpha; H', J', \eta') - \sigma_L(\alpha; H, J, \eta) \leq E_+(H' - H) + a_{\eta,\eta'}$$

où $a_{\eta,\eta'} := \int u^*\omega$ pour toute application u vérifiant

$$u(0, -) = \eta, \; u(1, -) = \eta' \; \text{ et } \; u(I, 0) \subset L, \; u(I, 1) \subset L'.$$

Corollaire

- *Indépendance en J des nombres spectraux*
- *Continuité par rapport à la distance de Hofer*

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Applications

Définition (Norme et distances de Hofer)

- $\|H\| = E^+(H) - E^-(H)$

Définition (Norme et distances de Hofer)

- $\|H\| = E^+(H) - E^-(H)$
- $d(\mathrm{id}, \varphi) = \inf\{\|H\| | \phi_H^1 = \varphi\}$ et $d(\phi, \psi) = d(\mathrm{id}, \phi^{-1}\psi)$

Définition (Norme et distances de Hofer)

- $\|H\| = E^{+}(H) - E^{-}(H)$
- $d(\mathrm{id}, \varphi) = \inf\{\|H\| \,|\, \phi_H^1 = \varphi\}$ *et* $d(\phi, \psi) = d(\mathrm{id}, \phi^{-1}\psi)$
- $\nabla(L_0, L_1) = \inf\{\|H\| \,|\, \phi_H^1(L_0) = L_1\}$

Définition (Norme et distances de Hofer)

- $\|H\| = E^+(H) - E^-(H)$
- $d(\mathrm{id}, \varphi) = \inf\{\|H\| | \phi_H^1 = \varphi\}$ *et* $d(\phi, \psi) = d(\mathrm{id}, \phi^{-1}\psi)$
- $\nabla(L_0, L_1) = \inf\{\|H\| | \phi_H^1(L_0) = L_1\}$

Corollaire (de l'invariance)

- $|c(\alpha; L, L_0) - c(\alpha; L, L_1)| \leq \nabla(L_0, L_1)$

Invariance des nombres spectraux lagrangiens

Applications

Définition (Norme et distances de Hofer)

- $\|H\| = E^+(H) - E^-(H)$
- $d(\mathrm{id}, \varphi) = \inf\{\|H\| \,|\, \phi_H^1 = \varphi\}$ *et* $d(\phi, \psi) = d(\mathrm{id}, \phi^{-1}\psi)$
- $\nabla(L_0, L_1) = \inf\{\|H\| \,|\, \phi_H^1(L_0) = L_1\}$

Corollaire (de l'invariance)

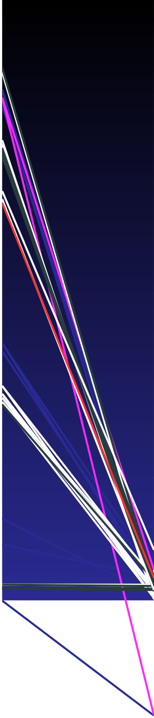
- $|c(\alpha; L, L_0) - c(\alpha; L, L_1)| \leq \nabla(L_0, L_1)$
- *La norme de Hofer pour lagrangiens est non dégénérée*

Définition (Norme et distances de Hofer)

- $\|H\| = E^+(H) - E^-(H)$
- $d(\mathrm{id}, \varphi) = \inf\{\|H\| | \phi_H^1 = \varphi\}$ *et* $d(\phi, \psi) = d(\mathrm{id}, \phi^{-1}\psi)$
- $\nabla(L_0, L_1) = \inf\{\|H\| | \phi_H^1(L_0) = L_1\}$

Corollaire (de l'invariance)

- $|c(\alpha; L, L_0) - c(\alpha; L, L_1)| \leq \nabla(L_0, L_1)$
- *La norme de Hofer pour lagrangiens est non dégénérée*
- *L'ensemble des lagrangiens isotopes (par une isotopie hamiltonienne) au "petit" cercle du tore, muni de la norme de Hofer est de diamètre infini*



Invariants spectraux d'ordre supérieur

Définition : suite spectrale de Barraud–Cornea

Même procédure que dans le cas Morse

- l'image de w contient $x(0)$ pour $x \in \mathcal{I}(\eta, H)$
- on considère $\widetilde{L} = L/\mathrm{im}(w)$, $\widetilde{M} = M/\mathrm{im}(w)$
- système de chaînes représentant $\overline{\mathcal{M}}(L, L'; H, J)$

On enrichit le complexe de chaînes par l'anneau $\mathcal{R}_*$

$$\mathcal{C}_*(L, L'; \eta, H, J) = \mathcal{R}_* \otimes CF_*(L, L'; \eta, H, J)$$

Définition

La suite spectrale de Barraud–Cornea associée à L, L' et à la paire (H, J) est la suite spectrale obtenue de la filtration de $(\mathcal{C}_*(L, L'; \eta, H, J), d)$ par le degré.
Elle est dénotée $EF(L, L'; \eta, H, J)$.

On suppose L simplement connexe.

1. Si la différentielle de la page r est non triviale, il existe des orbites x et y telles que
   - leur différence d'indice de Maslov est r,
   - leur espace de module associé est non vide.

Suite spectrale de Barraud–Cornea
Propriétés

On suppose L simplement connexe.

1. Si la différentielle de la page r est non triviale, il existe des orbites x et y telles que
   - leur différence d'indice de Maslov est r,
   - leur espace de module associé est non vide.

2. $EF^r(L, L'; \eta, H, J)$ est isomorphe à $EM^r(L; f, g)$ $(r \geq 2)$. De plus cet isomorphisme, se restreint sur les classes d'homologie au morphisme PSS.

Invariants spectraux d'ordre supérieur

Définition

La filtration du complexe enrichi par $\mathcal{A}$ induit

$$i^{\nu} : EF^{\nu}(L, L'; \eta, H, J) \to EF(L, L'; \eta, H, J)$$

La filtration du complexe enrichi par $\mathcal{A}$ induit

$$i^{\nu} : EF^{\nu}(L, L'; \eta, H, J) \to EF(L, L'; \eta, H, J)$$

Définition

Soit $\alpha \neq 0$ un élément de $EM^r_{*,*}(L; f, g)$. Ses nombres spectraux lagrangiens relatif et absolu d'ordre supérieur associés sont

$$\sigma^r(\alpha; L, H, J, \eta) := \inf\{\nu \in \mathbb{R} | \Phi^H_f(\alpha) \in \mathrm{im}(i_\nu)\}$$
$$c^r(\alpha; L, L') := \sigma^r(\alpha; L, H, J, \eta) - \sigma(1; L, H, J, \eta)$$

où 1 est le générateur de $HM_0(L; f, g)$ et H tout hamiltonien tel que $\phi^1_H(L') = L$.

Invariants spectraux d'ordre supérieur
Exemple

Soit L une variété compacte, munie d'une paire M.–S.
T^*L est une variété symplectique (convexe à l'infini).
L et Γ_{df} lagrangiens.

Invariants spectraux d'ordre supérieur

Exemple

Soit L une variété compacte, munie d'une paire M.–S.
T^*L est une variété symplectique (convexe à l'infini).
L et Γ_{df} lagrangiens.

Théorème (Floer)

Il existe une identification entre les complexes $CM_*(L; f, g)$ et $CF_*(L, \Gamma_{df}; 0, J_g)$.

En outre, cette identification préserve "l'action".

$L = (S^2 \times S^4)_{[1]} \# (S^2 \times S^4)_{[2]}$, $f_{[1]} \# f_{[2]}$ (perturbée) :

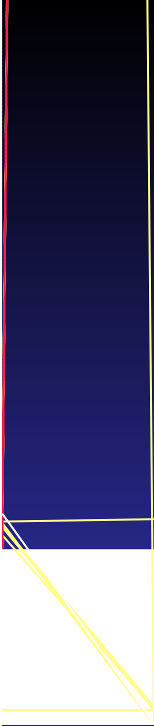
$$c^3(\alpha_1 \otimes p_1; L, \Gamma_{df}) < c^2(\alpha \otimes p_1; L, \Gamma_{df})$$

.

Propriétés des invariants spectraux lagrangiens

Premières propriétés

- Les invariants spectraux d'ordre 2 s'identifient aux invariants spectraux lagrangiens



Propriétés des invariants spectraux lagrangiens
Premières propriétés

- Les invariants spectraux d'ordre 2 s'identifient aux invariants spectraux lagrangiens :

$$c^2(\alpha; L, L') = \max_j \{c(\alpha_j; L, L')\}$$

où $\alpha := \sum_j x_j \otimes \alpha_j \in E^2_{p,q}(L)$
- valeurs critiques de la fonctionnelle action

- Les invariants spectraux d'ordre 2 s'identifient aux invariants spectraux lagrangiens :

$$c^2(\alpha; L, L') = \max_j \{c(\alpha_j; L, L')\}$$

où $\alpha := \sum_j x_j \otimes \alpha_j \in E^2_{p,q}(L)$

- valeurs critiques de la fonctionnelle action
- $0 \neq \alpha \in H_*(L)$, $\alpha' \in H_{n-*}(L)$ la classe Hom–duale de son Poincaré dual.

Propriétés des invariants spectraux lagrangiens
Premières propriétés

- Les invariants spectraux d'ordre 2 s'identifient aux invariants spectraux lagrangiens :

$$c^2(\alpha; L, L') = \max_j \{c(\alpha_j; L, L')\}$$

où $\alpha := \sum_j x_j \otimes \alpha_j \in E^2_{p,q}(L)$

- valeurs critiques de la fonctionnelle action
- $0 \neq \alpha \in H_*(L)$, $\alpha' \in H_{n-*}(L)$ la classe Hom–duale de son Poincaré dual. Pour tout $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$

$$c(\alpha; L, \phi(L)) = c([L]; L, \phi^{-1}(L)) - c(\alpha'; L, \phi^{-1}(L))$$

Propriétés des invariants spectraux lagrangiens

Premières propriétés

- Les invariants spectraux d'ordre 2 s'identifient aux invariants spectraux lagrangiens :

$$c^2(\alpha; L, L') = \max_j \{c(\alpha_j; L, L')\}$$

où $\alpha := \sum_j x_j \otimes \alpha_j \in E^2_{p,q}(L)$

- valeurs critiques de la fonctionnelle action
- $0 \neq \alpha \in H_*(L)$, $\alpha' \in H_{n-*}(L)$ la classe Hom–duale de son Poincaré dual. Pour tout $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$

$$c(\alpha; L, \phi(L)) = c([L]; L, \phi^{-1}(L)) - c(\alpha'; L, \phi^{-1}(L))$$

En particulier $c([L]; L, \phi(L)) = c([L]; L, \phi^{-1}(L))$

Extension des invariants spectraux classiques

Extension des invariants spectraux classiques

Cas hamiltonien (Schwarz)

(M, ω) *symplectiquement asphérique* :
$\rho(\alpha, \phi)$ pour $0 \neq \alpha \in H_*(M)$ et $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$.

Extension des invariants spectraux classiques

Cas hamiltonien (Schwarz)

(M, ω) *symplectiquement asphérique* :
$\rho(\alpha, \phi)$ pour $0 \neq \alpha \in H_*(M)$ et $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$.

De plus,

- $(M \times M, \omega \oplus (-\omega))$ variété symplectique
- $\Delta \subset M \times M$ et Γ_ϕ sont lagrangiens

Extension des invariants spectraux classiques

Cas hamiltonien (Schwarz)

(M, ω) *symplectiquement asphérique* :
$\rho(\alpha, \phi)$ pour $0 \neq \alpha \in H_*(M)$ et $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$.

De plus,

- $(M \times M, \omega \oplus (-\omega))$ variété symplectique
- $\Delta \subset M \times M$ et Γ_ϕ sont lagrangiens

Proposition

À $0 \neq \alpha \in H_*(M)$ *correspond* $\underline{\alpha} \in H_*(\Delta)$

$$c(\underline{\alpha}; \Delta, \Gamma_\phi) = \rho(\alpha; \phi) - \rho(1; \phi).$$

En particulier, $c([\Delta]; \Delta, \Gamma_\phi) = \rho([M]; \phi) - \rho(1; \phi)$.

Extension des invariants spectraux classiques

Amélioration de la borne classique

Rappel

Les invariants spectraux lagrangiens sont bornés par la distance de Hofer pour lagrangiens.

Dans le cas hamiltonien, Schwarz a démontré que

$$0 < \rho([M]; \phi) - \rho(1, \phi) \leq d(\mathrm{id}, \phi).$$

Par Ostrover : $\{\varphi_t\}$, $t \in [0, \infty)$ telle que

$$d(\mathrm{id}, \varphi_t) \to \infty \text{ pour } t \to \infty \quad \text{et} \quad \nabla(\Gamma_{\mathrm{id}}, \Gamma_{\varphi_t}) = c \text{ pour tout } t.$$

Il vient

$$\rho([M]; \varphi_t) - \rho(1; \varphi_t) = c([\Delta]; \Delta, \Gamma_{\varphi_t}) \leq \nabla(\Delta, \Gamma_{\varphi_t}) = c.$$

Propriété principale

La quantité géométrique $r(L, L')$

L et L' lagrangiens compacts et transverses, $x \in L \cap L'$.
Il existe $\varepsilon > 0$ et un plongement $e^x_\varepsilon : B(0,\varepsilon) \to M$ tels que

i. $(e^x_\varepsilon)^*(\omega) = \omega_0$ et $e^x_\varepsilon(0) = x$,

ii. $(e^x_\varepsilon)^{-1}(L) = \mathbb{R}^n \cap B(0,\varepsilon)$ et $(e^x_\varepsilon)^{-1}(L') = i\mathbb{R}^n \cap B(0,\varepsilon)$

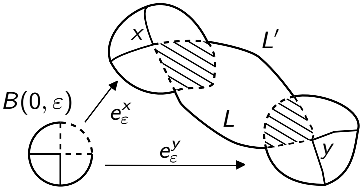
Propriété principale

La quantité géométrique $r(L, L')$

L et L' lagrangiens compacts et transverses, $x \in L \cap L'$.
Il existe $\varepsilon > 0$ et un plongement $e_\varepsilon^x : B(0,\varepsilon) \to M$ tels que

i. $(e_\varepsilon^x)^*(\omega) = \omega_0$ et $e_\varepsilon^x(0) = x$,

ii. $(e_\varepsilon^x)^{-1}(L) = \mathbb{R}^n \cap B(0,\varepsilon)$ et $(e_\varepsilon^x)^{-1}(L') = i\mathbb{R}^n \cap B(0,\varepsilon)$



Propriété principale

La quantité géométrique $r(L, L')$

L et L' lagrangiens compacts et transverses, $x \in L \cap L'$.
Il existe $\varepsilon > 0$ et un plongement $e_\varepsilon^x : B(0, \varepsilon) \to M$ tels que

i. $(e_\varepsilon^x)^*(\omega) = \omega_0$ et $e_\varepsilon^x(0) = x$,

ii. $(e_\varepsilon^x)^{-1}(L) = \mathbb{R}^n \cap B(0, \varepsilon)$ et $(e_\varepsilon^x)^{-1}(L') = i\mathbb{R}^n \cap B(0, \varepsilon)$

Définition

L et L' deux tels lagrangiens. $r(L, L')$ est donné par

$$\sup \left\{ \varepsilon > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in L \cap L', \ \exists\, e_\varepsilon^x \text{ satisfaisant i. et ii.,} \\ \text{tels que } x \neq y \ \Rightarrow \ \operatorname{im} e_\varepsilon^x \cap \operatorname{im} e_\varepsilon^y = \emptyset \end{array} \right\}$$

Propriété principale

La quantité géométrique $r(L, L')$

L et L' lagrangiens compacts et transverses, $x \in L \cap L'$.
Il existe $\varepsilon > 0$ et un plongement $e^x_\varepsilon : B(0,\varepsilon) \to M$ tels que

i. $(e^x_\varepsilon)^*(\omega) = \omega_0$ et $e^x_\varepsilon(0) = x$,

ii. $(e^x_\varepsilon)^{-1}(L) = \mathbb{R}^n \cap B(0,\varepsilon)$ et $(e^x_\varepsilon)^{-1}(L') = i\mathbb{R}^n \cap B(0,\varepsilon)$

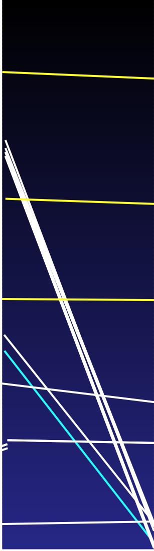
Définition

L et L' deux tels lagrangiens. $r(L, L')$ est donné par

$$\sup \left\{ \varepsilon > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in L \cap L',\ \exists\, e^x_\varepsilon \textit{ satisfaisant i. et ii.,} \\ \textit{tels que } x \neq y \;\Rightarrow\; \operatorname{im} e^x_\varepsilon \cap \operatorname{im} e^y_\varepsilon = \emptyset \end{array} \right\}$$

Remarque

$0 < \#(L \cap L') < \infty$ *implique* $r(L, L') > 0$.



Propriété principale

Démonstration.

1. Pour toute structure presque complexe régulière, existence d'orbites de différence d'indices r, reliées par une trajectoire de Floer dont l'énergie minore la différence entre les invariants spectraux :

$$E(u_J) \leq c^r(\alpha; L, L') - c^r(\beta; L, L')$$

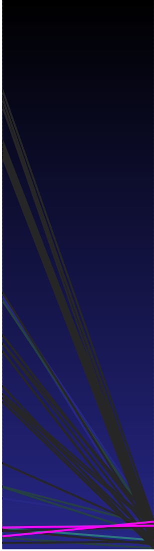
Propriété principale

Démonstration.

1. Pour toute structure presque complexe régulière, existence d'orbites de différence d'indices r, reliées par une trajectoire de Floer dont l'énergie minore la différence entre les invariants spectraux :

$$E(u_J) \leq c^r(\alpha; L, L') - c^r(\beta; L, L')$$

2. On fixe une structure presque complexe adaptée à $r(L, L')$,



Corollaires de la propriété principale

Corollaire

- $\alpha \in H_k(L)$, $\beta \in H_*(L)$, *avec* $1 < k < n-1$ *et* $\alpha \cdot \beta \neq 0$:

$$c(\alpha \cdot \beta; L, L') \leq c(\beta; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

Corollaires de la propriété principale

Corollaire

- $\alpha \in H_k(L)$, $\beta \in H_*(L)$, *avec* $1 < k < n-1$ *et* $\alpha \cdot \beta \neq 0$ *:*

$$c(\alpha \cdot \beta; L, L') \leq c(\beta; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

- $0 \neq \alpha \in H_k(L)$ *avec* $1 < k < n-1$ *:*

$$\frac{\pi r(L, L')^2}{2} \leq c(\alpha; L, L') \leq c([L]; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

Corollaires de la propriété principale

Corollaire

- $\alpha \in H_k(L)$, $\beta \in H_*(L)$, *avec* $1 < k < n-1$ *et* $\alpha \cdot \beta \neq 0$:

$$c(\alpha \cdot \beta; L, L') \leq c(\beta; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

- $0 \neq \alpha \in H_k(L)$ *avec* $1 < k < n-1$:

$$\frac{\pi r(L, L')^2}{2} \leq c(\alpha; L, L') \leq c([L]; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

Corollaire

L et L' lagrangiens (hamiltonien) isotopes, transverses :

$$0 < \pi r(L, L')^2 \leq c([L]; L, L') \leq \nabla(L, L').$$

Corollaires de la propriété principale

Corollaire

- $\alpha \in H_k(L)$, $\beta \in H_*(L)$, *avec* $1 < k < n-1$ *et* $\alpha \cdot \beta \neq 0$:

$$c(\alpha \cdot \beta; L, L') \leq c(\beta; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

- $0 \neq \alpha \in H_k(L)$ *avec* $1 < k < n-1$:

$$\frac{\pi r(L, L')^2}{2} \leq c(\alpha; L, L') \leq c([L]; L, L') - \frac{\pi r(L, L')^2}{2}.$$

Corollaire

L et L' lagrangiens (hamiltonien) isotopes, transverses :

$$0 < \pi r(L, L')^2 \leq c([L]; L, L') \leq \nabla(L, L').$$

La norme de Hofer $\nabla(-,-)$ est donc non dégénérée.

Corollaires de la propriété principale

Définition

Le cup-length de L : la longueur de la "plus grande chaîne" de classes d'homologie de L dont le produit d'intersection n'est pas nul

Corollaires de la propriété principale

Définition

Le cup-length de L : la longueur de la "plus grande chaîne" de classes d'homologie de L dont le produit d'intersection n'est pas nul, i.e. on définit $\mathrm{cl}(L)$

$$\max \left\{ k+1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, \alpha_i \in H_{d_i}(L),\ 1 \leq i \leq k \ \textit{tels que} \\ 0 < d_i < n \ \ \textit{et} \ \ \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Corollaires de la propriété principale

Définition

Le cup-length de L : la longueur de la "plus grande chaîne" de classes d'homologie de L dont le produit d'intersection n'est pas nul, i.e. on définit $\mathrm{cl}(L)$

$$\max\left\{ k+1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, \alpha_i \in H_{d_i}(L),\ 1 \le i \le k \ \textit{tels que} \\ 0 < d_i < n \quad \textit{et} \quad \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Corollaire

Soit $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}_2}(L)$ *le cup-length de L, il vient*

$$\nabla(L, L') \geq \mathrm{cl}(L) \cdot \frac{\pi r(L, L')^2}{2}$$

pour tout lagrangien L' *(hamiltonien) isotope, transverse à L.*

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers
2. Applications des invariants spectraux classiques

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers
2. Applications des invariants spectraux classiques
   - l'exemple du tore

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers
2. Applications des invariants spectraux classiques
   - l'exemple du tore
   - métrique "spectrale"

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers
2. Applications des invariants spectraux classiques
   - l'exemple du tore
   - métrique "spectrale"
   - complétion de l'ensemble des lagrangiens

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers
2. Applications des invariants spectraux classiques
   - l'exemple du tore
   - métrique "spectrale"
   - complétion de l'ensemble des lagrangiens
   - capacités lagrangiennes

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers
2. Applications des invariants spectraux classiques
   - l'exemple du tore
   - métrique "spectrale"
   - complétion de l'ensemble des lagrangiens
   - capacités lagrangiennes
3. Faire intervenir le "bubbling"

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers
2. Applications des invariants spectraux classiques
   - l'exemple du tore
   - métrique "spectrale"
   - complétion de l'ensemble des lagrangiens
   - capacités lagrangiennes
3. Faire intervenir le "bubbling"
   - Quasi-morphismes et études d'itérations

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers
2. Applications des invariants spectraux classiques
   - l'exemple du tore
   - métrique "spectrale"
   - complétion de l'ensemble des lagrangiens
   - capacités lagrangiennes
3. Faire intervenir le "bubbling"
   - Quasi-morphismes et études d'itérations
   - Le diagramme commutatif (?)

$$\begin{tikzcd} HM_*(L; f, g) \arrow[r, "\phi_f^H"] \arrow[d, "\phi_f^{H'}"'] & HF_*(L, L; H, J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\ HF_*(L, L; H', J') \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L, L_0; 0, \widetilde{J}) \end{tikzcd}$$

Directions de recherche

1. Calculer les invariants spectraux d'ordre supérieur (et la quantité géométrique) dans des cas particuliers
2. Applications des invariants spectraux classiques
   - l'exemple du tore
   - métrique "spectrale"
   - complétion de l'ensemble des lagrangiens
   - capacités lagrangiennes
3. Faire intervenir le "bubbling"
   - Quasi-morphismes et études d'itérations
   - Le diagramme commutatif (?)

$$\begin{tikzcd}
 & HF_*(L, L; H, J) \arrow[d, "b_H^{-1}"] \\
HF_*(L, L; H', J') \arrow[ur, "\psi^{H',H}"] \arrow[r, "b_{H'}^{-1}"'] & HF_*(L, L_0; 0, \widetilde{J})
\end{tikzcd}$$

Bibliographie

Inspiration principale et résultats

J.-F. Barraud, O. Cornea
Homotopical dynamics in Symplectic Topology
Morse theoretic methods in non-linear analysis and in symplectic topology, NATO Science Series, 217 (2005).

J.-F. Barraud, O. Cornea
Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence
Ann. of Math. (à paraître).

M. Schwarz
On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds
Pacific J. of Math., 193 (2000).

Bibliographie

Inspiration principale et résultats

J.-F. Barraud, O. Cornea
Homotopical dynamics in Symplectic Topology
Morse theoretic methods in non-linear analysis and in symplectic topology, NATO Science Series, 217 (2005).

J.-F. Barraud, O. Cornea
Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence
Ann. of Math. (à paraître).

M. Schwarz
On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds
Pacific J. of Math., 193 (2000).

R. Leclercq
Spectral invariants in Lagrangian Floer theory
arXiv : math.SG/0612235 (soumis).

Bibliographie

D. McDuff, D.A. Salamon
J–holomorphic curves and symplectic topology
Colloquium Publications, Amer. Math. Soc., 52, 2004.

P. Seidel
π_1 of symplectic automorphisms groups and invertible in quantum homology ring
Geom. Funct. Anal., 7 (1997).

Bibliographie

D. McDuff, D.A. Salamon
J–holomorphic curves and symplectic topology
Colloquium Publications, Amer. Math. Soc., 52, 2004.

P. Seidel
π_1 of symplectic automorphisms groups and invertible in quantum homology ring
Geom. Funct. Anal., 7 (1997).

Y.G. Oh
Floer cohomology for Lagrangian intersections discs and pseudo-holomorphic discs I,II
Comm. Pure Appl. Math, 46 (1993).

C. Viterbo
Symplectic topology as the geometry of generating functions
Math. Ann., 292 (1992).