

Théorie homotopique des S -schémas

Joël Riou

Mémoire de D.E.A. réalisé sous la direction de Bruno Kahn.

Dans ce mémoire⁽¹⁾, on se propose d'étudier la théorie homotopique des schémas dont les grandes lignes sont décrites dans l'article [Voe2]. On veut définir une théorie de l'homotopie à partir de la catégorie $\mathcal{S}m/S$ des S -schémas lisses, S étant un schéma de base noethérien. Pour mener à bien ce programme l'idée de base consiste à mimer les constructions de la topologie algébrique en remplaçant l'intervalle $[0, 1]$ par la droite affine \mathbb{A}^1 . Cependant, plusieurs questions se posent :

– *Quelle catégorie $\mathcal{S}pc_{|S}$ peut remplacer la catégorie des espaces topologiques (ou celle des ensembles simpliciaux) ?*

On ne peut raisonnablement pas remplacer directement la catégorie des espaces topologiques par la catégorie $\mathcal{S}m/S$. En effet, il est extrêmement utile que $\mathcal{S}pc_{|S}$ permette la construction de limites projectives, inductives, homomorphismes internes... Ainsi, on décide que $\mathcal{S}pc_{|S}$ soit une catégorie de faisceaux (simpliciaux) sur la catégorie $\mathcal{S}m/S$ pour une certaine topologie de Grothendieck.

– *Quelle topologie de Grothendieck utiliser ?*

La topologie de Zariski est trop grossière pour convenir. Par exemple, un des inconvénients de la topologie de Zariski pour nos applications est qu'une immersion fermée $X \xrightarrow{i} Y$ entre deux S -schémas lisses n'est pas localement isomorphe à une immersion fermée de la forme $(\mathbb{A}^n \times \{0\}) \cap U \longrightarrow \mathbb{A}^{n+m} \cap U$ avec U un ouvert de \mathbb{A}^{n+m} . Cependant, une telle description existe avec un U qui est seulement étale sur \mathbb{A}^{n+m} . En outre, comme on préférerait une topologie pour laquelle la dimension cohomologique soit majorée par la dimension de Krull, on ne va pas non plus utiliser la topologie étale, la dimension cohomologique du petit site étale du spectre premier d'un corps étant loin d'être nulle en général, puisqu'il est isomorphe à la cohomologie galoisienne. Ainsi, nous allons utiliser la topologie de Nisnevich dont nous rappellerons la définition et quelques propriétés (notamment la descente Nisnevich qui nous sera très utile).

– *Comment faire de la théorie de l'homotopie ?*

La cadre usuel pour faire de la théorie de l'homotopie est donné par l'algèbre homotopique de Quillen et la notion de catégorie de modèles fermée. Nous allons donc introduire plusieurs catégories de modèles fermées qui constitueront plusieurs aspects de la théorie. Dans une catégorie de modèles fermée, la notion la plus importante est celle d'équivalence faible. Se pose donc la question de savoir quand est-ce qu'un morphisme entre faisceaux (simpliciaux) sur $\mathcal{S}m/S_{Nis}$ est une équivalence faible, ce qui permettra de définir la catégorie homotopique instable de S . La réponse à cette question se fera en deux étapes. D'une part, notamment depuis les travaux d'Illusie, Brown et Gersten, Joyal, et Jardine, on dit qu'une équivalence faible simpliciale entre deux faisceaux simpliciaux est un morphisme qui induit des équivalences faibles au niveau des fibres (en supposant que le site considéré possède une famille conservative de foncteurs fibres). Néanmoins, comme on veut remplacer l'intervalle $[0, 1]$ par la droite affine \mathbb{A}^1 , il va falloir faire en sorte que $\mathbb{A}_S^1 \longrightarrow S$ soit une équivalence faible. Ainsi, nous allons utiliser la notion de \mathbb{A}^1 -équivalence faible que Morel et Voevodsky ont définie dans [MV].

Ensuite, de même qu'en topologie algébrique, il est commode de stabiliser la théorie, c'est-à-dire d'inverser formellement le \wedge -produit avec un certain espace pointé T . En topologie, c'est le \wedge -produit avec le cercle S_s^1 que l'on inverse, mais dans la théorie homotopique des schémas, plusieurs cercles existent : le cercle simplicial S_s^1 et le cercle de Tate $S_t^1 = \mathbb{G}_m$, c'est ainsi que nous inverserons ces deux cercles simultanément. On obtient ainsi la catégorie de Spanier-Whitehead et la catégorie homotopique stable $\mathcal{S}\mathcal{H}(S)$ (obtenue à partir de spectres), la seconde étant informellement ce que l'anneau $k((X))$ est à l'anneau $k[X, X^{-1}]$. Comme en topologie, ces catégories disposent d'une structure de catégorie triangulée et d'une structure monoïdale symétrique (des obstacles techniques sérieux apparaissant pour construire cette dernière).

Nous aurons alors obtenu un bon cadre pour définir des théories homologiques et cohomologiques. En effet, à tout spectre \mathbb{E} , on pourra faire correspondre le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}(S)}(-, \mathbb{E})$ (ou $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}(S)}(\mathbb{E}, -)$), ainsi que ses translatés par les suspensions avec le cercle simplicial et le cercle de Tate. En plus de vérifier tautologiquement l'invariance par homotopie, tous les foncteurs ainsi obtenus bénéficieront de suites exactes longues associées à différents types de triangles distingués que nous construirons : Mayer-Vietoris, Gysin, éclatements.

Enfin, nous montrerons comment, sous certaines hypothèses, différentes théories cohomologiques sont naturellement représentées par des objets de $\mathcal{S}\mathcal{H}(S)$: la cohomologie motivique, la K -théorie algébrique, la cohomologie singulière ordinaire et la cohomologie étale.

⁽¹⁾ Je remercie très vivement Bruno Kahn et Fabien Morel pour les discussions très intéressantes qu'ils m'ont offertes, ainsi que pour le soin dont ils ont fait preuve dans la relecture de ce mémoire. Je remercie aussi tous les participants du groupe de travail "Homotopie des schémas" dont les exposés m'ont beaucoup aidé pour comprendre cette théorie.

Table des matières

Chapitre 1. La topologie de Nisnevich	7
Définition de la topologie de Nisnevich	7
Préfaisceaux et faisceaux Nisnevich	8
Fonctorialité des petits sites Nisnevich	9
<i>Cas général d'un morphisme de schémas $X \xrightarrow{f} Y$</i>	9
<i>Cas où f est étale</i>	9
<i>Cas du morphisme canonique $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$ où $x \in X$.</i>	10
Foncteurs fibres sur le topos Nisnevich	11
<i>Petit site Nisnevich de $\text{Spec } k$ où k est un corps</i>	11
<i>Points du petit site Nisnevich de X</i>	12
<i>Points du grand site Nisnevich</i>	14
Une caractérisation des faisceaux Nisnevich	14
Cohomologie pour la topologie de Nisnevich	16
Chapitre 2. Quelques notions d'algèbre homotopique	19
Catégories de modèles fermées	19
Algèbre homotopique	21
Raisonnement du petit objet	23
Ensembles simpliciaux	26
Foncteurs dérivés	28
Limites et colimites homotopiques	30
<i>Cas général</i>	30
<i>Carrés homotopiquement cartésiens</i>	31
<i>Catégories de modèles fermées propres</i>	32
Correspondance de Dold-Kan et cohomologie singulière	32
<i>Correspondance de Dold-Kan</i>	32
<i>Cohomologie singulière</i>	33
Chapitre 3. Faisceaux simpliciaux	35
La structure simpliciale sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$	35
<i>Équivalences faibles simpliciales</i>	35
<i>La structure de catégorie de modèles fermée</i>	36
<i>Le théorème de Brown et Gersten et la descente Nisnevich</i>	39
<i>Adjonctions</i>	41
La structure \mathbb{A}^1 -localisée sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$	41
<i>Définition de la structure</i>	41
<i>Carrés homotopiquement cocartésiens et colimites homotopiques</i>	43
<i>\mathbb{A}^1-localisation</i>	44
<i>La catégorie homotopique des S-schémas</i>	47
La structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$	48
<i>La construction de Morel et Voevodsky dans [MV]</i>	48
<i>Comparaison avec la définition de Voevodsky dans [Voe2]</i>	50
Variantes pointées	52
<i>Catégories pointées et structures de catégories de modèles fermées</i>	52
<i>\wedge-produit</i>	52
Lien avec la cohomologie des faisceaux de groupes abéliens	54
Chapitre 4. Les théorèmes fondamentaux de la théorie	57
Sphères	57
<i>Fibrés vectoriels et Espaces de Thom</i>	57
<i>Sphères $S^{2n,n}$</i>	58

Objets simpliciaux de Čech	58
Pureté homotopique et éclatements	59
Chapitre 5. La stabilisation à la Spanier-Whitehead	61
La stabilisation	61
<i>La catégorie $\mathcal{C} T^{-1}$</i>	61
<i>La catégorie de Spanier-Whitehead</i>	62
<i>La structure de catégorie triangulée sur $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$</i>	63
Une sous-catégorie triangulée intéressante de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$	66
<i>Espaces de type fini</i>	66
<i>La catégorie triangulée $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$</i>	67
Chapitre 6. Les spectres	71
Quelques propriétés des spectres, niveau par niveau	71
<i>Définitions</i>	71
<i>Deux structures de catégories de modèles fermées sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$</i>	72
Stabilisation des T -spectres	73
<i>Objets σ-flasques</i>	73
<i>Boucles étranges</i>	74
<i>Une structure stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$</i>	76
<i>Les structures triangulée et monoïdale symétrique sur $\mathcal{S}\mathcal{H}(S)$</i>	79
Dimension cohomologique	80
<i>S_s^1-spectres</i>	80
<i>La suite spectrale de Bousfield-Kan-Brown-Gersten-Thomason-Nisnevich</i>	81
<i>\mathbb{A}^1-localisation des S_s^1-spectres</i>	82
<i>Le théorème de connectivité</i>	82
Théories homologiques et cohomologiques	83
<i>Construction de théories</i>	83
<i>Triangles distingués dans $\mathcal{S}\mathcal{H}(S)$</i>	84
Chapitre 7. La K-théorie algébrique	85
Construction et propriétés de la K-théorie algébrique	85
<i>Définition</i>	85
<i>Rigidification de la construction</i>	85
<i>Localisation</i>	87
<i>Le théorème de périodicité</i>	88
Grassmanniennes et classifiants du groupe général linéaire	89
<i>Grassmanniennes</i>	89
<i>Classifiants des \mathbf{GL}_d pour $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$</i>	90
Chapitre 8. Motifs	93
Préfaisceaux et faisceaux Nisnevich avec transferts	93
<i>Rudiments de théorie des intersections et catégorie $\mathcal{S}m\mathcal{C}or(k)$</i>	93
<i>Préfaisceaux avec transferts</i>	94
La catégorie triangulée des motifs effectifs $DM_-^{eff}(k)$	96
<i>Définitions</i>	96
<i>Un lien entre $DM_-^{eff}(k)$ et $\mathbf{H}_\bullet(k)$</i>	97
Spectres d'Eilenberg-MacLane et cohomologie motivique	97
<i>Prolongement du foncteur L</i>	97
<i>Comportement homotopique du foncteur $\tilde{L} : \mathcal{F}ais \mathcal{S}m/k_{Nis} \bullet \rightarrow \mathcal{F}ais_{Nis}(\mathcal{S}m\mathcal{C}or(k))$</i>	98
<i>Le théorème de Dold-Thom et les spectres d'Eilenberg-MacLane</i>	99
<i>Comparaison avec la topologie</i>	100
<i>Cohomologie motivique</i>	100
<i>Tableau récapitulatif</i>	103
Cohomologie étale	103
<i>Cadre général</i>	104
<i>Quelques faisceaux de coefficients particuliers</i>	105
<i>Points géométriques</i>	106
Annexe A. Quelques propriétés des morphismes étales	107
Bibliographie	109

La topologie de Nisnevich

Nous allons définir une topologie de Grothendieck : la topologie de Nisnevich qui fut notamment étudiée dans [Nis]. Cette topologie est plus fine que la topologie de Zariski mais moins fine que la topologie étale. Elle bénéficie de propriétés très particulières que nous utiliserons pour démontrer certaines propriétés de la théorie homotopique des schémas.

Définition de la topologie de Nisnevich

Les catégories de schémas utilisées dans la suite seront essentiellement petites (*i.e.* équivalentes à des petites catégories), ainsi on pourra utiliser sans danger la notion de topologie de Grothendieck définie dans [SGA 4 II].

Définition 1.1. Soit S un schéma noethérien. On note $\mathcal{S}ch/S$ la catégorie des S -schémas séparés de type fini et $\mathcal{S}m/S$ la catégorie des S -schémas séparés, de type fini et lisses.

Définition 1.2. Soit X un schéma noethérien, on note X_{Nis} la catégorie des X -schémas étales, séparés et de type fini. On note $\mathcal{C}ov_{Nis}(X)$ la classe des familles de morphismes dans X_{Nis} de la forme $\mathcal{U} = (U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ telles que pour tout $i \in I$, f_i soit étale et de type fini, et que pour tout point $x \in X$, il existe un indice $i \in I$ et un point u dans U_i tel que $x = f_i(u)$ et que le morphisme induit sur les corps résiduels $\kappa(x) \rightarrow \kappa(u)$ soit un isomorphisme.

Proposition 1.3. Pour tout schéma noethérien S , la donnée des $(\mathcal{C}ov_{Nis}(X))_{X \in \mathcal{S}m/S}$ constitue une prétopologie [SGA 4 II 1.3] sur $\mathcal{S}m/S$. La topologie engendrée par cette prétopologie est appelée la topologie de Nisnevich sur $\mathcal{S}m/S$, le site obtenu étant noté $\mathcal{S}m/S_{Nis}$ et appelé grand site Nisnevich de S .

De plus, si X est un schéma noethérien, $(\mathcal{C}ov_{Nis}(Y))_{Y \in X_{Nis}}$ constitue une prétopologie sur X_{Nis} . Le site correspondant est noté X_{Nis} , et on l'appelle petit site Nisnevich de X .

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — La vérification des axiomes des prétopologies est immédiate. \triangleleft

Théorème 1.4. Pour tout schéma noethérien X , toute famille appartenant à $\mathcal{C}ov_{Nis}(X)$ admet une sous-famille finie appartenant à $\mathcal{C}ov_{Nis}(X)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Nous allons utiliser un lemme d'existence de sections "génériques" pour les recouvrements Nisnevich :

Définition 1.5. On appelle suite de scindages de longueur $n \geq 0$ pour un morphisme de S -schémas $p : \mathcal{W} \rightarrow X$ une suite décroissante de sous-schémas fermés de X ($\emptyset = Z_{n+1} \subset Z_n \subset \dots \subset Z_0 = X$) telle que, pour tout $0 \leq i \leq n$, le morphisme de S -schémas $\mathcal{W} \times_X (Z_i - Z_{i+1}) \rightarrow Z_i - Z_{i+1}$ déduit de p par changement de base admette une S -section, $Z_i - Z_{i+1}$ étant défini comme sous-schéma ouvert de Z_i .

Notation 1.6. Si X est un schéma, et F un fermé de X , on notera F_{red} le sous-schéma fermé de X obtenu en y mettant la structure réduite. Si X est un S -schéma, F_{red} est de plus un S -schéma.

Lemme 1.7. Soit X un schéma noethérien et $\mathcal{U} = (U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I} \in \mathcal{C}ov_{Nis}(X)$. Notons $\mathcal{W} = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ la somme disjointe des schémas $(U_i)_{i \in I}$, et p le morphisme canonique $\mathcal{W} \rightarrow X$ induit par les morphismes f_i .

Alors p possède une suite de scindage.

DÉMONSTRATION DU LEMME — On construit une suite $(Z_i)_{i \geq 0}$ par étapes. On pose $Z_0 = X$. Si Z_i est non vide, on peut appliquer le lemme A.9 au morphisme étale $\mathcal{W} \times_X Z_i \rightarrow Z_i$ déduit de p par le changement de base $Z_i \rightarrow X$. Il existe donc un ouvert dense U_{i+1} dans Z_i sur lequel le morphisme $\mathcal{W} \times_X Z_i \rightarrow Z_i$ se scinde. On peut alors poser $Z_{i+1} = (Z_i - U_{i+1})_{red}$, et continuer.

Comme X est un schéma noethérien, la suite strictement décroissante de sous-schémas fermés $(Z_i)_{i \geq 0}$ est finie, et fournit par conséquent une suite de scindages pour p . \triangleleft

On garde les notations du lemme 1.7. Soit $(\phi = Z_{n+1} \subset Z_n \subset \cdots \subset Z_0 = X)$ une suite de scindages pour le morphisme $\mathcal{W} \xrightarrow{p} X$. Pour tout $0 \leq i \leq n$, soit s_i une section du morphisme de S -schémas $\mathcal{W} \times_X (Z_i - Z_{i+1}) \rightarrow Z_i - Z_{i+1}$ induit par p . Comme les espaces topologiques $Z_i - Z_{i+1}$ sont noethériens et qu'il n'y en a qu'un nombre fini, leurs images par les sections s_i sont contenues dans un ouvert de \mathcal{W} de la forme $\bigsqcup_{j \in J} U_j$ avec $J \subset I$ fini, et par conséquent la sous-famille finie $\left(U_j \xrightarrow{f_j} X \right)_{j \in J}$ appartient à $\mathcal{C}ov_{Nis}(X)$. \triangleleft

Remarque 1.8. *On rappelle que si X est un objet d'une catégorie (essentiellement petite) \mathcal{C} , un crible de X est une sous-catégorie pleine R de \mathcal{C}/X telle que pour tout morphisme $Z \rightarrow Y$ dans \mathcal{C}/X , si $Y \rightarrow X \in R$ alors $Z \rightarrow X \in R$.*

Si $\mathcal{U} = \left(X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X \right)_{\alpha \in A}$ est une famille de morphismes dans \mathcal{C} , on peut définir le crible de X associé à la famille \mathcal{U} comme étant la sous-catégorie pleine de \mathcal{C}/X constituée des objets $Y \xrightarrow{f} X$ tels qu'il existe un indice $\alpha \in A$ et une factorisation $Y \xrightarrow{\quad} X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X$

La topologie de Nisnevich provenant d'une prétopologie, les cribles couvrants de $Y \in Sm/S$ (ou $Y \in X_{Nis}$) intervenant dans la définition de cette topologie de Grothendieck [SGA 4 II 1.1] sont, d'après [SGA 4 II 1.4], les cribles contenant un crible associé à une famille de $\mathcal{C}ov_{Nis}(Y)$. Ainsi, les cribles couvrants de X associés à des familles de la prétopologie de Nisnevich forment un ensemble cofinal dans l'ensemble des cribles couvrants de Y ordonnés dans le sens inverse de l'inclusion.

Préfaisceaux et faisceaux Nisnevich

On rappelle ici quelques définitions concernant les catégories de préfaisceaux et de faisceaux, les démonstrations des résultats principaux figurant dans [SGA 4 II].

Notation 1.9. *Si $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ est un site⁽²⁾, on notera $PreFais(\mathcal{S})$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur \mathcal{C} , c'est-à-dire la catégorie des foncteurs contravariants $\mathcal{C} \rightarrow Ens$, et $Fais(\mathcal{S})$ la sous-catégorie pleine de $PreFais(\mathcal{S})$ formée des faisceaux pour la topologie \mathcal{T} .*

On note que les limites inductives et projectives de préfaisceaux existent, et se calculent "argument par argument".

Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur \mathcal{S} , U un objet de \mathcal{C} , et R un crible de U dans \mathcal{C} . On pose $\mathcal{F}(U)_R = \varprojlim_{\bar{V} \rightarrow U \in R} \mathcal{F}(V)$. On rappelle qu'un préfaisceau \mathcal{F} sur \mathcal{S} est un faisceau si et seulement si pour tout objet U de \mathcal{C} et tout crible couvrant R de U pour la topologie \mathcal{T} , l'application canonique $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)_R$ est bijective.

Définition 1.10. *Pour tout préfaisceau \mathcal{F} sur \mathcal{S} , on définit un préfaisceau $L\mathcal{F}$ par la formule suivante (où les cribles couvrants de U pour la topologie \mathcal{T} sont ordonnés dans l'ordre inverse de l'inclusion et forment un système inductif filtrant) :*

$$L\mathcal{F}(U) = \varprojlim_{R \text{ crible couvrant de } U} \mathcal{F}(U)_R$$

L est un foncteur $PreFais(\mathcal{S}) \rightarrow PreFais(\mathcal{S})$ et on a un morphisme fonctoriel $\mathcal{F} \rightarrow L\mathcal{F}$.

Théorème 1.11. *Le foncteur d'inclusion i de $Fais(\mathcal{S})$ dans $PreFais(\mathcal{S})$ admet un adjoint à gauche $a_{\mathcal{T}} : PreFais(\mathcal{S}) \rightarrow Fais(\mathcal{S})$ tel que $i \circ a_{\mathcal{T}} \cong L \circ i$. En particulier, les limites inductives existent dans $Fais(\mathcal{S})$ et le foncteur $a_{\mathcal{T}}$ y commute. En outre, les limites projectives existent dans $Fais(\mathcal{S})$ et le foncteur i y commute. Enfin, $a_{\mathcal{T}}$ commute aux limites projectives finies.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [SGA 4 II 3.4] \triangleleft

Remarque 1.12. *D'après [SGA 4 II 2.4], on dispose d'une caractérisation des faisceaux pour les topologies provenant de prétopologies. Par conséquent, dans le cas où $\mathcal{S} = Sm/S_{Nis}$ (resp. X_{Nis}), pour qu'un*

⁽²⁾Un site désigne une catégorie \mathcal{C} munie d'une topologie de Grothendieck \mathcal{T} . Pour que ces définitions aient un sens, on doit supposer que \mathcal{C} est une petite catégorie. Néanmoins, on peut s'autoriser à considérer des situations où \mathcal{C} est seulement essentiellement petite.

préfaisceau $\mathcal{F} \in \text{PreFais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ (resp. $\text{PreFais}(X_{Nis})$) soit un faisceau, il faut et il suffit que pour tout objet $Y \in \mathcal{S}m/S_{Nis}$ (resp. X_{Nis}) et toute famille $\mathcal{U} = \left(Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} Y \right)_{\alpha \in A} \in \text{Cov}_{Nis}(Y)$, l'application évidente $\mathcal{F}(Y) \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} \mathcal{F}(Y_\alpha)$ soit l'égalisateur des fonctions $r_1, r_2 : \prod_{\alpha \in A} \mathcal{F}(Y_\alpha) \longrightarrow \prod_{(\alpha, \beta) \in A^2} \mathcal{F}(Y_\alpha \times_Y Y_\beta)$ induites par les premières et secondes projections.

Le théorème 1.4 admet le corollaire suivant :

Corollaire 1.13. *Dans le cas où \mathcal{S} désigne le petit site Nisnevich de X ou le grand site Nisnevich de S , le foncteur d'inclusion de $\text{Fais}(\mathcal{S})$ dans $\text{PreFais}(\mathcal{S})$ commute aux limites inductives filtrantes.*

Définition 1.14. *Soit $X \in \mathcal{C}$, on note $X(-)$ l'objet de $\text{PreFais}(\mathcal{S})$ tel que $X(Y)$ soit l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. On appelle représentable tout préfaisceau isomorphe à un objet de la forme $X(-)$ pour $X \in \mathcal{C}$.*

Lemme 1.15. *Dans la catégorie $\text{PreFais}(\mathcal{S})$ (resp. $\text{Fais}(\mathcal{S})$), une flèche $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ est un monomorphisme si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{C}$, l'application canonique $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ est injective.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Si f est un monomorphisme dans $\text{Fais}(\mathcal{S})$, grâce à l'adjonction $(a_{\mathcal{F}}, i)$, f est aussi un monomorphisme dans $\text{PreFais}(\mathcal{S})$. Mais alors, d'après le lemme de Yoneda, l'application $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{f_X} \mathcal{G}(X)$ est injective. La réciproque résulte aussitôt des définitions. \triangleleft

Théorème 1.16. *Sur les sites $\mathcal{S}m/S_{Nis}$ et X_{Nis} , les préfaisceaux représentables sont des faisceaux⁽³⁾.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [SGA 3 IV 6.3.1] \triangleleft

Ainsi, on pourra dorénavant considérer la catégorie $\mathcal{S}m/S$ (resp. X_{Nis}) comme une sous-catégorie pleine de $\text{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ (resp. $\text{Fais}(X_{Nis})$).

Fonctorialité des petits sites Nisnevich

Cas général d'un morphisme de schémas $X \xrightarrow{f} Y$

Soient X et Y deux schémas noethériens, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. On dispose d'un foncteur $- \times_Y X : Y_{Nis} \longrightarrow X_{Nis}$. La formule $f_{\sharp} \mathcal{F}(Z) = \mathcal{F}(Z \times_Y X)$ pour tous $\mathcal{F} \in \text{PreFais}(X_{Nis})$ et $Z \in Y_{Nis}$ définit un foncteur image directe $f_{\sharp} : \text{PreFais}(X_{Nis}) \longrightarrow \text{PreFais}(Y_{Nis})$. On montre facilement que $- \times_Y X$ est un foncteur continu $Y_{Nis} \longrightarrow X_{Nis}$, c'est-à-dire que pour tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}(X_{Nis})$, $f_{\sharp} \mathcal{F} \in \text{Fais}(Y_{Nis})$. Le foncteur f_{\sharp} induit donc un foncteur $f_{\star} : \text{Fais}(X_{Nis}) \longrightarrow \text{Fais}(Y_{Nis})$. Grâce à [SGA 4 III 1.2.iv, 1.3], on sait que les foncteurs f_{\sharp} et f_{\star} admettent des adjoints à gauche $f^{\sharp} : \text{PreFais}(Y_{Nis}) \longrightarrow \text{PreFais}(X_{Nis})$ et $f^{\star} : \text{Fais}(Y_{Nis}) \longrightarrow \text{Fais}(X_{Nis})$, et que l'on a un isomorphisme canonique $a \circ f^{\sharp} \simeq f^{\star} \circ a$.

Proposition 1.17. *Le foncteur $- \times_Y X : Y_{Nis} \longrightarrow X_{Nis}$ induit un morphisme de sites $X_{Nis} \longrightarrow Y_{Nis}$. Ainsi, le couple de foncteurs adjoints (f^{\star}, f_{\star}) est un morphisme de topos $\text{Fais}(X_{Nis}) \longrightarrow \text{Fais}(Y_{Nis})$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Le seul point qui reste à vérifier est que f^{\star} commute aux limites projectives finies, ce qui résulte, d'après [SGA 4 IV 4.9.2] du fait que Y_{Nis} possède des limites projectives finies (Y_{Nis} admet un objet final et possède des produits fibrés) et que $- \times_Y X$ est un foncteur continu qui commute aux limites projectives finies (puisque $- \times_Y X$ admet pour adjoint à gauche le foncteur d'oubli $X_{Nis} \longrightarrow Y_{Nis}$ induit par f). \triangleleft

Cas où f est étale

Dans certaines démonstrations⁽⁴⁾, on aura besoin d'une description plus explicite du foncteur image réciproque sur les préfaisceaux $f^{\sharp} : \text{PreFais}(Y_{Nis}) \longrightarrow \text{PreFais}(X_{Nis})$.

Dans un premier temps, supposons que $X \xrightarrow{f} Y$ appartienne à Y_{Nis} . On obtient alors, en composant avec f , un foncteur $X_{Nis} \longrightarrow Y_{Nis}$. En "composant" avec ce foncteur, on obtient un foncteur défini sur les préfaisceaux $f_{\sharp}^{\sharp} : \text{PreFais}(Y_{Nis}) \longrightarrow \text{PreFais}(X_{Nis})$

⁽³⁾Plus généralement, tout préfaisceau de la forme $\mathbf{Hom}_X(-, Z)$ (resp. $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(-, Z)$) où Z est un X -schéma (resp. un \mathcal{S} -schéma) quelconque est un faisceau sur X_{Nis} (resp. $\mathcal{S}m/S_{Nis}$).

⁽⁴⁾On utilisera la description des foncteurs image réciproque dans le cas du morphisme canonique $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow X$ ($x \in X$) pour pouvoir se ramener, parfois, au cas où le schéma X considéré est le spectre premier d'un anneau local. Le cas où f est étale est une première étape pour comprendre ce cas.

Lemme 1.18. *Il existe un morphisme canonique de foncteurs $f_{\mathcal{I}}^{\sharp} \longrightarrow f^{\sharp}$, et c'est un isomorphisme.*

En outre, si $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(Y_{Nis})$, alors $f^{\sharp}\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(X_{Nis})$. Ainsi, la restriction de f^{\sharp} à $\mathcal{Fais}(Y_{Nis})$ induit le foncteur image réciproque $f^ : \mathcal{Fais}(Y_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{Fais}(X_{Nis})$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — pour tous $\mathcal{F} \in \mathit{PreFais}(Y_{Nis})$ et $\mathcal{G} \in \mathit{PreFais}(X_{Nis})$, on définit un morphisme bifonctoriel $\alpha : \mathbf{Hom}(\mathcal{F}, f_{\mathcal{I}}^{\sharp}\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(f_{\mathcal{I}}^{\sharp}\mathcal{F}, \mathcal{G})$. À tout $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow f_{\mathcal{I}}^{\sharp}\mathcal{G}$, on fait correspondre le morphisme $\alpha(\psi) : f_{\mathcal{I}}^{\sharp}\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ tel que pour tout $W \in X_{Nis}$, $\alpha(\psi)_W$ soit égal au composé de $\psi_W : f_{\mathcal{I}}^{\sharp}\mathcal{F}(W) = \mathcal{F}(W) \longrightarrow f_{\mathcal{I}}^{\sharp}\mathcal{G}(W) = \mathcal{G}(W \times_Y X)$ et du morphisme $\mathcal{G}(W \times_Y X) \longrightarrow \mathcal{G}(W)$ induit par le X -morphisme évident $W \longrightarrow W \times_Y X$.

On obtient ainsi un morphisme bifonctoriel $\mathbf{Hom}(f^{\sharp}\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(f_{\mathcal{I}}^{\sharp}\mathcal{F}, \mathcal{G})$, et par le lemme de Yoneda, on obtient un morphisme fonctoriel $f_{\mathcal{I}}^{\sharp} \longrightarrow f^{\sharp}$.

On vérifie aisément que le morphisme $f_{\mathcal{I}}^{\sharp}(Z) \longrightarrow f^{\sharp}(Z)$ est un isomorphisme si $Z \in Y_{Nis}$. De plus, les deux foncteurs commutent aux limites inductives et tout préfaisceau est limite inductive de préfaisceaux représentables. Le morphisme $f_{\mathcal{I}}^{\sharp} \longrightarrow f^{\sharp}$ est donc un isomorphisme de foncteurs.

L'assertion concernant f^* résulte immédiatement du fait que la topologie des petits sites Nisnevich provient d'une prétopologie, que les familles couvrantes de la prétopologie de X_{Nis} restent des familles couvrantes de la prétopologie de Y_{Nis} après application du foncteur $(Z \longrightarrow X) \longmapsto (Z \longrightarrow Y)$, et que ce même foncteur commute aux produits fibrés. \triangleleft

Cas du morphisme canonique $\mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow X$ où $x \in X$.

Soit X un schéma noethérien et $x \in X$. On note $j_x : \mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow X$ le morphisme canonique de schémas. On se propose de décrire le foncteur $j_x^{\sharp} : \mathit{PreFais}(X_{Nis}) \longrightarrow \mathit{PreFais}((\mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x})_{Nis})$.

Notons L l'ensemble des sous-schémas ouverts affines de X contenant x , ordonnés dans le sens inverse de l'inclusion. On obtient ainsi un système projectif $(X_{\lambda})_{\lambda \in L}$ de schémas à morphismes de transition affines indexés par un ensemble ordonné L filtrant croissant. Il est évident par ailleurs que $\mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ s'identifie canoniquement à $\varprojlim_{\lambda \in L} X_{\lambda}$. On suppose maintenant le lecteur familier avec les limites projectives de schémas [EGA IV 8]. En particulier, on retiendra le contenu du Scholie [EGA IV 8.8.3] qui affirme que "se donner un schéma de présentation finie sur $\varprojlim_{\lambda \in L} X_{\lambda}$ équivaut à se donner un schéma de présentation finie sur X_{λ} , pour λ suffisamment grand". On retiendra que si f_{μ} est un morphisme de X_{μ} -schémas de présentation finie $Y_{\mu} \longrightarrow Z_{\mu}$, et que si l'on note $Y_{\lambda} = Y_{\mu} \times_{X_{\mu}} X_{\lambda}$ pour $\lambda \geq \mu$, $Y_x = Y_{\mu} \times_{X_{\mu}} \mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ (et de même pour Z_{μ}), alors le morphisme $Y_x \longrightarrow Z_x$ vérifie la propriété (II) si et seulement si pour tout λ assez grand $Y_{\lambda} \longrightarrow Z_{\lambda}$ vérifie la propriété (II), si (II) consiste, au choix, à être : un isomorphisme ; un monomorphisme ; une immersion ouverte ; une immersion fermée ; une immersion ; étale ; fini ; séparé ; affine ; quasi-affine ; propre ; surjectif ; radiciel ; projectif ; quasi-projectif.

La démonstration apparaît dans [EGA IV 8.10.5] pour toutes les propriétés considérées, à l'exception de la propriété pour un morphisme d'être étale, mais on obtient quand même aisément le résultat en utilisant le théorème de Chevalley [EGA IV 18.4.6 (ii)] donnant une description locale des morphismes étales.

D'après ce qui précède, pour tout $Z \in (\mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x})_{Nis}$, on peut choisir un $\lambda \in L$, un $Z_{\lambda} \in (X_{\lambda})_{Nis}$ et un isomorphisme $Z \simeq Z_{\lambda} \times_{X_{\lambda}} \mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$. On retiendra que λ dépend de Z malgré l'omission de cette dépendance dans la notation afin de l'alléger.

Pour tout $\mathcal{F} \in \mathit{PreFais}(X_{Nis})$ et $Z \in (\mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x})_{Nis}$, on pose $j_{x,\mathcal{I}}^{\sharp}\mathcal{F}(Z) = \varprojlim_{\mu \geq \lambda} \mathcal{F}(Z_{\lambda} \times_{X_{\lambda}} X_{\mu})$.

En utilisant les résultats précédents, on peut construire une structure naturelle de préfaisceau sur $j_{x,\mathcal{I}}^{\sharp}\mathcal{F}$. À cette occasion, on constate que la construction est indépendante des choix effectués (à isomorphismes canoniques près). On en déduit un foncteur $j_{x,\mathcal{I}}^{\sharp} : \mathit{PreFais}(X_{Nis}) \longrightarrow \mathit{PreFais}((\mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x})_{Nis})$.

Lemme 1.19. *Il existe un morphisme canonique de foncteurs $j_{x,\mathcal{I}}^{\sharp} \longrightarrow j_x^{\sharp}$, et c'est un isomorphisme.*

En outre, si $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(X_{Nis})$, alors $j_x^{\sharp}\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}((\mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x})_{Nis})$. Ainsi, la restriction de j_x^{\sharp} à $\mathcal{Fais}(X_{Nis})$ induit le foncteur image réciproque $j_x^ : \mathcal{Fais}(X_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{Fais}((\mathit{Spec} \mathcal{O}_{X,x})_{Nis})$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — La démonstration repose sur le même principe que celui de la démonstration du lemme 1.18. Néanmoins, on utilise de plus un passage à la limite, ce qui est possible grâce aux résultats rappelés précédemment. L'assertion concernant les faisceaux nécessite de pouvoir ramener "à distance finie" (i.e. dans $X_{\lambda Nis}$ pour λ assez grand) une famille couvrante finie pour la topologie de

Nisnevich d'un objet de $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x_{\text{Nis}}}$, ce qui peut se faire en utilisant les résultats rappelés précédemment ainsi que, par exemple, le lemme 1.7; on pourrait aussi utiliser le raisonnement qui interviendra dans la démonstration du théorème 1.37. \triangleleft

Foncteurs fibres sur le topos Nisnevich

On rappelle que si \mathcal{E} est un topos, un point de \mathcal{E} est un morphisme de topos du topos ponctuel $\bullet = \mathcal{E}ns$ vers \mathcal{E} , et que se donner un tel morphisme de topos revient essentiellement à la donnée d'un foncteur fibre $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}ns$ (ce foncteur fibre étant le foncteur image réciproque pour le morphisme de topos $\bullet \rightarrow \mathcal{E}$ correspondant), c'est-à-dire un foncteur commutant aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies. Si \mathcal{S} est un site, un point de \mathcal{S} n'est autre qu'un point du topos $\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$.

Remarque 1.20. *Les propriétés d'exactitude exigées pour les foncteurs fibres (et plus généralement pour les foncteurs images réciproques de topos) impliquent qu'ils préservent les structures de groupe, groupe abélien, anneau, ... existant dans les catégories de faisceaux (resp. préfaisceaux).*

Dans la suite, nous utiliserons le résultat fondamental suivant sur les foncteurs fibres :

Théorème 1.21. *Si $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ un site et Φ un foncteur fibre $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{E}ns$, alors il existe un pro-objet $X = \varinjlim_{i \in \mathcal{J}} X_i$ de \mathcal{C} tel que Φ soit isomorphe au foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X) := \varinjlim_{i \in \mathcal{J}^{\text{op}}} \mathcal{F}(X_i)$. Plus précisément, on a un isomorphisme de foncteurs $\text{PreFais}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{E}ns$ du foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X) := \varinjlim_{i \in \mathcal{J}^{\text{op}}} \mathcal{F}(X_i)$ vers le foncteur $\Phi \circ a$.*

En outre, le pro-objet X est donné par la catégorie filtrante à gauche Vois_{Φ} dont les objets sont les objets $Z \in \mathcal{C}$ munis d'un élément $z \in \Phi(Z)$, les morphismes de (Z, z) vers (Z', z') étant les morphismes de $Z \xrightarrow{f} Z'$ dans \mathcal{C} tels que $z' = \Phi(f)(z)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [SGA 4 IV 6.8.4] \triangleleft

Dans la suite, on prolongera implicitement tout foncteur fibre $\Phi : \mathcal{Fais}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{E}ns$ à la catégorie des préfaisceaux $\text{PreFais}(\mathcal{S})$ par le foncteur $\Phi \circ a$. Il en résulte immédiatement que pour tout préfaisceau $\mathcal{F} \in \text{PreFais}(\mathcal{S})$, le morphisme canonique $\Phi(\mathcal{F}) \rightarrow \Phi(a\mathcal{F})$ est un isomorphisme.

Si Φ est un foncteur fibre sur un site \mathcal{S} dont la catégorie sous-jacente possède un objet final t , alors on dispose d'une application canonique, pour tout faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, $\mathcal{F}(t) \rightarrow \Phi(\mathcal{F})$. On l'obtient en remarquant que les sections globales de \mathcal{F} (i.e. $\mathcal{F}(t)$) correspondent aux morphismes $t(-) \rightarrow \mathcal{F}$, et qu'en appliquant le foncteur Φ , on obtient des applications d'un ensemble réduit à un point à valeurs dans $\Phi(\mathcal{F})$.

Petit site Nisnevich de $\text{Spec } k$ où k est un corps

Soit k un corps. Le lemme suivant permet de dire que sur la catégorie des k -schémas étales et de type fini, la topologie de Nisnevich coïncide avec la topologie de Zariski, mais pas, bien entendu, avec la topologie étale.

Lemme 1.22. *Soit $\mathcal{F} \in \text{PreFais}(\text{Spec } k_{\text{Nis}})$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(\text{Spec } k_{\text{Nis}})$;
- (2) $\mathcal{F}(\emptyset)$ est un singleton et l'application évidente $\mathcal{F}(X \sqcup Y) \rightarrow \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y)$ est bijective pour tous objets X et Y dans $\text{Spec } k_{\text{Nis}}$;
- (3) Pour tout $X \in \text{Spec } k_{\text{Nis}}$, le morphisme canonique $\mathcal{F}(X) \rightarrow \prod_{Y \in \pi_0(X)} \mathcal{F}(Y)$ est bijectif, où $\pi_0(X)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de X .

De plus, pour tout $X \in \text{Spec } k_{\text{Nis}}$ connexe, $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\cong} a\mathcal{F}(X)$ pour tout $\mathcal{F} \in \text{PreFais}(\text{Spec } k_{\text{Nis}})$

DÉMONSTRATION DU LEMME — Les conditions (2) et (3) sont clairement équivalentes, et (1) implique évidemment (2). Pour démontrer que (3) implique (1), il est suffisant, d'après la définition et les propriétés du foncteur L (cf. théorème 1.11), de montrer que pour tout $X \in \text{Spec } k_{\text{Nis}}$, tout crible couvrant de X pour la topologie de $\text{Spec } k_{\text{Nis}}$ contient le crible couvrant associé à l'inclusion des composantes connexes de X dans X , ce qui résulte immédiatement de la décomposition d'une k -algèbre étale en produit d'extensions finies séparables de k et de la définition de la topologie de Nisnevich.

La dernière assertion résulte du fait que si $X \in \text{Spec } k_{\text{Nis}}$ est connexe, X ne possède qu'un crible couvrant pour la topologie de Nisnevich : celui contenant \mathbf{Id}_X . \triangleleft

Proposition 1.23. *Le foncteur $\Gamma : \mathcal{Fais}(\mathrm{Spec} k_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{E}ns$ qui à \mathcal{F} associe $\mathcal{F}(\mathrm{Spec} k)$ est un foncteur fibre.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Il résulte du lemme précédent que ce foncteur commute aux limites inductives et aux limites projectives (en particulier aux limites projectives finies) dans la catégorie $\mathcal{Fais}(\mathrm{Spec} k_{Nis})$. \triangleleft

Points du petit site Nisnevich de X

Soit X un schéma noethérien.

Définition 1.24. *Soit y un point du schéma X à valeurs dans un corps k quelconque, c'est-à-dire un morphisme de schémas $\mathrm{Spec} k \xrightarrow{y} X$. On définit un foncteur $-_y : \mathcal{Fais}(X_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{E}ns$ en associant à tout $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(X_{Nis})$ l'ensemble $\Gamma(y^*\mathcal{F})$ où (y^*, y_*) est le morphisme de topos $\mathcal{Fais}(\mathrm{Spec} k_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{Fais}(X_{Nis})$ de la proposition 1.17.*

Lemme 1.25. *Pour tout point $\mathrm{Spec} k \xrightarrow{y} X$ de X à valeurs dans un corps, le foncteur $-_y$ de la définition précédente est un foncteur fibre sur le site X_{Nis} .*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Les foncteurs Γ et y^* commutent tous les deux aux limites inductives et aux limites projectives finies, en vertu de la proposition 1.23 pour Γ et de la proposition 1.17 pour y^* . Donc $-_y$ commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies. \triangleleft

Proposition 1.26. *Si x est le morphisme canonique $\mathrm{Spec} \kappa(x) \longrightarrow X$ où x est un point de l'ensemble sous-jacent à X , alors le foncteur $-_x : \mathcal{Pre}\mathcal{Fais}(X_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{E}ns$ s'identifie au foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \varinjlim_{(V,v) \in \mathcal{V}ois_{x,X}^{Nis}} \mathcal{F}(V)$*

où $\mathcal{V}ois_{x,X}^{Nis}$ désigne la catégorie dont les objets sont les couples (V, v) où $V \in X_{Nis}$ et v un point de l'ensemble sous-jacent à V , au-dessus du point x , et tel que le morphisme canonique sur les corps résiduels $\kappa(x) \longrightarrow \kappa(v)$ soit un isomorphisme, les morphismes dans cette catégorie étant les morphismes dans X_{Nis} préservant le point marqué.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — D'après le théorème 1.21, il suffit d'identifier les catégories $\mathcal{V}ois_{x,X}^{Nis}$ et $\mathcal{V}ois_{\Phi}$ où $\Phi = -_x$. Or, pour tout $V \in X_{Nis}$, puisque sur les petits sites Nisnevich la topologie est moins fine que la topologie canonique, on peut faire le calcul suivant qui permet de conclure :

$$\begin{aligned} (V(-))_x &= \Gamma(x^*(V(-))) = \Gamma(V \times_X \mathrm{Spec} \kappa(x)(-)) \\ &= \mathbf{Hom}_{\mathrm{Spec} \kappa(x)}(\mathrm{Spec} \kappa(x), V \times_X \mathrm{Spec} \kappa(x)) \\ &= \mathbf{Hom}_X(\mathrm{Spec} \kappa(x), V) \end{aligned}$$

\triangleleft

Si $x \in X$, on appelle catégorie des voisinages Nisnevich de x la catégorie $\mathcal{V}ois_{x,X}^{Nis}$. Dans la suite, nous aurons besoin du résultat essentiel de cofinalité suivant :

Lemme 1.27. *La sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}ois_{x,X}^{Nis}$ constituée des couples (V, v) tels que V soit affine, connexe et tel que la fibre du X -schéma V au point x (autrement dit $V \times_X \mathrm{Spec} \kappa(x)$) soit un singleton est cofinale dans $\mathcal{V}ois_{x,X}^{Nis}$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Soit $(V, v) \in \mathcal{V}ois_{x,X}^{Nis}$, montrons qu'il existe un sous-schéma ouvert W de V contenant v tel que W soit affine, connexe, et ne contienne qu'un point au-dessus de x .

Tout d'abord, la fibre $V \times_X \mathrm{Spec} \kappa(x)$ est un schéma étale et de type fini sur $\kappa(x)$, donc sa topologie est discrète, ainsi, il existe un voisinage ouvert W de v dans V ne contenant qu'un point au-dessus de x .

On peut donc supposer que $V \times_X \mathrm{Spec} \kappa(x)$ est un singleton. Maintenant, soit W un voisinage ouvert affine de v dans V . Comme les composantes connexes des schémas affines noethériens sont des ouverts affines, la composante connexe W_0 de W contenant v est un ouvert affine connexe de V contenant v et ne possédant qu'un point au-dessus de x , d'où le résultat car $(W_0, v) \longrightarrow (V, v)$ est bien un morphisme dans $\mathcal{V}ois_{x,X}^{Nis}$. \triangleleft

Définition 1.28. *Une famille $(\Phi_i)_{i \in I}$ de foncteurs fibres sur un topos \mathcal{E} (resp. un site \mathcal{S}) est dite conservative si pour tout morphisme f dans \mathcal{E} (resp. $\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$), f est un isomorphisme si et seulement si pour tout $i \in I$, $\Phi_i(f)$ est bijectif.*

On dit que \mathcal{E} (resp. \mathcal{S}) possède assez de points si \mathcal{E} (resp. \mathcal{S}) admet une famille conservative de foncteurs fibres.

Proposition 1.29. *Si $(\Phi_i)_{i \in I}$ est une famille conservative de foncteurs fibres sur un topos \mathcal{E} (resp. un site \mathcal{S}), pour tout morphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ dans \mathcal{E} (resp. $\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$), alors*

- (1) *f est un monomorphisme si et seulement si pour tout $i \in I$, l'application $\Phi_i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\Phi_i(f)} \Phi_i(\mathcal{G})$ est injective ;*
- (2) *f est un isomorphisme si et seulement si pour tout $i \in I$, l'application $\Phi_i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\Phi_i(f)} \Phi_i(\mathcal{G})$ est bijective ;*
- (3) *f est un épimorphisme si et seulement si pour tout $i \in I$, l'application $\Phi_i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\Phi_i(f)} \Phi_i(\mathcal{G})$ est surjective.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Ce résultat provient formellement du fait que les topos possèdent des produits fibrés et des sommes amalgamées, que les foncteurs fibres y commutent, et du fait que dans une catégorie admettant des produits fibrés (resp. des sommes amalgamées) un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si le morphisme diagonal $X \rightarrow X \times_Y X$ (resp. le morphisme codiagonal $Y \sqcup_X Y \rightarrow Y$) est un isomorphisme. \triangleleft

Théorème 1.30. *Soit X un schéma noethérien. La famille des foncteurs fibres $-_y$, où y est un point de X à valeurs dans le spectre premier d'un corps induisant une extension de corps finie séparable⁽⁵⁾, est une famille conservative de foncteurs fibres sur le site X_{Nis} . En particulier, les petits sites Nisnevich possèdent suffisamment de points.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Commençons par montrer qu'une section est déterminée par ses fibres :

Lemme 1.31. *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(X_{Nis})$. L'application suivante est injective :*

$$\begin{cases} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x \\ f & \longmapsto (f_x)_{x \in X} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — Soient $f, f' \in \mathcal{F}(X)$ ayant les mêmes fibres en tout point de X . Pour tout $x \in X$, il existe un objet $U^x \in \mathcal{Vois}_{x,X}^{Nis}$ tel que $f|_{U^x} = f'|_{U^x}$. La famille $\{U^x \rightarrow X\}_{x \in X} \in \mathcal{Cov}_{Nis}(X)$, d'où le résultat puisque \mathcal{F} est un faisceau, en particulier préfaisceau séparé pour la topologie de Nisnevich. \triangleleft

Soit $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ un morphisme dans $\mathcal{Fais}(X_{Nis})$ induisant une bijection au niveau de tous les foncteurs fibres considérés. Il s'agit de montrer que pour tout $Y \xrightarrow{g} X \in X_{Nis}$, l'application $\mathcal{F}(Y) \xrightarrow{f_Y} \mathcal{G}(Y)$ est bijective. On peut supposer que $Y = X$, en effet, $g^*\mathcal{F} \xrightarrow{g^*f} g^*\mathcal{G}$ vérifiera les hypothèses du théorème, d'où une bijection $g^*\mathcal{F}(Y) \rightarrow g^*\mathcal{G}(Y)$. Or cette bijection s'identifiera, grâce à la description du foncteur g^* donnée précédemment (cas où g est étale), à $\mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{G}(Y)$, d'où le résultat.

Il s'agit donc de montrer que l'on a une bijection au niveau des sections globales $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{f_X} \mathcal{G}(X)$. D'après le lemme précédent, l'application $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{f_X} \mathcal{G}(X)$ est injective. Montrons la surjectivité. Soit $\psi \in \mathcal{G}(X)$. Pour tout point $x \in X$, il existe un objet U_x dans $\mathcal{Vois}_{x,X}^{Nis}$ et une section (nécessairement unique) $\varphi^x \in \mathcal{F}(U_x)$ telle que $f(\varphi^x) = \psi|_{U_x}$. Comme $\{U_x \rightarrow X\}_{x \in X} \in \mathcal{Cov}_{Nis}(X)$ et qu'une section de \mathcal{G} sur un objet de X_{Nis} ne peut posséder qu'un relèvement dans \mathcal{F} , les sections $(\varphi^x)_{x \in X}$ sont les restrictions d'une section φ de \mathcal{F} sur X qui est nécessairement un relèvement de ψ . \triangleleft

Remarque 1.32. *Si X est un schéma noethérien, on peut considérer le faisceau en anneaux sur X_{Nis} "représenté" par le X -schéma \mathbb{A}_X^1 (i.e. le faisceau qui à un schéma appartenant à X_{Nis} associe l'anneau des sections de son faisceau structural). Pour tout $x \in X$ et toute extension algébrique séparable de corps $k/\kappa(x)$ (correspondant à un morphisme de schéma $\text{Spec } k \xrightarrow{y} X$), on appelle hensélisé de X en y l'anneau*

⁽⁵⁾La condition sur cette extension de corps n'est présente dans cet énoncé que pour s'assurer que cette famille de foncteurs fibres (à isomorphismes près) soit un ensemble. On pourrait également, ce qui apparaît dans la démonstration, se contenter des points $y : \text{Spec } \kappa(y) \rightarrow X$ où y est un point de l'ensemble sous-jacent à un schéma $Y \in X_{Nis}$. En utilisant [EGA IV 18.1.1], on peut montrer que ces deux familles de foncteurs fibres coïncident.

$\mathcal{O}_{X,y}^h$ formé par les fibres du faisceau Nisnevich \mathbb{A}_X^1 en y . En outre, il est essentiellement tautologique que dans la catégorie des schémas, $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}^h$ est la limite projective du système projectif $\text{Vois}_{x,X}^{\text{Nis}}$ du théorème 1.21. On peut montrer que cet hensélisé est noethérien et qu'il s'agit d'un anneau local hensélien. Ainsi, les anneaux locaux de cette topologie sont les anneaux locaux henséliens, à la différence de la topologie étale où ceux-ci ont de plus un corps résiduel séparablement clos.

Points du grand site Nisnevich

Soit S un schéma noethérien et X dans $\mathcal{S}m/S$. On dispose d'un foncteur évident $X_{\text{Nis}} \xrightarrow{\pi_X} \mathcal{S}m/S$. On peut alors définir un foncteur $(\pi_X)_\# : \text{PreFais}(\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}) \rightarrow \text{PreFais}(X_{\text{Nis}})$ qui à tout préfaisceau \mathcal{F} dans $\text{PreFais}(\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}})$ associe le préfaisceau défini par $(\pi_X)_\# \mathcal{F}(Z) = \mathcal{F}(\pi_X(Z))$ pour tout $Z \in X_{\text{Nis}}$.

Il résulte immédiatement des définitions que $\mathcal{F} \in \text{PreFais}(\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}})$ est un faisceau sur $\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}$ si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{S}m/S$, $(\pi_X)_\# \mathcal{F}$ est un faisceau sur X_{Nis} .

Ainsi, π_X est un foncteur continu pour la topologie de Nisnevich sur les catégories X_{Nis} et $\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}$, et $(\pi_X)_\#$ induit un foncteur $(\pi_X)_* : \text{Fais}(\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}) \rightarrow \text{Fais}(X_{\text{Nis}})$. On peut noter $(\pi_X)^*$ le foncteur adjoint à gauche de $(\pi_X)_*$.

Proposition 1.33. *Pour tout $X \in \mathcal{S}m/S$, le foncteur $\pi_X : X_{\text{Nis}} \rightarrow \mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}$ est un morphisme de sites $\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}} \rightarrow X_{\text{Nis}}$. Ainsi, le couple de foncteurs adjoints $((\pi_X)^*, (\pi_X)_*)$ définit un morphisme de topos $\text{Fais}(\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}) \rightarrow \text{Fais}(X_{\text{Nis}})$. De plus, π_X est un foncteur cocontinu. Enfin, $(\pi_X)_*$ commute aux limites inductives.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Pour la première assertion, il reste à montrer que $(\pi_X)^*$ commute aux limites projectives finies, ce qui résulte, en vertu de [SGA 4 IV 4.9.2], du fait que la catégorie X_{Nis} possède des limites projectives finies et que le foncteur π_X y commute.

Le fait que π_X soit cocontinu [SGA 4 III 2.1] résulte immédiatement de la définition de la topologie de Nisnevich. On en déduit que $(\pi_X)_*$ commute aux limites inductives et possède un adjoint à droite grâce à [SGA 4 III 2.3.3]. \triangleleft

Définition 1.34. *Soient $X \in \mathcal{S}m/S$ et y un point de X à valeurs dans un corps (c'est-à-dire un morphisme de schémas $\text{Spec } K \xrightarrow{y} X$ où K est un corps). On note $-_y : \text{Fais}(\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}) \rightarrow \mathcal{E}ns$ le foncteur obtenu en associant à tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}(\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}})$ l'ensemble $\Gamma(y^*(\pi_X)_* \mathcal{F})$.*

Il résulte de la proposition précédente et de la construction des foncteurs fibres sur les petits sites Nisnevich que $-_y : \text{Fais}(\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}) \rightarrow \mathcal{E}ns$ est un foncteur fibre. Si $y \in Y \in \mathcal{S}m/S$, on note aussi $-_y$ le foncteur fibre associé au point $\text{Spec } \kappa(y) \rightarrow Y$.

Le théorème 1.30 admet la conséquence suivante :

Corollaire 1.35. *La famille des foncteurs fibres $-_y$ où y est un point de $Y \in \mathcal{S}m/S$ est une famille conservative de foncteurs fibres sur le site $\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}$. En particulier, les grands sites Nisnevich possèdent suffisamment de points.*

Nous pourrions faire exactement la même construction en remplaçant la catégorie $\mathcal{S}m/S$ par la catégorie Sch/S .

Une caractérisation des faisceaux Nisnevich

Définition 1.36. *Soit Y un schéma noethérien, on appelle recouvrement Nisnevich élémentaire de Y la donnée d'une immersion ouverte $U \xrightarrow{j} Y$ et d'un morphisme étale $V \xrightarrow{p} Y$, avec V quasi-compact, telle que, si on note $F = Y - U$, le morphisme de schémas $V \times_Y F_{\text{red}} \rightarrow F_{\text{red}}$ déduit de p par changement de base soit un isomorphisme⁽⁶⁾.*

On constate que la notion de recouvrement Nisnevich élémentaire d'un schéma noethérien est stable par changement de base.

Théorème 1.37. *Soit X un schéma noethérien (resp. S un schéma noethérien). Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X_{Nis} (resp. sur $\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}$), les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) \mathcal{F} est un faisceau sur X_{Nis} (resp. sur $\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}}$);

⁽⁶⁾Par invariance topologique du topos étale, la structure de sous-schéma fermé de Y dont F est muni n'a aucune importance pour ce qui est de tester si $V \times_Y F \rightarrow F$ est un isomorphisme.

- (2) $\mathcal{F}(\phi)$ est un singleton et pour tout recouvrement Nisnevich élémentaire ($j : U \rightarrow Y; p : V \rightarrow Y$) de $Y \in X_{Nis}$ (resp. $Y \in Sm/S_{Nis}$), le diagramme d'ensembles suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\mathcal{F}(j)} & \mathcal{F}(V) \\ \mathcal{F}(p) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(pr_2) \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\mathcal{F}(pr_1)} & \mathcal{F}(U \times_Y V) \end{array}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Le cas concernant les grands sites Nisnevich résulte formellement du cas des petits sites Nisnevich, donc on ne va considérer que ces derniers.

— **Sens facile.** 1 \implies 2)

D'après le lemme de Yoneda, il suffit de montrer que le diagramme suivant est cocartésien dans $\mathcal{Fais}(X_{Nis})$, pour tout recouvrement Nisnevich élémentaire ($U \xrightarrow{j} Y; V \xrightarrow{p} Y$) de $Y \in X_{Nis}$:

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & Y \end{array}$$

D'après le théorème 1.30, cette assertion se vérifie après passage aux fibres en un point $\text{Spec } K \xrightarrow{x} X$ de X à valeurs dans un corps. Pour tout $V \in X_{Nis}$, on a montré, lors de la démonstration de la proposition 1.26, que la fibre en x du faisceau V sur X_{Nis} s'identifiait à l'ensemble $\mathbf{Hom}_X(\text{Spec } K, V) = \mathbf{Hom}_{\text{Spec } K}(\text{Spec } K, V \times_X \text{Spec } K)$, c'est-à-dire l'ensemble des sections du $\text{Spec } K$ -schéma $V \times_X \text{Spec } K$. On en déduit que l'on peut supposer que $x : \text{Spec } K \rightarrow X$ est un isomorphisme. En outre, il est clair que l'on peut supposer que Y est connexe. Dans ce cas, Y est le spectre d'un corps, ainsi, deux cas sont possibles : soit $U = \emptyset$ et dans ce cas $V \rightarrow Y$ est un isomorphisme, soit $U = Y$. Mais, dans ces deux cas, le diagramme voulu est tautologiquement cocartésien, d'où le résultat.

— **Sens difficile.** 2 \implies 1)

Cette démonstration s'inspire de la méthode utilisée dans la démonstration de [MV, lemme 1.18, page 101]. En considérant le morphisme canonique $\mathcal{F} \rightarrow a\mathcal{F}$, on remarque qu'il suffit de démontrer le lemme suivant. \triangleleft

Lemme 1.38. *Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux sur X_{Nis} . On suppose que \mathcal{F} et \mathcal{G} vérifient la condition (2) du théorème 1.37. Si le morphisme $a\mathcal{F} \xrightarrow{af} a\mathcal{G}$ est un isomorphisme, alors f est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Il s'agit de montrer que pour tout $Y \in X_{Nis}$, $\mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{G}(Y)$ est bijective. Pour établir cela, on peut évidemment supposer que $Y = X$. Notons π_{\sharp} le foncteur de restriction des préfaisceaux au petit site Zariski $\pi_{\sharp} : \text{PreFais}(X_{Nis}) \rightarrow \text{PreFais}(X_{Zar})$. Puisque X est un espace topologique noethérien et que les recouvrements Zariski par deux ouverts sont des recouvrements Nisnevich élémentaires, $\pi_{\sharp}\mathcal{F}$ et $\pi_{\sharp}\mathcal{G}$ sont des faisceaux sur X_{Zar} . Donc, pour vérifier que $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ est bijective, il est suffisant de montrer que pour tout point $x \in X$, l'application $(\pi_{\sharp}\mathcal{F})_x \rightarrow (\pi_{\sharp}\mathcal{G})_x$, induite au niveau des germes en x (au sens habituel des faisceaux sur les espaces topologiques), est bijective. Nous allons démontrer cette assertion par récurrence sur la dimension de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$.

Nous allons maintenant voir que l'on peut effectivement se ramener au cas où X est le spectre d'un anneau local. Notons g le morphisme de schémas $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$. Soit $\mathcal{W} \in \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$. D'après les résultats de [EGA IV 8] que nous avons rappelés lors de l'étude du morphisme $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$, tout recouvrement Nisnevich élémentaire d'un schéma dans $(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x})_{Nis}$ est l'image réciproque d'un recouvrement Nisnevich élémentaire d'un objet de U_{Nis} par le morphisme canonique $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow U$ pour tout ouvert suffisamment petit U de X contenant x . En utilisant la propriété (2) et le fait qu'une limite inductive filtrante de carrés cartésiens dans $\mathcal{E}ns$ est un carré cartésien, à la lumière du lemme 1.19, on constate que le préfaisceau $g^{\sharp}\mathcal{W}$ vérifie la propriété (2) du théorème. Maintenant, l'isomorphisme de foncteurs $a \circ g^{\sharp} \cong g^{\sharp} \circ a$ permet de conclure que le morphisme $g^{\sharp}\mathcal{F} \rightarrow g^{\sharp}\mathcal{G}$ vérifie les hypothèses du lemme. Enfin, si on arrive à montrer que le morphisme $g^{\sharp}\mathcal{F}(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow g^{\sharp}\mathcal{G}(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x})$ est un isomorphisme, on aura bien démontré que $(\pi_{\sharp}\mathcal{F})_x \rightarrow (\pi_{\sharp}\mathcal{G})_x$ est bijectif.

Pour démontrer le lemme, on peut supposer maintenant que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux préfaisceaux sur X_{Nis} , où X est le spectre premier d'un anneau local de point fermé x , vérifiant la condition (2) du théorème

1.37. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ est un morphisme de préfaisceaux induisant un isomorphisme sur les faisceaux associés, il s'agit de montrer que $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ est bijective. Commençons par montrer l'injectivité : soient φ et φ' deux éléments de $\mathcal{F}(X)$ tels que $f(\varphi) = f(\varphi') = \alpha \in \mathcal{G}(X)$. Par hypothèse, les fibres Nisnevich de φ et φ' coïncident en x . Par définition des fibres Nisnevich en $x \in X$, il existe un voisinage Nisnevich (V, v) de (x, X) tel que $\varphi|_V = \varphi'|_V$, et on peut supposer que $V \times_X \text{Spec } \kappa(x) \rightarrow \text{Spec } \kappa(x)$ est un isomorphisme. Le couple $(X - x \rightarrow X; V \rightarrow X)$ est alors un recouvrement Nisnevich élémentaire de X ; comme φ et φ' coïncident sur V , pour montrer que $\varphi = \varphi'$, il suffit de montrer que leurs restrictions à $X - x$ sont égales. Par hypothèse de récurrence, on obtient que $\mathcal{F}(X - x) \xrightarrow{f} \mathcal{G}(X - x)$ est bijective (puisque $\dim X - x < \dim \mathcal{O}_{X,x}$), ainsi $\varphi|_{X-x} = \varphi'|_{X-x}$ puisque $f(\varphi|_{X-x}) = f(\varphi'|_{X-x}) = \alpha|_{X-x}$.

Il reste à montrer la surjectivité de $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{f} \mathcal{G}(X)$. Soit $\alpha \in \mathcal{G}(X)$. Comme $\mathcal{F}(X - x) \xrightarrow{f} \mathcal{G}(X - x)$ est bijective, il existe $\varphi \in \mathcal{F}(X - x)$ tel que $f(\varphi) = \alpha|_{X-x}$. De plus, l'application induite par f au niveau des fibres Nisnevich en x est bijective, il existe donc un voisinage Nisnevich (V, v) de $x \in X$, et une section $\psi \in \mathcal{F}(V)$ tel que $f(\psi) = \alpha|_V$, et on peut supposer que $V \times_X \text{Spec } \kappa(x) \rightarrow \text{Spec } \kappa(x)$ est un isomorphisme. D'après le théorème A.8, $\dim(X - x) \times_X V < \dim \mathcal{O}_{X,x}$, ainsi, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $\mathcal{F}((X - x) \times_X V) \xrightarrow{f} \mathcal{G}((X - x) \times_X V)$ est bijective. Comme $f(\varphi|_{(X-x) \times_X V}) = f(\psi|_{(X-x) \times_X V}) = \alpha|_{(X-x) \times_X V}$, on obtient que φ et ψ sont les restrictions d'une section $\omega \in \mathcal{F}(X)$, et il s'ensuit que $f(\omega) = \alpha$. \triangleleft

Cohomologie pour la topologie de Nisnevich

Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ un site. On rappelle que si X est un objet de \mathcal{C} , pour tout $q \in \mathbb{N}$, on peut noter $\mathbf{H}_{\mathcal{S}}^q(X; -)$ le q -ième foncteur dérivé à droite du foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur \mathcal{S} (objets Groupes abéliens dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$) vers la catégorie des groupes abéliens, la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur \mathcal{S} ayant suffisamment d'injectifs en vertu de [Grot].

Lemme 1.39. *Soit S un schéma noethérien et $X \in \text{Sm}/S$. Pour tout faisceau \mathcal{F} de groupes abéliens sur Sm/S_{Nis} , il existe un isomorphisme canonique pour tout $q \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbf{H}_{X_{\text{Nis}}}^q(X; (\pi_X)_* \mathcal{F}) = \mathbf{H}_{\text{Sm}/S_{\text{Nis}}}^q(X; \mathcal{F})$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — En vertu de la proposition 1.33, $(\pi_X)_*$ est un foncteur exact, et de plus, comme c'est le foncteur image directe pour un morphisme de topos, il admet un adjoint à gauche π_X^* exact, donc, $(\pi_X)_*$ envoie les faisceaux injectifs sur des faisceaux injectifs, d'où le résultat. \triangleleft

Lemme 1.40. *Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X_{Nis} . Supposons que pour toute immersion ouverte $V \xrightarrow{i} U$ dans X_{Nis} , l'application $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ soit surjective. Alors, pour tout $q > 0$ et $Y \in X_{\text{Nis}}$, $\mathbf{H}_{X_{\text{Nis}}}^q(Y; \mathcal{F}) = 0$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Pour cette démonstration, appelons flasques les faisceaux de groupes abéliens sur X satisfaisant l'hypothèse du lemme 1.40. Commençons par montrer que si \mathcal{F} est flasque, alors

$\mathbf{H}_{X_{\text{Nis}}}^1(Y; \mathcal{F}) = 0$ pour tout $Y \in X_{\text{Nis}}$. Pour cela, il suffit de montrer que si $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux sur X_{Nis} , alors $\mathcal{G}(Y) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$ est surjective pour tout $Y \in X_{\text{Nis}}$. On peut supposer que $Y = X$. Soit $h \in \mathcal{H}(Y)$. Par noethérianité de X , il existe un ouvert Zariski U maximal dans X sur lequel $h|_U$ est l'image d'un élément de $\mathcal{G}(U)$. Ainsi, il suffit de montrer que si U est un ouvert de X et $s \in \mathcal{G}(U)$ tels que $\beta(s) = h|_U$, alors si $U \neq X$, alors il existe un ouvert U' strictement plus grand que U satisfaisant la même condition. Soit x un point générique de $X - U$. Par exactitude de la suite exacte de faisceaux Nisnevich, il existe $V \in X_{\text{Nis}}$ et un élément $t \in \mathcal{G}(V)$ tel que $\beta(t) = h|_V$ et que $V \times_X \text{Spec } \kappa(x) \rightarrow \text{Spec } \kappa(x)$ soit un isomorphisme. Notons $F = (X - U)_{\text{red}}$. Considérons le morphisme canonique $V \times_X F \xrightarrow{\varphi} F$. Pour montrer qu'il existe un ouvert W de X contenant x tel que φ induise un isomorphisme $V \times_X F \times_X W \rightarrow F \times_X W$, d'après les résultats de [EGA IV 8] sur les limites projectives de schémas, il suffit de vérifier que $V \times_X F \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow F \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de voir que le X -schéma $F \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$ s'identifie à $\text{Spec } \kappa(x)$. On sait que $F \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$ est un sous-schéma fermé de $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$; par localisation, il est réduit. De plus, comme x est un point générique de F , il vient que $F \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} = \text{Spec } \kappa(x)$. Ainsi, on a montré qu'il existe un ouvert W de X contenant x tel que $V \times_X F \times_X W \rightarrow F \times_X W$ soit un isomorphisme. Ainsi, si on note $U' = U \cup W$, on obtient un recouvrement Nisnevich élémentaire $\{U \rightarrow U'; V \times_X U' \rightarrow U'\}$.

On construit alors facilement un relèvement de $h|_{U'}$ dans $\mathcal{G}(U')$ en utilisant les relèvements sur U et $V \times_X U'$, et ce grâce à la surjectivité de l'application $\mathcal{F}(U') \rightarrow \mathcal{F}(U)$.

On a donc montré que pour tout faisceau flasque \mathcal{F} et $Y \in X_{Nis}$, $\mathbf{H}_{X_{Nis}}^1(Y; \mathcal{F}) = 0$. Maintenant, en utilisant les monomorphismes de faisceaux $\mathbb{Z}V \rightarrow \mathbb{Z}U$ associés à des immersions ouvertes dans X_{Nis} , on montre facilement que les faisceaux injectifs sont flasques. De plus, en utilisant le résultat sur le \mathbf{H}^1 , on obtient que dans une suite exacte courte de faisceaux Nisnevich $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$, si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont flasques, alors \mathcal{H} est flasque. Par récurrence sur $q > 0$, il en résulte formellement que pour tout faisceau flasque \mathcal{F} et $Y \in X_{Nis}$, $\mathbf{H}_{X_{Nis}}^q(Y; \mathcal{F}) = 0$. \triangleleft

Grâce à ce lemme, on obtient des isomorphismes tautologiques $\mathbf{H}_{X_{Nis}}^q(Y; \mathcal{F}) = \mathbf{H}_{Y_{Nis}}^q(Y; f^*\mathcal{F})$ pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur X_{Nis} avec $Y \xrightarrow{f} X \in X_{Nis}$. En combinant ces deux lemmes, si \mathcal{F} est un faisceau sur un petit ou un grand site Nisnevich, il ne présente aucune ambiguïté à noter simplement $\mathbf{H}_{Nis}^q(Y; \mathcal{F})$ les groupes de cohomologie pour tout objet Y du site considéré. Pour la topologie de Zariski, on notera $\mathbf{H}_{Zar}^q(-; -)$ les groupes de cohomologie.

Proposition 1.41. *Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X_{Nis} , et $(U \xrightarrow{j} X; V \xrightarrow{p} X)$ un recouvrement Nisnevich élémentaire de X . Alors, il existe une suite exacte longue (dite de Mayer-Vietoris généralisée) :*

$$\mathbf{H}_{Nis}^{q-1}(U \times_X V; \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}_{Nis}^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}_{Nis}^q(U; \mathcal{F}) \oplus \mathbf{H}_{Nis}^q(V; \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}_{Nis}^q(U \times_X V; \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{H}_{Nis}^{q+1}(X; \mathcal{F})$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Pour tout $W \in X_{Nis}$, notons $\mathbb{Z}W$ le faisceau de groupes abéliens libre sur le faisceau représenté par W . Il est clair que $\mathbf{H}_{Nis}^q(W; \mathcal{F})$ s'identifie à $\mathbf{Ext}^q(\mathbb{Z}W, \mathcal{F})$ calculé dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X_{Nis} . En vertu des suites exactes longues associées aux groupes d'extensions, il s'agit de montrer que le carré suivant est cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}(U \times_X V) & \longrightarrow & \mathbb{Z}U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}V & \longrightarrow & \mathbb{Z}X \end{array}$$

Or, cela résulte formellement du fait que pour tout faisceau (de groupes abéliens) \mathcal{G} sur X_{Nis} , le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(X) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U \times_X V) \end{array}$$

\triangleleft

Théorème 1.42. ([KS], [MV, proposition 1.8, page 98], [TT, lemme E.6.c]) *Soit X un schéma noethérien de dimension de Krull finie. Alors, pour tout faisceau \mathcal{F} de groupes abéliens sur X_{Nis} et pour tout entier $q > \dim X$, $\mathbf{H}_{Nis}^q(X; \mathcal{F}) = 0$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Commençons par montrer que si ce théorème est vrai pour tous les schémas locaux noethériens de dimension $\leq n$, alors il est vrai pour tous les schémas noethériens X de dimension n . Notons $\mathbf{R}^q\pi_*$ les foncteurs dérivés à droite du foncteur image directe de faisceaux de groupes abéliens pour le morphisme évident de sites $X_{Nis} \xrightarrow{\pi} X_{Zar}$, et appliquons la suite spectrale de Leray :

$$E_2^{pq} = \mathbf{H}_{Zar}^p(X; \mathbf{R}^q\pi_*\mathcal{F}) \implies \mathbf{H}_{Nis}^{p+q}(X; \mathcal{F})$$

Il s'agit de montrer que $E_2^{pq} = 0$ pour $p + q > n$. En vertu du théorème 1.43, il suffit de montrer que $(\mathbf{R}^q\pi_*\mathcal{F})_x = 0$ pour tout $x \in X$ tel que $\dim \mathcal{O}_{X,x} < q$. Or, on montre (en utilisant par exemple le lemme 1.40) que la fibre $(\mathbf{R}^q\pi_*\mathcal{F})_x$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{H}_{Nis}^q(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}, j^*\mathcal{F})$, j étant le morphisme canonique $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{j} X$, d'où le résultat.

On procède maintenant par récurrence sur la dimension de Krull. Soit X un schéma local noethérien de dimension de Krull n , de point fermé s . On veut montrer que pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur X_{Nis} , $\mathbf{H}_{Nis}^{n+1}(X; \mathcal{F}) = 0$. Le faisceau associé au préfaisceau de groupes abéliens sur X_{Nis} qui à $U \in X_{Nis}$ associe $\mathbf{H}_{Nis}^{n+1}(U; \mathcal{F}|_U)$ est évidemment nul. Donc, pour tout élément $x \in \mathbf{H}_{Nis}^{n+1}(X; \mathcal{F})$, il existe $V \in X_{Nis}$

vérifiant $V_s \simeq \text{Spec } \kappa(s)$ tel que l'image de x dans $\mathbf{H}_{Nis}^{n+1}(V; \mathcal{F})$ soit nulle. Posons $U = X - s$, on peut considérer la suite exacte de Mayer-Vietoris généralisée associée au recouvrement Nisnevich élémentaire (U, V) de X , ce qui donne la suite exacte suivante grâce au fait que les dimensions de Krull de U et de $U \times_X V$ sont strictement inférieures à n :

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}_{Nis}^{n+1}(X; \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{H}_{Nis}^{n+1}(V; \mathcal{F})$$

On en déduit que $x = 0$ et donc $\mathbf{H}_{Nis}^{n+1}(X; \mathcal{F}) = 0$. \triangleleft

Théorème 1.43. *Soit X un schéma noethérien de dimension de Krull finie, $n \in \mathbb{N}$ et \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X_{Zar} . On suppose que pour tout point $x \in X$ tel que $\dim \mathcal{O}_{X,x} < \dim X - n$, $\mathcal{F}_x = 0$. Alors, pour tout $q > n$, $\mathbf{H}_{Zar}^q(X; \mathcal{F}) = 0$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — En vertu de l'inégalité $\dim \mathcal{O}_{X,x} + \dim \overline{\{x\}} \leq \dim X$ pour tout $x \in X$, il suffit de montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et si \mathcal{F} est un faisceau de groupes abéliens sur X_{Zar} tel que pour tout point $x \in X$ vérifiant $\dim \overline{\{x\}} > n$, $\mathcal{F}_x = 0$, alors pour tout $q > n$, $\mathbf{H}_{Zar}^q(X; \mathcal{F}) = 0$. Nous allons démontrer ceci par récurrence noethérienne. Notons que si $F \xrightarrow{i} X$ est une immersion fermée, $i^* \mathcal{F}$ va encore vérifier cette nouvelle hypothèse.

Notons $S = \{x \in X, \mathcal{F}_x \neq 0\}$ et F l'adhérence dans X de S . On a un isomorphisme $\mathcal{F} \simeq i_* i^* \mathcal{F}$ avec i l'immersion fermée $F \xrightarrow{i} X$. Comme $\mathbf{H}_{Zar}^q(X; i_* \mathcal{G}) = \mathbf{H}_{Zar}^q(F; \mathcal{G})$ pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{G} sur F , par hypothèse de récurrence noethérienne, on peut supposer que $F = X$. Grâce au lemme suivant, \mathcal{F} est limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux \mathcal{F}' tels que $\{x \in X, \mathcal{F}'_x \neq 0\}$ soit un ensemble constructible⁽⁷⁾ de X . On peut ainsi supposer que S est un ensemble constructible. Or, une partie constructible dense dans X contient tous les points génériques des composantes irréductibles de X , et dans ce cas, on ne veut rien démontrer de plus que $\mathbf{H}_{Zar}^q(X; \mathcal{F}) = 0$ pour $q > \dim X$, c'est-à-dire le théorème d'annulation de Grothendieck. \triangleleft

Lemme 1.44. *Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur un schéma noethérien X muni de la topologie de Zariski. Si \mathcal{F} est engendré par un nombre fini de sections, alors l'ensemble $\{x \in X, \mathcal{F}_x \neq 0\}$ est constructible.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Si \mathcal{G} est un faisceau de groupes abéliens sur X , alors on dit que \mathcal{G} est constructible s'il existe une partition finie de X formée de localement fermés $(L_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, le faisceau $\mathcal{F}|_{L_i}$ de groupes abéliens sur l'espace topologique L_i soit un faisceau constant associé à un \mathbb{Z} -module de type fini. Il est tautologique qu'un faisceau constructible de groupes abéliens \mathcal{F} sur X est tel que $\{x \in X, \mathcal{F}_x \neq 0\}$ est un ensemble constructible de X . En se ramenant au cas des faisceaux constants sur des schémas noethériens irréductibles, on montre facilement que si $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux sur un schéma noethérien X , alors, si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont constructibles, alors \mathcal{H} l'est aussi. Comme un faisceau engendré par un nombre fini de sections est évidemment quotient d'un faisceau constructible, il ne reste qu'à prouver qu'un sous-faisceau d'un faisceau constructible est constructible. Il suffit évidemment de montrer qu'un sous-faisceau \mathcal{F} d'un faisceau constant associé à un groupe abélien de type fini G sur un schéma noethérien X est constructible. Clairement, on peut aussi supposer que X est irréductible. Soit \mathcal{F} un tel faisceau contenu dans le faisceau constant G . Par récurrence noethérienne, on peut supposer que la restriction de \mathcal{F} à tout fermé strict de X est constructible. Il suffit donc de montrer qu'il existe un ouvert non vide U de X tel que $\mathcal{F}|_U$ soit constant. On considère l'application injective $\mathcal{F}_\eta \rightarrow \mathcal{G}_\eta = G$. Puisque \mathcal{F}_η est un groupe abélien de type fini, quitte à remplacer X par un ouvert non vide suffisamment petit, on peut supposer que l'application $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}_\eta$ est surjective. Il en résulte que pour tout ouvert non vide V de X , l'application $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}_\eta$ est surjective, or ces deux groupes sont naturellement contenus dans G , ainsi, cette application est bijective et \mathcal{F} est bien le faisceau constant de fibre \mathcal{F}_η , d'où le résultat. \triangleleft

Remarque 1.45. *En utilisant la suite spectrale de coniveau, on peut démontrer le théorème 1.42 de manière plus élégante. C'est d'ailleurs la démonstration qui est donnée dans [KS]. C'est la méthode qu'emploie aussi Nisnevich dans [Nis, théorème 1.32, page 279], cependant une erreur malheureuse s'est glissée dans la démonstration qui y est donnée. Néanmoins, si on y retire un argument faux⁽⁸⁾, il y est démontré largement de quoi démontrer le théorème.*

⁽⁷⁾Une partie d'un espace topologique noethérien est dite constructible si elle est réunion finie de localement fermés.

⁽⁸⁾Le problème est que la suite spectrale de coniveau à un terme E_1 , qui contrairement à un certain nombre de suites spectrales en cohomologie, est tel que E_1^{pq} n'est pas nul en général pour $q < 0$.

Quelques notions d'algèbre homotopique

Le cadre abstrait introduit par Quillen dans [Qui1] permet d'axiomatiser ce que l'on appelle la théorie de l'homotopie. Nous allons ainsi rappeler la notion de catégorie de modèles, ainsi que quelques résultats d'algèbre homotopique dont nous aurons besoin. Les catégories de modèles permettent notamment de rendre plus explicite le calcul des morphismes dans certaines catégories obtenues par localisation, dans un cadre suffisamment général pour s'appliquer à plusieurs situations intéressantes que nous rencontrons. Cette méthode peut être considérée comme une généralisation “non-abélienne” de l'équivalence de catégories entre la catégorie dérivée $\mathbf{D}^+ \mathcal{A}$ où \mathcal{A} est une catégorie abélienne possédant assez d'injectifs et la catégorie à homotopie près des complexes⁽⁹⁾ dans \mathcal{A} bornés inférieurement dont tous les termes sont des objets injectifs. Comme nous aurons aussi besoin de cette technique très utile pour construire des catégories de modèles, nous rappellerons précisément ce que l'on entend par “raisonnement du petit objet”. Enfin, on rappellera quelques résultats sur les ensembles simpliciaux, les foncteurs dérivés, les limites et les colimites homotopiques, et la correspondance de Dold-Kan.

Catégories de modèles fermées

On se donne une catégorie \mathcal{C} munie de trois classes de morphismes Fib, Cof, W appelées respectivement fibrations, cofibrations et équivalences faibles.

Définition 2.1. *On appelle fibration triviale une fibration qui est aussi une équivalence faible et cofibration triviale une cofibration qui est aussi une équivalence faible.*

Définition 2.2. *Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est un rétracte de $g : X' \rightarrow Y'$ s'il existe un diagramme commutatif de la forme suivante :*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Id} & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 Y & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & & \text{Id} & &
 \end{array}$$

Définition 2.3.

- Soit un carré commutatif de la forme ci-dessous dans \mathcal{C} . Dans cette situation, un relèvement est un morphisme $B \xrightarrow{\varphi} X$ rendant les deux triangles adjacents commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & X \\
 \downarrow i & \nearrow \varphi & \downarrow p \\
 B & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

- Soient $A \xrightarrow{i} B$ un morphisme et \mathcal{E} une classe de morphismes dans \mathcal{C} . On dit que i possède la propriété de relèvement à gauche par rapport à \mathcal{E} si pour tout carré commutatif dans lequel la flèche de gauche est i et la flèche de droite est dans \mathcal{E} , un relèvement existe ;
- Soient $X \xrightarrow{p} Y$ un morphisme et \mathcal{E} une classe de morphismes dans \mathcal{C} . On dit que p possède la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathcal{E} si pour tout carré commutatif dans lequel la flèche de droite est p et la flèche de gauche est dans \mathcal{E} , un relèvement existe.

⁽⁹⁾Sauf mention du contraire, les complexes que nous considérerons seront notés cohomologiquement (i.e. le degré est noté en haut, les différentielles sont de degré +1 et vont a priori vers la droite). Le foncteur de décalage $-[1]$ s'obtient en décalant d'un cran vers la gauche les complexes de sorte que pour tout complexe K et $q \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{H}^q(K[1]) = \mathbf{H}^{q+1}(K)$. La notion de complexe borné supérieurement (resp. inférieurement) sera toujours interprété avec ces conventions. Cependant, on utilisera implicitement l'équivalence entre les deux conventions via la formule $K_n := K^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On considère les axiomes suivants :

AXIOME **CM1**— *La catégorie \mathcal{C} admet des limites finies et des colimites finies.*

AXIOME **CM2**—

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

Dans un tel diagramme commutatif, si, parmi les trois flèches f , g et h , deux sont des équivalences faibles, alors la troisième aussi⁽¹⁰⁾.

AXIOME **CM3**— *Les trois classes de morphismes formées par les fibrations, les cofibrations et les équivalences faibles sont stables par rétracte.*

AXIOME **CM4**— *Pour tout carré commutatif de la forme suivante, où p est une fibration et i une cofibration, il existe un relèvement φ (rendant le diagramme commutatif) si i ou p est une équivalence faible :*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \nearrow \varphi & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

AXIOME **CM5**—

- *Tout morphisme f peut se factoriser en $f = p \circ i$ avec i une cofibration et p une fibration triviale.*
- *Tout morphisme f peut se factoriser en $f = p \circ i$ avec i une cofibration triviale et p une fibration.*

Définition 2.4. *($\mathcal{C}, \text{Cof}, \text{Fib}, W$) est une catégorie de modèles fermée si ces données vérifient les axiomes **CM1**, **CM2**, **CM3**, **CM4**, et **CM5**.*

Remarque 2.5. *Cette définition est “auto-duale” dans la mesure où si l’on change \mathcal{C} en la catégorie opposée \mathcal{C}^{op} , et si l’on permute fibrations et cofibrations, sans changer les équivalences faibles, \mathcal{C} est une catégorie de modèles fermée si et seulement si \mathcal{C}^{op} l’est (tous les axiomes étant invariants par cette transformation). Ainsi, tout théorème concernant les catégories de modèles fermées aura une version duale.*

Les structures de catégories de modèles fermées que nous considérerons satisferont des axiomes renforcés. Ainsi, on introduit deux axiomes qui renforcent respectivement les axiomes **CM1** et **CM5** :

AXIOME **CM1**⁺— *La catégorie \mathcal{C} admet des limites et des colimites quelconques.*

AXIOME **CM5**⁺—

- *Tout morphisme f peut se factoriser fonctoriellement en $f = p \circ i$ avec i une cofibration et p une fibration triviale.*
- *Tout morphisme f peut se factoriser fonctoriellement en $f = p \circ i$ avec i une cofibration triviale et p une fibration.*

Pour démontrer les axiomes de certaines catégories de modèles fermées, nous utiliserons le lemme suivant (ainsi que sa version duale) :

Lemme 2.6. *(Astuce de Joyal) Supposons que les données ($\mathcal{C}, \text{Cof}, \text{Fib}, W$) satisfassent aux axiomes **CM1**, **CM2** et que*

- *les cofibrations soient stables par composition et par co-changement de base ;*
 - *les fibrations aient la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales ;*
 - *tout morphisme f puisse se factoriser en $f = p \circ i$ avec i une cofibration et p une fibration triviale.*
- Alors, l’axiome **CM4** est vérifié.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Soit un carré commutatif, avec p une fibration triviale et i une cofibration.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Construisons le diagramme suivant :

⁽¹⁰⁾L’axiome **CM2** est communément appelé “la propriété du deux sur trois”.

$$\begin{array}{ccccc}
A & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X \\
\downarrow i & & \downarrow i' & \searrow & \downarrow p \\
B & \longrightarrow & B \sqcup_A X & \xrightarrow{j} & Z \longrightarrow Y \\
& & & \nearrow \varphi & \\
& & & & X
\end{array}$$

Pour cela, on construit la somme amalgamée de B et X le long de A grâce à l'axiome **CM1**, et on factorise la flèche canonique $B \sqcup_A X \rightarrow Y$ en une cofibration $B \sqcup_A X \xrightarrow{j} Z$ suivie d'une fibration triviale $Z \rightarrow Y$. Comme les cofibrations sont stables par co-changement de base, i' est une cofibration. Puisque les cofibrations sont stables par composition, $j \circ i'$ est une cofibration. De plus, comme $X \xrightarrow{p} Y$ et $Z \rightarrow Y$ sont des équivalences faibles, $j \circ i'$ est une cofibration triviale d'après l'axiome **CM2**. Or p est une fibration, donc un relèvement φ existe, et on en déduit un relèvement $B \rightarrow X$ dans le carré initial. \triangleleft

Algèbre homotopique

La définition des catégories de modèles fermées donnée précédemment est celle décrite dans [GJ]. Néanmoins, d'autres axiomes intervenant dans la définition de Quillen des catégories de modèles dans [Qui1] se déduisent de celle-ci grâce à des caractérisations par des propriétés de relèvement.

Dans cette partie, on fixe une catégorie de modèles fermée $(\mathcal{C}, \text{Cof}, \text{Fib}, \mathcal{W})$. Il va s'agir de déduire des axiomes **CM1**, **CM2**, **CM3**, **CM4**, **CM5** quelques propriétés importantes et quelques constructions.

Lemme 2.7.

- Les fibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales ;
- Les fibrations triviales sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations ;
- Les cofibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales ;
- Les cofibrations triviales sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux fibrations.

DÉMONSTRATION — [GJ, lemme 1.1, page 67] \triangleleft

Remarque 2.8. Grâce à ce lemme, on remarque que dans une catégorie de modèles fermée, on peut caractériser une des trois classes de morphismes Fib , Cof , \mathcal{W} à partir des deux autres.

Corollaire 2.9.

- Les fibrations sont stables par composition et par changement de base ;
- Les cofibrations sont stables par composition et par co-changement de base ;
- Les fibrations triviales sont stables par composition et par changement de base ;
- Les cofibrations triviales sont stables par composition et par co-changement de base ;
- Les isomorphismes sont dans $\text{Fib} \cap \text{Cof} \cap \mathcal{W}$.

Définition 2.10. Soit X un objet de \mathcal{C} . On dit que X est cofibrant si le morphisme $\phi \rightarrow X$ est une cofibration et on dit que X est fibrant si le morphisme $X \rightarrow \bullet$ est une fibration, ϕ (resp. \bullet) désignant l'objet initial (resp. final) de \mathcal{C} .

Définition 2.11. Soient \mathcal{D} une catégorie et \mathcal{W} une classe de morphismes dans \mathcal{D} . Supposons que soient donnés une catégorie $\mathcal{D}[\mathcal{W}^{-1}]$ et un foncteur $\mathcal{D} \xrightarrow{Q} \mathcal{D}[\mathcal{W}^{-1}]$ tels que pour tout $w \in \mathcal{W}$, $Q(w)$ soit un isomorphisme et tels que pour toute catégorie \mathcal{E} munie d'un foncteur $\mathcal{D} \xrightarrow{R} \mathcal{E}$ tel que pour tout $w \in \mathcal{W}$, $R(w)$ soit un isomorphisme, il existe un unique foncteur $\mathcal{D}[\mathcal{W}^{-1}] \xrightarrow{\Theta} \mathcal{E}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D} & \xrightarrow{R} & \mathcal{E} \\
\downarrow Q & & \nearrow \Theta \\
\mathcal{D}[\mathcal{W}^{-1}] & &
\end{array}$$

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{D}[\mathcal{W}^{-1}]$ est la catégorie localisée stricte de \mathcal{D} par rapport à \mathcal{W} .

Grâce au lemme de Yoneda, la localisée stricte, si elle existe, est unique à isomorphisme unique près⁽¹¹⁾. On démontre assez facilement que si \mathcal{D} est une petite catégorie et \mathcal{W} un ensemble arbitraire de morphismes, alors $\mathcal{D}[\mathcal{W}^{-1}]$ existe. Mais si \mathcal{D} n'est pas petite, il faut être plus précautionneux.

Nous allons maintenant rappeler la construction de $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Pour cela, nous allons définir d'autres notions introduites dans [Qui1].

Définition 2.12.

- Soit A un objet de \mathcal{C} . Un objet cylindre pour A est la donnée d'un triangle commutatif de la forme ci-dessous, où i est une cofibration, σ une équivalence faible et ∇ la codiagonale :

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup A & & \\ \downarrow i=i_0 \sqcup i_1 & \searrow \nabla & \\ \tilde{A} & \xrightarrow{\sigma} & A \end{array}$$

- Soient f et g deux morphismes $A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} . Une homotopie à gauche entre f et g relativement à un objet cylindre (\tilde{A}, i, σ) de A est un morphisme $\tilde{A} \xrightarrow{h} B$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup A & \xrightarrow{f \sqcup g} & B \\ \downarrow i & \nearrow h & \\ \tilde{A} & & \end{array}$$

- Soient f et g deux morphismes $A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} . On dit que f et g sont homotopes à gauche s'il existe un objet cylindre (\tilde{A}, i, σ) et une homotopie à gauche entre f et g relativement à (\tilde{A}, i, σ) .

On remarque que tout objet de \mathcal{C} possède un objet cylindre en vertu de l'axiome **CM5**.

Lemme 2.13.

- Si A est un objet cofibrant de \mathcal{C} et (\tilde{A}, i, σ) un objet cylindre pour A , alors les morphismes i_0 et i_1 sont des cofibrations triviales ;
- Si A et B sont deux objets de \mathcal{C} , la relation d'homotopie à gauche sur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ est une relation d'équivalence si A est cofibrant.

DÉMONSTRATION DU LEMME — [GJ, lemme 1.5, page 69]

◁

Ces notions comportent bien entendu des versions duales. On peut ainsi définir la notion d'objet chemin, la notion d'homotopie à droite relativement à un objet chemin fixé et enfin la relation d'homotopie à droite.

Lemme 2.14. Soient A un objet cofibrant et B un objet fibrant.

Alors, si f et g sont deux morphismes $A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} , les conditions suivantes sont équivalentes :

- f et g sont homotopes à gauche ;
- f et g sont homotopes à gauche relativement à un objet cylindre de A fixé ;
- f et g sont homotopes à droite ;
- f et g sont homotopes à droite relativement à un objet chemin de B fixé.

Sous ces hypothèses, on note $\pi(A, B)$ l'ensemble quotient de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ pour la relation d'homotopie.

DÉMONSTRATION DU LEMME — [GJ, corollaire 1.9, page 72]

◁

Il résulte des définitions et du lemme précédent que l'on peut définir une unique catégorie $\pi\mathcal{C}_f$ dont les objets sont les objets de \mathcal{C} qui sont fibrants et cofibrants, telle que l'ensemble des morphismes de X vers Y soit l'ensemble $\pi(X, Y)$, et telle que la composition des morphismes soit induite par la composition des morphismes dans \mathcal{C} .

Théorème 2.15. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme dans \mathcal{C} entre objets fibrants et cofibrants. Alors, f est une équivalence faible si et seulement si la classe de f est un isomorphisme dans $\pi\mathcal{C}_f$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [GJ, théorème 1.10, page 73]

◁

⁽¹¹⁾On peut relâcher un peu les exigences portant sur la catégorie $\mathcal{D}[\mathcal{W}^{-1}]$. En effet, on peut déceler dans cette définition un problème 2-universel, une solution à un problème 2-universel étant alors définie (seulement) à équivalence de catégorie près.

Lemme 2.16. (*Lemme fondamental de l'algèbre homotopique*)

- La catégorie localisée stricte $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} par rapport à W existe et on note γ le foncteur de localisation $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$;
- Si X est un objet cofibrant et Y un objet fibrant, alors le foncteur γ induit une bijection $\pi(X, Y) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(\gamma X, \gamma Y)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME — L'idée [GJ, théorème 1.11, page 75] consiste à choisir pour tout objet X un représentant fibrant et cofibrant X' grâce à l'axiome **CM5** :

$$\begin{array}{ccc}
 \phi & \xrightarrow{\in \text{Cof}} & \tilde{X} \xrightarrow{\in \text{Fib} \cap W} X \\
 & & \downarrow \in \text{Cof} \cap W \\
 & & X' \\
 & & \downarrow \in \text{Fib} \\
 & & \bullet
 \end{array}$$

On peut supposer que $X = \tilde{X}$ si X est cofibrant et que $X' = \tilde{X}$ si \tilde{X} est fibrant.

On définit les objets de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ comme étant les objets de \mathcal{C} et les morphismes de X vers Y dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ comme étant l'ensemble $\pi(X', Y')$. On définit la composition des morphismes en utilisant la catégorie $\pi\mathcal{C}_{cf}$. On dispose d'un foncteur évident $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ qui à X associe X' . Ce foncteur est par définition une équivalence de catégories.

En utilisant l'axiome **CM4**, on peut aisément relever tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ en un morphisme $X' \xrightarrow{g} Y'$. Néanmoins, le passage le plus technique consiste à vérifier que g est bien défini à homotopie près pour pouvoir définir un foncteur $\mathcal{C} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$.

Une fois ce travail effectué, la vérification du fait que $(\mathbf{Ho}(\mathcal{C}), \gamma)$ est bien la localisée stricte de \mathcal{C} par rapport à W ne présente pas de difficulté particulière. \triangleleft

Corollaire 2.17. *On peut définir un foncteur évident $\pi\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$. De plus, ce foncteur est une équivalence de catégories.*

Proposition 2.18. *Les équivalences faibles sont exactement les morphismes qui deviennent des isomorphismes dans la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$.*

On remarquera que, sans supposer les objets fibrants ou cofibrants, si $f, g : X \rightarrow Y$ sont deux morphismes pour lesquels il existe une homotopie à gauche (resp. à droite) relativement à un objet cylindre (resp. chemin) entre f et g , alors f et g coïncident dans la catégorie homotopique i.e. $\gamma f = \gamma g$.

Lemme 2.19. *Si I est un ensemble tel que les produits indexés par I existent dans \mathcal{C} et tel que tout produit d'équivalences faibles indexé par I soit une équivalence faible, alors $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ admet des produits indexés par I . De plus, le foncteur de localisation $\mathcal{C} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ y commute.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de \mathcal{C} . Notons $X = \prod_{i \in I} X_i$ le produit

dans \mathcal{C} . Il s'agit de montrer que γX est le produit de $(\gamma X_i)_{i \in I}$ dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$. Grâce à notre hypothèse, on peut supposer que pour tout $i \in I$, X_i est fibrant. Il s'agit de montrer que pour tout objet Y de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$, l'application canonique $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(Y, \gamma X) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(Y, \gamma X_i)$ est bijective. On peut supposer que

$Y = \gamma W$ avec W cofibrant. Mais, alors, en utilisant un objet cylindre pour W , on obtient directement le résultat en appliquant le lemme fondamental de l'algèbre homotopique (X étant évidemment fibrant). \triangleleft

Raisonnement du petit objet

Pour démontrer l'existence de suffisamment d'injectifs dans certaines catégories abéliennes, plusieurs méthodes existent. Dans la catégorie des modules à gauche sur un anneau A , on peut montrer leur existence en utilisant la dualité de Pontryagin et en se ramenant au cas $A = \mathbb{Z}$. Ainsi, pour démontrer par exemple que la catégorie des faisceaux de Modules sur un espace topologique annelé possède assez d'injectifs, on peut plonger les germes dans des modules injectifs sur les germes du faisceau d'anneaux et prendre le faisceau des sections "discontinues". Cependant, dans [Grot] et [CE], une autre méthode est décrite et celle-ci est beaucoup plus générale puisqu'elle assure directement l'existence de suffisamment

d'injectifs dans beaucoup de catégories abéliennes. On se propose ici de décrire une généralisation de cette méthode pour construire des catégories de modèles. En effet, l'axiome le moins évident à vérifier en pratique est l'axiome **CM5**, et justement, le raisonnement du “petit objet” (et son analogue transfini dans le cas où les objets qui y interviennent ne sont pas de présentation finie (cf. définition 2.20)) sert à construire des factorisations fonctorielles (cf. théorème 2.28).

Définition 2.20. *Soit X un objet d'une catégorie \mathcal{C} possédant des limites inductives. On dit que X est de présentation finie si le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$ commute aux limites inductives filtrantes.*

Définition 2.21. *Soit I un ensemble ordonné filtrant et κ un cardinal⁽¹²⁾. On dit que I est grand devant κ si toute partie de I de cardinal inférieur ou égal à κ admet un majorant.*

Définition 2.22. [**SGA 4 I 9.2**] *Soit X un objet d'une catégorie \mathcal{C} possédant des limites inductives et κ un cardinal, on dit que X est κ -accessible si le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$ commute aux limites inductives indexées par les ensembles ordonnés filtrants grands devant κ .*

On dit que X est accessible s'il existe un cardinal κ tel que X soit κ -accessible.

On rappelle qu'un cardinal κ est dit successeur s'il existe un cardinal α tel que κ soit le plus petit cardinal strictement supérieur à α . Le lemme suivant établit l'existence de “grands” ensembles ordonnés.

Lemme 2.23. *Si κ est un cardinal et γ un cardinal infini successeur strictement supérieur à κ , alors l'ensemble ordonné γ est grand devant le cardinal κ .*

DÉMONSTRATION DU LEMME— Soit α le cardinal dont γ est le successeur. Pour démontrer le résultat, on peut clairement supposer que $\kappa = \alpha$. Soit X un ensemble de cardinal κ (par exemple $X = \kappa$). Soit $Y \subset \gamma$ une partie de cardinal $\leq \kappa$. Comme γ est un ordinal limite, pour tout $y \in Y$, $y + 1 \in \gamma$, or comme γ est le cardinal successeur de κ , l'ensemble $y + 1 = \{z \in \gamma, z \leq y\}$ est de cardinal inférieur ou égal à κ , on peut donc choisir une injection φ_y de $y + 1$ dans X .

Notons W l'ensemble $\{(y, u) \in Y \times \gamma, u \in y + 1\}$. Notons λ l'image de W dans γ par la seconde projection. On vérifie aussitôt que λ est un ordinal, dont le cardinal est inférieur ou égal à celui de W qui est lui-même inférieur ou égal à celui de $Y \times X$. Le cardinal de $Y \times X$ est majoré par le cardinal de $X \times X$ qui est le cardinal de X (c'est-à-dire κ) car X est un ensemble infini. Le cardinal de λ étant majoré par κ qui est un cardinal strictement plus petit que γ , l'ordinal λ est strictement inclus dans γ , ainsi $\lambda \in \gamma$. λ est donc un majorant de l'ensemble Y dans γ . \triangleleft

Définition 2.24. *Soient \mathcal{C} une catégorie possédant toutes les limites inductives et Φ un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ muni d'une transformation naturelle de foncteurs $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\lambda} \Phi$.*

Pour tout ordinal α , on définit par récurrence transfinie :

- un foncteur $\Phi^\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$,
- pour tout ordinal $\beta \leq \alpha$, un morphisme de foncteurs $\Theta_{\beta, \alpha} : \Phi^\beta \rightarrow \Phi^\alpha$, ces morphismes vérifiant la condition $\Theta_{\beta', \alpha} = \Theta_{\beta, \alpha} \circ \Theta_{\beta', \beta}$ pour tout $\beta' \leq \beta \leq \alpha$ et la condition $\Theta_{\alpha, \alpha} = \mathbf{Id}_{\Phi^\alpha}$, de sorte que :

- (1) $\Phi^0 = \mathbf{Id}_{\mathcal{C}}$;
- (2) Si α est un ordinal, alors $\Phi^{\alpha+1} = \Phi \circ \Phi^\alpha$, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, $\Theta_{\alpha, (\alpha+1), X} = \lambda_{\Phi^\alpha(X)}$, et pour tout ordinal $\beta < \alpha$, $\Theta_{\beta, (\alpha+1)} = \Theta_{\alpha, (\alpha+1)} \circ \Theta_{\beta, \alpha}$;
- (3) Si $\alpha \neq 0$ est un ordinal limite, alors pour tout $X \in \mathcal{C}$, $\Phi^\alpha(X) = \varinjlim_{\beta \in \alpha} \Phi^\beta(X)$, les éléments de α étant ordonnés par l'inclusion et les morphismes de transition du système inductif étant $\Theta_{\beta, \beta', X}$ pour $\beta \subset \beta'$, pour tout ordinal $\beta < \alpha$; $\Theta_{\beta, \alpha, X}$ est le morphisme canonique $\Phi^\beta(X) \rightarrow \Phi^\alpha(X)$.

Définition 2.25. *Soient \mathcal{C} une catégorie possédant toutes les limites inductives et $(S_\varphi \xrightarrow{\varphi} T_\varphi)_{\varphi \in B}$ une famille de morphismes de \mathcal{C} indexée par un ensemble B . Pour tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ dans \mathcal{C} , on*

⁽¹²⁾On rappelle qu'un ordinal est un ensemble α tel que la relation d'appartenance \in y induise une relation d'ordre (total) strict qui soit un bon ordre (i.e. toute partie non vide admet un minimum) tel que tout élément de α soit inclus dans α (i.e. α est un ensemble transitif). Ainsi, on utilisera implicitement la structure canonique d'ensemble ordonné dont est munie tout ordinal, et on rappelle que les ordinaux paramétrisent les classes d'isomorphismes d'ensembles bien ordonnés. Enfin, la relation d'équipotence définit une relation d'équivalence sur les ordinaux. Un cardinal est par définition un ordinal qui est le plus petit élément dans sa classe d'équipotence. Enfin, en supposant l'axiome du choix, les cardinaux paramétrisent les classes d'équipotence d'ensembles ; en effet, l'axiome du choix permet de mettre une structure d'ensemble bien ordonné sur tout ensemble. Un ordinal successeur est le plus petit ordinal strictement plus grand qu'un autre ordinal donné, les ordinaux limites étant les ordinaux non vides qui ne sont pas des ordinaux successeurs.

Soit κ un cardinal tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{B}$, l'objet $S_\varphi \in \mathcal{C}$ soit κ -accessible. Soit γ un ordinal limite qui est grand devant le cardinal κ .

Alors, pour tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ dans \mathcal{C} , le morphisme $\Phi_{\mathcal{B}}^\gamma(f) \xrightarrow{\Pi_f} Y$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes $\varphi \in \mathcal{B}$.

En outre, si les objets $(S_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{B}}$ sont de présentation finie, il suffit de prendre $\gamma = \omega = \aleph_0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Il s'agit de montrer qu'il existe un relèvement dans le carré commutatif suivant, où i et j sont quelconques et $\varphi \in \mathcal{B}$:

$$\begin{array}{ccc} S_\varphi & \xrightarrow{i} & \Phi_{\mathcal{B}}^\gamma \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \Pi_f \\ T_\varphi & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

Comme γ est un ordinal limite, $\Phi_{\mathcal{B}}^\gamma$ s'identifie à $\varinjlim_{\beta \in \gamma} \Phi_{\mathcal{B}}^\beta$. De plus, γ est grand devant κ et S_φ est κ -accessible, il existe donc un $\beta \in \gamma$ tel que i se factorise par $\Phi_{\mathcal{B}}^\beta$, d'où la possibilité de compléter le diagramme suivant en utilisant la définition de $\Phi_{\mathcal{B}}^{\beta+1}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ S_\varphi & \xrightarrow{\quad} & \Phi_{\mathcal{B}}^\beta & \xrightarrow{\quad} & \Phi_{\mathcal{B}}^\gamma \\ & \searrow \varphi & \downarrow & \nearrow & \downarrow \Pi_f \\ & & \Phi_{\mathcal{B}}^{\beta+1} & & \\ & \nearrow \varphi & & \searrow & \\ T_\varphi & \xrightarrow{\quad} & j & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array}$$

◁

Ensembles simpliciaux

Les ensembles simpliciaux jouent un rôle privilégié dans la théorie de l'homotopie. Non seulement ils fournissent un premier exemple de catégorie de modèles fermée, mais ils servent aussi à en construire d'autres comme celles qui interviendront dans la théorie homotopique des schémas.

Définition 2.29. On note Δ la catégorie dont les objets sont les entiers naturels (notés \underline{n} avec $n \in \mathbb{N}$) et telle que l'ensemble des morphismes de \underline{n} vers \underline{m} ($n, m \in \mathbb{N}$) soit l'ensemble des fonctions croissantes de $\{0, \dots, n\}$ vers $\{0, \dots, m\}$, la composition étant induite par la composition des fonctions croissantes.

Définition 2.30. La catégorie des ensembles simpliciaux $\Delta^{op} \mathcal{E}ns$ est la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur Δ . Plus généralement, si \mathcal{C} est une catégorie, la catégorie des objets simpliciaux dans \mathcal{C} est la catégorie des foncteurs covariants $\Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$, et on la note $\Delta^{op} \mathcal{C}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq i \leq n$, on note $d^i : \underline{n-1} \rightarrow \underline{n}$ l'unique application croissante injective évitant i . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i \leq n$, on note $s^i : \underline{n+1} \rightarrow \underline{n}$ l'unique application croissante surjective prenant deux fois la valeur i . Ces morphismes dans Δ sont respectivement appelés cofaces et codégénérescences. Les actions des cofaces (resp. codégénérescences) sur les ensembles simpliciaux sont appelées faces (resp. dégénérescences) et sont notées d_i (resp. s_i).

La catégorie Δ admet une présentation standard dont les générateurs sont les opérateurs de coface et de codégénérescence et dont les relations sont écrites par exemple dans [GJ, page 4].

Par le lemme de Yoneda, on dispose d'un foncteur pleinement fidèle $\Delta \rightarrow \Delta^{op} \mathcal{E}ns$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Δ^n l'image de \underline{n} par ce foncteur.

Dans un ensemble simplicial X , on appelle n -simplexe tout élément de $X(\underline{n}) = \mathbf{Hom}_{\Delta^{op} \mathcal{E}ns}(\Delta^n, X)$; on note simplement X_n l'ensemble $X(\underline{n})$. On dit qu'un n -simplexe est non dégénéré s'il n'est pas dans l'image des dégénérescences.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $|\Delta^n|$ le sous-ensemble de \mathbb{R}_+^{n+1} constitué des éléments (x_0, \dots, x_n) tels que $\sum_{i=0}^n x_i = 1$. On dispose de façon évidente d'un foncteur $|\Delta^\bullet| : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$ qui à \underline{n} associe $|\Delta^n|$, où \mathbf{Top} désigne la catégorie des espaces topologiques. On dit que $|\Delta^\bullet|$ est un objet cosimplicial dans \mathbf{Top} .

Définition 2.31. Soit X un espace topologique, on note \mathbf{SX} l'ensemble simplicial qui à \underline{n} associe l'ensemble $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, X)$ muni de la structure évidente de préfaisceau d'ensembles sur $\mathbf{\Delta}$. On appelle \mathbf{SX} l'ensemble simplicial singulier de X .

Proposition 2.32. Le foncteur $\mathbf{S} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ admet un adjoint à gauche $|-|$ appelé réalisation topologique.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — [GJ, proposition 2.2, page 7] ◁

Définition 2.33. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\partial\Delta^n$ l'ensemble simplicial qui est le sous-préfaisceau de Δ^n engendré par les simplexes non dégénérés de dimension $n - 1$ dans Δ^n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$, on note Λ_k^n le sous-ensemble simplicial de Δ^n engendré par les $n - 1$ -simplexes de Δ^n de la forme $d_i(\mathbf{Id}_n)$ pour $i \neq k$.

Définition 2.34. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une flèche dans \mathbf{Top} . On dit que f est une équivalence faible d'espaces topologiques si l'application $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ induite par f est bijective et si pour tout point $x \in X$ et $n \geq 1$, l'application évidente $\pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ est bijective.

Définition 2.35. Dans la catégorie $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$, une cofibration est un monomorphisme, une équivalence faible est un morphisme f tel que $|f|$ soit une équivalence faible d'espaces topologiques, et une fibration est un morphisme ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les inclusions $\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$.

Théorème 2.36. La catégorie $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ munie des cofibrations, fibrations et équivalences faibles de la définition précédente est une catégorie de modèles fermée. De plus, dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ un morphisme est une fibration triviale si et seulement s'il possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [GJ, théorèmes 11.2, 11.3, pages 61-62] ◁

On notera $\mathbf{Ho}(\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns)$ ou \mathbf{H}^{top} la catégorie homotopique associée à cette catégorie de modèles fermée.

Remarque 2.37. Un des théorèmes les plus importants de la topologie algébrique affirme que la catégorie $\mathbf{Ho}(\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns)$ est naturellement équivalente à la catégorie formée à partir de celle des espaces topologiques en inversant les équivalences faibles d'espaces topologiques. Cette catégorie est également équivalente à la catégorie à homotopie près des CW-complexes⁽¹³⁾.

Définition 2.38. Soient X et Y deux ensembles simpliciaux, on note $\mathbf{hom}(X, Y)$ l'ensemble simplicial $\underline{n} \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns}(X \times \Delta^n, Y)$.

Lemme 2.39.

- (1) On dispose d'un isomorphisme canonique, pour tous $X, Y, Z \in \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$:

$$\mathbf{hom}(X, \mathbf{hom}(Y, Z)) = \mathbf{hom}(X \times Y, Z)$$

- (2) Il existe une bijection canonique, pour tous $X, Y \in \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$:

$$\mathbf{hom}(X, Y)_0 = \mathbf{Hom}_{\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns}(X, Y)$$

- (3) L'axiome simplicial **SM7** est vérifié : pour toute cofibration $A \xrightarrow{i} B$ et toute fibration $X \xrightarrow{p} Y$ dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$, le morphisme canonique suivant est une fibration dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ qui est triviale si i ou p est de plus une équivalence faible :

$$\mathbf{hom}(B, X) \rightarrow \mathbf{hom}(A, X) \times_{\mathbf{hom}(A, Y)} \mathbf{hom}(B, Y)$$

⁽¹³⁾En effet, il existe une structure de catégorie de modèles fermée sur \mathbf{Top} dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'espaces topologiques pour laquelle tous les objets sont fibrants. En outre, les CW-complexes sont des objets cofibrants pour cette structure de catégorie de modèles fermée et tout espace topologique X a le type d'homotopie faible d'un CW-complexe (par exemple $|\mathbf{SX}|$), ce qui permet de conclure que la catégorie homotopique de la structure de catégorie de modèles sur \mathbf{Top} s'identifie bien à la catégorie à homotopie près des CW-complexes.

Foncteurs dérivés

En algèbre homologique, quand on dispose d'un foncteur additif $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ entre deux catégories abéliennes, on peut le faire agir “terme à terme” sur les catégories des complexes dans \mathcal{A} et \mathcal{B} . On sait qu'en général le foncteur obtenu ne préserve pas les quasi-isomorphismes de complexes *i.e.* F n'est pas toujours un foncteur exact. Néanmoins, si F est exact à gauche et que \mathcal{A} possède suffisamment d'injectifs, on peut définir un foncteur dérivé total à droite $\mathbf{R}F : \mathbf{D}^+\mathcal{A} \rightarrow \mathbf{D}^+\mathcal{B}$, obtenu par exemple en identifiant $\mathbf{D}^+\mathcal{A}$ à la catégorie à homotopie près des complexes bornés inférieurement dans \mathcal{A} constitués d'objets injectifs et en appliquant F terme à terme dans cette catégorie de complexes à homotopie près. Le but de cette partie est de faire la même chose dans le contexte des catégories de modèles.

La définition des foncteurs dérivés est liée aux “extensions de Kan” (voir [Mac]) :

Définition 2.40. Soit \mathcal{C} une catégorie munie d'un ensemble de flèches W et F un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ où \mathcal{A} est une catégorie arbitraire. On suppose que la catégorie localisée $\mathcal{C}[W^{-1}]$ “existe”, et on note γ le foncteur de localisation $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$. S'il existe, on appelle foncteur dérivé total à droite de F la donnée d'un foncteur $\mathbf{R}F : \mathcal{C}[W^{-1}] \rightarrow \mathcal{A}$ muni d'une transformation naturelle $\varepsilon : F \rightsquigarrow \mathbf{R}F \circ \gamma$, cette donnée devant vérifier la propriété universelle suivante : pour tout foncteur $G : \mathcal{C}[W^{-1}] \rightarrow \mathcal{A}$ muni d'une transformation naturelle $\varepsilon_G : F \rightsquigarrow G \circ \gamma$, il existe une unique transformation naturelle $\theta : \mathbf{R}F \rightsquigarrow G$ telle que $\varepsilon_G = (\theta \star \gamma) \circ \varepsilon$.

Lemme 2.41. (Ken Brown's lemma) Soit $(\mathcal{C}, \text{Fib}, \text{Cof}, W)$ une catégorie de modèles fermée, \mathcal{A} une catégorie quelconque et F un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- F transforme équivalences faibles entre objets fibrants en isomorphismes ;
- F transforme fibrations triviales entre objets fibrants en isomorphismes.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Ce lemme est une conséquence formelle du lemme général suivant. \triangleleft

Lemme 2.42. Dans une catégorie de modèles fermée, tout morphisme entre objets fibrants peut s'écrire $p \circ q$ où p est une fibration et q est un inverse à droite d'une fibration triviale.

DÉMONSTRATION DU LEMME — La démonstration de l'énoncé dual se trouve dans [GJ, lemme 8.4, page 123]. \triangleleft

Proposition 2.43. Sous les conditions équivalentes du lemme 2.41, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ admet un foncteur dérivé total à droite $(\mathbf{R}F : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}, \varepsilon : F \rightsquigarrow \mathbf{R}F \circ \gamma)$. De plus, si X est un objet fibrant de \mathcal{C} , le morphisme $F(X) \rightarrow \mathbf{R}F(X)$, induit par ε est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Pour tout objet X de \mathcal{C} , on choisit un morphisme $X \xrightarrow{\alpha_X} X_f$ avec α_X cofibration triviale et X_f fibrant. On pose $H(X) = F(X_f)$. Il s'agit, dans un premier temps, de munir H d'une structure de foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. Pour cela, considérons un morphisme $X \xrightarrow{g} Y$ dans \mathcal{C} . Il résulte de CM4 qu'il existe un morphisme g' rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ X_f & \xrightarrow{g'} & Y_f \end{array}$$

On pose alors $H(g) = F(g')$. Vérifions que cette définition est indépendante du choix de g' . On choisit un objet chemin pour Y_f :

$$\begin{array}{ccc} Y_f & & \\ \sigma \downarrow & \searrow \Delta & \\ \hat{Y}_f & \xrightarrow{(p_0, p_1)} & Y_f \times Y_f \end{array}$$

Si g'_0 et g'_1 sont deux tels relèvements, en utilisant l'axiome **CM4**, on construit une homotopie à droite h entre g'_0 et g'_1 :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma \circ \alpha_X \circ g} & \hat{Y}_f \\ \alpha_X \downarrow & \nearrow h & \downarrow (p_0, p_1) \\ X_f & \xrightarrow{(g'_0, g'_1)} & Y_f \times Y_f \end{array}$$

On en déduit que $g'_0 = p_0 \circ h$ et que $g'_1 = p_1 \circ h$. Pour montrer que $F(g'_0) = F(g'_1)$, il suffit de vérifier que $F(p_0) = F(p_1)$. Or, $F(p_0)$ et $F(p_1)$ sont deux inverses à gauche de $F(\sigma)$ qui est un isomorphisme car σ est une équivalence faible entre objets fibrants (\hat{Y}_f est fibrant car la projection $\hat{Y}_f \rightarrow \bullet$ est la composée de (p_0, p_1) , qui est une fibration avec la projection $Y_f \times Y_f \rightarrow \bullet$ qui est une fibration car le produit de deux objets fibrants est fibrant). On vérifie alors aisément que H est un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. De plus, il transforme les équivalences faibles dans \mathcal{C} en isomorphismes de \mathcal{A} . Donc, par la propriété universelle de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$, il existe un unique foncteur, noté $\mathbf{RF} : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$, tel que $H = \mathbf{RF} \circ \gamma$. On définit un morphisme de foncteurs $\varepsilon : F \rightsquigarrow H = \mathbf{RF} \circ \gamma$ en posant $\varepsilon_X = F(\alpha_X)$.

Il s'agit maintenant d'établir la propriété universelle de $(\mathbf{RF}, \varepsilon)$, l'unicité à isomorphisme unique près étant comme de coutume évidente. Soit G un foncteur $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$ muni d'une transformation naturelle $\varepsilon_G : F \rightsquigarrow G \circ \gamma$. Pour tout objet X de \mathcal{C} , il existe un unique morphisme $\delta_X : \mathbf{RF}(\gamma X) \rightarrow G(\gamma X)$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\alpha_X)} & \mathbf{RF}(\gamma X) \\ \varepsilon_G(X) \downarrow & \nearrow \delta_X & \downarrow \varepsilon_G(X_f) \\ G(\gamma X) & \xrightarrow{G(\alpha_X)} & G(\gamma X_f) \end{array}$$

Il est immédiat que δ définit un morphisme de foncteurs $\mathbf{RF} \circ \gamma \rightsquigarrow G \circ \gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. Compte tenu de la construction de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$, on sait que tout morphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ entre deux objets γX et γY peut s'écrire comme une suite de morphismes de la forme γf avec f morphisme dans \mathcal{C} ou de la forme $(\gamma \sigma)^{-1}$ où σ est une équivalence faible dans \mathcal{C} . Par conséquent, δ définit en fait un morphisme de foncteurs $\mathbf{RF} \rightsquigarrow \gamma : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$. Par construction, on a $\varepsilon_G = (\delta \star \gamma) \circ \varepsilon$. On vérifie très facilement que δ est l'unique transformation naturelle $\theta : \mathbf{RF} \rightsquigarrow G$ telle que $\varepsilon_G = (\theta \star \gamma) \circ \varepsilon$. \triangleleft

La proposition et les lemmes précédents admettent des versions duales, on peut ainsi définir la notion de foncteur dérivé total à gauche d'un foncteur F satisfaisant les hypothèses duales à celles du lemme 2.41 et on le note \mathbf{LF} . On remarquera que la propriété universelle vérifiée par le foncteur dérivé total ne dépend que de la notion d'équivalence faible dans la catégorie de modèles \mathcal{C} et pas des notions de cofibration et de fibration.

Définition 2.44. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories de modèles fermées, $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ deux foncteurs formant un couple de foncteurs adjoints (G, F) . On dit que (G, F) est une adjonction de Quillen si G préserve les cofibrations et F les fibrations. On dit que (G, F) est une équivalence de Quillen si de plus pour tout objet cofibrant X de \mathcal{D} et tout objet fibrant Y de \mathcal{C} , si $X \xrightarrow{f} FY$ et $GX \xrightarrow{g} Y$ sont deux morphismes se correspondant par l'adjonction (G, F) , alors f est une équivalence faible dans \mathcal{D} si et seulement si g est une équivalence faible dans \mathcal{C} .

Si (G, F) est un couple de foncteurs adjoints entre deux catégories de modèles, alors, en vertu du lemme 2.7, G préserve les cofibrations si et seulement si F préserve les fibrations triviales et F préserve les fibrations si et seulement si G préserve les cofibrations triviales.

Le lemme 2.41 admet le corollaire suivant :

Proposition 2.45. Si (G, F) est une adjonction de Quillen, alors G préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants et F préserve les équivalences faibles entre objets fibrants.

Définition 2.46. On note $\mathbf{LG} : \mathbf{Ho}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ (resp. $\mathbf{RF} : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$) le foncteur dérivé total à gauche (resp. à droite) du foncteur $\gamma \circ G : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ (resp. $\gamma \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$).

Théorème 2.47. Si (G, F) est une adjonction de Quillen, alors les foncteurs $(\mathbf{LG}, \mathbf{RF})$ forment un couple de foncteurs adjoints. De plus, \mathbf{LG} et \mathbf{RF} constituent des équivalences de catégories (nécessairement quasi-inverses l'une de l'autre) si et seulement si (G, F) est une équivalence de Quillen.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Soit A un objet de \mathcal{D} et B un objet de \mathcal{C} . Soit $A_c \longrightarrow A$ une fibration triviale avec A_c cofibrant et $B \longrightarrow B_f$ une cofibration triviale avec B_f fibrant.

$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(\mathbf{L}G\gamma A, \gamma B)$ s'identifie à $\pi(GA_c, B_f)$ (GA_c étant cofibrant puisque G préserve les cofibrations et l'objet initial). Comme G préserve les objets cylindres d'objets cofibrants, on obtient que l'adjonction (G, F) induit une bijection $\pi(GA_c, B_f) = \pi(A_c, FB_f)$ (FB_f étant fibrant car F préserve les fibrations et l'objet final), et $\pi(A_c, FB_f)$ s'identifie enfin à $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(\gamma A, \mathbf{R}F\gamma B)$. On vérifie aussitôt que cette bijection $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(\mathbf{L}G\gamma A, \gamma B) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(\gamma A, \mathbf{R}F\gamma B)$ est bifonctorielle par rapport à A et B dans \mathcal{C} et \mathcal{D} . De même que dans la démonstration de la proposition 2.43, on sait que cela implique que la correspondance précédente est bifonctorielle par rapports aux morphismes dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ et dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{D})$. Ainsi, $(\mathbf{L}G, \mathbf{R}F)$ est un couple de foncteurs adjoints.

Dans un couple de foncteurs adjoints, l'adjoint à gauche est une équivalence de catégories si et seulement si l'adjoint à droite est une équivalence de catégories, et dans ce cas, ces deux foncteurs forment des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.

Supposons que (V, U) soit une équivalence de Quillen. Il s'agit de montrer que les morphismes canoniques de foncteurs $\mathbf{Id}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{D})} \rightsquigarrow \mathbf{R}F \circ \mathbf{L}G$ et $\mathbf{L}G \circ \mathbf{R}F \rightsquigarrow \mathbf{Id}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}$ sont des isomorphismes. Considérons le morphisme canonique $\gamma X \longrightarrow \mathbf{R}F(\mathbf{L}G\gamma X)$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut supposer que X est cofibrant. Dans ce cas, ce morphisme est l'image par γ du morphisme $X \longrightarrow F((GX)_f)$ où $(GX)_f$ désigne un remplacement fibrant de GX . Par hypothèse, ce morphisme est une équivalence faible si et seulement si $GX \longrightarrow (GX)_f$ est une équivalence faible, ce qui est certain, d'où le premier isomorphisme voulu. Le second se traite de la même façon. Donc, $\mathbf{R}F$ et $\mathbf{L}G$ constituent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.

Réciproquement, supposons que $\mathbf{R}F$ et $\mathbf{L}G$ soient des équivalences de catégories. Soient X un objet cofibrant de \mathcal{D} et Y un objet fibrant de \mathcal{C} . Soient $X \xrightarrow{f} FY$ et $GX \xrightarrow{g} Y$ deux morphismes se correspondant par adjonction. $X \xrightarrow{f} FY$ est une équivalence faible si et seulement si $\gamma X \longrightarrow \mathbf{R}F\gamma Y$ est un isomorphisme, ce qui équivaut, car $(\mathbf{L}G, \mathbf{R}F)$ sont quasi-inverses l'un de l'autre, à ce que $\mathbf{L}G\gamma X \longrightarrow \gamma Y$ soit un isomorphisme, ce qui est équivalent au fait que $GX \xrightarrow{g} Y$ soit une équivalence faible. \triangleleft

Limites et colimites homotopiques

Cas général

Soit \mathcal{J} une petite catégorie. Notons $\mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)$ la catégorie des foncteurs $\mathcal{J} \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$.

Définition 2.48. Soit $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ un morphisme dans $\mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)$. On dit que f est une équivalence faible (resp. une fibration, resp. une fibration triviale) point par point si si pour tout $i \in \mathcal{J}$, $f(i) : \mathcal{F}(i) \longrightarrow \mathcal{G}(i)$ est une équivalence faible (resp. une fibration, resp. une fibration triviale) dans $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$.

Lemme 2.49. La catégorie $\mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)$, munie des équivalences faibles point par point, des fibrations point par point, et des morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales point par point comme cofibrations, est une catégorie de modèles fermée.

DÉMONSTRATION DU LEMME — La vérification des axiomes **CM1**⁺, **CM2** et **CM3** est immédiate. En admettant provisoirement **CM5**, la vérification de **CM4** résulte aussitôt de l'astuce de Joyal (duale). Il suffit donc de vérifier l'axiome **CM5**⁺. Pour tout $i \in \mathcal{J}$, on construit très facilement un adjoint à gauche $K \longmapsto K_i$ au foncteur $\mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$ qui à \mathcal{F} associe $\mathcal{F}(i)$. Notons \mathcal{A} l'ensemble des morphismes $\Lambda_k^n \longrightarrow \Delta^n$ et \mathcal{A}' l'ensemble des morphismes $\partial\Delta^n \longrightarrow \Delta^n$. Il résulte du théorème 2.36 qu'un morphisme dans $\mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)$ est une fibration (resp. fibration triviale) point par point si et seulement s'il a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de la forme φ_i pour $i \in \mathcal{J}$ et φ dans \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}'). L'existence des deux types de factorisations fonctorielles résulte alors de l'argument du petit objet (théorème 2.28). \triangleleft

On rappelle que l'on note $\lim_{\mathcal{J}} : \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$ le foncteur adjoint à droite du foncteur "foncteur constant" $\Delta^{op}\mathcal{E}ns \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)$.

Définition 2.50. Si \mathcal{J} est une petite catégorie. On définit le nerf $\mathbf{N}\mathcal{J}$ de \mathcal{J} comme étant l'ensemble simplicial tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{N}\mathcal{J})_n$ soit l'ensemble des foncteurs $\Delta^n \longrightarrow \mathcal{J}$ (Δ^n étant ici la catégorie canoniquement associée à l'ensemble ordonné $\{0, \dots, n\}$), la structure d'ensemble simplicial étant induite par la structure évidente d'objet simplicial de Δ^\bullet dans la catégorie des petites catégories.

Il est essentiellement sorital que le foncteur $\mathbf{N}-$ de la catégorie des petites catégories vers la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$ est pleinement fidèle et que si f et g sont deux foncteurs $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ avec \mathcal{J} et \mathcal{J} deux petites catégories, il existe une bijection canonique entre l'ensemble des morphismes de foncteurs $H : f \rightsquigarrow g$ et l'ensemble des morphismes d'ensembles simpliciaux $H : \Delta^1 \times \mathbf{N}\mathcal{J} \rightarrow \mathbf{N}\mathcal{J}$ tels que les morphismes $H_0, H_1 : \mathbf{N}\mathcal{J} \rightarrow \mathbf{N}\mathcal{J}$ (induits par les deux inclusions $\Delta^0 \rightarrow \Delta^1$) soient respectivement $\mathbf{N}f$ et $\mathbf{N}g$.

Il résulte formellement de ce qui précède que si (G, F) est un couple de foncteurs adjoints $G : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ et $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$, alors les morphismes $\mathbf{N}G$ et $\mathbf{N}F$ induisent des équivalences d'homotopie entre $\mathbf{N}\mathcal{J}$ et $\mathbf{N}\mathcal{J}$. En particulier, le nerf d'une catégorie ayant un objet initial (ou un objet final) est contractile.

Définition 2.51. *Le foncteur $\Delta^{op}\mathcal{E}ns \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)$ qui à K associe le foncteur évident $i \mapsto K \times \mathbf{N}(I/i)$ admet un adjoint à droite $\text{holim}_{\mathcal{J}} : \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns) \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$.*

On vérifie facilement que $\text{holim}_{\mathcal{J} \times \mathcal{J}} \cong \text{holim}_{\mathcal{J}} \text{holim}_{\mathcal{J}} \cong \text{holim}_{\mathcal{J}} \text{holim}_{\mathcal{J}}$ et que l'on a un morphisme canonique $\lim_{\mathcal{J}} \rightarrow \text{holim}_{\mathcal{J}}$.

Théorème 2.52. *Le foncteur $\text{holim}_{\mathcal{J}}$ et son adjoint à gauche forment une adjonction de Quillen entre les catégories $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$ et $\mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)$. De plus, $\mathbf{R}\text{holim}_{\mathcal{J}} : \mathbf{H}o(\mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)) \rightarrow \mathbf{H}o(\Delta^{op}\mathcal{E}ns)$ est le foncteur dérivé total à droite du foncteur $\gamma \circ \lim_{\mathcal{J}} : \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns) \rightarrow \mathbf{H}o(\Delta^{op}\mathcal{E}ns)$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Voir [BK]. ◁

Définition 2.53. *Pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)$, il existe un ensemble simplicial $\text{hocolim}_{\mathcal{J}}\mathcal{F}$, unique à isomorphisme unique près, tel que l'on dispose d'un isomorphisme fonctoriel pour tout $Y \in \Delta^{op}\mathcal{E}ns$:*

$$\text{hom}\left(\text{hocolim}_{\mathcal{J}}\mathcal{F}, Y\right) = \text{holim}_{\mathcal{J}}\text{hom}(\mathcal{F}(-), Y)$$

On dispose d'un morphisme canonique $\text{hocolim}_{\mathcal{J}} \rightarrow \lim_{\mathcal{J}}$. Par ailleurs, $\text{hocolim}_{\mathcal{J}}$ est le foncteur adjoint à gauche du foncteur qui à un ensemble simplicial K associe le foncteur $\mathcal{J} \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$ qui à i associe $\text{hom}(\mathbf{N}(i \setminus \mathcal{J}), K)$.

Proposition 2.54. *$\text{hocolim}_{\mathcal{J}} : \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns) \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$ préserve les cofibrations point par point et les équivalences faibles point par point.*

De plus, le foncteur induit $\mathbf{L}\text{hocolim}_{\mathcal{J}} : \mathbf{H}o(\mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)) \rightarrow \mathbf{H}o(\Delta^{op}\mathcal{E}ns)$ est le foncteur dérivé total à gauche de $\gamma \circ \lim_{\mathcal{J}} : \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns) \rightarrow \mathbf{H}o(\Delta^{op}\mathcal{E}ns)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — La première assertion résulte formellement, en utilisant l'axiome simplicial SM7 et des adjonctions, du théorème précédent sur les limites homotopiques. Le fait que ce soit le foncteur dérivé de $\gamma \circ \lim_{\mathcal{J}}$ est expliqué dans [Mor1, pages 102-103]. ◁

Corollaire 2.55. *Pour toute catégorie filtrante à droite \mathcal{J} et tout foncteur $\mathcal{F} \in \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{E}ns)$, le morphisme canonique $\lim_{\mathcal{J}}\mathcal{F} \rightarrow \text{hocolim}_{\mathcal{J}}\mathcal{F}$ est une équivalence faible.*

Proposition 2.56. *Pour tout $X \in \Delta^{op}\mathcal{E}ns$, on peut définir un foncteur $X : \Delta^{op} \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$ qui à \underline{n} associe l'ensemble X_n vu comme ensemble simplicial de dimension 0. Il existe alors un morphisme fonctoriel $\text{hocolim}_{\Delta^{op}} X \rightarrow X$ et c'est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — [BK, XII 3.4] ◁

Carrés homotopiquement cartésiens

On considère ici deux catégories d'indices : $\Delta^1 \times \Delta^1$ et la sous-catégorie pleine \mathcal{E} de $\Delta^1 \times \Delta^1$ dont les objets sont tous les objets de $\Delta^1 \times \Delta^1$ à l'exception de $(0, 0)$. Notons $j : \mathcal{E} \rightarrow \Delta^1 \times \Delta^1$ cette inclusion et $i : \bullet \rightarrow \Delta^1 \times \Delta^1$ le foncteur de la catégorie à une flèche vers $\Delta^1 \times \Delta^1$ envoyant l'unique objet de \bullet sur $(0, 0)$.

Définition 2.57. *Soit \mathcal{F} un objet de $\mathbf{H}o(\mathcal{H}om(\Delta^1 \times \Delta^1, \Delta^{op}\mathcal{E}ns))$. On dit que \mathcal{F} est homotopiquement cartésien si le morphisme canonique $i^*\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}\lim_{\mathcal{E}} j^*\mathcal{F}$ est un isomorphisme dans $\mathbf{H}o(\Delta^{op}\mathcal{E}ns)$.*

Lemme 2.58.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

Dans la catégorie $\Delta^{op}Ens$, une condition nécessaire et suffisante sur un carré de cette forme pour être homotopiquement cartésien est qu'il existe une factorisation $B \twoheadrightarrow B' \twoheadrightarrow D$ avec $B \twoheadrightarrow B'$ une équivalence faible et $B' \twoheadrightarrow D$ une fibration telle que le morphisme évident $A \twoheadrightarrow B' \times_D C$ soit une équivalence faible. Si tel est le cas, toute factorisation conviendra.

Catégories de modèles fermées propres

La notion de carré homotopiquement cartésien vue dans le paragraphe précédent pour les ensembles simpliciaux peut se généraliser à des catégories de modèles plus générales, à condition d'ajouter un axiome supplémentaire.

Définition 2.59. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée. On dit que \mathcal{C} est propre à droite si l'image réciproque d'une équivalence faible par une fibration est une équivalence faible. Dualement, \mathcal{C} est dite propre à gauche si \mathcal{C}^{op} est propre à droite, c'est-à-dire que l'image directe d'une équivalence faible par une cofibration est une équivalence faible. On dit que \mathcal{C} est propre si \mathcal{C} est propre à gauche et à droite.

Si \mathcal{C} est propre à droite, on définit un carré homotopiquement cartésien dans \mathcal{C} comme étant un carré satisfaisant le critère du lemme 2.58. On montre alors qu'un carré est homotopiquement cartésien si et seulement si son "transposé" est homotopiquement cartésien, et on peut aussi définir le foncteur dérivé du foncteur $\varinjlim_{\mathcal{E}} : \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ de sorte que $\mathbf{R}\varinjlim_{\mathcal{E}}$ "coïncide" avec $\varinjlim_{\mathcal{E}}$ pour les diagrammes dont une des deux flèches est une fibration. On peut aussi établir que la juxtaposition de deux carrés homotopiquement cartésiens est homotopiquement cartésien.

Théorème 2.60. La catégorie de modèles fermée $\Delta^{op}Ens$ est propre.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [GJ, corollaire 8.6, page 126]

◁

Correspondance de Dold-Kan et cohomologie singulière

Nous allons rappeler comment on peut construire un adjoint à droite au foncteur $\mathbf{H}^{top} \rightarrow \mathbf{D}^{\leq 0}(Ab)$ induit par le foncteur qui à un ensemble simplicial X associe le complexe $C_*(X)$, $\mathbf{D}^{\leq 0}(Ab)$ désignant la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $\mathbf{D}(Ab)$ formée des complexes concentrés en degrés ≤ 0 .

Correspondance de Dold-Kan

Notation 2.61. Notons $\mathbf{comp}_+(Ab)$ la catégorie des complexes de groupes abéliens (notés homologiquement) concentrés en degrés ≥ 0 .

Définition 2.62. Soit $A \in \Delta^{op}Ab$, on appelle complexe de Moore associé à A l'objet de $\mathbf{comp}_+(Ab)$ (noté abusivement A) dont la composante de degré $n \in \mathbb{N}$ est A_n et tel que pour tout $n \geq 1$, le morphisme de bord $A_n \xrightarrow{\partial} A_{n-1}$ soit $\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$. On note $NA \in \mathbf{comp}_+(Ab)$ le sous-complexe de A tel que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $NA_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker d_i \subset A_n$. On dit que NA est le complexe normalisé de A .

Si X est un ensemble simplicial, on note $C_*(X) \in \mathbf{comp}_+(Ab)$ le complexe de Moore de l'ensemble simplicial $\mathbb{Z}X$, où $\mathbb{Z}-$ désigne l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\Delta^{op}Ab \rightarrow \Delta^{op}Ens$.

Théorème 2.63. (Correspondance de Dold-Kan)

- Le foncteur $N : \Delta^{op}Ab \rightarrow \mathbf{comp}_+(Ab)$ est une équivalence de catégories ;
- L'inclusion canonique $NA \rightarrow A$ dans $\mathbf{comp}_+(Ab)$ est une équivalence d'homotopie (fonctorielle) pour tout $A \in \Delta^{op}Ab$.

On note $\Gamma : \mathbf{comp}_+(Ab) \rightarrow \Delta^{op}Ab$ un quasi-inverse de N . Le foncteur Γ sera aussi noté K .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [GJ, corollaire 2.3, page 149]

◁

On peut généraliser cette correspondance de Dold-Kan en remplaçant la catégorie des groupes abéliens par une catégorie abélienne quelconque.

Lemme 2.64.

- (1) *Le foncteur $X \mapsto C_*(X)$ transforme équivalences faibles en quasi-isomorphismes ;*
- (2) *Tout groupe simplicial est un ensemble simplicial fibrant ;*
- (3) *Pour tout groupe abélien simplicial A et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme canonique $\pi_n(A, 0) = H_n(NA)$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Le point (1) est classique et est un bon exercice. Le point (2) est démontré dans [GJ, lemme 3.4, page 12] et implique presque formellement le point (3) qui est établi dans [GJ, corollaire 2.7, page 153]. \triangleleft

On en déduit que dans $\Delta^{op}Ab$, un morphisme induit un quasi-isomorphisme au niveau des complexes de Moore associés si et seulement si c'est une équivalence faible quand on oublie la structure de groupe abélien.

Corollaire 2.65. *Si, dans la catégorie $\Delta^{op}Ab$, on décrète qu'une équivalence faible (resp. une fibration) est un morphisme induisant une équivalence faible (resp. une fibration) après application du foncteur d'oubli $\Delta^{op}Ab \rightarrow \Delta^{op}Ens$ et qu'une cofibration est un morphisme ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales dans $\Delta^{op}Ab$, alors $\Delta^{op}Ab$ est une catégorie de modèles fermée propre.*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — La vérification des axiomes **CM1**⁺, **CM2** et **CM3** est évidente. Modulo **CM5**, **CM4** résulte de l'astuce de Joyal (cf. lemme 2.6). L'axiome **CM5**⁺ résulte facilement de l'argument du petit objet (cf. théorème 2.28). La propriété à droite résulte formellement de la propriété à droite de $\Delta^{op}Ens$ (ou encore plus formellement du fait que tous les objets de $\Delta^{op}Ab$ soient fibrants). La propriété à gauche résulte du fait que les cofibrations dans $\Delta^{op}Ab$ sont des monomorphismes et de l'existence de suites exactes longues en homologie associées à des suites exactes courtes de complexes. \triangleleft

D'après la correspondance de Dold-Kan, on en déduit l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée⁽¹⁴⁾ propre sur $\mathbf{comp}_+(Ab)$.

Théorème 2.66. *Le foncteur "complexe singulier normalisé" $N\mathbb{Z}- : \Delta^{op}Ens \rightarrow \mathbf{comp}_+(Ab)$ admet un adjoint à droite $F : \mathbf{comp}_+(Ab) \rightarrow \Delta^{op}Ens$. Pour les structures de catégories de modèles fermées envisagées, $(N\mathbb{Z}-; \Gamma)$ est une adjonction de Quillen. De plus, $N\mathbb{Z}-$ et Γ préservent les équivalences faibles. On dispose ainsi d'un couple de foncteurs adjoints $C_* : \mathbf{H}^{top} \rightarrow \mathbf{D}^{\leq 0}(Ab)$, $\Gamma : \mathbf{D}^{\leq 0}(Ab) \rightarrow \mathbf{H}^{top}$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — On a vu que les foncteurs $C_*(-), N\mathbb{Z}- : \Delta^{op}Ens \rightarrow \mathbf{comp}_+(Ab)$ préservent les équivalences faibles et que le morphisme canonique $N\mathbb{Z}- \rightarrow C_*(-)$ induit un isomorphisme de foncteurs $\mathbf{H}^{top} \rightarrow \mathbf{D}^{\leq 0}(Ab)$. D'après la correspondance de Dold-Kan, il suffit donc d'étudier l'adjonction $(\mathbb{Z}-, i)$ au niveau des catégories de modèles $\Delta^{op}Ab$ et $\Delta^{op}Ens$, i désignant le foncteur d'oubli $\Delta^{op}Ab \rightarrow \Delta^{op}Ens$. Comme par définition i préserve les fibrations et les équivalences faibles, $(\mathbb{Z}-, i)$ est une adjonction de Quillen, d'où le résultat. \triangleleft

Cohomologie singulière

Définition 2.67. *Pour tout groupe abélien G , pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \Delta^{op}Ens$, on note $\mathbf{H}^n(X; G)$ le n -ième objet de cohomologie du complexe $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X); G)$. Ces groupes forment la cohomologie singulière de X à coefficients dans G .*

$C_*(X)$ étant un complexe de groupes abéliens libres, $\mathbf{H}^n(X; G)$ est le n -ième objet de cohomologie de l'objet $\mathbf{RHom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X); G) \in \mathbf{D}(Ab)$, c'est-à-dire $\mathbf{Hom}_{\mathbf{D}^{\leq 0}(Ab)}(C_*(X); G[n])$. L'adjonction du théorème 2.66 implique le théorème suivant.

Théorème 2.68. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout groupe abélien G , il existe un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathbf{H}^{top} \rightarrow Ab$, pour tout $X \in \mathbf{H}^{top}$, où $K(G, n) = \Gamma(G[n])$:*

$$\mathbf{H}^n(X; G) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}^{top}}(X; K(G, n))$$

⁽¹⁴⁾On peut montrer que dans $\mathbf{comp}_+(Ab)$, un morphisme $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ est une cofibration si et seulement si f est un monomorphisme et que $\text{coker } f$ est projectif terme à terme, et que f est une fibration si et seulement si pour tout $n \geq 1$, $X_n \rightarrow Y_n$ est surjectif (cf. [GJ, lemme 2.1, page 155]), les équivalences faibles étant les quasi-isomorphismes.

Remarque 2.69. *Nous pourrions aussi construire une adjonction similaire dans le contexte pointé, en utilisant cette fois-ci le foncteur d'oubli $Ab \rightarrow \mathcal{E}ns_{\bullet}$ et en remplaçant le foncteur $X \mapsto \mathbb{Z}X$ (resp. $X \mapsto C_{\star}(X)$) par le foncteur $(X, x) \mapsto \mathbb{Z}X/\mathbb{Z}x$ (resp. $(X, x) \mapsto \tilde{C}_{\star}(X, x)$), compte tenu de l'isomorphisme évident $C_{\star}(X) = \tilde{C}_{\star}(X_+)$ pour tout $X \in \mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$. Ainsi, l'adjonction entre les catégories $\mathbf{D}^{\leq 0}(Ab)$ et \mathbf{H}^{top} se "factorise" par $\mathbf{H}_{\bullet}^{top}$.*

Cette remarque implique le corollaire suivant :

Corollaire 2.70. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout groupe abélien G , il existe un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathbf{H}_{\bullet}^{top} \rightarrow Ab$, pour tout $X \in \mathbf{H}_{\bullet}^{top}$, où $K(G, n) = \Gamma(G[n])$:*

$$\tilde{\mathbf{H}}^n(X; G) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\bullet}^{top}}(X; K(G, n))$$

Ainsi, le seul groupe d'homotopie non trivial de $K(G, n)$ est $\pi_n(K(G, n))$ qui est canoniquement isomorphe à G .

Faisceaux simpliciaux

Il va maintenant s'agir de construire deux structures de catégorie de modèles fermée sur la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, la construction de la seconde structure nécessitant la connaissance de la première. Cette première structure, que nous appellerons structure simpliciale, désigne la structure de catégorie de modèles définie dans [Ja1] pour un site de Grothendieck quelconque, la catégorie homotopique correspondante ayant déjà été introduite dans certains travaux précédents, comme la thèse de Luc Illusie [Ill]. Dans l'étude de la structure simpliciale sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, il sera question d'une généralisation du théorème de Brown et Gersten [BG] qui aura des applications très utiles pour la construction de la théorie homotopique des schémas. La seconde structure, \mathbb{A}^1 -localisée ou "motivique", résultera alors, suivant la méthode utilisée dans [MV] de l'"inversion" de la projection $\mathbb{A}_S^1 \rightarrow S$.

Nous définirons ensuite une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie de faisceaux $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, que nous comparerons à la structure définie par Voevodsky dans [Voe2], et nous étudierons rapidement les variantes pointées. Enfin, nous ferons rapidement le lien entre cette théorie des faisceaux simpliciaux et celle, plus classique, de la cohomologie des faisceaux de groupes abéliens.

La structure simpliciale sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$

Équivalences faibles simpliciales

Dans cette partie, on fixe un site $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ possédant assez de points. On va définir une structure de catégorie de modèles sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$.

Définition 3.1. Soit $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{PreFais}(\mathcal{S})$ et un entier $n \geq 1$. On définit le n -ième préfaisceau d'homotopie de \mathcal{X} comme étant le préfaisceau d'ensembles $\Pi_n\mathcal{X}$ tel que pour tout objet $U \in \mathcal{C}$, $\Pi_n\mathcal{X}(U) = \{(\gamma, u), u \in \mathcal{X}(U)_0, \gamma \in \pi_n(\mathcal{X}(U), u)\}$, muni des morphismes de restriction évidents. On définit de façon évidente un morphisme de préfaisceaux d'ensembles $\Pi_n\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$. Le 0-ième préfaisceau d'homotopie de \mathcal{X} est le préfaisceau d'ensembles $\Pi_0\mathcal{X}$ tel que pour tout objet $U \in \mathcal{C}$, $\Pi_0\mathcal{X} = \pi_0(\mathcal{X}(U))$.

Soit $\mathcal{X} \in \mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ et $n \geq 0$. On note $\Pi_n^{\mathcal{J}}\mathcal{X} = a_{\mathcal{J}}(\Pi_n\mathcal{X})$. On dispose d'un morphisme fonctoriel de faisceaux $\Pi_n^{\mathcal{J}}\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$ pour $n \geq 1$.

Pour tout $n \geq 1$ et $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{PreFais}(\mathcal{S})$ (resp. $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$), le préfaisceau $\Pi_n\mathcal{X}$ (resp. le faisceau $\Pi_n^{\mathcal{J}}\mathcal{X}$) est un groupe au-dessus de \mathcal{X}_0 , abélien si $n \geq 2$.

Ainsi, si $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, pour tout $U \in \mathcal{C}$ et $n \geq 1$, $\Pi_n^{\mathcal{J}}\mathcal{X}(U)$ est un groupe au-dessus de l'ensemble $\mathcal{X}(U)_0$. En particulier, "au-dessus" de toute section $u \in \mathcal{X}(U)_0$, on dispose d'un groupe que l'on notera $\pi_{n,U}(\mathcal{X}, u)$.

Définition 3.2. Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, on dit que f est une équivalence faible simpliciale si

- (1) Le morphisme $\Pi_0^{\mathcal{J}}\mathcal{X} \xrightarrow{\Pi_0^{\mathcal{J}}f} \Pi_0^{\mathcal{J}}\mathcal{Y}$ est un isomorphisme ;
- (2) Pour tout $n \geq 1$, le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_n^{\mathcal{J}}\mathcal{X} & \xrightarrow{\Pi_n^{\mathcal{J}}f} & \Pi_n^{\mathcal{J}}\mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}_0 & \xrightarrow{f_0} & \mathcal{Y}_0 \end{array}$$

Lemme 3.3. Soit $\Phi : \mathcal{Fais}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{Ens}$ un foncteur fibre sur le site \mathcal{S} . Pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, il existe une bijection canonique $\Phi(\Pi_0^{\mathcal{J}}\mathcal{X}) \xrightarrow{\cong} \pi_0(\Phi(\mathcal{X}))$ et pour tout $n \geq 1$, l'application $\Phi(\Pi_n^{\mathcal{J}}\mathcal{X}) \rightarrow \Phi(\mathcal{X}_0)$ s'identifie canoniquement à l'application évidente $\bigsqcup_{f_{\Phi} \in \Phi(\mathcal{X}_0)} \pi_n(\Phi(\mathcal{X}), f_{\Phi}) \rightarrow \Phi(\mathcal{X}_0)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME — D'après le théorème 1.21, ce lemme résulte essentiellement de la commutation aux limites inductives filtrantes des foncteurs $\pi_n(-, \cdot)_{n \geq 1}$ de la catégorie des ensembles simpliciaux pointés vers les groupes et du foncteur $\pi_0(-)$ de la catégorie des ensembles simpliciaux vers les ensembles. \triangleleft

Proposition 3.4. *Soit $(\Phi_i)_{i \in I}$ une famille conservative de foncteurs fibres sur le site \mathcal{S} , et $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *f est une équivalence faible simpliciale ;*
- (2) *pour tout $i \in I$, $\Phi_i(f) : \Phi_i(\mathcal{X}) \rightarrow \Phi_i(\mathcal{Y})$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Cela résulte directement du lemme 3.3. \triangleleft

Corollaire 3.5. *Soit $(f^*, f_*) : \mathcal{Fais}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{Fais}(\mathcal{S}')$ un morphisme de topos (par exemple, un morphisme de sites $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$), \mathcal{S} et \mathcal{S}' possédant suffisamment de points. Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{\theta} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}')$. Si θ est une équivalence faible simpliciale, alors $f^*\theta$ est une équivalence faible simpliciale.*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — Pour tout foncteur fibre Φ de \mathcal{S} , $\Phi \circ f^*$ est un foncteur fibre de \mathcal{S}' , donc $\Phi(f^*\mathcal{X}) \rightarrow \Phi(f^*\mathcal{Y})$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux d'après la proposition 3.4. Donc $f^*\mathcal{X} \rightarrow f^*\mathcal{Y}$ est une équivalence faible simpliciale en vertu de la proposition 3.4. \triangleleft

La structure de catégorie de modèles fermée

Définition 3.6. *On note Cof_s la classe des monomorphismes dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, W_s la classe des équivalences faibles simpliciales et Fib_s la classe des morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathit{Cof}_s \cap \mathit{W}_s$. Les classes Cof_s et Fib_s sont respectivement appelées cofibrations (simpliciales) et fibrations simpliciales.*

Théorème 3.7. *$(\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}), \mathit{Cof}_s, \mathit{Fib}_s, \mathit{W}_s)$ est une catégorie de modèles fermée. De plus, les axiomes $\mathbf{CM1}^+$ et $\mathbf{CM5}^+$ sont vérifiés.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — La validité de l'axiome $\mathbf{CM1}^+$ est évidente. L'axiome $\mathbf{CM2}$ résulte de la proposition 3.4 et de la propriété du deux sur trois pour les équivalences faibles d'ensembles simpliciaux. Les monomorphismes sont stables par rétracte, les morphismes caractérisés par des propriétés de relèvement aussi. Donc pour vérifier l'axiome $\mathbf{CM3}$, il reste à remarquer, en utilisant la proposition 3.4, que les équivalences faibles simpliciales sont stables par rétracte puisque c'est le cas des équivalences faibles entre ensembles simpliciaux. Admettons un instant que l'axiome $\mathbf{CM5}$ soit vérifié, comme les fibrations simpliciales ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations simpliciales triviales, et que les monomorphismes dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ sont stables par composition et par co-changement de base (cette dernière assertion peut se vérifier par exemple sur les fibres), l'astuce de Joyal (lemme 2.6) permet de démontrer que l'axiome $\mathbf{CM4}$ est satisfait. Il ne reste donc qu'à établir $\mathbf{CM5}^+$.

Soit α un cardinal infini qui majore le cardinal de l'ensemble des parties de l'ensemble de toutes les flèches de la catégorie \mathcal{C} (ou plus précisément d'une petite sous-catégorie pleine équivalente à \mathcal{C}), qui majore le cardinal d'un ensemble $(\Phi_j)_{j \in J}$ de foncteurs fibres formant un système conservatif et qui majore le cardinal de l'ensemble des objets de la catégorie Vois_{Φ_j} pour tout $j \in J$.

Définition 3.8. *Soit $\mathcal{F} \in \mathit{PreFais}(\mathcal{S})$. On dit que \mathcal{F} est α -borné si pour tout objet $U \in \mathcal{C}$, le cardinal de $\mathcal{F}(U)$ est inférieur à α . On dit que $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathit{PreFais}(\mathcal{S})$ est α -borné si pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{X}_n est α -borné.*

Lemme 3.9. *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$. f est une fibration simpliciale si et seulement si f possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes i de $\Delta^{op}\mathit{PreFais}(\mathcal{S})$ dont le but est α -borné et tels que $a_{\mathcal{T}}(i) \in \mathit{W}_s$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ possédant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes i dans $\Delta^{op}\mathit{PreFais}(\mathcal{S})$ dont le but est α -borné et tels que $a_{\mathcal{T}}(i) \in \mathit{W}_s$.

On se donne un carré commutatif de la forme ci-dessous, où i est une inclusion quelconque $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B}$ dans $\Delta^{op}Pre\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ ⁽¹⁵⁾ telle que $a_{\mathcal{T}}(i) \in W_s$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow i & & \downarrow f \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

Pour démontrer qu'il existe un relèvement dans ce diagramme, d'après le lemme de Zorn, il suffit de montrer que si i n'est pas un isomorphisme, il existe un sous-préfaisceau simplicial \mathcal{B}' de \mathcal{B} , contenant strictement \mathcal{A} , tel que le morphisme $a_{\mathcal{T}}\mathcal{A} \rightarrow a_{\mathcal{T}}\mathcal{B}' \in W_s$ et tel qu'il existe un morphisme φ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow f \\ \mathcal{B}' & & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

Pour cela, il suffit de montrer le lemme 3.10. En effet, on peut appliquer ce résultat avec \mathcal{B}_0 le sous-préfaisceau simplicial de \mathcal{B} engendré par une section n'appartenant pas à \mathcal{A} , \mathcal{B}_0 étant évidemment α -borné. On obtient alors un diagramme cocartésien tel que la flèche de gauche possède la propriété de relèvement à gauche par rapport à f , d'où le relèvement escompté, puisque \mathcal{B}' est un sous-préfaisceau de \mathcal{B} contenant strictement \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_\omega \cap \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}_\omega & \longrightarrow & \mathcal{B}' \end{array}$$

◁

Lemme 3.10. *Soit $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B}$ un monomorphisme dans $\Delta^{op}Pre\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ tel que $a_{\mathcal{T}}(i) \in W_s$, et \mathcal{B}_0 un sous-préfaisceau simplicial α -borné de \mathcal{B} . Alors, il existe un sous-préfaisceau simplicial α -borné \mathcal{B}_ω de \mathcal{B} tel que l'inclusion $a_{\mathcal{T}}(\mathcal{B}_\omega \cap \mathcal{A}) \rightarrow a_{\mathcal{T}}(\mathcal{B}_\omega)$ soit une équivalence faible simpliciale.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — L'idée [Ja1, page 65] consiste à construire une suite croissante $(\mathcal{B}_q)_{q \geq 0}$ de sous-préfaisceaux α -bornés de \mathcal{B} , de la façon suivante : on veut que le défaut d'injectivité ou de surjectivité des morphismes induits au niveau de tous les groupes d'homotopie (ainsi que les π_0) des fibres (pour les foncteurs fibres $(\Phi_j)_{j \in J}$) par l'inclusion $\mathcal{B}_q \cap \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_q$ disparaisse au niveau correspondant pour l'inclusion $\mathcal{B}_{q+1} \cap \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_{q+1}$, en notant \mathcal{B}_{q+1} le sous-préfaisceau de \mathcal{B} engendré par les sections de \mathcal{B}_q et par un ensemble bien choisi de sections de \mathcal{B} . Ceci est possible, essentiellement car $a_{\mathcal{T}}(i)$ est une équivalence faible simpliciale et que tous les groupes d'homotopie (resp. π_0) intervenant ci-dessus sont de cardinal $\leq \alpha$ et que l'on n'en considère qu'un nombre majoré par le cardinal α .

Quand on considère la réunion $\mathcal{B}_\omega = \bigcup_{q \geq 0} \mathcal{B}_q$ qui est α -bornée, on obtient évidemment une équivalence faible simpliciale $a_{\mathcal{T}}(\mathcal{B}_\omega \cap \mathcal{A}) \rightarrow a_{\mathcal{T}}(\mathcal{B}_\omega)$. ◁

Définition 3.11. *Pour tout $U \in \mathcal{C}$, on note $K \mapsto K_U$ le foncteur adjoint à gauche du foncteur $\Delta^{op}Pre\mathcal{Fais}(\mathcal{S}) \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$ qui à \mathcal{F} associe $\mathcal{F}(U)$. C'est le foncteur "préfaisceau simplicial constant".*

Lemme 3.12. *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$. Si f possède la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les monomorphismes dans $\Delta^{op}Pre\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ dont le but est α -borné, alors f est une fibration simpliciale et une équivalence faible simpliciale.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — D'après le lemme 3.9, f est une fibration simpliciale. Pour tout $U \in \mathcal{C}$ et $n \geq 0$, le préfaisceau simplicial Δ_U^n est α -borné. Comme le morphisme canonique $\partial\Delta_U^n \rightarrow \Delta_U^n$ est un monomorphisme de but α -borné, par adjonction, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathcal{X}(U) \xrightarrow{f(U)} \mathcal{Y}(U)$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à l'inclusion $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$. Ainsi $\mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{Y}(U)$

⁽¹⁵⁾Il suffit de montrer le résultat pour tout monomorphisme i de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, mais la démonstration fait naturellement intervenir des préfaisceaux.

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. En passant aux fibres, on obtient que $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ est une équivalence faible simpliciale. \triangleleft

Lemme 3.13. *Tout objet $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ est accessible.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer deux faits :

- (1) pour toute petite catégorie \mathcal{C} , tout objet de la catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ des préfaisceaux d'ensembles sur \mathcal{C} est accessible ;
- (2) il existe un cardinal κ tel que le foncteur d'inclusion $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}) \longrightarrow \text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ commute aux limites inductives filtrantes indexées par les ensembles ordonnés filtrants grands devant κ .

On démontre (1) facilement en remarquant que si $\mathcal{X} \in \hat{\mathcal{C}}$ et que l'on note κ le cardinal de l'ensemble $\bigsqcup \mathcal{X}(U)$ (où la réunion disjointe est prise sur tous les morphismes dans \mathcal{C}), alors \mathcal{X} est κ -accessible.

$V \xrightarrow{f} U$

Pour démontrer (2), il suffit de montrer l'existence d'un cardinal κ tel que pour tout ensemble ordonné filtrant I grand devant κ et tout système inductif $(X_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, $\mathcal{L} = \left[U \longmapsto \lim_{i \in I} (X_i(U)) \right] \in \mathcal{Fais}(\mathcal{S})$. Tentons de trouver des conditions suffisantes sur κ pour que cette condition soit vérifiée. Pour cela, soit U un objet de \mathcal{C} et R un crible couvrant de U pour \mathcal{T} . Il s'agit de montrer que l'application évidente $\mathcal{L}(U) \longrightarrow \mathcal{L}(U)_R = \lim_{V \xrightarrow{f} U \in R} \mathcal{L}(V)$ est bijective. Notons $\mathcal{R} \in \text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ le préfaisceau tel que $\mathcal{R}(V)$ soit l'ensemble des morphismes $V \longrightarrow U$ de \mathcal{C} appartenant à R , pour tout $V \in \mathcal{C}$. Il est immédiat que $\mathcal{X}(U)_R$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{Hom}_{\text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})}(\mathcal{R}, \mathcal{X})$ pour tout $\mathcal{X} \in \text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$.

Supposons que \mathcal{R} soit κ -accessible dans la catégorie $\text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$. Pour tout $i \in I$, l'application $\mathbf{Hom}_{\text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})}(U, X_i) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})}(\mathcal{R}, X_i)$ est bijective, en passant à la colimite sur I , on obtient que l'application $\lim_{i \in I} \mathbf{Hom}_{\text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})}(U, X_i) \longrightarrow \lim_{i \in I} \mathbf{Hom}_{\text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})}(\mathcal{R}, X_i)$ est bijective. Les hypothèses

faites permettent d'en déduire que l'application $\mathcal{L}(U) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})}(\mathcal{R}, \lim_{i \in I} X_i)$ est bijective, c'est-à-dire que $\mathcal{L}(U) \longrightarrow \mathcal{L}(U)_R$ est bijective. Donc, \mathcal{L} est un faisceau. En utilisant (1), on montre qu'il existe effectivement un cardinal κ vérifiant l'hypothèse utilisée dans la démonstration, d'où le résultat. \triangleleft

Notons \mathbf{B} un ensemble représentatif de tous les morphismes dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ obtenus en appliquant $\alpha_{\mathcal{T}}$ à un monomorphisme dans $\Delta^{op}\text{Pre}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ dont le but est α -borné, et \mathbf{B}' le sous-ensemble de \mathbf{B} formé des morphismes qui sont aussi des équivalences faibles simpliciales. D'après les lemmes 3.13 et 2.23, on peut utiliser le théorème 2.28 avec les ensembles de morphismes \mathbf{B} et \mathbf{B}' dans la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, d'où deux types de factorisations fonctorielles, moyennant le choix d'un ordinal γ convenable. Il reste à établir que ces factorisations vérifient les propriétés requises par l'axiome $\mathbf{CM5}^+$. Soit donc un morphisme quelconque $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$. Tout d'abord, puisque les morphismes appartenant à \mathbf{B} et \mathbf{B}' sont des monomorphismes, on vérifie, par induction ordinale, que les morphismes $\mathcal{X} \longrightarrow \Phi_{\mathbf{B}}^{\gamma}(f)$ et $\mathcal{X} \longrightarrow \Phi_{\mathbf{B}'}^{\gamma}(f)$ sont des cofibrations simpliciales. En passant aux fibres et en utilisant notamment que les cofibrations triviales d'ensembles simpliciaux sont stables par co-changement de base, on obtient aussi que le morphisme $\mathcal{X} \longrightarrow \Phi_{\mathbf{B}'}^{\gamma}(f)$ est une équivalence faible simpliciale. Maintenant, en utilisant les lemmes 3.9 et 3.12, on obtient que le morphisme $\Phi_{\mathbf{B}}^{\gamma}(f) \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une fibration simpliciale et que $\Phi_{\mathbf{B}'}^{\gamma}(f) \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une fibration simpliciale et une équivalence faible simpliciale. Ainsi, l'axiome $\mathbf{CM5}^+$ est vérifié. \triangleleft

Il résulte facilement du lemme 2.19 (et de l'énoncé dual) que la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_s(\mathcal{S})$ associée à la structure simpliciale possède des produits finis et des sommes directes quelconques et que le foncteur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_s(\mathcal{S})$ y commute.

Proposition 3.14. *La structure de catégorie de modèles sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ est propre.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Il découle facilement du théorème 1.21 qu'une fibration dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ induit des fibrations au niveau des fibres. Ainsi, la propriété à gauche et la propriété à droite de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ résultent formellement de la propriété de $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$. \triangleleft

Proposition 3.15. *Si $(f^*, f_*) : \mathcal{Fais}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{Fais}(\mathcal{S}')$ est un morphisme de topos, alors $(f^*, f_*) : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}')$ est une adjonction de Quillen. En particulier, on dispose d'un couple de foncteurs adjoints $(f^*, \mathbf{R}f_*) : \mathbf{Ho}_s(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_s(\mathcal{S}')$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Il suffit de remarquer que f^* préserve les monomorphismes (ce qui résulte du fait que f^* est exact à gauche) et que f^* préserve les équivalences faibles (cf. lemme 3.5). \triangleleft

Le théorème de Brown et Gersten et la descente Nisnevich

Définition 3.16. Soit \mathcal{F} un préfaisceau simplicial sur X_{Zar} (resp. X_{Nis} ou \mathcal{Sm}/S_{Nis}) avec X (ou S) un schéma noethérien. On dit que \mathcal{F} vérifie la propriété de Mayer-Vietoris (resp. Mayer-Vietoris généralisée) si $\mathcal{F}(\phi) \rightarrow \bullet$ est une équivalence faible et si pour tout Y dans X_{Zar} (resp. X_{Nis} ou \mathcal{Sm}/S_{Nis}) et tout recouvrement Zariski élémentaire (resp. Nisnevich élémentaire) $\{U \rightarrow Y; V \rightarrow Y\}$ de Y , le diagramme d'ensembles simpliciaux suivant est homotopiquement cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U \times_Y V) \end{array}$$

L'objectif de cette section est de généraliser à la topologie de Nisnevich le théorème suivant qui concerne la topologie de Zariski :

Théorème 3.17. Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\text{Pre}\mathcal{Fais}(X_{Zar})$. On suppose que \mathcal{F} et \mathcal{G} vérifient la propriété de Mayer-Vietoris et que le morphisme $a_{Zar}\mathcal{F} \rightarrow a_{Zar}\mathcal{G}$ est une équivalence faible simpliciale dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(X_{Zar})$. Alors, pour tout ouvert $U \in X_{Zar}$, $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — En utilisant l'axiome **CM5**⁺ pour $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$, on remarque que l'on peut supposer que pour tout $U \in X_{Zar}$, $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f} \mathcal{G}(U)$ est une fibration. On veut alors montrer que pour tout $a \in \mathcal{G}(U)_0$, la fibre $f^{-1}(a)$ est contractile. Pour cela, on peut supposer que $X = U$. Soit $a \in \mathcal{G}(X)_0$, considérons le préfaisceau simplicial \mathcal{K} tel que le diagramme suivant soit cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{a} & \mathcal{G} \end{array}$$

Les propriétés élémentaires des carrés homotopiquement cartésiens dans $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$ font que \mathcal{K} vérifie la propriété de Mayer-Vietoris. Ainsi, il suffit de vérifier que le théorème est vrai pour le morphisme $\mathcal{K} \rightarrow \bullet$. On peut donc supposer de plus que $\mathcal{G} = \bullet$.

Sous cette hypothèse, commençons par montrer que pour tout $U \in X_{Zar}$, s'il existe $s \in \mathcal{F}(U)_0$, alors $\mathcal{F}(U)$ est contractile. En effet, on peut considérer la famille de foncteurs $(T_q)_{q \in \mathbb{N}} : U_{Zar} \rightarrow \mathcal{E}ns_\bullet$ qui à V associe $(\pi_q(\mathcal{F}(V), s|_V))_{q \in \mathbb{N}}$. Si V et W sont deux ouverts inclus dans U , on déduit facilement de la propriété de Mayer-Vietoris l'existence de "suites exactes" d'ensembles pointés de la forme suivante, pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$T_{q+1}(V \cap W) \xrightarrow{\partial_q} T_q(V \cup W) \longrightarrow T_q(V) \times T_q(W)$$

Ces suites exactes sont "fonctorielles" sur les couples (V, W) d'ouverts de U , on peut alors appliquer [BG, théorème 1] qui permet de conclure que $T_q(V) = \bullet$ pour tout $V \in U_{Zar}$ et $q \in \mathbb{N}$.

Ainsi, si \mathcal{F} admet une section sur $U \in X_{Zar}$, pour tout ouvert $V \subset U$, $\mathcal{F}(V)$ est contractile.

Par noethérianité, il existe un ouvert maximal U' tel que $\mathcal{F}(U')$ soit non vide. Pour conclure, il suffit de montrer que $U' = X$. Pour cela, soit U un ouvert sur lequel \mathcal{F} possède une section et supposons qu'il existe $x \in X - U$. Comme la fibre \mathcal{F}_x est contractile, il existe un ouvert V contenant x sur lequel \mathcal{F} possède une section. Considérons alors le carré homotopiquement cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U \cup V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U \cap V) \end{array}$$

D'après ce qui précède, $\mathcal{F}(U)$, $\mathcal{F}(V)$ et $\mathcal{F}(U \cap V)$ sont contractiles, le carré étant homotopiquement cartésien, $\mathcal{F}(U \cup V)$ est aussi contractile, d'où le résultat. \triangleleft

Théorème 3.18. *Soit X (resp. S) un schéma noethérien. Soit $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme dans la catégorie $\Delta^{op}PreFais(X_{Nis})$ (resp. $\Delta^{op}PreFais(Sm/S_{Nis})$). On suppose que \mathcal{F} et \mathcal{G} vérifient la propriété de Mayer-Vietoris généralisée et que le morphisme $a_{Nis}\mathcal{F} \longrightarrow a_{Nis}\mathcal{G}$ est une équivalence faible simpliciale dans $\Delta^{op}Fais(X_{Nis})$ (resp. $\Delta^{op}Fais(Sm/S_{Nis})$). Alors, pour tout $U \in X_{Nis}$ (resp. Sm/S_{Nis}), $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Il suffit clairement de traiter le cas du site X_{Nis} . On peut de plus supposer que $X = U$. D'après le théorème 3.17, il suffit de montrer que $a_{Zar}\pi_{\sharp}\mathcal{F} \longrightarrow a_{Zar}\pi_{\sharp}\mathcal{G}$ est une équivalence simpliciale dans $\Delta^{op}Fais(X_{Zar})$ où π_{\sharp} désigne le foncteur de restriction des préfaisceaux sur X_{Nis} à X_{Zar} . Pour cela, d'après le lemme 1.19, il suffit de montrer que pour tout $x \in X$, si l'on note g le morphisme canonique de schémas $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow X$, alors le morphisme $g^{\sharp}\mathcal{F} \longrightarrow g^{\sharp}\mathcal{G}$ induit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux au niveau des sections globales. On peut alors raisonner par récurrence sur la dimension de $\mathcal{O}_{X,x}$. Le même argument que dans la démonstration du théorème 1.37 permet d'affirmer que les préfaisceaux simpliciaux $g^{\sharp}\mathcal{F}$ et $g^{\sharp}\mathcal{G}$ vérifient la propriété de Mayer-Vietoris généralisée. Ainsi, on peut supposer que X est un schéma local noethérien, de point fermé s . De plus, par hypothèse de récurrence, pour tout W dans X_{Nis} tel que $\dim W < \dim X$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathcal{F}(W) \longrightarrow \mathcal{G}(W)$ est une équivalence faible. Pour tout $(V, v) \in \text{Vois}_{X,s}^{Nis}$ tel que le cardinal de la fibre V_s soit 1, $\{U' \longrightarrow X; V \longrightarrow X\}$ est un recouvrement Nisnevich élémentaire (avec $U' = X - s$), ainsi pour tout $\mathcal{H} \in \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$, le diagramme suivant est homotopiquement cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U' \times_X V) \end{array}$$

Considérons le cube commutatif suivant, où les équivalences faibles sont marquées avec le symbole \sim :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{G}(X) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U') \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U') & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{G}(U') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \nearrow & \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U' \times_X V) \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U' \times_X V) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{G}(U' \times_X V) \end{array}$$

Comme une limite inductive filtrante de carrés homotopiquement cartésiens dans $\Delta^{op}Ens$ est un carré homotopiquement cartésien, on peut passer à la limite inductive sur tous les (V, v) définissant le pro-objet $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,s}^h$. Dans le cube commutatif obtenu, les faces avant et arrière sont homotopiquement cartésiennes et les trois morphismes (autres que celui du haut à gauche) reliant ces deux faces sont des équivalences faibles (pour deux d'entre elles, cela résulte de l'hypothèse de récurrence et pour la troisième de l'hypothèse sur les fibres Nisnevich de \mathcal{F} et \mathcal{G}), on en déduit que $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ est une équivalence faible, d'où le résultat. \triangleleft

Remarque 3.19. *En appliquant ce théorème aux préfaisceaux simpliciaux de dimension simpliciale 0, on obtient comme corollaire la caractérisation des faisceaux Nisnevich intervenant dans le théorème 1.37.*

Lemme 3.20. *Sur les sites X_{Nis} et Sm/S_{Nis} , tout faisceau simplicial \mathcal{F} simplicialement fibrant possède la propriété de Mayer-Vietoris généralisée.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Compte tenu de la définition des carrés homotopiquement cartésiens, il suffit clairement de vérifier que pour toute immersion ouverte $V \xrightarrow{j} U$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ est une fibration. Cela revient à dire que le morphisme $\mathcal{F} \longrightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes $(\Delta^n \times V) \bigsqcup_{\Lambda_k^n \times V} (\Lambda_k^n \times U) \longrightarrow \Delta^n \times U$. Or, ces morphismes sont évidemment des cofibrations triviales simpliciales, d'où le résultat par **CM4**. \triangleleft

Adjonctions

On suppose encore que $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ est un site avec suffisamment de points. Notons $\mathcal{H}om(-, -)$ le hom. interne sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ pour la structure monoïdale $- \times -$, c'est-à-dire le bifoncteur adjoint à droite de $- \times -$. Notons $\mathbf{hom}(-, -)$ les sections globales de $\mathcal{H}om(-, -)$.

Lemme 3.21. *Soient $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B}$ une cofibration et $\mathcal{X} \xrightarrow{p} \mathcal{Y}$ une fibration dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$.*

- (1) *Le morphisme évident $\mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{X}) \times_{\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{Y})} \mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ est une fibration qui est triviale si i ou p est de plus une équivalence faible simpliciale ;*
- (2) *Le morphisme évident $\mathbf{hom}(\mathcal{B}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{X}) \times_{\mathbf{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{Y})} \mathbf{hom}(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ est une fibration qui est triviale si i ou p est de plus une équivalence faible simpliciale.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — La deuxième assertion résulte de la première en utilisant le fait qu'une fibration (resp. fibration triviale) dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ induit une fibration (resp. fibration triviale) après passage aux sections globales, ce qui peut se voir, par adjonction, en utilisant le foncteur faisceau constant $\Delta^{op}\mathcal{E}ns \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ adjoint à gauche du foncteur sections globales, et le fait que ce foncteur faisceau constant transforme cofibrations (resp. cofibrations triviales) dans $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$ en cofibrations (resp. cofibrations triviales) dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$.

Il s'agit donc de montrer que le morphisme $\mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{X}) \times_{\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{Y})} \mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{Y})$ est une fibration, qui est triviale si i ou p est de plus une équivalence faible.

En utilisant la définition de $\mathcal{H}om(-, -)$ et la caractérisation des fibrations (resp. fibrations triviales) dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ par des propriétés de relèvement à droite, on se ramène à montrer que si $i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $j : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ sont deux cofibrations, alors le morphisme évident $\mathcal{A} \times \mathcal{Y} \bigsqcup_{\mathcal{A} \times \mathcal{X}} \mathcal{B} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{Y}$ est une cofibration qui est triviale si i ou j est de plus une équivalence faible. \triangleleft

On remarquera que la deuxième partie du lemme précédent permet de définir une structure de catégorie de modèles fermée simpliciale⁽¹⁶⁾ sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$.

Lemme 3.22. *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$ avec \mathcal{X} et \mathcal{Y} simplicialement fibrants. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *f est une équivalence d'homotopie ;*
- (2) *f est une équivalence faible simpliciale ;*
- (3) *pour tout $U \in \mathcal{C}$, le morphisme $\mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{Y}(U)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Un résultat élémentaire sur les catégories de modèles simpliciales implique, étant donné que tous les objets sont cofibrants dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, que pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$, $\mathcal{X} \times \Delta^1$ est un objet cylindre pour \mathcal{X} (avec les structures évidentes). L'équivalence entre (1) et (2) résulte alors formellement du lemme fondamental de l'algèbre homotopique. En vertu des définitions 3.1 et 3.2, (3) implique (2), et évidemment (1) implique (3). \triangleleft

La structure \mathbb{A}^1 -localisée sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$

Définition de la structure

Soit S un schéma noethérien. On note $\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})$ la catégorie homotopique associée à la structure simpliciale de catégorie de modèles fermée $(\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis}), \mathbf{Cof}_s, \mathbf{Fib}_s, \mathbf{W}_s)$ définie dans la partie précédente, c'est-à-dire que $\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis}) = \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})[\mathbf{W}_s^{-1}]$. On désigne par \bullet l'objet final de Sm/S et par $\iota : \bullet \longrightarrow \mathbb{A}^1$ le zéro du S -schéma en anneaux \mathbb{A}^1 .

Définition 3.23. *Soit \mathcal{X} un objet de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$. On dit que \mathcal{X} est \mathbb{A}^1 -local si pour tout $\mathcal{Y} \in \mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, l'application $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})}(\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ induite par ι est bijective.*

On remarque que la propriété pour un objet d'être \mathbb{A}^1 -local ne dépend que de sa classe d'isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})$.

⁽¹⁶⁾Pour plus de détails sur les catégories simpliciales et les catégories de modèles simpliciales : voir [GJ]

Définition 3.24. Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, on dit que f est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si pour tout objet \mathcal{Z} de $\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})$, l'application évidente

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$$

est bijective.

Définition 3.25. On note $W_{\mathbb{A}^1}$ la classe des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, $\mathbf{Cof}_{\mathbb{A}^1}$ la classe de tous les monomorphismes dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ et $\mathbf{Fib}_{\mathbb{A}^1}$ la classe des morphismes dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ possédant la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathbf{Cof}_{\mathbb{A}^1} \cap W_{\mathbb{A}^1}$.

On remarquera que $W_s \subset W_{\mathbb{A}^1}$. Un des objectifs de cette partie est d'établir que le quadruplet $(\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis}), \mathbf{Cof}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Fib}_{\mathbb{A}^1}, W_{\mathbb{A}^1})$ est une catégorie de modèles fermée, dite \mathbb{A}^1 -localisée. La seule difficulté réside dans la démonstration de l'axiome **CM5**, et plus particulièrement la factorisation "cofibration triviale/fibration", l'autre factorisation résultant de **CM5** pour la structure simpliciale.

Il résulte immédiatement de la définition que pour tout objet \mathcal{Y} dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, la projection $\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

Lemme 3.26. Soit $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$. Si \mathcal{X} est simplicialement fibrant, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) \mathcal{X} est \mathbb{A}^1 -local;
- (2) La fibration simpliciale $\mathcal{H}om(\mathbb{A}^1, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{X}$ induite par ι est une équivalence faible simpliciale;
- (3) Pour tout $U \in Sm/S$, la fibration $\mathcal{X}(\mathbb{A}_U^1) \longrightarrow \mathcal{X}(U)$ est une équivalence faible.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Le fait que les morphismes intervenant dans les conditions (2) et (3) soient des fibrations résulte du lemme 3.21. Toujours d'après ce lemme, $\mathcal{H}om(\mathbb{A}^1, \mathcal{X})$ est simplicialement fibrant, ainsi d'après le lemme 3.22, les conditions (2) et (3) sont équivalentes.

Supposons (2), le morphisme $\mathcal{H}om(\mathbb{A}^1, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{X})$ étant une fibration simpliciale triviale, en appliquant le lemme 3.21, on obtient que pour tout objet (nécessairement cofibrant simplicialement) $\mathcal{Y} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathbf{hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{H}om(\mathbb{A}^1, \mathcal{X})) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{X}))$ est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux, or ce morphisme s'identifie au morphisme évident $\mathbf{hom}(\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. En passant au π_0 , le lemme fondamental de l'algèbre homotopique implique que l'application $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})}(\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ est bijective, ainsi \mathcal{X} est \mathbb{A}^1 -local.

Supposons maintenant (1), pour démontrer (3), il suffit de montrer que pour tout objet \mathcal{Y} dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ (les $\mathcal{Y} = U$ avec $U \in Sm/S$ sont suffisants), le morphisme entre ensembles simpliciaux fibrants induit par ι $\mathbf{hom}(\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ est une équivalence faible dans $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$. Pour vérifier cela, utilisons le lemme de Yoneda dans la catégorie homotopique \mathbf{H}^{top} . D'après le lemme fondamental de l'algèbre homotopique dans $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$, il suffit de montrer que pour tout $K \in \Delta^{op}\mathcal{E}ns$, l'application $\mathbf{hom}(K, \mathbf{hom}(\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{X})) \longrightarrow \mathbf{hom}(K, \mathbf{hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$ induit un isomorphisme sur le π_0 . Or, il est clair que ce morphisme s'identifie à l'application $\mathbf{hom}(K \times \mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{hom}(K \times \mathcal{Y}, \mathcal{X})$ induite par ι , or ce morphisme est bijectif sur le π_0 grâce à l'hypothèse et au lemme fondamental de l'algèbre homotopique dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, d'où le résultat. \triangleleft

Nous verrons plus loin (cf. lemme 3.41) que les faisceaux simpliciaux simplicialement fibrants et \mathbb{A}^1 -locaux sont exactement les objets fibrants pour la structure de catégorie de modèles \mathbb{A}^1 -localisée que nous sommes en train de construire.

Lemme 3.27. Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (1) f est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible;
- (2) pour tout $\mathcal{W} \in \mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local, le morphisme de faisceaux simpliciaux $\mathcal{H}om(\mathcal{Y}, \mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{X}, \mathcal{W})$ est une équivalence faible simpliciale;
- (3) pour tout $\mathcal{W} \in \mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathbf{hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{W}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{X}, \mathcal{W})$ est une équivalence faible.

DÉMONSTRATION DU LEMME — En raison du lemme 3.22, (2) est équivalent au fait que pour tout $U \in Sm/S$ et $\mathcal{W} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local, le morphisme d'ensembles

simpliciaux $\mathcal{H}om(\mathcal{Y}, \mathcal{W})(U) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{X}, \mathcal{W})(U)$ soit une équivalence faible. Or, en utilisant des adjonctions évidentes, cela revient à demander que $\mathbf{hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{H}om(U, \mathcal{W})) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{X}, \mathcal{H}om(U, \mathcal{W}))$ soit une équivalence faible. Ainsi, compte tenu du fait que si \mathcal{W} est simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local et si $\mathcal{W}' \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ alors $\mathcal{H}om(\mathcal{W}', \mathcal{W})$ est simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local (cf. lemmes 3.26 et 3.21), (2) est équivalent au fait que pour tout $\mathcal{W} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local, le morphisme $\mathbf{hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{W}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{X}, \mathcal{W})$ est une équivalence faible, c'est-à-dire que (2) et (3) sont équivalents. De même que dans la preuve du lemme 3.26, on peut appliquer le lemme de Yoneda dans \mathbf{H}^{top} et en utilisant la même technique que dans le début de cette démonstration, on obtient que (3) est équivalent au fait que pour tout $\mathcal{W} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local, le morphisme $\mathbf{hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{W}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{X}, \mathcal{W})$ induit une bijection au niveau du π_0 . On obtient ainsi l'équivalence entre (1) et (3) en utilisant le lemme fondamental de l'algèbre homotopique. \triangleleft

Carrés homotopiquement cocartésiens et colimites homotopiques

Lemme 3.28.

- (1) Dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, l'image directe d'une \mathbb{A}^1 -équivalence faible par une cofibration est une équivalence faible ;
- (2) Dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, l'image directe d'une cofibration qui est aussi une \mathbb{A}^1 -équivalence faible est une cofibration qui est aussi une \mathbb{A}^1 -équivalence faible ;
- (3) Dans un cube commutatif de la forme ci-dessous, si les faces avant et arrière sont des carrés cocartésiens, que les morphismes $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{Y}'$ sont des cofibrations et que les morphismes $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$, $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}'$ et $\mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}'$ sont des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles, alors le morphisme $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}'$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{Y}' \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{Y} & & \mathcal{J}' \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{Z}' & \longrightarrow & \mathcal{J}' \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{Z} & \longrightarrow & \mathcal{J} & & \mathcal{J}'
 \end{array}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — Pour ces trois assertions, il s'agit de montrer qu'un certain morphisme est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible. D'après le lemme 3.27, cela se teste après application du foncteur $\mathbf{hom}(-, \mathcal{W})$ avec $\mathcal{W} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local. En vertu du lemme 3.21, on est ramené à des énoncés dans la catégorie des ensembles simpliciaux qui résultent notamment de la propriété à droite de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$. \triangleleft

Définition 3.29. Pour toute petite catégorie \mathcal{J} , on peut définir un foncteur “colimite homotopique” $\mathbf{hocolim}_{\mathcal{J}} : \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ de sorte que pour tout foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{J} \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ $\mathbf{hocolim}_{\mathcal{J}}\mathcal{F}$ soit le faisceau simplicial associé au préfaisceau simplicial $U \longmapsto \mathbf{hocolim}_{\mathcal{J}}[\mathcal{F}(U)]$.

Les colimites homotopiques commutant aux limites inductives, il résulte de cette définition et du théorème 1.21 que la formation des colimites homotopiques commute à l'application d'un foncteur fibre sur le topos $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$.

Le lemme suivant est une formalité :

Lemme 3.30. Soit \mathcal{J} une petite catégorie, pour tout foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{J} \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ et tout $\mathcal{Y} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, il existe un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{hom}\left(\mathbf{hocolim}_{\mathcal{J}}\mathcal{F}, \mathcal{Y}\right) \cong \mathbf{holim}_{\mathcal{J}^{op}}\mathbf{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$$

Lemme 3.31. Soit \mathcal{J} une petite catégorie et soit $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$ une transformation naturelle de foncteurs $\mathcal{J} \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, on suppose que pour tout $i \in \mathcal{J}$, le morphisme $\mathcal{F}(i) \longrightarrow \mathcal{G}(i)$ est une équivalence faible simpliciale (resp. une \mathbb{A}^1 -équivalence faible). Alors, le morphisme $\mathbf{hocolim}_{\mathcal{J}}\mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{hocolim}_{\mathcal{J}}\mathcal{G}$ est une équivalence faible simpliciale (resp. une \mathbb{A}^1 -équivalence faible).

DÉMONSTRATION DU LEMME — Le cas des équivalences faibles simpliciales s'obtient en appliquant un système conservatif de foncteurs fibres et en utilisant la proposition 2.54.

Le cas des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles s'obtient, grâce au critère du lemme 3.27, en appliquant le foncteur $\text{hom}(-, \mathcal{W})$ pour \mathcal{W} simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local. On conclut alors en utilisant le lemme 3.21, le lemme précédent, le lemme 2.52 et la proposition 2.45. \triangleleft

Lemme 3.32. *Soit \mathcal{J} une petite catégorie filtrante et soit $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$ une transformation naturelle de foncteurs $\mathcal{J} \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{Nis})$, on suppose que pour tout $i \in \mathcal{J}$, le morphisme $\mathcal{F}(i) \rightarrow \mathcal{G}(i)$ est une équivalence faible simpliciale (resp. une \mathbb{A}^1 -équivalence faible).*

Alors, le morphisme $\varinjlim \mathcal{F} \rightarrow \varinjlim \mathcal{G}$ est une équivalence faible simpliciale (resp. une \mathbb{A}^1 -équivalence faible).

DÉMONSTRATION DU LEMME — Le cas des équivalences faibles simpliciales est facile : il suffit d'appliquer un système conservatif de foncteurs fibres. Le cas des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles se traite en utilisant le lemme 3.31 et en utilisant le fait que pour tout $\mathcal{F} \in \text{Hom}(\mathcal{J}, \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{Nis}))$, le morphisme canonique $\text{hocolim} \mathcal{F} \rightarrow \varinjlim \mathcal{F}$ est une équivalence faible simpliciale grâce au corollaire 2.55 et à l'utilisation de foncteurs fibres. \triangleleft

Lemme 3.33. *Soit $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{Nis})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $\mathcal{F}_n \xrightarrow{f_n} \mathcal{G}_n$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible (en considérant les faisceaux comme des faisceaux simpliciaux de dimension 0).*

Alors, f est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Il résulte de la proposition 2.56 que pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{Nis})$, le morphisme canonique $\text{hocolim}_{\Delta^{op}} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ est une équivalence faible simpliciale. Le lemme résulte alors aussitôt du lemme 3.31. \triangleleft

Lemme 3.34.

- (1) *Le produit de deux \mathbb{A}^1 -équivalences faibles est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible ;*
- (2) *Une somme directe de \mathbb{A}^1 -équivalences faibles est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible ;*
- (3) *Si $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et $j : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sont deux cofibrations dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{Nis})$, alors le morphisme évident $\mathcal{A} \times \mathcal{D} \sqcup_{\mathcal{A} \times \mathcal{C}} \mathcal{B} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{D}$ est une cofibration qui est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si i ou j est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — (1) Il suffit de montrer que si f est une équivalence faible, alors pour tout objet $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{Nis})$, $f \times \mathcal{X}$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, ce qui résulte facilement du critère du lemme 3.27.

(2) D'après le critère du lemme 3.27, il suffit de constater qu'un produit (non nécessairement fini) d'équivalences faibles entre ensembles simpliciaux fibrants est une équivalence faible.

(3) L'assertion concernant les monomorphismes est évidente. L'autre cas résulte formellement du lemme 3.28 et de (1). \triangleleft

\mathbb{A}^1 -localisation

Définition 3.35. *On note $\mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(\text{Sm}/S_{Nis})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ho}_s(\text{Sm}/S_{Nis})$ formée des objets \mathbb{A}^1 -locaux.*

Lemme 3.36. *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{Nis})$. On suppose que \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont \mathbb{A}^1 -locaux.*

Alors, f est une équivalence faible simpliciale si et seulement si f est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Cela découle directement du lemme de Yoneda appliqué à la catégorie $\mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(\text{Sm}/S_{Nis})$ et de la définition des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles. \triangleleft

Théorème 3.37. *Le foncteur d'inclusion $\mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(\text{Sm}/S_{Nis}) \rightarrow \mathbf{Ho}_s(\text{Sm}/S_{Nis})$ admet un adjoint à gauche $L_{\mathbb{A}^1}$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — D'après le lemme 3.9, il existe un ensemble B_0 de monomorphismes dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ tel que les fibrations simpliciales soient exactement les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à B_0 . Notons B_1 un ensemble représentatif des monomorphismes de la forme $U \times \Delta^n \bigsqcup_{U \times \partial\Delta^n} \mathbb{A}_U^1 \times \partial\Delta^n \longrightarrow \mathbb{A}_U^1 \times \Delta^n$ induits par $\iota : \bullet \longrightarrow \mathbb{A}^1$ pour $n \geq 0$ et $U \in Sm/S$. D'après le lemme 3.26, un objet $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ est simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local si et seulement si $\mathcal{X} \longrightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $B := B_0 \cup B_1$. En utilisant le lemme 3.34, on montre que $B_0 \cup B_1 \subset \text{Cof}_{\mathbb{A}^1} \cap W_{\mathbb{A}^1}$.

Grâce au théorème 2.28, il existe un foncteur $\Psi : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis}) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ muni d'une transformation naturelle $\text{Id}_{\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})} \longrightarrow \Psi$ tel que pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, $\mathcal{X} \longrightarrow \Psi(\mathcal{X})$ soit un composé transfini d'images directes de sommes directes d'éléments de B et que $\Psi(\mathcal{X}) \longrightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à B .

Ainsi, pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, $\Psi(\mathcal{X})$ est simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local. D'après les lemmes 3.34 et 3.28, on sait qu'une image directe de sommes directes d'éléments de B est dans $\text{Cof}_{\mathbb{A}^1} \cap W_{\mathbb{A}^1}$. En faisant une récurrence sur les ordinaux, on déduit facilement du lemme 3.32 qu'un composé transfini de \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales est une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale, ainsi $\mathcal{X} \longrightarrow \Psi(\mathcal{X})$ est une cofibration triviale et une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

On en déduit que Ψ préserve les \mathbb{A}^1 -équivalences faibles. Comme les objets dans l'image essentielle de Ψ sont \mathbb{A}^1 -locaux, le lemme 3.36 implique que Ψ transforme \mathbb{A}^1 -équivalences faibles en équivalences faibles simpliciales. Comme les équivalences faibles sont des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles, par définition de $\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})$, Ψ induit un foncteur $\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(Sm/S_{Nis})$ que l'on note $L_{\mathbb{A}^1}$.

On dispose d'un morphisme de foncteurs évident $\text{Id}_{\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})} \longrightarrow i \circ L_{\mathbb{A}^1}$, i étant le foncteur d'inclusion $\mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(Sm/S_{Nis}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})$. On en déduit un morphisme bifonctoriel, pour tout $\mathcal{X} \in \mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})$ et $\mathcal{Y} \in \mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(Sm/S_{Nis})$:

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(Sm/S_{Nis})}(L_{\mathbb{A}^1}\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})}(\mathcal{X}, i\mathcal{Y})$$

Le fait que ce morphisme soit bijectif est équivalent au fait que le morphisme $\mathcal{X} \longrightarrow \Psi(\mathcal{X})$ soit une \mathbb{A}^1 -équivalence faible pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, par définition. Ainsi, $L_{\mathbb{A}^1}$ est bien le foncteur adjoint à gauche de $i : \mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(Sm/S_{Nis}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_s(Sm/S_{Nis})$. \triangleleft

Rappelons qu'il nous reste à démontrer l'axiome affirmant l'existence de factorisations "cofibration triviale/fibration" pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée. Pour cela, nous allons utiliser les mêmes techniques que pour la structure simpliciale, mais la \mathbb{A}^1 -localisation va rendre les démonstrations plus techniques. On se propose donc de démontrer le lemme technique suivant :

Lemme 3.38. *Il existe⁽¹⁷⁾ un cardinal β tel que, dans la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, un morphisme est une \mathbb{A}^1 -fibration si et seulement s'il possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B}$ dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ telles que \mathcal{B} soit β -borné (ce qui signifie ici que pour tout $U \in Sm/S$ et $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(U)_n$ est un ensemble de cardinal $\leq \beta$).*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Au cours de la démonstration, nous ferons apparaître certaines restrictions sur le cardinal β pour que le résultat soit vrai.

Supposons tout d'abord β plus grand que le cardinal α du lemme 3.9. En effet, cette hypothèse permet de faire en sorte que si $\mathcal{F} \in \Delta^{op}\text{Pre}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ est β -borné alors $a_{Nis}\mathcal{F}$ est β -borné⁽¹⁸⁾.

On suit la méthode du lemme 3.9. Soit donc un morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ possédant la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales dans la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ dont le but est β -borné.

Soit $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B}$ une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$. Supposons donné un diagramme commutatif de la forme suivante dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$:

⁽¹⁷⁾Le cardinal qui est construit ici est vraiment énorme, en tout cas monstrueusement plus grand que celui qui intervenait dans le cas de la structure simpliciale (cf. lemme 3.9).

⁽¹⁸⁾On utilise ici essentiellement la "formule" définissant le foncteur L , le fait que la prétopologie de Nisnevich est noethérienne, et la conséquence de l'axiome du choix affirmant que si X est un ensemble infini, alors X et $X \times X$ ont le même cardinal. Comme nous allons le voir par la suite, nous pourrions être beaucoup moins précis dans ces estimations de cardinaux.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

Notons \mathcal{O} l'ensemble des couples (\mathcal{B}', φ) où \mathcal{B}' est un faisceau simplicial contenu dans \mathcal{B} et contenant \mathcal{A} , tel que le morphisme $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}'$ soit une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, et où φ est un morphisme $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{X}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow f \\ \mathcal{B}' & & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

On munit \mathcal{O} de la structure d'ordre induite par le prolongement des morphismes. Il résulte du lemme 3.32 que \mathcal{O} est un ensemble inductif. D'après le lemme de Zorn, \mathcal{O} admet un élément maximal (\mathcal{B}', φ) . Il résulte des définitions que le morphisme $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ est une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale. Ainsi, pour établir le résultat, on se ramène à montrer que si i n'est pas un isomorphisme, l'ensemble \mathcal{O} contient un élément strictement plus grand que le couple $(\mathcal{A}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X})$. Un argument similaire à celui du lemme 3.9 montre qu'il suffit de démontrer le lemme 3.39 (avec $\beta = \alpha$).

Lemme 3.39. *Pour tout cardinal β , il existe un cardinal β' tel que pour toute \mathbb{A}^1 -cofibration triviale $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, si \mathcal{B}_0 est un sous-faisceau simplicial β -borné de \mathcal{B} , il existe un sous-faisceau simplicial β' -borné \mathcal{B}_∞ de \mathcal{B} contenant \mathcal{B}_0 tel que le morphisme $\mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_\infty$ soit une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Nous faisons ici l'abus de notation consistant à identifier le foncteur de \mathbb{A}^1 -localisation $L_{\mathbb{A}^1}$ construit précédemment avec le foncteur Ψ dont il provient. Pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ était construit comme étant l'élévation à la puissance ordinaire γ d'un certain foncteur $\Phi_{\mathcal{B}} : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis}) \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ (cf. théorème 3.37) évalué en \mathcal{X} , avec γ un ordinal bien choisi. Nous savons que γ pouvait être choisi comme étant un cardinal infini successeur d'un cardinal κ tel que les sources des flèches dans \mathcal{B} (celui du théorème 3.37) soient κ -accessibles.

Remarquons maintenant qu'un morphisme f dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si et seulement si $L_{\mathbb{A}^1}(f)$ est une équivalence faible simpliciale.

Étudions les sorites suivants :

- (1) $L_{\mathbb{A}^1} : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis}) \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ commute aux limites inductives indexées par les ensembles ordonnés filtrants grands devant le cardinal κ ;
- (2) Pour tout cardinal β , il existe un cardinal β' tel que si $\mathcal{F} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ est β -borné, alors $\Phi_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est β' -borné ;
- (3) Pour tout cardinal β , il existe un cardinal β' tel que si $\mathcal{F} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ est β -borné, alors $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F})$ est β' -borné ;
- (4) Pour tout cardinal β , il existe un cardinal β' tel que si $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ et si \mathcal{B}_0 un sous-faisceau simplicial β -borné de \mathcal{B} , il existe un sous-faisceau simplicial β' -borné \mathcal{B}_1 de \mathcal{B} contenant \mathcal{B}_0 tel que le "défaut⁽¹⁹⁾ de bijectivité" des applications induites par le morphisme $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}_0 \cap \mathcal{A}) \rightarrow L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}_0)$ au niveau des $\pi_0(-)$ (resp. $\pi_n(-, \cdot)$) des fibres de ces faisceaux simpliciaux disparaisse au niveau correspondant pour le morphisme $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{A}) \rightarrow L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}_1)$.

⁽¹⁹⁾Dans un tel carré commutatif d'ensembles, on dira que le défaut de bijectivité de f disparaît dans g si l'image de g contient l'image de q et si pour tout couple (x, y) d'éléments de X , si $f(x) = f(y)$ alors $p(x) = p(y)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ \tilde{X} & \xrightarrow{g} & \tilde{Y} \end{array}$$

On démontre (1) en commençant par remarquer que par définition $\Phi_{\mathcal{B}}$ commute aux limites inductives filtrantes indexées par les ensembles ordonnés grands devant κ . On vérifie ensuite facilement par récurrence transfinie que toute puissance ordinale de $\Phi_{\mathcal{B}}$ (en particulier $L_{\mathbb{A}^1}$) commute à ce même type de limites inductives.

Pour démontrer (2), en revenant à la définition de $\Phi_{\mathcal{B}}$, il suffit de constater que l'on peut majorer le cardinal de $\mathbf{Hom}_{\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})}(\mathcal{S}, \mathcal{X})$ en fonction de \mathcal{S} et d'un cardinal β tel que \mathcal{X} soit β -borné. Pour démontrer (3), il suffit d'"itérer" à la puissance ordinale γ les estimations⁽²⁰⁾ de cardinaux issues de (2).

Le point (4) résulte (3) et du (1). En effet, d'après (3), on contrôle le cardinal de l'ensemble des sections de $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B})$ qu'il faudrait ajouter à $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}_0)$ pour que les défauts de bijectivité considérés disparaissent. De plus, d'après (1), on sait que toute section de $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B})$ est dans l'image de $L_{\mathbb{A}^1}(\tilde{\mathcal{B}})$ pour un sous-faisceau simplicial $\tilde{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} δ -borné, avec δ un cardinal plus grand que le cardinal α du lemme 3.9, et dont l'ensemble ordonné sous-jacent soit grand devant κ .

Le lemme résulte finalement de (4) et de (1). On construit par récurrence ordinale une fonction croissante $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in \gamma+1}$ de sous-faisceaux simpliciaux de \mathcal{B} . Pour tout ordinal $\lambda \in \gamma$, $\mathcal{B}_{\lambda+1}$ s'obtient à partir de \mathcal{B}_λ en appliquant (4) et si $\lambda \in \gamma+1$ est un ordinal limite (non vide), \mathcal{B}_λ est la réunion des $\mathcal{B}_{\lambda'}$ pour $\lambda' \in \lambda$. En itérant les estimations de (4), on obtient, en fonction de β , un cardinal β' tel que \mathcal{B}_γ soit β' -borné. Il est immédiat que le morphisme $\varinjlim_{\lambda \in \gamma} L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}_\lambda \cap \mathcal{A}) \longrightarrow \varinjlim_{\lambda \in \gamma} L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}_\lambda)$ est une équivalence faible simpliciale. Or, comme γ est un ensemble ordonné filtrant grand devant κ , ce morphisme s'identifie au morphisme $L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}_\gamma \cap \mathcal{A}) \longrightarrow L_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{B}_\gamma)$. Ainsi, si on pose $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}_\gamma$, on obtient que $\mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}_\infty$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

<

<

La catégorie homotopique des S -schémas

Théorème 3.40. *Soit S un schéma noethérien. La catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ munie des classes $(\mathbf{Cof}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Fib}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{W}_{\mathbb{A}^1})$ constitue une catégorie de modèles fermée. De plus, les axiomes $\mathbf{CM1}^+$ et $\mathbf{CM5}^+$ sont vérifiés. Enfin, cette catégorie de modèles est propre et simpliciale.*

On note $\mathbf{H}(S)$ la catégorie homotopique de cette catégorie de modèles, et on l'appelle la catégorie homotopique de S .

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Les axiomes $\mathbf{CM1}^+$, $\mathbf{CM2}$ et $\mathbf{CM3}$ sont évidents. Modulo $\mathbf{CM5}$, l'axiome $\mathbf{CM4}$ résulte directement des définitions et de l'astuce de Joyal (cf. lemme 2.6). Pour établir qu'il s'agit d'une catégorie de modèles fermée, il reste donc à montrer $\mathbf{CM5}$. Grâce à la structure simpliciale sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, on sait que tout morphisme peut se factoriser fonctoriellement en $p \circ i$ avec i un monomorphisme et p une fibration triviale simpliciale. Ainsi, p possède la propriété de relèvement par rapport à tous les monomorphismes, en particulier p est une \mathbb{A}^1 -fibration, de plus, p est une équivalence faible simpliciale, donc une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, ce qui démontre une moitié de l'axiome $\mathbf{CM5}^+$.

Grâce au lemme 3.38, on sait qu'il existe un ensemble \mathcal{B} de \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales telles qu'un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ soit une \mathbb{A}^1 -fibration si et seulement s'il possède la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathcal{B} . D'après le théorème 2.28, on obtient que tout morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ peut se factoriser fonctoriellement en $p \circ i$ avec i un composé transfini d'images directes de sommes directes d'éléments de \mathcal{B} et p un morphisme possédant la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathcal{B} . Ainsi, p est une \mathbb{A}^1 -fibration. De plus, dans la démonstration du théorème 3.37, on a montré que dans ces conditions i était une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale, d'où le résultat.

Le fait que cette structure de catégories de modèles soit propre à gauche résulte du lemme 3.28. La propriété à droite est moins immédiate, elle est démontrée dans [MV, théorème 3.2, page 86].

C'est avec même bifoncteur $\mathbf{hom} : (\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis}) \times \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})^{op}) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$ que celui du lemme 3.21 que l'on définit une structure de catégorie de modèle simpliciale sur notre catégorie

⁽²⁰⁾Pour établir ces sorites-là, nous pourrions aussi utiliser le fait simple suivant : si $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ est un foncteur entre deux catégories munies d'une fonctionnelle à valeurs dans les cardinaux mesurant la "taille" des objets (invariante par isomorphisme), alors on peut majorer la taille de $F\mathcal{X}$ en fonction de la taille de \mathcal{X} si pour tout cardinal β , il existe un ensemble représentatif des classes d'isomorphismes d'objets de \mathcal{C} de taille $\leq \beta$.

de modèles, la méthode de démonstration de l'axiome **SM7** étant semblable à celle utilisée pour la structure simpliciale, compte tenu du lemme 3.34. \triangleleft

Lemme 3.41. *Soit \mathcal{X} un objet de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$. Alors, \mathcal{X} est simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local si et seulement si \mathcal{X} est \mathbb{A}^1 -fibrant.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Supposons que \mathcal{X} soit simplicialement fibrant et \mathbb{A}^1 -local. Soit $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B}$ une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale. On doit montrer que $\mathcal{X} \rightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à i . Considérons pour cela le morphisme d'ensembles simpliciaux $\text{hom}(\mathcal{B}, \mathcal{X}) \xrightarrow{\theta} \text{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$. D'après le lemme 3.27, θ est une équivalence faible. De plus, θ est une fibration en vertu de l'axiome **SM7** pour la structure de catégorie de modèles simpliciale sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$. Ainsi, θ est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux. En particulier, θ est surjective en degré simplicial 0, ainsi l'application $\mathbf{Hom}_{\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})}(\mathcal{B}, \mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ est surjective, d'où le résultat.

Le sens réciproque est trivial. \triangleleft

Remarque 3.42.

- (1) *Le composé du foncteur $i : \mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \rightarrow \mathbf{Ho}_s(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ et du foncteur évident $\mathbf{Ho}_s(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \rightarrow \mathbf{H}(S)$ est une équivalence de catégories $\mathbf{Ho}_{s, \mathbb{A}^1\text{-loc}}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \rightarrow \mathbf{H}(S)$;*
- (2) *Il résulte du lemme 3.34 et du lemme 2.19 que, dans la catégorie $\mathbf{H}(S)$, les sommes directes quelconques et les produits finis existent et que le foncteur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \rightarrow \mathbf{H}(S)$ y commute.*
- (3) *On dispose d'un foncteur évident $\mathbf{H}^{op} \rightarrow \mathbf{H}(S)$ induit par le foncteur "faisceau constant", et ce foncteur commute aux sommes directes quelconques et aux produits finis.*

La structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$

Soit S un schéma noethérien. Nous venons de voir que $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ possédait une structure de catégorie de modèles fermée \mathbb{A}^1 -localisée. Nous nous proposons maintenant de définir une structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ dont la catégorie homotopique soit équivalente à la catégorie homotopique de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée, ce qui permettra de faire le lien avec la structure considérée dans l'article [Voe2]. On notera parfois $\text{Sp}_{\mathcal{C}_S}$ la catégorie $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$.

La construction de Morel et Voevodsky dans [MV]

On considère la catégorie $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ comme une sous-catégorie pleine de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ via le foncteur qui à un ensemble X associe l'ensemble simplicial de dimension 0 associé (*i.e.* le préfaisceau constant X sur la catégorie Δ correspondant).

Définition 3.43. *Dans la catégorie $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, on note $W_{\mathbb{A}^1}$ la classe des morphismes dont l'image dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, $\text{Cof}_{\mathbb{A}^1}$ la classe des monomorphismes, et $\tilde{\text{Fib}}_{\mathbb{A}^1}$ la classe des morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$.*

Définition 3.44. *À tout objet cosimplicial D^\bullet de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, on associe un foncteur de réalisation $|-|_{D^\bullet} : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ de la façon suivante. Soit \mathcal{X} un objet de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$. On identifie les \mathcal{X}_n à des objets de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ de dimension 0. On peut alors considérer le coégalisateur $|\mathcal{X}|_{D^\bullet}$ du diagramme suivant :*

$$\bigsqcup_{\varphi: \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}} \mathcal{X}_n \times D^m \xrightarrow[g]{} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n \times D^n \longrightarrow |\mathcal{X}|_{D^\bullet}$$

Le morphisme f est induit par les applications $\mathcal{X}_n \times D^m \rightarrow \mathcal{X}_n \times D^n$ induites par la structure cosimpliciale de D^\bullet et g est induit par les applications $\mathcal{X}_n \times D^m \rightarrow \mathcal{X}_m \times D^m$ induites par la structure simpliciale de X .

On remarquera que $|\Delta^n|_{D^\bullet}$ est canoniquement isomorphe à D^n et que $|-|_{D^\bullet}$ "commute" au foncteur $- \times \mathcal{F}$ pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$.

Définition 3.45. *On note $\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet$ l'objet cosimplicial de $\mathcal{S}m/S \subset \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{\mathbb{A}^1}^n$ soit le S -schéma affine lisse d'Algèbre quasi-cohérente $\mathcal{O}_S[T_0, \dots, T_n]/(\sum_{i=0}^n T_i - 1)$, la structure cosimpliciale étant la structure classique.*

On définit un foncteur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ de sorte que pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ et $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{Sing}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = \mathcal{H}om(\Delta_{\mathbb{A}^1}^n, \mathcal{X}_n)$, la structure simpliciale sur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ étant induite par la structure simpliciale sur \mathcal{X} et la structure cosimpliciale de $\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet$, $\mathcal{H}om(-, -)$ désignant l’“adjoint à droite” du bifoncteur $- \times - : \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \times \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$.

Notons Δ^\bullet l’objet cosimplicial de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ obtenu en appliquant le foncteur “faisceau constant” à l’objet cosimplicial Δ^\bullet de $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$. On montre facilement que le foncteur $|-|_{\Delta^\bullet \times \Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet} : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ est l’adjoint à gauche du foncteur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}$.

De plus, il est aussi tautologique que $|-|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet} : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} : \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, restriction de $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}$ aux faisceaux simpliciaux de dimension simpliciale 0.

Lemme 3.46. *Soit D^\bullet un objet cosimplicial de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- Le morphisme $D^0 \sqcup D^0 \longrightarrow D^1$ induit par l’inclusion $\partial\Delta^1 \longrightarrow \Delta^1$ est un monomorphisme ;
- Le foncteur $|-|_{D^\bullet} : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ préserve les monomorphismes.

DÉMONSTRATION DU LEMME — On suppose que le morphisme $D^0 \sqcup D^0 \longrightarrow D^1$ est un monomorphisme. En faisant une récurrence sur le squelette [MV, lemme 1.1, page 48], on se rend compte qu’il suffit de montrer que pour tout $n \geq 1$, le morphisme $|\iota_n|_{D^\bullet}$ est un monomorphisme, où ι_n est l’inclusion $\partial\Delta^n \subset \Delta^n$. Pour $n \geq 2$, le fait que $|\iota_n|_{D^\bullet}$ soit un monomorphisme est une conséquence formelle des identités cosimpliciales, et pour $n = 1$, c’est notre hypothèse, d’où le résultat. \triangleleft

Lemme 3.47. *Soit $D_1^\bullet \longrightarrow D_2^\bullet$ un morphisme d’objets cosimpliciaux dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$. On suppose que ces deux objets cosimpliciaux vérifient l’hypothèse du lemme précédent. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_1^n \longrightarrow D_2^n$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, alors pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, le morphisme canonique $|\mathcal{X}|_{D_1^\bullet} \longrightarrow |\mathcal{X}|_{D_2^\bullet}$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Il suffit de faire une récurrence sur le squelette et d’utiliser la propriété à gauche de la structure \mathbb{A}^1 -localisée de catégorie de modèles sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$. \triangleleft

On peut appliquer ce lemme aux morphismes $\Delta^\bullet \times \Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet \longrightarrow \Delta^\bullet$ et $\Delta^\bullet \times \Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet \longrightarrow \Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet$ induits par les projections. De plus, comme $|\mathcal{X}|_{\Delta^\bullet} = \mathcal{X}$ pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, on obtient un isomorphisme canonique $\mathcal{X} \simeq |\mathcal{X}|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet}$ dans la catégorie homotopique de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée.

Lemme 3.48. *Le morphisme canonique “application constante” $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $\mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbf{Sing}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ s’identifie au morphisme “application constante” $\mathcal{X}_n \longrightarrow \mathcal{H}om(\Delta_{\mathbb{A}^1}^n, \mathcal{X}_n)$. On démontre facilement que ces morphismes sont des \mathbb{A}^1 -équivalences d’homotopie, donc des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles. Il résulte alors du lemme 3.33 que $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible. \triangleleft

Théorème 3.49. *Le quadruplet $(\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}), \mathcal{C}of_{\mathbb{A}^1}, \tilde{\mathcal{F}}ib_{\mathbb{A}^1}, \mathcal{W}_{\mathbb{A}^1})$ est une catégorie de modèles fermée. De plus, le couple de foncteurs adjoints $(|-|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet}, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1})$ forme une équivalence de Quillen entre cette structure sur $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ et la structure \mathbb{A}^1 -localisée sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$.*

Enfin, cette structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ est propre et les axiomes $\mathbf{CM1}^+$ et $\mathbf{CM5}^+$ sont vérifiés.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Il résulte de ce qui précède que $|-|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet}$ et $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}$ sont des foncteurs adjoints, que $|-|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet}$ et $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}$ préservent et reflètent les \mathbb{A}^1 -équivalences faibles et que $|-|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet}$ préserve les cofibrations. Donc, une fois que nous saurons que $(\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}), \mathcal{C}of_{\mathbb{A}^1}, \tilde{\mathcal{F}}ib_{\mathbb{A}^1}, \mathcal{W}_{\mathbb{A}^1})$ est bien une catégorie de modèles, le fait que ces deux foncteurs adjoints forment une équivalence de Quillen sera trivial.

La vérification des axiomes $\mathbf{CM1}^+$, $\mathbf{CM2}$ et $\mathbf{CM3}$ est immédiate. Modulo $\mathbf{CM5}$, l’axiome $\mathbf{CM4}$ résulte de l’astuce de Joyal (lemme 2.6) et des définitions.

Remarquons que si $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ est un morphisme dans $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, alors $f \in \tilde{\mathbf{Fib}}_{\mathbb{A}^1}$ si et seulement si $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(f) \in \mathbf{Fib}_{\mathbb{A}^1}$. En effet, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(f)$ est une \mathbb{A}^1 -fibration de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ si et seulement si $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(f)$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, ce qui est équivalent, par adjonction, au fait que f possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux réalisations (via le foncteur $|-|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet}$) de toutes les \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$. Mais par ce procédé, d'après ce qui précède, on obtient exactement les \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales dans $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$. Ainsi, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(f)$ est une \mathbb{A}^1 -fibration de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ si et seulement si f est une \mathbb{A}^1 -fibration dans $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$.

De plus, on sait qu'il existe un ensemble \mathbf{B} de \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ telles qu'un morphisme y soit une \mathbb{A}^1 -fibration si et seulement s'il possède la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathbf{B} .

Ainsi, dans $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, un morphisme est dans $\tilde{\mathbf{Fib}}_{\mathbb{A}^1}$ si et seulement s'il possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $|\mathbf{B}|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet} \subset \mathbf{Cof}_{\mathbb{A}^1} \cap \mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}$. D'après le théorème 2.28, on obtient ainsi l'existence d'une factorisation fonctorielle dans $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ de tout morphisme f sous la forme $p \circ i$ avec $i \in \mathbf{Cof}_{\mathbb{A}^1} \cap \mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}$ et $p \in \tilde{\mathbf{Fib}}_{\mathbb{A}^1}$.

Notons \mathbf{B}' un ensemble de monomorphismes dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ tel qu'un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ soit une \mathbb{A}^1 -fibration triviale si et seulement s'il possède la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathbf{B}' . D'après le théorème 2.28, tout morphisme dans $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ peut se factoriser fonctoriellement en $p \circ i$ avec i un monomorphisme et p un morphisme possédant la propriété de relèvement à droite par rapport à $|\mathbf{B}'|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet}$. Par adjonction, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(p)$ est une \mathbb{A}^1 -fibration triviale, on peut en déduire que $p \in \tilde{\mathbf{Fib}}_{\mathbb{A}^1} \cap \mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}$.

La propriété de la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ résulte formellement de la propriété de la structure \mathbb{A}^1 -localisée de catégorie de modèles sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ et de ce qui précède. \triangleleft

On notera parfois $|-|_S$ le foncteur $|-|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet}$.

Comparaison avec la définition de Voevodsky dans [Voe2]

Dans l'article [Voe2], Voevodsky donne une autre définition de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$. Pour montrer l'équivalence entre ces deux définitions, il suffit de montrer que les deux notions d'équivalences faibles coïncident puisque dans cet article, une cofibration est un monomorphisme et une fibration est un morphisme ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales.

Voevodsky y définit un ensemble⁽²¹⁾ d'"extensions anodines élémentaires" que l'on notera \mathcal{A} . Il définit ensuite un foncteur $Ex^\infty : \mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis}) \rightarrow \mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ en appliquant le théorème 2.28 avec l'ensemble de morphismes \mathcal{A} et l'ordinal ω (puisque les sources des morphismes dans \mathcal{A} seront de présentation finie). Ainsi, on dispose d'un morphisme $\mathcal{X} \rightarrow Ex^\infty(\mathcal{X})$ pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ et celui-ci est un composé dénombrable d'images directes de sommes directes de morphismes appartenant à \mathcal{A} . De plus, pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$, le morphisme $Ex^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathcal{A} .

Définition 3.50. Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$. On dira que f est une équivalence faible naïve si pour tout $U \in Sm/S$, $\mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{Y}(U)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Définition 3.51. Un morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ est une $(\mathbb{A}^1)'$ -équivalence faible si le morphisme $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(Ex^\infty(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(Ex^\infty(\mathcal{Y}))$ est une équivalence faible naïve.

Définition 3.52. Pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ et $U \in Sm/S$, on définit l'ensemble $\pi_{0,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ par la formule $\pi_{0,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = \pi_0(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(Ex^\infty(\mathcal{X}))(U))$, et pour tout $x \in Ex^\infty(\mathcal{X})(U)_0$ et $n \geq 1$, on pose $\pi_{n,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}, x) = \pi_n(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(Ex^\infty(\mathcal{X}))(U), x)$.

⁽²¹⁾Nous précisons plus tard la définition de \mathcal{A} , étant donné que j'ai été conduit à modifier légèrement la définition de cet ensemble pour pouvoir établir l'équivalence entre les différentes définitions de la notion d'équivalence faible dans $\mathcal{Fais} Sm/S_{Nis}$.

Il est clair qu'un morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ est une $(\mathbb{A}^1)'$ -équivalence faible si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{S}m/S$, $\pi_{0,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \longrightarrow \pi_{0,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ est bijective et que pour tout $x \in Ex^\infty(\mathcal{X})(U)_0$ et $n \geq 1$, l'application $\pi_{n,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}, x) \longrightarrow \pi_{n,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y}, f(x))$ est bijective.

Définition 3.53. On note \mathcal{A} un ensemble représentatif de la classe des morphismes dans la catégorie $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ prenant l'une des deux formes suivantes :

- (1) $U \times |\Lambda_k^n|_S \bigsqcup_{V \times |\Lambda_k^n|_S} V \times |\Delta^n|_S \longrightarrow U \times |\Delta^n|_S$, où $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, avec $V \longrightarrow U$ une immersion ouverte dans $\mathcal{S}m/S$;
- (2) $U \times \mathbb{A}^1 \times |\partial\Delta^n|_S \bigsqcup_{U \times \{0\} \times |\partial\Delta^n|_S} U \times \{0\} \times |\Delta^n|_S \longrightarrow U \times \mathbb{A}^1 \times |\Delta^n|_S$ où $n \geq 0$, avec $U \in \mathcal{S}m/S$.

Dans l'article [Voe2], seul le premier type d'extensions anodines élémentaires apparaît. Pourtant, il ne me paraît pas évident qu'il soit suffisant de mettre seulement ces morphismes dans \mathcal{A} , la raison principale pour cela étant que le foncteur $|-|_S : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ (et même sa restriction à $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$) ne commute pas aux produits finis⁽²²⁾, ainsi par exemple $\mathbb{A}^1 \times |\Delta^n|_S$ ne s'identifie pas à $|\Delta^1 \times \Delta^n|_S$! Néanmoins, on montre facilement en utilisant les résultats précédents que pour tous \mathcal{X} et \mathcal{Y} dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, le morphisme évident $|\mathcal{X} \times \mathcal{Y}|_S \longrightarrow |\mathcal{X}|_S \times |\mathcal{Y}|_S$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible. Ce fait a pour conséquence que $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ ne possède pas de structure simpliciale évidente.

Théorème 3.54. Si $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, alors f est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si et seulement si f est une $(\mathbb{A}^1)'$ -équivalence faible.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — La clef de la démonstration est la descente Nisnevich. Commençons par remarquer que pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, $\mathcal{X} \longrightarrow Ex^\infty(\mathcal{X})$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible. En effet, ce morphisme est un composé dénombrable d'images directes de sommes directes d'éléments de \mathcal{A} . Or, il est immédiat que tous les morphismes appartenant à \mathcal{A} sont des \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales. Il en va de même d'une somme directe de \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales, et même d'un composé dénombrable d'après le lemme 3.32. Ainsi, $\mathcal{X} \longrightarrow Ex^\infty(\mathcal{X})$ est bien une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale. Donc, $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si et seulement si $Ex^\infty(\mathcal{X}) \longrightarrow Ex^\infty(\mathcal{Y})$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que si $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ est un morphisme dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ tel que $\mathcal{X} \longrightarrow \bullet$ et $\mathcal{Y} \longrightarrow \bullet$ ont la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathcal{A} , alors f est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si et seulement si $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(f)$ est une équivalence faible naïve. Notons \mathbf{R} une résolution fibrante dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ muni de la structure simpliciale, c'est-à-dire que \mathbf{R} est un foncteur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ prenant ses valeurs dans la classe des objets simplicialement fibrants et que ce foncteur est muni d'une transformation naturelle $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{X}$ qui soit une équivalence faible simpliciale pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, l'existence du foncteur \mathbf{R} et de la transformation naturelle étant donnée par l'axiome $\mathbf{CM5}^+$ pour la structure simpliciale de catégorie de modèles fermée sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$.

Soit $\mathcal{Z} \in \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$. On vérifie aussitôt que le fait que $\mathcal{Z} \longrightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport au premier type de morphismes dans \mathcal{A} est équivalent au fait que pour toute immersion ouverte $V \xrightarrow{j} U$ dans $\mathcal{S}m/S$, le morphisme évident $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})(U) \longrightarrow \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})(V)$ soit une fibration. Comme $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})$ est un faisceau pour la topologie de Nisnevich, il en résulte que $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z}) \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ possède la propriété de Mayer-Vietoris généralisée. D'après le théorème 3.18 et le lemme 3.20, le morphisme $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z}))$ est une équivalence faible naïve. Ainsi, d'après le lemme 3.26, pour que $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})$ soit \mathbb{A}^1 -local, il faut et il suffit que pour tout $U \in \mathcal{S}m/S$, le morphisme d'ensembles simpliciaux, induit par $\iota : \bullet \longrightarrow \mathbb{A}^1$, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})(U \times \mathbb{A}^1) \longrightarrow \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})(U)$ soit une équivalence faible. En fait, c'est une fibration triviale, en effet, dire que ce morphisme possède la propriété de relèvement à droite par rapport à l'inclusion $\partial\Delta^n \longrightarrow \Delta^n$ pour $n \geq 0$ est équivalent, par adjonction, au fait que $\mathcal{Z} \longrightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport au deuxième type de morphismes dans \mathcal{A} .

⁽²²⁾Il est bien connu en topologie que la réalisation topologique du produit de deux ensembles simpliciaux est le produit des deux réalisations dans la catégorie des espaces topologiques séparés et à topologie engendrée par les compacts. Le lecteur pourra comparer $\Delta^1 \times \Delta^1$ et $\Delta^1 \times \Delta^1$ dans les deux contextes.

On sait que $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si et seulement si $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible. Comme $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ et $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ sont \mathbb{A}^1 -locaux, on sait que c'est équivalent au fait que $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ soit une équivalence faible simpliciale. Or, d'après le lemme 3.22, ceci équivaut au fait que $\mathbf{R}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y}))$ soit une équivalence faible naïve. Or, le morphisme $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z}) \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z}))$ est une équivalence faible naïve pour $\mathcal{Z} \in \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$.

Donc, $\mathbf{R}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y}))$ est une équivalence faible naïve si et seulement si le morphisme $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ est une équivalence faible naïve. Ainsi, sous les hypothèses faites, on a bien établi que $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si et seulement si $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$ est une équivalence faible naïve, c'est-à-dire ce qu'il nous fallait pour conclure. \triangleleft

Variantes pointées

Catégories pointées et structures de catégories de modèles fermées

Rappelons qu'une catégorie pointée est une catégorie admettant un objet à la fois initial et final. Si \mathcal{C} est une catégorie admettant un objet final (noté \bullet), on notera \mathcal{C}_\bullet la catégorie $\bullet \backslash \mathcal{C}$, appelée catégorie des objets pointés de \mathcal{C} , cette catégorie étant évidemment pointée. On dispose d'un foncteur "oubli du point-base" $\mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{U} \mathcal{C}$. Si \mathcal{C} possède des sommes directes finies, alors ce foncteur admet un adjoint à gauche $-_+ : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\bullet$ qui à \mathcal{X} associe $\mathcal{X} \sqcup \bullet$ pointé de façon évidente. Remarquons que le foncteur oubli du point-base commute aux limites projectives représentables, mais pas à toutes les limites inductives représentables. Néanmoins, un carré dans \mathcal{C}_\bullet est cocartésien si et seulement s'il le devient après application du foncteur d'oubli du point-base.

Définition 3.55. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée. Dans la catégorie \mathcal{C}_\bullet , on dit qu'un morphisme f est une équivalence faible (resp. une cofibration, resp. une fibration) si et seulement si Uf est une équivalence faible (resp. une cofibration, resp. une fibration) dans \mathcal{C} .

Proposition 3.56. Si \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée, alors \mathcal{C}_\bullet est aussi une catégorie de modèles fermée. Si l'axiome $\mathbf{CM1}^+$ (resp. $\mathbf{CM5}^+$) est vérifié dans \mathcal{C} , alors il en va de même dans \mathcal{C}_\bullet . Si \mathcal{C} est propre (resp. à gauche, resp. à droite), alors \mathcal{C}_\bullet est propre (resp. à gauche, resp. à droite). De plus, les foncteurs $(-_+, U)$ forment une adjonction de Quillen.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — C'est immédiat. \triangleleft

On peut appliquer cette proposition pour les catégories de modèles fermées $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$, $\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ et $\Delta^{op}\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ (munie, au choix, de la structure simpliciale ou de la structure \mathbb{A}^1 -localisée). On notera ainsi \mathbf{H}_\bullet^{top} la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux pointés, $\mathbf{H}_{s,\bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ la catégorie homotopique des faisceaux simpliciaux pointés pour la structure simpliciale et $\mathbf{H}_\bullet(S)$ la catégorie homotopique pointée des S -schémas, c'est-à-dire, au choix, la catégorie homotopique de la catégorie $\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet$ ou de la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet$ pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée.

Il résulte aussitôt de la propriété à gauche des structures de catégories de modèles considérées ici que les foncteurs de localisation $\Delta^{op}\mathcal{E}ns_\bullet \rightarrow \mathbf{H}_\bullet^{top}$, $\Delta^{op}\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet \rightarrow \mathbf{H}_{s,\bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, et $\Delta^{op}\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet \rightarrow \mathbf{H}_\bullet(S)$ commutent aux sommes directes.

Définition 3.57. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée (propre à gauche). Si $A \xrightarrow{i} \mathcal{X}$ est une cofibration de \mathcal{C} , on définit un objet cofibrant \mathcal{X}/A de \mathcal{C}_\bullet en formant le carré cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \mathcal{X}/A \end{array}$$

\wedge -produit

Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée. Pour tous \mathcal{X} et \mathcal{Y} objets de \mathcal{C}_\bullet , on note $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ leur somme directe dans \mathcal{C}_\bullet . On dispose de plus d'un morphisme évident $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, de sorte que l'on peut

former le carré cocartésien ci-dessous pour définir un objet $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ de \mathcal{C}_\bullet :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \vee \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \end{array}$$

Lemme 3.58. *Si, dans \mathcal{C} , pour tout objet \mathcal{X} , le foncteur $-\times \mathcal{X}$ commute aux limites inductives finies, alors le bifoncteur $-\wedge -$ définit sur \mathcal{C}_\bullet une structure de catégorie monoïdale symétrique, dont l'objet neutre est $S_s^0 := \bullet_+$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — C'est assez formel. Par exemple, pour établir l'“associativité”, il suffit essentiellement de montrer que pour tous objets \mathcal{X} , \mathcal{Y} , et \mathcal{Z} de \mathcal{C}_\bullet , on a un carré cocartésien canonique dans \mathcal{C} , ce qui n'est pas très difficile mais utilise néanmoins notre hypothèse :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \bullet) \sqcup (\mathcal{X} \times \bullet \times \mathcal{Z}) \sqcup (\bullet \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z} \end{array}$$

◁

Lemme 3.59. *Supposons que \mathcal{C} soit une catégorie de modèles fermée propre à gauche telle que tout morphisme de source \bullet dans \mathcal{C} soit une cofibration et que pour tous objets \mathcal{X} et \mathcal{Y} de \mathcal{C}_\bullet , le morphisme canonique $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ soit une cofibration. Supposons en outre, que dans \mathcal{C} , le produit de deux équivalences faibles soit une équivalence faible.*

Alors dans \mathcal{C}_\bullet , le \wedge -produit de deux équivalences faibles est une équivalence faible.

DÉMONSTRATION DU LEMME — On commence par montrer que $-\vee -$ préserve les équivalences faibles, et on utilise la définition de $-\wedge -$ pour montrer qu'il en est de même de $-\wedge -$. ◁

Proposition 3.60. *Sous les hypothèses des deux lemmes précédents, le produit $-\wedge - : \mathcal{C}_\bullet \times \mathcal{C}_\bullet \longrightarrow \mathcal{C}_\bullet$ induit une structure de catégorie monoïdale symétrique sur la catégorie $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}_\bullet)$, que l'on note encore $-\wedge -$ et dont l'objet neutre est l'image de S_s^0 dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}_\bullet)$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Le bifoncteur $-\wedge - : \mathcal{C}_\bullet \times \mathcal{C}_\bullet \longrightarrow \mathcal{C}_\bullet$ préserve les équivalences faibles, ainsi il induit un bifoncteur $-\wedge - : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}_\bullet) \times \mathbf{Ho}(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C}_\bullet)$. De plus, les isomorphismes de “cohérence” de la structure monoïdale sur \mathcal{C}_\bullet se localisent évidemment pour donner des isomorphismes de “cohérence” permettant d'obtenir cette structure monoïdale sur $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}_\bullet)$. ◁

En vertu des résultats antérieurs, on déduit de cette proposition des structures monoïdales \wedge sur les catégories homotopiques $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$, $\mathbf{H}_\bullet(S)$ et $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/S_{Nis})$. De plus, les foncteurs $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}} \longrightarrow \mathbf{H}_\bullet(S)$ et $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/S_{Nis}) \longrightarrow \mathbf{H}_\bullet(S)$ sont monoïdaux. On démontre aussi facilement que les catégories de modèles $\Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns$ et $\Delta^{\text{op}}\mathcal{F}ais(Sm/S_{Nis})$ (pour les deux structures) sont simpliciales.

Définition 3.61. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_s^n = (S_s^1)^{\wedge n}$, avec $S_s^1 = \Delta^1/\partial\Delta^1 \in \Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns_\bullet$.*

Lemme 3.62. *Pour tout $U \in Sm/S$, le foncteur $\Delta^{\text{op}}\mathcal{F}ais(Sm/S_{Nis})_\bullet \longrightarrow \Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns_\bullet$ qui à \mathcal{F} associe $\mathcal{F}(U)$ admet un adjoint à gauche $K \longmapsto K \wedge U_+$. Ce couple de foncteurs adjoints est une adjonction de Quillen à la fois pour la structure simpliciale et la structure \mathbb{A}^1 -localisée sur $\Delta^{\text{op}}\mathcal{F}ais(Sm/S_{Nis})_\bullet$.*

On note respectivement $\mathbf{R}\Gamma(U; -)$ et $\mathbf{R}^{\mathbb{A}^1}\Gamma(U; -)$ les foncteurs dérivés totaux à droite du foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}(U)$ pour les structures de catégories de modèles correspondantes.

DÉMONSTRATION DU LEMME — La démonstration est essentiellement triviale, il suffit de constater que le foncteur $K \longmapsto K \wedge U_+$ préserve les cofibrations et les cofibrations triviales (pour les structures de catégories de modèles considérées). ◁

Corollaire 3.63. *Pour tout $U \in Sm/S$, $\mathcal{X} \in \mathcal{F}ais(Sm/S_{Nis})_\bullet$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe une bijection canonique :*

$$\pi_{n,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S_s^n \wedge U_+, \mathcal{X})$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — Il résulte de ce qui a été vu dans la démonstration du théorème 3.54 que $\pi_{n,U}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}\cdot\mathbf{top}}(S_s^n, \mathbf{R}^{\mathbb{A}^1}\Gamma(U; \mathcal{X}))$. Le corollaire résulte alors du lemme précédent et du théorème 2.47 sur les adjonctions de Quillen. \triangleleft

Lien avec la cohomologie des faisceaux de groupes abéliens

Comme nous aurons besoin de cette technique pour interpréter certaines théories cohomologiques (cohomologie étale, cohomologie singulière ordinaire) dans la théorie homotopique des schémas, nous allons présenter le lien naturel qui existe entre les foncteurs dérivés du foncteur “sections sur un objet X ” dans le cas de la catégorie des complexes de faisceaux de groupes abéliens et dans le cas de la catégorie des faisceaux simpliciaux sur un site.

Dans toute cette partie, on fixe un site $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ ayant suffisamment de points. On note $\mathbf{comp}_+(\mathcal{S})$ la catégorie des complexes de faisceaux de groupes abéliens sur \mathcal{S} notés homologiquement et concentrés en degrés positifs ou nuls. On rappelle que la correspondance de Dold-Kan permet de dire que $\mathbf{comp}_+(\mathcal{S})$ est équivalente à la catégorie des faisceaux de groupes abéliens simpliciaux sur \mathcal{S} . On rappelle aussi qu’un morphisme entre groupes abéliens simpliciaux est une équivalence faible (comme morphisme entre ensembles simpliciaux) si et seulement s’il induit un quasi-isomorphisme au niveau des complexes normalisés associés (ou des complexes de Moore associés).

Théorème 3.64. *Il existe une structure de catégorie de modèles fermée propre sur $\mathbf{comp}_+(\mathcal{S}) = \Delta^{op}AbFais(\mathcal{S})$ dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes de faisceaux, les fibrations les morphismes induisant une fibration simpliciale quand on les considère comme morphismes de faisceaux simpliciaux, les cofibrations étant les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales. On note $\mathbf{D}^{\leq 0}(\mathcal{S})$ la catégorie homotopique de cette catégorie de modèles.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — La démonstration des axiomes **CM1**⁺, **CM2** et **CM3** est évidente. D’après l’astuce de Joyal, on constate qu’il suffit de démontrer l’axiome **CM5**⁺ pour établir **CM4**. En utilisant les résultats du théorème 3.7, la factorisation “cofibration/fibration triviale” peut se faire grâce au raisonnement du petit objet puisque si \mathbf{B} est un ensemble de morphismes dans $\Delta^{op}Fais(\mathcal{S})$ tel qu’un morphisme de $\Delta^{op}Fais(\mathcal{S})$ soit une fibration simpliciale si et seulement s’il possède la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathbf{B} , alors les fibrations dans $\Delta^{op}AbFais(\mathcal{S})$ sont exactement les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes de la forme $\mathbb{Z}i$ où $i \in \mathbf{B}$, $\mathbb{Z}-$ désignant le foncteur adjoint à gauche du foncteur d’oubli $\Delta^{op}AbFais(\mathcal{S}) \rightarrow \Delta^{op}Fais(\mathcal{S})$. On peut procéder de même pour la factorisation “cofibration triviale/fibration” en utilisant le fait que $\mathbb{Z}-$ préserve les équivalences faibles. La propriété à droite de la structure résulte de la propriété à droite de la structure de catégorie de modèles sur $\Delta^{op}Fais(\mathcal{S})$ et la propriété à gauche se démontre facilement en prenant le point de vue des complexes de faisceaux de groupes abéliens en remarquant qu’une cofibration de $\mathbf{comp}_+(\mathcal{S})$ est un monomorphisme. \triangleleft

Corollaire 3.65. *Les foncteurs d’oubli $Ab \rightarrow Ens_{\bullet} \rightarrow Ens$ et leurs adjoints à gauche induisent des adjonctions de Quillen entre les catégories de modèles fermées $\Delta^{op}AbFais(\mathcal{S}) = \mathbf{comp}_+(\mathcal{S})$, $\Delta^{op}Fais(\mathcal{S})$ et $\Delta^{op}Fais(\mathcal{S})$ pour les structures simpliciales.*

On notera que dans les adjonctions de Quillen du corollaire précédent, tous les foncteurs préservent les équivalences faibles.

Théorème 3.66. *Soit \mathcal{S} un site avec suffisamment de points. Pour tout complexe $\mathcal{F} \in \mathbf{comp}_+(\mathcal{S})$, tout entier $d \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{C}$, si on note $K(\mathcal{F})$ l’image de \mathcal{F} dans $\Delta^{op}Fais(\mathcal{S})_{\bullet}$, alors on a des isomorphismes canoniques de groupes abéliens :*

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(\mathcal{S})}(S_s^d \wedge X_+, K(\mathcal{F})) = \mathbf{H}_d(\mathbf{R}\Gamma(X; \mathcal{F}))$$

Ici, $\mathbf{R}\Gamma(X; -)$ désigne le foncteur dérivé⁽²³⁾ total à droite $\mathbf{D}^{\leq 0}(\mathbf{comp}_+(\mathcal{S})) \rightarrow \mathbf{D}^{\leq 0}(Ab)$ du foncteur “sections sur X ”.

⁽²³⁾On peut signaler le fait rassurant suivant : on peut montrer que si \mathcal{A} est une catégorie abélienne de Grothendieck (par exemple $AbFais(\mathcal{S})$), alors la catégorie des complexes (*non nécessairement bornés*) dans \mathcal{A} peut être munie d’une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et dont les cofibrations sont les monomorphismes. De plus, la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} formée des objets dont les objets de cohomologie sont nuls en degrés strictement positifs est naturellement équivalente à la catégorie obtenue en inversant les quasi-isomorphismes dans la catégorie des complexes K dans \mathcal{A} tels que $K^n = 0$ si $n > 0$. En particulier, le foncteur $\mathbf{D}^{\leq 0}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbf{D}(AbFais(\mathcal{S}))$ est pleinement fidèle.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Ce théorème résulte d'adjonctions formelles parmi lesquelles figurent une de celles du corollaire précédent ainsi que les adjonctions de Quillen dont les foncteurs de Quillen à droite sont les foncteurs d'évaluation en X : $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S})_{\bullet} \longrightarrow \Delta_{\mathcal{E}ns}^{op}$ et $\mathbf{comp}_+(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{comp}_+(Ab)$. \triangleleft

Les théorèmes fondamentaux de la théorie

Nous allons maintenant étudier plus en détail certaines propriétés de la théorie homotopique des S -schémas. Nous allons commencer par établir quelques isomorphismes très utiles dans $\mathbf{H}(S)$, puis nous considérerons deux théorèmes fondamentaux qui donneront naissance à des triangles distingués dans la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}(S)$ que nous définirons plus tard, ceci impliquant formellement l'existence de suites exactes longues pour les théories (co)homologiques naturellement associées à des objets de $\mathcal{SH}(S)$.

Sphères

Fibrés vectoriels et Espaces de Thom

Définition 4.1. Soit $\mathcal{E} \rightarrow X$ un fibré vectoriel avec $X \in \mathcal{S}m/S^{(24)}$. On note $\mathcal{E} - s(X)$ l'ouvert de \mathcal{E} , complémentaire de la section nulle. On définit l'espace de Thom de $\mathcal{E} \rightarrow X$ comme étant le quotient $\mathcal{E}/(\mathcal{E} - s(X)) \in \mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$ (cf. définition 3.57). On le note $\mathcal{T}h(\mathcal{E})$.

On note \mathcal{O}_X le fibré vectoriel trivial de rang 1 sur X . Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E} \rightarrow X$, on note $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ le fibré projectif associé.

Lemme 4.2.

- (1) Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E} \xrightarrow{p} X$ avec $X \in \mathcal{S}m/S$, p est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, de même que la section nulle $X \rightarrow \mathcal{E}$;
- (2) Soient $\mathcal{E} \rightarrow X$ et $\mathcal{F} \rightarrow Y$ deux fibrés vectoriels de bases respectives X et Y dans $\mathcal{S}m/S$. Alors, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$, $\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{F} \rightarrow X \times_S Y$ désignant le produit tensoriel externe des fibrés vectoriels \mathcal{E} et \mathcal{F} :

$$\mathcal{T}h(\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{F}) = \mathcal{T}h(\mathcal{E}) \wedge \mathcal{T}h(\mathcal{F})$$

- (3) Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E} \xrightarrow{p} X$ avec $X \in \mathcal{S}m/S$, il existe une \mathbb{A}^1 -équivalence faible canonique $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)/\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{T}h(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$, où $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)$ désigne l'immersion fermée à l'infini.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Pour montrer (1), il suffit de montrer que p est une \mathbb{A}^1 -équivalence d'homotopie, l'homotopie étant donnée ici par l'action de \mathbb{A}^1 sur \mathcal{E} . Le point (2) résulte facilement du fait que la topologie de Nisnevich est plus fine que la topologie de Zariski.

On dispose d'une immersion ouverte $\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)$, qui dans un système de coordonnées s'écrit $e \mapsto [e : 1]$. On note $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) - X$ l'ouvert complémentaire dans $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)$ de l'image⁽²⁵⁾ par j de la section nulle de \mathcal{E} . Ainsi, $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)$ admet un recouvrement Zariski par \mathcal{E} et $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) - X$. Comme la topologie de Zariski est moins fine que la topologie de Nisnevich, on en déduit que sur le diagramme suivant, le carré de gauche est cocartésien, et que par conséquent, la flèche de droite est un isomorphisme dans $\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} - s(X) & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{T}h(\mathcal{E}) \\ \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow \cong \\ \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) - X & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)/(\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) - X) \end{array}$$

Or, $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) - X$ s'identifie canoniquement à un fibré vectoriel de rang 1 sur $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, la projection étant induite par le morphisme, qui en coordonnées homogènes, s'écrit $[x : y] \mapsto [x]$, l'action de \mathbb{A}^1 étant donnée par $(\lambda, [x : y]) \mapsto [x : \lambda y]$, ceci ayant un sens car on a enlevé le point de coordonnées homogènes $[0 : 1]$. Le

⁽²⁴⁾ Si X est lisse sur S , \mathcal{E} , qui est lisse sur X , est évidemment lisse sur S .

⁽²⁵⁾ Autrement dit, relativement à X , on enlève le point de coordonnées homogènes $[0 : 1]$.

composé de la section nulle de ce fibré vectoriel avec l'immersion ouverte $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) - X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)$ s'identifie à l'immersion fermée à l'infini $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)$. On en déduit un morphisme canonique $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)/\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)/(\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) - X)$. Le morphisme $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) - X$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, puisqu'il s'agit de la section nulle d'un fibré vectoriel, ce qui implique, par propriété à gauche de la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet$, que le morphisme canonique $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)/\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)/(\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) - X) = \mathcal{J}h(\mathcal{E})$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible. \triangleleft

Sphères $S^{2n,n}$

Définition 4.3. On rappelle que l'on note $S_s^1 \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet$ le faisceau constant $\Delta^1/\partial\Delta^1$ et $S_s^n = (S_s^1)^{\wedge n}$ pour $n \geq 0$. On pose $S_t^1 = (\mathbb{G}_m, 1)$ et $S_t^n = (S_t^1)^{\wedge n}$ pour tout $n \geq 0$. Pour tous $p \geq q \geq 0$, on pose⁽²⁶⁾ $S^{p,q} = S_s^{p-q} \wedge S_t^q$.

Lemme 4.4. Il existe un isomorphisme canonique $\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - \{0\} \simeq S_s^1 \wedge S_t^1 = S^{2,1}$ dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Il suffit de considérer la colimite homotopique du diagramme \mathcal{D} suivant pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée (où Δ^1 est pointé par 0, mais $S_t^1 \wedge \Delta^1$ par $(1,1)$) :

$$\begin{array}{ccc} S_t^1 & \longrightarrow & (\mathbb{A}^1, 1) \\ \downarrow 1 & & \\ S_t^1 \wedge \Delta^1 & & \end{array}$$

Il existe un zig-zag $\mathcal{D}'' \longleftarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ dans $\mathcal{H}om(\mathcal{E}^{op}, \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet)$, où \mathcal{D}' (resp. \mathcal{D}'') est le diagramme obtenu à partir de \mathcal{D} en remplaçant \mathbb{A}^1 (resp. $S_t^1 \wedge \Delta^1$) par \bullet , \mathcal{E} désignant la catégorie “équerre”. Par propriété à gauche de la structure \mathbb{A}^1 -localisée sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet$, les morphismes $\varinjlim_{\mathcal{E}^{op}} \mathcal{D} \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{E}^{op}} \mathcal{D}'$ et $\varinjlim_{\mathcal{E}^{op}} \mathcal{D} \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{E}^{op}} \mathcal{D}''$ sont des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles. Le lemme résulte alors du fait que $\varinjlim_{\mathcal{E}^{op}} \mathcal{D}' = S^{2,1}$ et que $\varinjlim_{\mathcal{E}^{op}} \mathcal{D}'' = \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - \{0\}$. \triangleleft

Le lemme précédent et le lemme 4.2 admettent le corollaire suivant :

Corollaire 4.5. Si on note $T = \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - \{0\})$, il existe des isomorphismes canoniques dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ pour tout $n \geq 0$:

$$T^{\wedge n} \simeq \mathbb{A}^n/(\mathbb{A}^n - 0) \simeq \mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1} \simeq S^{2n,n}$$

Objets simpliciaux de Čech

Nous allons maintenant décrire la technique de “descente à la Čech”. Celle-ci va nous permettre d'obtenir des résultats globaux à partir de résultats locaux. Nous décrirons complètement un exemple d'utilisation de cette technique dans le lemme 4.10.

Définition 4.6.

- Soit \mathcal{X} un objet dans une catégorie \mathcal{C} admettant des produits finis. On définit un objet simplicial $\check{C}(\mathcal{X})$ dans la catégorie \mathcal{C} en posant $\check{C}(\mathcal{X})_n = \mathcal{X}^{n+1}$, les dégénérescences étant induites par les applications diagonales évidentes et les faces par l'oubli d'une coordonnée.
- Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des produits fibrés. Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Y}$ un morphisme dans \mathcal{C} . On peut appliquer la construction précédente à la catégorie \mathcal{C}/\mathcal{Y} pour définir un objet simplicial $\check{C}(\pi)$ dans la catégorie \mathcal{C} , muni d'un morphisme $\check{C}(\pi) \longrightarrow \mathcal{Y}$, \mathcal{Y} étant vu comme objet simplicial constant.

On remarque que si \mathcal{X} est un objet dans une catégorie \mathcal{C} admettant des produits finis, alors le foncteur $\check{C}(-) : \mathcal{C} \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{C}$ est le foncteur adjoint à gauche du foncteur $\Delta^{op}\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ qui à \mathcal{A} associe \mathcal{A}_0 .

Lemme 4.7. Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\mathcal{E}ns$. Alors, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\check{C}(\pi) \longrightarrow \mathcal{Y}$ est une fibration qui est triviale si et seulement si π est surjectif.

DÉMONSTRATION DU LEMME — C'est assez immédiat d'après l'adjonction précédente. \triangleleft

⁽²⁶⁾Quand nous stabiliserons la théorie, S_s^1 et S_t^1 deviendront inversibles pour une certaine structure monoïdale \wedge . On pourra alors parler des sphères $S^{p,q}$ pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$.

Lemme 4.8. *Soit \mathcal{S} un site ayant assez de points. Soit $X \xrightarrow{\pi} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S})$. Alors, le morphisme $\check{C}(\pi) \rightarrow \mathcal{Y}$ est une équivalence simpliciale si et seulement si π est un épimorphisme.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Ce lemme résulte formellement du précédent grâce à l'utilisation de foncteurs fibres. \triangleleft

Un exemple important d'épimorphisme de faisceaux est donné par le lemme suivant :

Lemme 4.9. *Soit $\mathcal{U} = \left\{ U_i \xrightarrow{f_i} X \right\}_{i \in I} \in \text{Cov}_{\text{Nis}}(X)$ avec $X \in \text{Sm}/S$. Alors, le morphisme évident $p : \bigsqcup_{i \in I} U_i \rightarrow X$ dans $\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{\text{Nis}})$ est un épimorphisme, c'est-à-dire que le morphisme canonique $\check{C}(p) \rightarrow X$ est une équivalence faible simpliciale dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{\text{Nis}})$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — On pose $\mathcal{W} = \bigsqcup_{i \in I} U_i$. Le morphisme p s'identifie canoniquement à l'image réciproque de la flèche $\mathcal{W} \rightarrow X$ via le morphisme canonique (cf. proposition 1.33) de topos $\pi_X : \mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{\text{Nis}}) \rightarrow \mathcal{Fais}(X_{\text{Nis}})$. Le foncteur π_X^* commute aux limites inductives, il préserve donc les épimorphismes. Ainsi, il suffit de montrer que $\mathcal{W} \rightarrow X$ est un épimorphisme dans $\mathcal{Fais}(X_{\text{Nis}})$. Il s'agit d'appliquer un foncteur fibre $-_y$ à ce morphisme, où $y : \text{Spec } K \rightarrow X$ est un point de X à valeurs dans un corps. Dans la proposition 1.26, on a vu que si $Z \in X_{\text{Nis}}$, alors $Z_y = \mathbf{Hom}_X(\text{Spec } K, V)$. Il s'agit donc de montrer que \mathcal{W}_y est non vide, ce qui résulte immédiatement du fait que \mathcal{U} est une famille couvrante de X pour la prétopologie de Nisnevich. \triangleleft

Le lemme⁽²⁷⁾ suivant est un exemple d'utilisation des objets simpliciaux de Čech.

Lemme 4.10. *Soit $X \in \text{Sm}/S$ et $T \xrightarrow{p} X$ un toreur sous un fibré vectoriel F sur X . Alors, $T \xrightarrow{p} X$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Dans le cas où le F -torseur T est trivial, la conclusion résulte aussitôt du lemme 4.2. Par définition des torseurs, il existe un recouvrement ouvert (fini) $(U_i)_{i \in I}$ de X tel que le $F|_{U_i}$ -torseur $T|_{U_i}$ soit trivial. Ainsi, si V est un ouvert de X contenu dans un des ouverts U_i , le morphisme $T|_V \rightarrow V$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

On note $W \in \text{Sm}/S$ le schéma $\bigsqcup_{i \in I} U_i$ et $W \xrightarrow{\pi} X$ le morphisme évident. Notons π' le morphisme $T \times_X W \rightarrow W$. Considérons le carré commutatif suivant dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\text{Sm}/S_{\text{Nis}})$:

$$\begin{array}{ccc} \check{C}(\pi') & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{C}(\pi) & \longrightarrow & X \end{array}$$

D'après les lemmes 4.8 et 4.9, les morphismes $\check{C}(\pi) \rightarrow X$ et $\check{C}(\pi') \rightarrow T$ sont des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles. Donc, pour montrer que $T \rightarrow X$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, il suffit de montrer que le morphisme $\check{C}(\pi') \rightarrow \check{C}(\pi)$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible. Pour démontrer cela, il suffit, d'après le lemme 3.33, de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $\check{C}(\pi')_n \rightarrow \check{C}(\pi)_n$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, ce qui résulte du fait que le $F|_V$ -torseur $T|_V$ soit trivial si V est l'intersection d'une famille (non vide) d'ouverts de la forme U_i . \triangleleft

Pureté homotopique et éclatements

Nous allons maintenant aborder deux théorèmes fondamentaux de la théorie homotopique des schémas.

Théorème 4.11. (*Pureté homotopique*) *Soit $Z \xrightarrow{i} X$ une immersion fermée dans Sm/S . Il existe un isomorphisme canonique $X/(X - Z) \xrightarrow{\cong} \mathcal{J}h(N_{X,Z})$ dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ où $N_{X,Z}$ désigne le fibré normal⁽²⁸⁾ de i .*

⁽²⁷⁾Ce lemme justifie aussi a posteriori la méthode utilisée par Jouanolou dans [Jou] pour prolonger à la catégorie des schémas quasi-projectifs sur un corps la K -théorie de Karoubi-Villamayor qui n'est définie que pour les anneaux. En effet, il montre que tout schéma quasi-projectif sur un corps admet un fibré vectoriel et un toreur sous ce fibré qui soit un schéma affine. Il obtient ainsi une K -théorie invariante par \mathbb{A}^1 -homotopie sur ces schémas.

⁽²⁸⁾ $N_{X,Z}$ désigne le cône affine sur Z dont l'Algèbre graduée quasi-cohérente associée est l'Algèbre symétrique de $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ où \mathcal{J} désigne le faisceau quasi-cohérent d'Idéaux définissant le sous-schéma fermé Z dans X . On rappelle que les hypothèses faites impliquent que la composante de degré n de cette Algèbre symétrique s'identifie à $\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}$.

Théorème 4.12. (*Éclatements*) Soit $Z \xrightarrow{i} X$ une immersion fermée dans $\mathcal{S}m/S$. Notons $X_Z \xrightarrow{p} X$ l'éclatement de Z dans X , X_Z étant lisses sur S . Notons $U = X - Z = X_Z - p^{-1}(Z)$. Alors, le diagramme suivant est homotopiquement cocartésien dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(Z) & \longrightarrow & X_Z/U \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \longrightarrow & X/U \end{array}$$

PRINCIPE DE DÉMONSTRATION — Voir [MV, théorème 2.23, page 115; proposition 2.29, page 118] ou [Mor1]. Ces deux théorèmes se démontrent essentiellement de la même manière. Dans les deux cas, il s'agit de montrer qu'un certain morphisme ψ_i , paramétré par l'immersion fermée i , est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible⁽²⁹⁾. La construction de ces morphismes est faite dans [MV] et [Mor1], l'ingrédient principal pour la pureté homotopique étant la déformation au cône normal. Pour montrer que ψ_i est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, on commence par le cas où i est la section nulle d'un morphisme de la forme $\mathbb{A}^n \times X \rightarrow X$ avec $X \in \mathcal{S}m/S$, cas qui n'est pas très difficile. On utilise ensuite la propriété d'excision suivante :

Lemme 4.13. Si $Z \xrightarrow{i} X$ est une immersion fermée dans $\mathcal{S}m/S$ et $Y \xrightarrow{p} X$ un morphisme étale avec $Y \in \mathcal{S}m/S$ tel que $Y \times_X Z \rightarrow Z$ soit un isomorphisme, alors ψ_i est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si et seulement si $\psi_{i'}$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, où i' désigne l'immersion fermée $Z \rightarrow Y$.

Grâce à ce lemme et au cas "trivial", on montre que ψ_i est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible s'il existe un morphisme étale $X \xrightarrow{q} \mathbb{A}^n$ et un entier $0 \leq k \leq n$ tel que l'image inverse du sous-schéma fermé $\mathbb{A}^k \times \{(0, \dots, 0)\}$ par q soit Z .

D'après [EGA IV 17.12.2.(d)], on en déduit que le résultat est vrai si on se restreint à des ouverts Zariski suffisamment petits de X . On utilise alors la technique de descente à la Čech (cf. lemmes 4.8 et 4.9) et le lemme 3.33 pour établir le cas général, en s'inspirant de la méthode du lemme 4.10. \triangleleft

⁽²⁹⁾Pour la pureté homotopique, on construit un zig-zag $X/(X - Z) \longrightarrow I \longleftarrow \mathcal{T}h N_{X,Z}$ dans $\mathcal{F}ais \mathcal{S}m/S_{Nis}$, et il s'agit de montrer que les deux morphismes qui constituent ce zig-zag sont des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles.

La stabilisation à la Spanier-Whitehead

La stabilisation

Suivant la méthode de Voevodsky, nous allons décrire comment on peut inverser formellement un objet T dans une catégorie monoïdale symétrique \mathcal{C} , pour former une catégorie $\mathcal{C}[T^{-1}]$. Nous verrons ensuite comment son critère de la permutation circulaire permet de “prolonger” la structure monoïdale de \mathcal{C} à la catégorie $\mathcal{C}[T^{-1}]$. Nous appliquerons cette construction à la catégorie monoïdale $(\mathbf{H}_\bullet(S), \wedge)$ pour inverser (\mathbb{P}^1, ∞) , et définir une catégorie de Spanier-Whitehead $\mathcal{SW}(S)$ sur laquelle nous définirons de plus une structure triangulée.

La catégorie $\mathcal{C}[T^{-1}]$

Soit $(\mathcal{C}, \wedge, \mathbf{1})$ une catégorie monoïdale symétrique et T un objet quelconque de \mathcal{C} .

Définition 5.1. $\mathcal{C}[T^{-1}]$ est la catégorie dont les objets sont les couples (X, n) où X est un objet de \mathcal{C} et $n \in \mathbb{Z}$ et telle que pour tous objets (X, n) et (Y, m) , $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}[T^{-1}]}((X, n), (Y, m))$ soit la colimite filtrante $\varinjlim_{k \geq -n, -m} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T^{\wedge(k+n)} \wedge X, T^{\wedge(k+m)} \wedge Y)$ induite par le \wedge à gauche avec T , la composition étant définie de façon évidente. On dispose d’un foncteur évident $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[T^{-1}]$ qui à X associe $(X, 0)$.

Le lemme suivant permet d’obtenir une condition nécessaire importante sur un objet d’une catégorie monoïdale symétrique pour être inversible.

Lemme 5.2. Soit X un objet inversible dans une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \wedge, \mathbf{1})$. Alors, $\mathbf{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ est un groupe abélien.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Soit Y un inverse de X pour la structure monoïdale. Il existe donc un isomorphisme $\mathbf{1} \xrightarrow{\varphi} X \wedge Y$. On peut définir un isomorphisme $X \longrightarrow X \wedge Y \wedge X$ par la composée des deux morphismes $X \longrightarrow \mathbf{1} \wedge X$ et $\mathbf{1} \wedge X \xrightarrow{\varphi \wedge X} X \wedge Y \wedge X$. Grâce à cet isomorphisme, on obtient que tout morphisme $X \wedge Y \wedge X \longrightarrow X \wedge Y \wedge X$ peut s’écrire de façon unique sous la forme $\mathbf{Id}_X \wedge \mathbf{Id}_Y \wedge f$ avec $f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$. De même, on obtient que tout morphisme $X \wedge Y \wedge X \longrightarrow X \wedge Y \wedge X$ peut s’écrire de façon unique sous la forme $g \wedge \mathbf{Id}_X \wedge \mathbf{Id}_Y$ pour $g \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$. Comme $-\wedge-\wedge-$ est un trifoncteur, les morphismes $\mathbf{Id}_X \wedge \mathbf{Id}_Y \wedge f$ et $g \wedge \mathbf{Id}_Y \wedge \mathbf{Id}_X$ commutent pour tous $f, g \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$. Ainsi, le monoïde des endomorphismes de $X \wedge Y \wedge X$ est commutatif. Comme $X \wedge Y \wedge X$ est isomorphe à X , le monoïde des endomorphismes de X est commutatif, en particulier son groupe des automorphismes est abélien. \triangleleft

Remarque 5.3.

- (1) Dans une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \wedge, \mathbf{1})$, si X est un objet de \mathcal{C} et $n \in \mathbb{N}$, alors il existe une action à gauche canonique de Σ_n sur $X^{\wedge n}$. Elle est induite par la “permutation des facteurs”; pour la construire rigoureusement, on peut utiliser la présentation classique de Σ_n par générateurs et relations⁽³⁰⁾, en définissant les actions des générateurs et en vérifiant que les relations agissent trivialement;
- (2) Si X est de plus inversible pour la structure monoïdale, l’action de Σ_n doit se factoriser par le groupe dérivé de Σ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est équivalent au fait que l’automorphisme de $X \wedge X \wedge X$ induit par un 3-cycle soit l’identité dans \mathcal{C} .

Ainsi, pour pouvoir espérer munir $\mathcal{C}[T^{-1}]$ d’une structure monoïdale symétrique (compatible avec celle de \mathcal{C}) pour laquelle l’objet $\gamma(T)$ soit inversible, il est nécessaire que l’action de la permutation circulaire sur $T \wedge T \wedge T$ devienne l’identité dans la catégorie $\mathcal{C}[T^{-1}]$. Nous allons maintenant expliquer pourquoi cette condition est également suffisante.

⁽³⁰⁾D’après la théorie des groupes de Coxeter, on peut prendre comme générateurs les transpositions $s_i = (i \ i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$, les relations étant $s_i^2 = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $(s_i s_{i+1})^3 = 1$ pour $1 \leq i \leq n-2$

Remarque 5.4. *Il n'est pas évident qu'il existe une unique structure monoïdale symétrique sur $\mathcal{C}[T^{-1}]$ satisfaisant les conditions ci-dessus. Ainsi, une idée est de construire plutôt une catégorie \mathcal{C}' (équivalente à $\mathcal{C}[T^{-1}]$) munie d'une structure monoïdale symétrique et d'un foncteur monoïdal $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ telle que pour toute catégorie monoïdale symétrique \mathcal{D} , il revienne essentiellement au même de se donner un foncteur monoïdal $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ tel que $F(T)$ soit inversible et de se donner un foncteur monoïdal $\mathcal{C}' \xrightarrow{\tilde{F}} \mathcal{D}$.*

On construit facilement une équivalence de catégories $\mathcal{C}[T^{-1}] \cong \mathcal{C}[(T \wedge T)^{-1}]$, et du point de vue du problème 2-universel esquissé ci-dessus, il est clair qu'il est équivalent d'inverser T et d'inverser $T \wedge T$. Or, comme nous allons le voir, il est plus facile d'inverser $T \wedge T$, car non seulement la condition sur la permutation circulaire est vérifiée pour $T' := T \wedge T$, mais de plus, la permutation des deux facteurs de $T' \wedge T'$ vaut l'identité dans $\mathcal{C}[T^{-1}]$:

Théorème 5.5. *Soit T un objet d'une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \wedge, \mathbf{1})$ tel que la permutation circulaire sur $T \wedge T \wedge T$ vaille l'identité dans $\mathcal{C}[T^{-1}]$. Alors, il existe une structure monoïdale symétrique \wedge sur $\mathcal{C}[T^{-1}]$ telle que le foncteur $\mathcal{C} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}[T^{-1}]$ soit monoïdal, et que pour tout $(X, n) \in \mathcal{C}[T^{-1}]$, $\gamma T \wedge (X, n) \cong (X, n + 1)$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Compte tenu de ce qui précède, on peut supposer que la transposition agit trivialement sur $T \wedge T$. On pose simplement $(X, n) \wedge (Y, m) = (X \wedge Y, n + m)$ au niveau des objets. Au niveau des morphismes, toutes les façons "imaginables" de définir le bifoncteur $-\wedge-$ vont coïncider du fait que les groupes de permutations agissent trivialement sur les puissances \wedge de T (au moins après application d'une puissance suffisamment grande du foncteur $T \wedge -$). La vérification des axiomes des catégories monoïdales symétriques est alors longue mais facile. \triangleleft

La catégorie de Spanier-Whitehead

On va maintenant appliquer les résultats précédents à la catégorie monoïdale symétrique $(\mathbf{H}_\bullet(S), \wedge)$ pour inverser (\mathbb{P}^1, ∞) . On rappelle (cf. corollaire 4.5) que (\mathbb{P}^1, ∞) est isomorphe dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ à $S_s^1 \wedge S_t^1$ et à $\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - \{0\}$.

Lemme 5.6. *Soit ξ le fibré trivial $\mathbb{A}^1 \rightarrow S$ de rang 1 sur S . Soit $T = \mathcal{T}h(\xi) = \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - \{0\}$, alors la permutation circulaire sur $T^{\wedge 3}$ vaut l'identité dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — L'action naturelle $\mathbf{GL}_n \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ du schéma en groupes \mathbf{GL}_n sur \mathbb{A}^n induit une action $\mathbf{GL}_n \times (\mathbb{A}^n - 0) \rightarrow \mathbb{A}^n - 0$. Il s'ensuit une action pointée canonique de \mathbf{GL}_n sur $\mathcal{T}h(\xi^{\oplus n})$.

La description de l'isomorphisme $\mathcal{T}h(\xi^{\oplus 3}) = \mathcal{T}h(\xi)^{\wedge 3}$ permet de dire que la permutation circulaire sur $T \wedge T \wedge T$ coïncide avec l'action sur l'espace de Thom du fibré trivial $\mathbb{A}^3 \rightarrow S$ qu'induit la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{GL}_3(S).$$
 Cette matrice est dans l'image de $\mathbf{SL}_3(\mathbb{Z})$ dans $\mathbf{SL}_3(S)$. Comme toute matrice

de $\mathbf{SL}_3(\mathbb{Z})$ est un produit de transvections (\mathbb{Z} étant euclidien), il suffit de montrer que les matrices de la forme $\mathbf{Id} + u \in \mathbf{SL}_3(\mathbb{Z})$ avec u nilpotente agissent trivialement sur $\mathcal{T}h(\xi^{\oplus 3})$ dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$. On peut définir un morphisme de schémas $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\theta} \mathbf{GL}_3(S)$ par la matrice $\mathbf{Id} + Tu \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{Z}[T])$. En composant $\theta \times \mathbf{Id}_{\mathcal{T}h(\xi^{\oplus 3})}$ avec l'action de \mathbf{GL}_3 sur $\mathcal{T}h(\xi^{\oplus 3})$, on obtient un morphisme de S -schémas $\mathbb{A}^1 \times \mathcal{T}h(\xi^{\oplus 3}) \rightarrow \mathcal{T}h(\xi^{\oplus 3})$ (préservant le point base de $\mathcal{T}h(\xi^{\oplus 3})$) valant $\mathbf{Id}_{\mathcal{T}h(\xi^{\oplus 3})}$ en $T = 0$ et l'action de $\mathbf{Id} + u$ en $T = 1$, d'où le résultat, car deux morphismes homotopes coïncident dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$. \triangleleft

Définition 5.7. *Soit S un schéma noethérien. On appelle catégorie de Spanier-Whitehead la catégorie $\mathbf{H}_\bullet(S) \left[(S_s^1 \wedge S_t^1)^{-1} \right]$ et on la note $\mathcal{S}W(S)$.*

En vertu du lemme précédent et du théorème 5.5, $\mathcal{S}W(S)$ possède une structure monoïdale symétrique et le foncteur $\mathbf{H}_\bullet(S) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}W(S)$ est monoïdal. On vérifie facilement que $\mathcal{S}W(S)$ admet des sommes directes finies (notées \vee) et que le foncteur $\mathbf{H}_\bullet(S) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}W(S)$ y commute. De plus, on remarque que pour tout objet $X \in \mathcal{S}W(S)$, les foncteurs $-\wedge X$ et $X \wedge -$ commutent aux sommes directes finies. Ainsi, on omettra souvent le foncteur γ .

Lemme 5.8. *$\mathcal{S}W(S)$ est une catégorie additive.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Construisons donc des structures compatibles de groupes abéliens sur les ensembles de morphismes dans $\mathcal{S}W(S)$. D'après les résultats précédents, le foncteur $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}} \rightarrow \mathcal{S}W(S)$

(composé de $\mathbf{H}_\bullet^{top} \longrightarrow \mathbf{H}_\bullet(S)$ et de $\gamma : \mathbf{H}_\bullet(S) \longrightarrow \mathcal{S}\mathcal{W}(S)$) est monoïdal et commute aux sommes directes finies.

Ainsi, l'image \mathcal{G} dans $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$ du co-groupe abélien standard $S_s^2 \in \mathbf{H}_\bullet^{top}$ est un co-groupe abélien dans $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$ qui est inversible pour la structure monoïdale de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$.

Soient f, g deux éléments de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{W}(S)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ avec \mathcal{X}, \mathcal{Y} deux objets de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$. On définit un morphisme $\mathcal{G} \wedge \mathcal{X} \xrightarrow{\theta} \mathcal{G} \wedge \mathcal{Y}$ de façon à rendre le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} \wedge \mathcal{X} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{G} \wedge \mathcal{Y} \\
 \downarrow + \wedge \mathcal{X} & \searrow & \downarrow \\
 (\mathcal{G} \wedge \mathcal{X}) \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{X}) & \xrightarrow{(\mathcal{G} \wedge f, \mathcal{G} \wedge g)} & \mathcal{G} \wedge \mathcal{Y} \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \\
 (\mathcal{G} \vee \mathcal{G}) \wedge \mathcal{X} & &
 \end{array}$$

\mathcal{G} étant inversible pour la structure monoïdale de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$, le foncteur $\mathcal{G} \wedge -$ est pleinement fidèle, ainsi θ provient d'un unique morphisme $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ que l'on note $f + g$. On vérifie facilement que cette définition fait de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{W}(S)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un groupe abélien. La vérification des axiomes des catégories additives est ensuite triviale. \triangleleft

On remarquera que nous eussions pu prendre n'importe quel co-groupe abélien de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$, inversible pour la structure monoïdale pour définir la structure additive. En fait, tout objet de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$ admet une unique structure de co-groupe, nécessairement abélien. Par conséquent, nous pourrions aussi utiliser l'image du co-groupe S_s^1 de \mathbf{H}_\bullet^{top} qui devient abélien dans $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$.

Le lemme suivant est formel :

Lemme 5.9. *Pour tout objet \mathcal{X} de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$, le foncteur $\mathcal{X} \wedge -$ est additif.*

La structure de catégorie triangulée sur $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$

Définition 5.10. *On définit un foncteur $-[1] : \mathcal{S}\mathcal{W}(S) \longrightarrow \mathcal{S}\mathcal{W}(S)$ par la formule $-[1] = - \wedge S_s^1$.*

Dans la suite, on utilisera *implicitement* l'isomorphisme canonique entre les bifoncteurs $(- \wedge -)[1]$ et $- \wedge (-[1])$ dans $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$.

Définition 5.11. *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{N_{is}})_\bullet$. On définit un objet cône(f) de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{N_{is}})_\bullet$ en formant le carré cocartésien (et homotopiquement cocartésien) suivant dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{N_{is}})_\bullet$, où Δ^1 est pointé par 0 :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X} & \xrightarrow{1} & \mathcal{X} \wedge \Delta^1 \\
 \downarrow f & & \downarrow \\
 \mathcal{Y} & \xrightarrow{\eta_f} & \text{cône}(f)
 \end{array}$$

Le morphisme de faisceaux simpliciaux $\mathcal{X} \xrightarrow{1} \mathcal{X} \wedge \Delta^1$ est le composé du morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{(\text{Id}_{\mathcal{X}}, 1)} \mathcal{X} \times \Delta^1$ et de la projection $\mathcal{X} \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{X} \wedge \Delta^1$ où Δ^1 est considéré comme un faisceau simplicial pointé par 0, et où cône(f) est pointé de sorte que le morphisme η_f soit pointé. On appelle cône(f) le cône de f .

Remarque 5.12. *Il résulte de la propriété à gauche des structures de catégories de modèles étudiées sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{N_{is}})_\bullet$ que si f est une cofibration (i.e. un monomorphisme), alors le morphisme évident cône(f) $\longrightarrow \mathcal{Y}/\mathcal{X}$ est une équivalence faible simpliciale (en particulier une \mathbb{A}^1 -équivalence faible).*

Si f est la projection $\mathcal{X} \longrightarrow \bullet$, alors cône(f) s'identifie canoniquement à $\mathcal{X} \wedge S_s^1$.

De plus, pour tout diagramme commutatif de la forme ci-dessous, on dispose d'un morphisme évident cône(f) \longrightarrow cône(f').

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{X}' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{Y}'
 \end{array}$$

Lemme 5.13. *Dans le carré commutatif précédent, si les flèches verticales $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}'$ sont des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles, alors le morphisme cône(f) \longrightarrow cône(f') est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Cela résulte aussitôt de la propriété à gauche de la structure \mathbb{A}^1 -localisée sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet$. \triangleleft

En particulier, pour tout morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet$, on dispose d'un morphisme canonique $\text{cône}(f) \xrightarrow{\varepsilon_f} \text{cône}(\mathcal{X} \rightarrow \bullet)$. On obtient ainsi la suite de morphismes suivante, fonctorielle en un sens évident sur f :

$$\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \xrightarrow{\eta_f} \text{cône}(f) \xrightarrow{\varepsilon_f} \mathcal{X} \wedge S_s^1$$

On remarquera que la suite de morphismes associée à un morphisme de la forme $\mathcal{Z} \wedge f$ avec \mathcal{Z} un objet de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet$ peut s'obtenir en appliquant le foncteur $\mathcal{Z} \wedge -$ à la suite de morphismes associée à f .

En appliquant le foncteur γ , on peut associer à tout morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet$ un triangle (appelée suite cofibre de f) dans $(\mathcal{S}W(S), -[1])$, cette construction étant fonctorielle :

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\gamma f} \mathcal{Y} \xrightarrow{\gamma \eta_f} \text{cône}(f) \xrightarrow{\gamma \varepsilon_f} \mathcal{X}[1]$$

De même que précédemment, on remarque que la suite cofibre de $\mathcal{Z} \wedge f$ est obtenue (modulo des isomorphismes canoniques) en appliquant le foncteur $(\gamma \mathcal{Z}) \wedge -$ à la suite cofibre de f . Ceci permet de rendre naturelle la définition suivante :

Définition 5.14. Dans $(\mathcal{S}W(S), -[1])$, un triangle distingué est un triangle \mathcal{T} tel qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que le triangle $(\gamma T^{\wedge n}) \wedge \mathcal{T}$ soit isomorphe à la suite cofibre d'un morphisme dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet$.

Il résulte des définitions que l'image par le foncteur $\mathcal{A} \wedge -$ d'un triangle distingué de $\mathcal{S}W(S)$ est un triangle distingué pour tout objet \mathcal{A} dans $\mathcal{S}W(S)$ (et non seulement dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet$).

Théorème 5.15. La catégorie $(\mathcal{S}W(S), -[1])$ munie de ses triangles distingués est une catégorie triangulée.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Il s'agit de vérifier les axiomes énoncés dans [Ver, pages 93-94]. Comme S_s^1 est inversible pour la structure monoïdale \wedge , $-[1]$ est bien une auto-équivalence⁽³¹⁾ de catégories, et $\mathcal{S}W(S)$ est bien additive.

Compte tenu des arguments précédemment donnés, pour vérifier les axiomes, on peut se borner à considérer les triangles qui sont les images par le foncteur $\gamma : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet \rightarrow \mathcal{S}W(S)$ de diagrammes de la forme $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \wedge S_s^1$ dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet$, tout triangle de $(\mathcal{S}W(S), -[1])$ étant isomorphe à un tel triangle après application du foncteur $T^{\wedge n} \wedge -$ pour n assez grand.

(TR I) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet \mathcal{X} de $\mathcal{S}W(S)$, le triangle $\mathcal{X} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{X}}} \mathcal{X} \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{X}[1]$ est bien distingué car pour tout objet \mathcal{X} de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet$, $\text{Id}_{\mathcal{X}}$ est une cofibration et par conséquent $\text{cône}(\text{Id}_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}/\mathcal{X} = 0$. D'après ce qui précède, le fait que tout morphisme $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ dans $\mathcal{S}W(S)$ s'insère dans un triangle distingué $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}[1]$ est évident.

(TR II) Pour démontrer qu'un triangle $\mathcal{X} \xrightarrow{u} \mathcal{Y} \xrightarrow{v} \mathcal{Z} \xrightarrow{w} \mathcal{X}[1]$ est distingué si et seulement si le triangle $\mathcal{Y} \xrightarrow{v} \mathcal{Z} \xrightarrow{w} \mathcal{X}[1] \xrightarrow{-u[1]} \mathcal{Y}[1]$ est distingué, constatons qu'il suffit de faire le sens d'implication direct. En effet, si $\mathcal{Y} \xrightarrow{v} \mathcal{Z} \xrightarrow{w} \mathcal{X}[1] \xrightarrow{-u[1]} \mathcal{Y}[1]$ est distingué, en appliquant deux fois le sens direct, on obtient que le triangle $\mathcal{X}[1] \xrightarrow{-u[1]} \mathcal{Y}[1] \xrightarrow{-v[1]} \mathcal{Z}[1] \xrightarrow{-w[1]} \mathcal{X}[2]$ est distingué. En exploitant que la transposition agit par -1 sur $S_s^1 \wedge S_s^1$, on obtient facilement que ce dernier triangle est isomorphe au triangle $S_s^1 \wedge \mathcal{X} \xrightarrow{\text{Id} \wedge u} S_s^1 \wedge \mathcal{Y} \xrightarrow{\text{Id} \wedge v} S_s^1 \wedge \mathcal{Z} \xrightarrow{\text{Id} \wedge w} S_s^1 \wedge \mathcal{X}[1]$, qui est par conséquent distingué. En revenant à la définition, on obtient bien que $\mathcal{X} \xrightarrow{u} \mathcal{Y} \xrightarrow{v} \mathcal{Z} \xrightarrow{w} \mathcal{X}[1]$ est un triangle distingué. Montrons maintenant le sens direct, considérons un triangle distingué de la forme $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \xrightarrow{\eta_f} \text{cône}(f) \xrightarrow{\eta_f} \mathcal{X} \wedge S_s^1$. On peut former le diagramme suivant où tous les carrés sont

⁽³¹⁾Dans les axiomes de [Ver], on demande que $-[1]$ soit en fait un automorphisme de catégories, mais cela ne présente pas de problème majeur.

cocartésiens :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X} & \xrightarrow{1} & \mathcal{X} \wedge \Delta^1 \\
 \downarrow f & & \downarrow \\
 \mathcal{Y} & \xrightarrow{\eta_f} & \text{cône}(f) \\
 \downarrow 1 & & \downarrow \eta_{\eta_f} \\
 \mathcal{Y} \wedge \Delta^1 & \longrightarrow & \text{cône}(\eta_f)
 \end{array}$$

En envoyant $\mathcal{Y} \wedge \Delta^1$ sur \bullet , on déduit du grand rectangle cocartésien précédent un morphisme canonique $\text{cône}(\eta_f) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{X} \wedge S_s^1$ qui est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible par propriété à gauche. On en déduit que le triangle $\mathcal{Y} \xrightarrow{\eta_f} \text{cône}(\eta_f) \xrightarrow{\lambda \circ \eta_{\eta_f}} \mathcal{X}[1] \xrightarrow{\varepsilon_{\eta_f} \circ \lambda^{-1}} \mathcal{Y}[1]$ est distingué. Il est immédiat que $\lambda \circ \eta_{\eta_f} = \varepsilon_f$. Il reste à montrer que $\varepsilon_{\eta_f} \circ \lambda^{-1} = -f[1]$. On se rend facilement compte que pour établir cette égalité, on peut supposer que $f = \mathbf{Id}_{\mathcal{X}}$. Formons le carré cocartésien suivant dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X} & \xrightarrow{1} & \mathcal{X} \wedge \Delta^1 \\
 \downarrow 1 & & \downarrow \\
 \mathcal{X} \wedge \Delta^1 & \longrightarrow & \mathcal{Z}
 \end{array}$$

En envoyant au choix un des deux termes $\mathcal{X} \wedge \Delta^1$ sur \bullet , on obtient deux morphismes canoniques $\alpha, \beta : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \wedge S_s^1$, et ces deux morphismes sont des \mathbb{A}^1 -équivalences faibles. Il s'agit ainsi de montrer que, dans $\mathcal{SW}(S)$, $\beta \circ \alpha^{-1} = -\mathbf{Id}_{\mathcal{X} \wedge S_s^1}$. Posons $\mathcal{S} = \mathbf{S}\mathbf{U}$ où \mathbf{U} désigne le cercle unité complexe, pointé par 1. On identifie évidemment l'ensemble simplicial pointé \mathcal{S} à un faisceau simplicial pointé. Notons δ l'équivalence faible "évidente" $S_s^1 \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}$ et $\mathbf{U} \xrightarrow{u} \mathbf{U}$ la conjugaison complexe. On construit facilement une \mathbb{A}^1 -équivalence faible $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \wedge \mathcal{S}$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif dans $\mathbf{H}_{\bullet}(S)$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{Z} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{X} \wedge S_s^1 & & \\
 \downarrow \alpha & \searrow & \downarrow \delta & & \\
 \mathcal{X} \wedge \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathbf{Id} \wedge \mathbf{S}u} & \mathcal{X} \wedge \mathcal{S} & & \\
 \downarrow \mathbf{Id} & & \downarrow \delta & & \\
 \mathcal{X} \wedge S_s^1 & & \mathcal{X} \wedge \mathcal{S} & &
 \end{array}$$

Il résulte de ce diagramme que pour montrer que $\beta \circ \alpha^{-1} = -1$, il suffit de montrer que $\mathbf{S}u$ vaut -1 , ce qui est évident.

(TR III, IV) Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas "non faisceautique"... \triangleleft

Lemme 5.16.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{i} & \mathcal{B} \\
 \downarrow j & & \downarrow j' \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{i'} & \mathcal{D}
 \end{array}$$

Soit un carré homotopiquement cocartésien de la forme ci-dessus dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$ pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée. Alors, il existe un morphisme canonique $\mathcal{D} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A} \wedge S_s^1$ dans $\mathbf{H}_{\bullet}(S)$ de sorte que le triangle suivant soit un triangle distingué dans $\mathcal{SW}(S)$:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{(i, -j)} \mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \xrightarrow{i'+j'} \mathcal{D} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}[1]$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — Par définition des carrés homotopiquement cocartésiens, on peut supposer que le carré est cocartésien et que i est une \mathbb{A}^1 -cofibration. D’après (TR II), il suffit d’établir l’existence d’un morphisme canonique δ dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ de sorte que le triangle $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \xrightarrow{(i', j')} \mathcal{D} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}[1] \xrightarrow{(-i, j)} (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})[1]$ soit distingué. Pour cela, il suffit de construire un isomorphisme canonique dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ entre $\mathcal{A} \wedge S_s^1$ et $\mathcal{E} := \text{cône} \left(\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \xrightarrow{(i', j')} \mathcal{D} \right)$ satisfaisant certaines compatibilités.

Par définition du cône, on a le carré cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \vee \mathcal{C} & \xrightarrow{1} & (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \wedge \Delta^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{E} \end{array}$$

\mathcal{D} s’exprimant comme somme amalgamée de \mathcal{B} et de \mathcal{C} le long de \mathcal{A} , on construit facilement le carré cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ i} & \mathcal{B} \wedge \Delta^1 \\ \downarrow 1 \circ j & & \downarrow \\ \mathcal{C} \wedge \Delta^1 & \longrightarrow & \mathcal{E} \end{array}$$

On peut former le carré cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{1} & \mathcal{A} \wedge \Delta^1 \\ \downarrow 1 & & \downarrow \\ \mathcal{A} \wedge \Delta^1 & \longrightarrow & \mathcal{E}' \end{array}$$

Grâce aux morphismes i et j , on construit un morphisme évident $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$, et c’est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible en vertu de la propriété à gauche de la structure \mathbb{A}^1 -localisée, grâce à l’hypothèse disant que i est une cofibration.

Il est très facile de construire un isomorphisme dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ entre \mathcal{E}' et $\mathcal{A} \wedge S_s^1$. Il y en a en fait deux canoniques qui dépendent d’un choix de “signe”, et on vérifie aussitôt que l’un des morphismes $\mathcal{D} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A} \wedge S_s^1$ qui en résulte vérifie les compatibilités requises pour que le triangle envisagé dans le lemme soit distingué. \triangleleft

Une sous-catégorie triangulée intéressante de $\mathcal{SW}(S)$

Comme le souligne Voevodsky dans l’article [Voe2], la catégorie $\mathcal{SW}(S)$ présente l’inconvénient de ne pas posséder de sommes directes infinies. Néanmoins, en ajoutant une hypothèse de finitude sur les objets de $\mathcal{SW}(S)$, nous allons former une sous-catégorie triangulée $\mathcal{SW}^{tf}(S)$ de $\mathcal{SW}(S)$. Nous verrons plus tard que $\mathcal{SW}^{tf}(S)$ s’identifie à une sous-catégorie pleine d’une autre catégorie triangulée $\mathcal{SH}(S)$ qui sera obtenue par une autre méthode de stabilisation qui permette la formation des sommes directes infinies.

Espaces de type fini

Rappelons que l’on note $\mathcal{Spc}_{|S}$ la catégorie $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ et $\mathcal{Spc}_{\bullet|S}$ la catégorie des objets pointés de $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$.

Définition 5.17. On note $\mathcal{Spc}_{|S}^{tf}$ la plus petite classe \mathcal{C} d’objets de $\mathcal{Spc}_{|S}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) Si deux objets X et Y de $\mathcal{Spc}_{|S}$ sont isomorphes, alors $X \in \mathcal{C}$ si et seulement si $Y \in \mathcal{C}$;
- (2) Si $X \in \mathcal{S}m/S$, alors $X \in \mathcal{C}$;
- (3) Soit un carré cocartésien dans $\mathcal{Spc}_{|S}$:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & X \end{array}$$

Si A, B , et C sont dans \mathcal{C} et si le morphisme $A \longrightarrow B$ est un monomorphisme, alors $X \in \mathcal{C}$.

On note $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}$ formée des espaces pointés dont l'espace sous-jacent est dans $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$.

Il est trivial que $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$ et $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$ sont des catégories essentiellement petites.

Lemme 5.18.

- Si X et Y sont dans $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$, alors $X \sqcup Y$ et $X \times Y$ sont dans $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$;
- Si X et Y sont dans $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$, alors $X \vee Y$, $X \times Y$ et $X \wedge Y$ sont dans $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME — La seule affirmation non triviale est celle affirmant que le produit de deux espaces appartenant à $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$ est dans $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$.

Soit $X \in \mathcal{S}m/S$, la classe $\mathcal{C} = \left\{ Y \in \mathcal{S}pc_{|S}, X \times Y \in \mathcal{S}pc_{|S}^{tf} \right\}$ vérifie les hypothèses de la définition 5.17. Donc, pour tout $X \in \mathcal{S}m/S$ et $Y \in \mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$, $X \times Y \in \mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$.

Maintenant, la classe $\mathcal{C}' = \left\{ X \in \mathcal{S}pc_{|S}, \forall Y \in \mathcal{S}pc_{|S}^{tf} \quad X \times Y \in \mathcal{S}pc_{|S}^{tf} \right\}$ vérifie aussi les hypothèses de la définition 5.17, donc pour tous $X, Y \in \mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$, $X \times Y \in \mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$. \triangleleft

Lemme 5.19. Soit $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un système inductif filtrant dans $\mathcal{S}pc_{|S}$, et $K \in \mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$, alors l'application canonique suivante est bijective :

$$\lim_{\alpha \in I} \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}pc_{|S}}(K, Y_\alpha) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}pc_{|S}} \left(K, \lim_{\alpha \in I} Y_\alpha \right)$$

Autrement dit, les objets de $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$ sont de présentation finie dans la catégorie $\mathcal{S}pc_{|S}$. De même, les objets de $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$ sont de présentation finie dans la catégorie $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Soit $(Y_\alpha)_{\alpha \in I}$ un système inductif filtrant, notons \mathcal{C} la classe des objets $K \in \mathcal{S}pc_{|S}$ qui satisfont la conclusion du lemme. Il suffit de vérifier que \mathcal{C} est stable par les opérations intervenant dans la définition de $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$. Le résultat s'obtient alors très facilement grâce au lemme de Yoneda, à la commutation des limites inductives filtrantes aux limites projectives finies dans $\mathcal{E}ns$ et au corollaire 1.13.

Enfin, la variante pointée résulte formellement du cas non-pointé en remarquant que $\bullet \in \mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$. \triangleleft

Remarque 5.20. Pour les nécessités ultérieures, il est utile de définir des versions simpliciales $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})$ et $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_{\bullet}^{tf}$ des catégories $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$ et $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$. On définit ainsi la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_{\bullet}^{tf}$ comme étant la plus petite sous-catégorie strictement pleine de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})$ contenant les objets de la forme $U \times K$ avec $U \in \mathcal{S}m/S$ et $K \in \Delta^{op}\mathcal{E}ns$ un ensemble simplicial fini et stable par l'opération (3) de la définition de $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$. On définit alors de même $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_{\bullet}^{tf}$ et les analogues des lemmes 5.18 et 5.19 sont vrais pour les mêmes raisons.

La catégorie triangulée $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$

Définition 5.21. $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$ constituée des objets isomorphes à des objets de la forme $T^{\wedge n} \wedge \gamma \mathcal{X}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$.

Théorème 5.22. $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$, stable par $-\wedge-$. De plus, $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$ est la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$ engendrée par les U_+ pour $U \in \mathcal{S}m/S$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — En vertu du théorème 5.18, il est clair que le foncteur $-[1]$ induit une auto-équivalence de catégories de $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$ et que $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$ est stable par $-\wedge-$. Il est de plus immédiat que les cônes des morphismes dans $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$ sont dans $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$. Néanmoins, pour conclure que $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{S}\mathcal{W}(S)$, ce n'est pas fini, il faut montrer que le cône d'un morphisme dans $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$ est dans $\mathcal{S}\mathcal{W}^{tf}(S)$. Pour cela, il suffit de montrer que tout morphisme dans $\mathbf{H}_{\bullet}(S)$ entre objets dans l'image de $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$ est isomorphe à l'image d'un morphisme dans $\mathcal{S}pc_{\bullet|S}^{tf}$, ce qui résulte du lemme technique 5.24 dont une démonstration est donnée plus loin.

En utilisant le lemme 5.16, il est immédiat que pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{Spc}_{|S}^{tf}$, \mathcal{X}_+ est dans la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{SW}(S)$ engendrée par les U_+ avec $U \in \mathcal{Sm}/S$. En utilisant le triangle distingué canonique $S_s^0 \longrightarrow \mathcal{X}_+ \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow S_s^0[1]$, on obtient que \mathcal{X} est aussi dans la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{SW}(S)$ engendrée par les U_+ avec $U \in \mathcal{Sm}/S$ si $\mathcal{X} \in \mathcal{Spc}_{\bullet|S}^{tf}$, ce qui permet de conclure. \triangleleft

Avant d'énoncer et d'établir le lemme 5.24, voici un lemme d'acyclicité du type Brown-Gersten dont nous avons besoin :

Lemme 5.23. *On note \mathcal{B} un ensemble représentatif de toutes les \mathbb{A}^1 -cofibrations triviales entre objets de $\mathcal{Spc}_{|S}^{tf}$. Soit $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ une \mathbb{A}^1 -équivalence faible dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{Sm}/S_{Nis})$. Supposons que les morphismes $\mathcal{F} \longrightarrow \bullet$ et $\mathcal{G} \longrightarrow \bullet$ possèdent la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathcal{B} .*

Alors, pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{Spc}_{|S}^{tf}$, le morphisme $\text{hom}(\mathcal{X}, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{F})) \longrightarrow \text{hom}(\mathcal{X}, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{G}))$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Comme \mathcal{B} contient l'ensemble \mathcal{A} de la définition 3.53, il résulte d'une des étapes de la démonstration du théorème 3.54 qui utilisait le théorème de Brown-Gersten que l'assertion du lemme est vraie pour $\mathcal{X} \in \mathcal{Sm}/S$.

De plus, on montre très facilement que pour tout carré cocartésien de la forme ci-dessous dans $\mathcal{Spc}_{|S}^{tf}$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

si i est un monomorphisme, alors pour $\mathcal{Z} \in \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$, le diagramme suivant est homotopiquement cartésien dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$:

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}(D, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})) & \longrightarrow & \text{hom}(B, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{hom}(C, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})) & \longrightarrow & \text{hom}(A, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Z})) \end{array}$$

Ainsi, si l'assertion du lemme est vraie pour A , B et C , alors c'est également le cas pour D . On en déduit le résultat pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{Spc}_{|S}^{tf}$. \triangleleft

Lemme 5.24. *Soient \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux objets de $\mathcal{Spc}_{|S}^{tf}$. Si f est un morphisme $\mathcal{X} \rightsquigarrow \mathcal{Y}$ dans $\mathbf{H}(S)$, alors il existe une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale $\mathcal{Y} \xrightarrow{i} \tilde{\mathcal{Y}}$ avec $\tilde{\mathcal{Y}} \in \mathcal{Spc}_{|S}^{tf}$ et un morphisme $\tilde{f} : \mathcal{X} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$ dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{Sm}/S_{Nis})$ tel que l'on ait l'égalité $\tilde{f} = i \circ f$ dans $\mathbf{H}(S)$. L'analogie pointé est aussi vrai.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — On note ici $\tilde{E}x^\infty$ le foncteur $\mathcal{Fais}(\mathcal{Sm}/S_{Nis}) \longrightarrow \mathcal{Fais}(\mathcal{Sm}/S_{Nis})$ obtenu en appliquant l'argument du petit objet (cf. théorème 2.28) à l'ensemble de morphismes \mathcal{B} de $\mathcal{Fais}(\mathcal{Sm}/S_{Nis})$, les sources des flèches appartenant à \mathcal{B} étant de présentation finie en vertu du lemme 5.19. On note aussi $\tilde{E}x^n = (\tilde{E}x^1)^n$ les foncteurs qui donnent naissance à $\tilde{E}x^\infty$ par passage à la limite inductive. Il est immédiat que $\tilde{E}x^1$ commute aux limites inductives filtrantes.

Revenons à la situation initiale. Choisissons une résolution fibrante $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{G}$ de \mathcal{Y} pour la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{Fais}(\mathcal{Sm}/S_{Nis})$. Le morphisme canonique $\mathcal{Y} \longrightarrow \tilde{E}x^\infty(\mathcal{Y})$ étant une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale, on obtient une factorisation de la forme suivante en vertu de **CM4** :

$$\mathcal{Y} \longrightarrow \tilde{E}x^\infty(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{G}$$

D'après le lemme fondamental de l'algèbre homotopique dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{Sm}/S_{Nis})$ pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée, l'ensemble $\mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\bullet}(S)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ s'identifie au π_0 de $\text{hom}(\mathcal{X}, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{G}))$. D'après le lemme d'acyclicité précédent, le morphisme $\text{hom}(\mathcal{X}, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\tilde{E}x^\infty(\mathcal{Y}))) \longrightarrow \text{hom}(\mathcal{X}, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{G}))$ est une équivalence faible. On peut donc relever le morphisme $f : \mathcal{X} \rightsquigarrow \mathcal{Y}$ en un morphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{g} \tilde{E}x^\infty(\mathcal{Y})$ dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{Sm}/S_{Nis})$. Le faisceau \mathcal{X} étant de présentation finie, remarquons que g se relève en un morphisme

$\mathcal{X} \xrightarrow{h} \widetilde{E}x^n(\mathcal{Y})$ avec $n \in \mathbb{N}$. En utilisant que $\widetilde{E}x^1$ commute aux limites inductives filtrantes, il est essentiellement sorital de montrer que h se relève en un morphisme $\mathcal{X} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$ dans $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ avec $\mathcal{Y} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$ un composé fini d'images directes de sommes directes finies de morphismes dans \mathcal{B} . Il s'ensuit que $\tilde{\mathcal{Y}}$ est dans $\mathcal{S}pc_{|S}^{tf}$ et que $\mathcal{Y} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$ est une \mathbb{A}^1 -cofibration triviale, d'où le résultat.

L'analogie pointée résulte assez formellement de ce résultat.

◁

Les spectres

Quelques propriétés des spectres, niveau par niveau

Définitions

On fixe un objet⁽³²⁾ $T \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$ (cf. remarque 5.20). On choisit⁽³³⁾ aussi un élément σ dans la paire $\{s, \mathbb{A}^1 - loc\}$. Dans la suite, quand il sera question de σ -équivalences faibles (ou simplement d'équivalences faibles sans plus de précision) entre objets de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ (ou $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$), il s'agira d'équivalences faibles simpliciales si $\sigma = s$ ou de \mathbb{A}^1 -équivalences faibles si $\sigma = \mathbb{A}^1 - loc$, et de même pour les cofibrations, les fibrations... Nous noterons $\mathbf{H}_{\bullet}^{\sigma}(S)$ la catégorie homotopique instable pointée de S obtenue en inversant les σ -équivalences faibles dans la catégorie des faisceaux simpliciaux pointés sur Sm/S_{Nis} . Nous supposons qu'il existe un objet $T' \in \mathbf{H}_{\bullet}^{\sigma}(S)$ tel que $T \cong T' \wedge S_s^1$.

Définition 6.1. *Un T -spectre \mathbf{E} est la donnée d'une suite $(\mathbf{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'objets de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$, munie d'une suite de morphismes $\sigma_n : T \wedge \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_{n+1}$ que l'on appelle morphismes d'assemblages. On dispose d'une notion évidente de morphisme de T -spectres, on note $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ la catégorie des T -spectres. On appellera niveau l'entier n intervenant dans la définition.*

On vérifie facilement que la catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ admet des colimites et des limites quelconques et que celles-ci commutent au foncteur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$ qui à \mathbf{E} associe \mathbf{E}_n , et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons définir un certain nombre de foncteurs au niveau des T -spectres. Les démonstrations des lemmes suivants sont toutes triviales, ce qui justifie leur omission.

Lemme 6.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$, $\mathbf{E} \longmapsto \mathbf{E}_n$ admet un adjoint à gauche $\mathbf{F}_n : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$. Il est défini de sorte que pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$, on ait $(\mathbf{F}_n \mathcal{X})_{n+k} = T^{\wedge k} \wedge \mathcal{X}$, $(\mathbf{F}_n \mathcal{X})_k = \bullet$ si $k < n$, les morphismes d'assemblages étant les morphismes évidents.*

Définition 6.3. *Le foncteur $\mathbf{F}_0 : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ est aussi appelé "suspension infinie", et on le notera Σ_T^{∞} .*

Lemme 6.4. *On définit un foncteur $s_- : \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ en faisant correspondre à \mathbf{E} le T -spectre $s_- \mathbf{E}$ tel que $(s_- \mathbf{E})_n = \mathbf{E}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les morphismes d'assemblages étant les morphismes évidents induits par ceux de \mathbf{E} . On définit un autre foncteur $s_+ : \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ en faisant correspondre à \mathbf{E} le T -spectre $s_+ \mathbf{E}$ tel que $(s_+ \mathbf{E})_{n+1} = \mathbf{E}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(s_+ \mathbf{E})_0 = \bullet$ avec les morphismes d'assemblages évidents.*

Alors, (s_+, s_-) est un couple de foncteurs adjoints.

Définition 6.5. *On définit un bifoncteur $-\wedge - : \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \times \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ en faisant correspondre à tout couple $(\mathbf{E}, \mathcal{X})$ le T -spectre $\mathbf{E} \wedge \mathcal{X}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{E} \wedge \mathcal{X})_n = \mathbf{E}_n \wedge \mathcal{X}$, les morphismes d'assemblages étant obtenus (modulo les isomorphismes canoniques d'associativité de la structure monoïdale \wedge sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$) en smashant à droite par \mathcal{X} les morphismes d'assemblages de \mathbf{E} .*

⁽³²⁾En pratique, T sera S_s^1 ou \mathbb{P}^1, ∞ .

⁽³³⁾La méthode de stabilisation présentée ici, fondée sur les articles [Ja2] et [Hov1], s'applique aussi bien aux structures simpliciales et \mathbb{A}^1 -localisée de catégorie de modèles fermée sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais} Sm/S_{Nis}$. Ainsi, nous traitons ces deux cas simultanément. Nous pourrions aussi utiliser les définitions de l'article [Voe2] qui se place dans le cadre de la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{Fais} Sm/S_{Nis}$ que nous avons aussi évoquée, la catégorie homotopique $\mathcal{SH}(S)$ qui y est définie étant équivalente à celle que nous allons construire à partir de la structure \mathbb{A}^1 -localisée sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais} Sm/S_{Nis}$.

Lemme 6.6. *Pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$, le foncteur $- \wedge \mathcal{X} : \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ admet un adjoint à droite noté $\mathbf{Hom}(\mathcal{X}, -)$ tel que pour tout T -spectre \mathbf{E} et $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{Hom}(\mathcal{X}, \mathbf{E})_n = \mathcal{H}om_{\bullet}(\mathcal{X}, \mathbf{E}_n)^{(34)}$, les morphismes d'assemblages étant les morphismes évidents.*

Dans le cas particulier où $\mathcal{X} = T$, on pose $\Omega_{T-} := \mathbf{Hom}(T, -)$.

Définition 6.7. *On définit une structure de catégorie simpliciale (cf. [GJ, définition 2.1, page 81]) sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, en définissant un ensemble simplicial $\mathbf{hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ pour tous T -spectres \mathbf{E} et \mathbf{F} de sorte que pour tout ensemble simplicial K , on ait une bijection canonique :*

$$\mathbf{Hom}_{\Delta^{op}\mathcal{E}ns}(K, \mathbf{hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F})) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)}(\mathbf{E} \wedge K_+, \mathbf{F})$$

Deux structures de catégories de modèles fermées sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$

On dit qu'un morphisme $\mathbf{E} \xrightarrow{f} \mathbf{F}$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ est une cofibration (resp. ...) niveau par niveau si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}_n \xrightarrow{f_n} \mathbf{F}_n$ est une cofibration (resp. ...).

Définition 6.8.

- (1) *On désigne par cofibrations injectives, équivalences injectives et fibrations injectives les classes de morphismes dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ qui sont respectivement les cofibrations niveau par niveau, les σ -équivalences faibles niveau par niveau, et les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux σ -cofibrations triviales niveau par niveau ;*
- (2) *On désigne par cofibrations projectives, équivalences projectives et fibrations projectives les classes de morphismes dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ qui sont respectivement les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales niveau par niveau, les σ -équivalences faibles niveau par niveau et les σ -fibrations niveau par niveau.*

Lemme 6.9.

- (1) *La catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ munie des cofibrations injectives, des équivalences injectives et des fibrations injectives est une catégorie de modèles fermée propre et simpliciale ;*
- (2) *la catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ munie des cofibrations projectives, des équivalences projectives et des fibrations projectives est une catégorie de modèles fermée propre et simpliciale.*

De plus, les axiomes $\mathbf{CM1}^+$ et $\mathbf{CM5}^+$ sont vérifiés dans ces deux cas.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Dans les deux cas, la vérification des axiomes $\mathbf{CM1}^+$, $\mathbf{CM2}$, $\mathbf{CM3}$ est triviale. L'axiome $\mathbf{CM4}$ résulte ici, modulo $\mathbf{CM5}$, de l'astuce de Joyal (cf. lemme 2.6) ou de sa version duale. Il ne reste donc à vérifier que l'axiome $\mathbf{CM5}^+$, la propriété et l'axiome simplicial pour ces deux structures.

Commençons par la structure projective, grâce aux adjonctions, il est clair qu'un morphisme $\mathbf{E} \xrightarrow{f} \mathbf{F}$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ est une fibration projective (resp. fibration projective triviale) si et seulement si f possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes $\mathbf{F}_n j$, avec $n \in \mathbb{N}$, où j parcourt un ensemble suffisamment grand de σ -cofibrations triviales (resp. de cofibrations) dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$. De plus, il résulte des propriétés de $- \wedge -$ que $\mathbf{F}_n j$ est une équivalence projective si j est une cofibration triviale. Avec le théorème 2.28, on obtient alors facilement $\mathbf{CM5}^+$ pour la structure projective en utilisant quelques propriétés des σ -équivalences faibles que nous avons vues.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le lemme suivant :

Lemme 6.10. *Un morphisme $\mathbf{E} \xrightarrow{f} \mathbf{F}$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ est une cofibration projective (resp. cofibration projective triviale) si et seulement si $\mathbf{E}_0 \longrightarrow \mathbf{F}_0$ est une cofibration (resp. cofibration triviale) et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $T \wedge \mathbf{F}_n \bigsqcup_{T \wedge \mathbf{E}_n} \mathbf{E}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{F}_{n+1}$ déduit des morphismes d'assemblages est une cofibration (resp. cofibration triviale).*

DÉMONSTRATION DU LEMME — Il est facile de montrer que les morphismes satisfaisant le critère du lemme sont des cofibrations projectives (resp. des cofibrations projectives triviales).

Il résulte de l'argument du petit objet que toute cofibration projective (resp. cofibration projective triviale) est un rétracte d'un composé transfini d'images directes de sommes directes de morphismes de la forme $\mathbf{F}_n j$ avec $n \in \mathbb{N}$ et j une cofibration (resp. cofibration triviale) dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$. Ainsi,

⁽³⁴⁾ $\mathcal{H}om_{\bullet}(\mathcal{X}, -)$ désigne le foncteur adjoint à droite du foncteur $- \wedge \mathcal{X} : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet} \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$.

pour tester le critère du lemme pour toutes les cofibrations projectives (resp. cofibrations projectives triviales), il suffit de le vérifier pour les morphismes de la forme $\mathbf{F}_n j$, avec $n \in \mathbb{N}$ et j une cofibration (resp. cofibration triviale), ce qui est immédiat. \triangleleft

En particulier, on remarque que les cofibrations projectives (resp. cofibrations projectives triviales) sont aussi des cofibrations injectives (resp. cofibrations injectives triviales).

Montrons maintenant **CM5**⁺ pour la structure injective. On démontre assez facilement, à partir des lemmes 3.38, 3.39, 3.9 et 3.10, qu'il existe un ensemble \mathbf{B} de cofibrations injectives triviales dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ tel qu'un morphisme dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ soit une fibration injective si et seulement s'il possède la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathbf{B} . D'après le théorème 2.28, on en déduit l'existence d'une factorisation fonctorielle de tout morphisme dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ sous la forme $p \circ i$ où p est une fibration injective et i une cofibration injective triviale. En ajoutant à \mathbf{B} un ensemble bien choisi de cofibrations projectives, on obtient l'autre type de factorisation. Ainsi, on a montré **CM5**⁺ pour la structure injective.

La propriété de ces deux structures de catégorie de modèles fermée sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ résulte formellement de la propriété de la σ -structure sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$, à condition de remarquer que les fibrations injectives triviales sont aussi des fibrations projectives triviales (ce qui résulte aussitôt du fait que les cofibrations projectives sont aussi des cofibrations injectives).

L'axiome simplicial **SM7** pour les deux structures de catégorie de modèles considérées résulte (cf. [**GJ**, proposition 3.11 et corollaire 3.12, page 94]) de l'axiome **SM7b**, qui est très facile à vérifier ici. \triangleleft

Stabilisation des T -spectres

L'objectif premier de cette partie est de définir une nouvelle structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$. Pour cela, nous allons utiliser la notion de σ -équivalence stable définie dans l'article [**Voe2**] dans le cas de la structure \mathbb{A}^1 -localisée sur $\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$. Nous allons montrer qu'avec les cofibrations injectives comme cofibrations, on obtient bien une structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, le seul ingrédient non "évident" pour établir cela étant la descente Nisnevich.

Il s'agira ensuite d'évoquer, sous certaines hypothèses, l'existence d'une structure monoïdale symétrique sur la catégorie homotopique stable obtenue, ainsi que l'existence d'une structure triangulée.

Objets σ -flasques

Pour pouvoir calculer efficacement les foncteurs dérivés de certains foncteurs que nous étudierons plus loin, nous avons besoin d'introduire une notion plus faible que celle d'objet σ -fibrant dans la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$. Par analogie avec le cas des catégories de faisceaux de groupes abéliens sur certains sites, ces objets seront appelés σ -flasques⁽³⁵⁾ :

Définition 6.11.

- (1) Un objet $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$ est σ -flasque si la projection $\mathcal{X} \rightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux σ -cofibrations triviales entre objets de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$;
- (2) Un objet $\mathbf{E} \in \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ est σ -flasque si pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathbf{E}_n est σ -flasque⁽³⁶⁾.

Lemme 6.12.

- (1) Soit \mathcal{J} une petite catégorie filtrante. Pour tout foncteur $F : \mathcal{J} \rightarrow \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$ (resp. $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$), si pour tout $i \in \mathcal{J}$, $F(i)$ est σ -flasque, alors $\varinjlim F$ est σ -flasque ;
- (2) Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ une σ -équivalence faible entre deux faisceaux simpliciaux pointés σ -flasques. Alors, pour tout $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$, le morphisme $\mathbf{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux ;
- (3) Si \mathcal{X} est un faisceau simplicial pointé σ -flasque, alors pour tout $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$, $\mathcal{H}\mathbf{om}_{\bullet}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ est σ -flasque ;
- (4) Pour tout $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$, le foncteur $\mathcal{H}\mathbf{om}_{\bullet}(\mathcal{A}, -)$ préserve les σ -équivalences faibles entre objets σ -flasques.

⁽³⁵⁾Cette définition est comparable à celle donnée par Jardine dans [**Ja2**].

⁽³⁶⁾En particulier, les T -spectres σ -projectivement fibrants sont σ -flasques.

DÉMONSTRATION DU LEMME — (1) Il suffit de remarquer que le foncteur $\mathbf{Hom}_{\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}}(\mathcal{A}, -)$ commute aux colimites filtrantes pour tout $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$.

(2) Notons \mathcal{C} la classe des objets de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$ tels que le morphisme d'ensembles simpliciaux $\text{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{X}) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$ soit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. En utilisant un argument similaire à celui intervenant dans la démonstration du théorème 3.54, on remarque que la descente Nisnevich implique que pour tout $U \in Sm/S$, $U_+ \in \mathcal{C}$. De plus, si K est un ensemble simplicial pointé fini et si $\mathcal{X} \in \mathcal{C}$, alors $\mathcal{X} \wedge K \in \mathcal{C}$. Ainsi $U_+ \wedge K \in \mathcal{C}$ pour tout $U \in Sm/S$ et K ensemble simplicial pointé fini. Ensuite, on peut conclure en utilisant un argument analogue à celui du lemme 5.23.

(3) En revenant aux définitions, il suffit d'utiliser le fait que $\mathcal{H}om_{\bullet}(\mathcal{A}, -)$ admet un adjoint à gauche $- \wedge \mathcal{A}$ qui préserve les σ -cofibrations triviales et la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$.

(4) Soit f une σ -équivalence faible entre objets σ -flasques. Pour vérifier que $\mathcal{H}om_{\bullet}(\mathcal{A}, f)$ est une σ -équivalence faible, il suffit de vérifier que c'est une équivalence faible naïve de faisceaux simpliciaux pointés. Ainsi, il suffit de montrer que pour tout $U \in Sm/S$, $\text{hom}(U_+, \mathcal{H}om_{\bullet}(\mathcal{A}, f))$ est une équivalence faible. Par adjonction, ce morphisme s'identifie au morphisme $\text{hom}(U_+ \wedge \mathcal{A}, f)$ qui est une équivalence faible d'après (2). \triangleleft

Boucles étranges

Comme de coutume avec les spectres, des difficultés techniques apparaissent quand il s'agit de construire certains morphismes, ne serait-ce que pour vérifier la commutativité de certains diagrammes.

Définition 6.13. Pour tout T -spectre \mathbf{E} , on note $\Omega_T^l \mathbf{E}$ le T -spectre tel que $(\Omega_T^l \mathbf{E})_n = \mathcal{H}om_{\bullet}(T, \mathbf{E}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le morphisme d'assemblage⁽³⁷⁾ $T \wedge \mathcal{H}om_{\bullet}(T, \mathbf{E}_n) \rightarrow \mathcal{H}om_{\bullet}(T, \mathbf{E}_{n+1})$ est le morphisme adjoint du morphisme $\mathcal{H}om_{\bullet}(T, \mathbf{E}_n) \rightarrow \mathcal{H}om_{\bullet}(T, \mathcal{H}om_{\bullet}(T, \mathbf{E}_{n+1}))$ qui est obtenu en appliquant le foncteur $\mathcal{H}om_{\bullet}(T, -)$ au morphisme $\mathbf{E}_n \rightarrow \mathcal{H}om_{\bullet}(T, \mathbf{E}_{n+1})$ adjoint du morphisme d'assemblage de \mathbf{E} .

L'intérêt de considérer Ω_T^l réside dans le lemme suivant (cf. [Hov1, définition 4.4]) :

Lemme 6.14. Les morphismes adjoints des morphismes d'assemblage de \mathbf{E} induisent un morphisme de T -spectres canonique $\eta_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \rightarrow s_- \Omega_T^l \mathbf{E}$.

On note Λ le foncteur $s_- \Omega_T^l : \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \rightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$. On a ainsi une transformation naturelle $\eta : \mathbf{Id}_{\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)} \rightsquigarrow \Lambda$.

Définition 6.15. On note $\Lambda^{\infty} : \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \rightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ le foncteur qui à un T -spectre \mathbf{E} associe la colimite du diagramme suivant :

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\eta_{\mathbf{E}}} \Lambda \mathbf{E} \xrightarrow{\eta_{\Lambda \mathbf{E}}} \Lambda^2 \mathbf{E} \xrightarrow{\eta_{\Lambda^2 \mathbf{E}}} \Lambda^3 \mathbf{E} \xrightarrow{\eta_{\Lambda^3 \mathbf{E}}} \Lambda^4 \mathbf{E} \xrightarrow{\eta_{\Lambda^4 \mathbf{E}}} \dots$$

À ce stade, il est crucial de remarquer que pour tout $\mathbf{E} \in \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, les deux morphismes $\Lambda(\eta_{\mathbf{E}}), \eta_{\Lambda \mathbf{E}} : \Lambda \mathbf{E} \rightarrow \Lambda^2 \mathbf{E}$ sont égaux.

Lemme 6.16. Pour tout $\mathbf{E} \in \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, le morphisme $\eta_{\Lambda^{\infty}} : \Lambda^{\infty} \mathbf{E} \rightarrow \Lambda(\Lambda^{\infty} \mathbf{E})$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION DU LEMME — On utilise ici la remarque précédente et le fait que T soit dans la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$ (pour s'assurer que Λ commute aux colimites filtrantes). \triangleleft

Les résultats sur les faisceaux simpliciaux pointés σ -flasques admettent le corollaire suivant :

Corollaire 6.17. Les foncteurs Λ et Λ^{∞} préservent la catégorie des T -spectres σ -flasques. De plus, ils préservent les σ -équivalences projectives entre T -spectres σ -flasques.

On note $\mathbf{Ho}_{\sigma}(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))$ la catégorie homotopique associée à la structure σ -injective de catégorie de modèles sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ et $\mathbf{H}_{\bullet}^{\sigma}(S)$ la catégorie homotopique associée à la σ -structure de catégorie de modèles sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$. Notons $\mathbf{R}\Lambda, \mathbf{R}\Lambda^{\infty} : \mathbf{Ho}_{\sigma}(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)) \rightarrow \mathbf{Ho}_{\sigma}(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))$ les foncteurs dérivés totaux à droite des foncteurs Λ et Λ^{∞} . D'après ce qui précède, ils existent et

⁽³⁷⁾Ce morphisme d'assemblage est bien différent du morphisme d'assemblage de $\Omega_T^l \mathbf{E}$. En effet, en notation "fonctionnelle", ce dernier s'écrit $(t, f) \mapsto (t' \mapsto \sigma(t, f(t')))$, tandis que le morphisme d'assemblage de $\Omega_T^l \mathbf{E}$ s'écrit $(t, f) \mapsto (t' \mapsto \sigma(t', f(t)))$

peuvent se calculer en utilisant des résolutions σ -flasques. On dispose d'une transformation naturelle $\rho : \mathbf{Id}_{\mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))} \longrightarrow \mathbf{R}\Lambda$.

Définition 6.18. Soit $\mathbf{E} \xrightarrow{f} \mathbf{F}$ un morphisme dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ (resp. $\mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))$). On dit que f est une σ -équivalence stable si $\mathbf{R}\Lambda^\infty(f)$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))$.

Lemme 6.19.

- (1) Soit \mathcal{J} une petite catégorie filtrante et $f : F \rightsquigarrow G$ une transformation naturelle entre deux foncteurs $F, G \in \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))$. Si, pour tout $i \in \mathcal{J}$, $F(i) \xrightarrow{f_i} G(i)$ est une équivalence stable, alors $\varinjlim_{\mathcal{J}} f : \varinjlim_{\mathcal{J}} F \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{J}} G$ est une équivalence stable.
- (2) Pour tout objet $\mathbf{E} \in \mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))$, les morphismes canoniques $\mathbf{E} \xrightarrow{\rho_{\mathbf{E}}} \mathbf{R}\Lambda \mathbf{E}$ et $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{R}\Lambda^\infty \mathbf{E}$ sont des équivalences stables.

DÉMONSTRATION DU LEMME — (1) Grâce à l'axiome **CM5**⁺ pour la structure σ -injective sur la catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ et au fait que les colimites filtrantes d'équivalences injectives sont des équivalences injectives, on peut supposer que pour tout $i \in \mathcal{J}$, $F(i)$ et $G(i)$ sont injectivement fibrants, en particulier σ -flasques. Dans ce cas, cela résulte aussitôt du fait que les objets σ -flasques sont stables par colimites filtrantes, que Λ^∞ commute aux colimites filtrantes, et encore une fois du fait que les équivalences injectives sont stables par colimites filtrantes.

(2) Cela résulte aussitôt des propriétés de stabilité de la catégorie de T -spectres σ -flasques et de leur acyclicité pour les foncteurs Λ et Λ^∞ . En particulier, les formules évidentes décrivant les composés des foncteurs dérivés de Λ et Λ^∞ sont vérifiées au niveau des T -spectres σ -flasques. Ainsi, il résulte du lemme 6.16 que la flèche canonique $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{R}\Lambda \mathbf{E}$ est une équivalence stable. Ensuite, il résulte par exemple de (1) que $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{R}\Lambda^\infty \mathbf{E}$ est une équivalence stable. \triangleleft

Définition 6.20. Pour tout $\mathbf{E} \in \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_{\bullet}^{tf}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\pi_k \mathbf{E}(\mathcal{A}) = \varinjlim_{i \geq \max(0, k)} \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\sigma(S)}(T^{\wedge i} \wedge \mathcal{A}, \mathbf{E}_{i-k})$$

où les morphismes de transition du système inductif sont induits par le foncteur $T \wedge^{\mathbf{L}} -$ et les morphismes d'assemblages de \mathbf{E} .

Il est immédiat qu'à tout $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_{\bullet}^{tf}$ et à tout $k \in \mathbb{Z}$, on peut en fait associer un foncteur $\pi_k(-)(\mathcal{A}) : \mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)) \longrightarrow \mathcal{E}ns_{\bullet}$.

Lemme 6.21.

- (1) Pour tout $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_{\bullet}^{tf}$ et $k \leq 0$, il existe un isomorphisme canonique, pour tout T -spectre \mathbf{E} :

$$\mathit{hom}(\mathcal{A}, (\Lambda^\infty \mathbf{E})_{-k}) = \varinjlim_{i \geq \max(0, k)} \mathit{hom}(T^{\wedge i} \wedge \mathcal{A}, \mathbf{E}_{i-k})$$

où les morphismes de transition du système inductif sont induits par le foncteur $T \wedge -$ et les morphismes d'assemblage de \mathbf{E} . En particulier, pour tout $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_{\bullet}^{tf}$ et $k \leq 0$, il existe un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)) \longrightarrow \mathcal{E}ns_{\bullet}$:

$$\pi_k(-)(\mathcal{A}) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\sigma(S)}(\mathcal{A}, (\mathbf{R}\Lambda^\infty(-))_{-k})$$

- (2) Pour tout $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_{\bullet}^{tf}$ et $k \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)) \longrightarrow \mathcal{E}ns_{\bullet}$:

$$\pi_{k+1}(-)(\mathcal{A}) = \pi_k(-)(T \wedge \mathcal{A})$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — (2) est trivial. Pour établir la première partie de (1), il suffit d'expliciter avec précision les deux foncteurs. La seconde partie de (1) résulte de l'application de la première moitié de (1) aux T -spectres σ -flasques et du lemme 6.12. \triangleleft

Corollaire 6.22. Soit $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ (resp. $\mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))$). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est une équivalence stable ;
- (2) Pour tout $A \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$ et $k \in \mathbb{Z}$, l'application $\pi_k(f)(A)$ est bijective ;
- (3) Pour tout $U \in Sm/S$, $k \leq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, l'application $\pi_k(f)(S_s^n \wedge U_+)$ est bijective.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — Supposons (1). Par définition, $\mathbf{R}\Lambda^\infty(f)$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))$, ainsi, en appliquant la première partie du lemme précédent, on obtient que pour tout $k \leq 0$ et $A \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$, l'application $\pi_k(f)(A)$ est bijective. En utilisant la deuxième partie du lemme précédent, on obtient (2).

(2) implique tautologiquement (3). Montrons maintenant que (3) implique (1). On peut évidemment supposer que \mathbf{E} et \mathbf{F} sont σ -flasques. On veut montrer que pour tout $k \leq 0$, $(\Lambda^\infty \mathbf{E})_{-k} \rightarrow (\Lambda^\infty \mathbf{F})_{-k}$ est une équivalence simpliciale. D'après la première partie du lemme précédent, on obtient que pour tout $U \in Sm/S$, le morphisme d'ensembles simpliciaux pointés $\Lambda^\infty \mathbf{E}_{-k}(U) \rightarrow \Lambda^\infty \mathbf{F}_{-k}(U)$ induit une bijection au niveau des groupes d'homotopie de ces ensembles simpliciaux relativement à leurs points-bases. Comme ce sont des H -groupes (car T est isomorphe à une suspension), il s'agit d'une équivalence faible d'ensembles simpliciaux pointés, d'où le résultat. \triangleleft

Remarque 6.23. D'après ce qui précède, il est évident qu'un morphisme de T -spectres $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ qui induit des σ -équivalences faibles $\mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{F}_n$ pour tout n assez grand est une σ -équivalence stable.

Une structure stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$

Définition 6.24. Une cofibration stable est un morphisme dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ qui est une cofibration injective. Une fibration stable est⁽³⁸⁾ un morphisme de $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ possédant la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les cofibrations injectives qui sont aussi des σ -équivalences stables.

Théorème 6.25. La catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ munie des cofibrations stables, des σ -équivalences stables et des σ -fibrations stables est une catégorie de modèles fermée propre et simpliciale, les axiomes $\mathbf{CM1}^+$ et $\mathbf{CM5}^+$ étant aussi vérifiés. On note $\mathcal{SH}_\sigma^T(S)$ la catégorie homotopique de cette catégorie de modèles.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — La vérification des axiomes $\mathbf{CM1}^+$, $\mathbf{CM2}$, $\mathbf{CM3}$ est évidente. Une fois que l'on aura $\mathbf{CM5}$, l'astuce de Joyal (cf. lemme 2.6) permet ensuite de démontrer $\mathbf{CM4}$. Montrons donc $\mathbf{CM5}^+$. La structure injective de catégorie de modèles sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ donne des factorisations fonctorielles de la forme $f = p \circ i$ avec p une fibration injective triviale et i une cofibration injective pour tout morphisme f dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$. p est une fibration injective triviale donc possède la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les cofibrations injectives, en particulier p est une fibration stable. De plus, p est une équivalence injective, donc p est une fibration stable triviale et i une cofibration injective. Pour démontrer l'autre partie de $\mathbf{CM5}^+$, en vertu du théorème 2.28, il suffit de montrer qu'il existe un ensemble \mathbf{B} de cofibrations stables triviales tel qu'un morphisme dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ soit une fibration stable si et seulement s'il possède la propriété de relèvement à droite par rapport à \mathbf{B} . On démontre l'existence de \mathbf{B} avec la même méthode que celle du lemme 3.38, le lemme 3.39 devant être remplacé par un lemme se démontrant essentiellement de la même façon⁽³⁹⁾. Ainsi, nous avons bien construit une catégorie de modèles.

Tous les objets de cette catégorie de modèles stable sont cofibrants, ainsi il est formel (cf. [GJ, proposition 8.1 et lemme 8.5, pages 123-124]) que cette structure est propre à gauche. Montrons que cette structure est propre à droite. On va même montrer que l'image réciproque d'une équivalence stable par une fibration projective est une équivalence stable. On se donne un carré cartésien dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ de la forme suivante où $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{H}$ est une fibration projective et $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ une équivalence stable :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbf{H} \end{array}$$

⁽³⁸⁾ On prendra garde au fait que l'on pourrait aussi définir les fibrations stables en demandant qu'elles aient la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations projectives qui sont aussi des équivalences stables. On obtiendrait ainsi une autre structure stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$. Mais, la structure choisie ici est plus commode par certains aspects puisque par exemple tous les objets y sont cofibrants.

⁽³⁹⁾ Il s'agit de remplacer le foncteur de \mathbb{A}^1 -localisation $L_{\mathbb{A}^1}$ par le foncteur $\Lambda^\infty L$ où $L : \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \rightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ est un certain foncteur, construit grâce à un argument du petit objet, possédant la propriété d'être à valeurs dans la catégorie des T -spectres σ -flasques. Il convient ensuite de faire les estimations de cardinaux nécessaires...

On veut montrer que $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ est une équivalence stable. En vertu de la propriété à droite de la structure projective sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, on peut clairement supposer que \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{G} et \mathbf{H} sont projectivement fibrants. Λ^∞ commutant aux limites projectives finies, on obtient le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^\infty \mathbf{E} & \longrightarrow & \Lambda^\infty \mathbf{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^\infty \mathbf{G} & \longrightarrow & \Lambda^\infty \mathbf{H} \end{array}$$

Par hypothèse, $\Lambda^\infty \mathbf{G} \longrightarrow \Lambda^\infty \mathbf{H}$ est une σ -équivalence projective entre T -spectres σ -flasques, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $U \in \mathcal{S}m/S$, $(\Lambda^\infty \mathbf{G})_n(U) \longrightarrow (\Lambda^\infty \mathbf{H})_n(U)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux pointés. On montre facilement que $(\Lambda^\infty \mathbf{F})_n(U) \longrightarrow (\Lambda^\infty \mathbf{H})_n(U)$ est une fibration, ainsi, par propriété à droite de la structure de catégorie de modèles sur $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$, $(\Lambda^\infty \mathbf{E})_n(U) \longrightarrow (\Lambda^\infty \mathbf{F})_n(U)$ est une équivalence faible, ainsi $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ est bien une équivalence stable.

Le caractère simplicial de cette catégorie de modèles n'est pas complètement immédiat à vérifier. On note toujours \mathbf{hom} le bifoncteur $(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))^{op} \times \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns$ associé aux deux structures de catégories de modèles simpliciales précédemment rencontrées. On utilise toujours l'axiome **SM7b** (cf. [GJ, proposition 3.11 et corollaire 3.12, page 94]). Compte tenu de ce qui a déjà été établi pour la structure injective, il suffit de montrer que pour tout ensemble simplicial $K \in \Delta^{op}\mathcal{E}ns$, le foncteur $-\wedge K_+ : \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ préserve les équivalences stables. Notons \mathcal{C} la classe des ensembles simpliciaux K satisfaisant cette propriété. Si $|K|$ est contractile, le morphisme canonique de foncteurs $-\wedge(K_+) \rightsquigarrow -\wedge(\bullet_+) = \mathbf{Id}_{\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)}$ induit une équivalence injective pour tout objet de $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$. Comme le foncteur identité préserve les équivalences stables, on obtient que \mathcal{C} contient tous les ensembles simpliciaux K tels que $|K|$ soit contractile. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^n \in \mathcal{C}$. Grâce à la propriété à gauche de la structure stable et à une récurrence sur la dimension, on obtient que tout ensemble simplicial fini K est dans \mathcal{C} . Par passage à la colimite filtrante sur les sous-complexes finis d'un ensemble simplicial arbitraire K , on obtient que $\mathcal{C} = \Delta^{op}\mathcal{E}ns$, d'où le résultat. \triangleleft

Définition 6.26. Soit \mathbf{E} un objet de $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ (resp. $\mathbf{Ho}_\sigma(\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S))$). On dit que \mathbf{E} est un Ω -spectre si le morphisme canonique $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{R}\Lambda \mathbf{E}$ est un isomorphisme.

En particulier, si $\mathbf{E} \in \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ est projectivement fibrant⁽⁴⁰⁾, alors \mathbf{E} est un Ω -spectre si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $\mathbf{E}_n \longrightarrow \mathcal{H}om_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1})$ adjoint du morphisme d'assemblage de \mathbf{E} est une σ -équivalence.

Lemme 6.27. Soit \mathbf{E} un objet de $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) \mathbf{E} est stablement fibrant ;
- (2) \mathbf{E} est un Ω -spectre injectivement fibrant.

DÉMONSTRATION DU LEMME — La démonstration repose fondamentalement sur le fait que la catégorie de modèles stable que l'on vient de construire est simpliciale.

Supposons (1). Les cofibrations injectives triviales étant évidemment des cofibrations stables triviales, \mathbf{E} est injectivement fibrant (en particulier projectivement fibrant). Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer que le morphisme canonique $\mathbf{E}_n \longrightarrow \mathcal{H}om_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1})$ est une σ -équivalence. Du fait que la structure de catégorie de modèles sur $\Delta^{op}\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet$ est simpliciale, il s'agit de montrer que pour tout $\mathcal{A} \in \Delta^{op}\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathbf{hom}(\mathcal{A}, \mathbf{E}_n) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{H}om_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1}))$ est une équivalence faible. Grâce à des adjonctions simpliciales, on voit que ce morphisme s'identifie au morphisme $\mathbf{hom}(\mathbf{F}_n \mathcal{A}, \mathbf{E}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathbf{F}_{n+1}(T \wedge \mathcal{A}), \mathbf{E})$ induit par le morphisme évident $\mathbf{F}_{n+1}(T \wedge \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{F}_n \mathcal{A}$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$. Pour montrer que ce morphisme d'ensembles simpliciaux est une équivalence faible, on peut utiliser le fait que la structure stable est simpliciale. En effet, le morphisme $\mathbf{F}_{n+1}(T \wedge \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{F}_n \mathcal{A}$ est évidemment une équivalence stable entre objets cofibrants, et \mathbf{E} est stablement fibrant de sorte que le morphisme $\mathbf{hom}(\mathbf{F}_n \mathcal{A}, \mathbf{E}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathbf{F}_{n+1}(T \wedge \mathcal{A}), \mathbf{E})$ est bien une équivalence faible. Ainsi, \mathbf{E} est bien un Ω -spectre injectivement fibrant.

Supposons (2). D'après **CM5**, il existe une équivalence stable $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{U}$ avec \mathbf{U} stablement fibrant. Comme pour tout Ω -spectre injectivement fibrant \mathbf{G} le morphisme canonique $\mathbf{G} \longrightarrow \Lambda^\infty \mathbf{G}$ est une équivalence injective, on obtient que $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{U}$ est une équivalence injective. Maintenant, donnons nous une cofibration stable triviale quelconque $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, comme \mathbf{E} est injectivement fibrant, le

⁽⁴⁰⁾le fait d'être σ -flasque est ici largement suffisant

morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathrm{hom}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) \longrightarrow \mathrm{hom}(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ est une fibration. De plus, pour tout objet $\mathbf{C} \in \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, le morphisme $\mathrm{hom}(\mathbf{C}, \mathbf{E}) \longrightarrow \mathrm{hom}(\mathbf{C}, \mathbf{U})$ est une équivalence faible car $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{U}$ est une équivalence injective et \mathbf{C} injectivement cofibrant. Or, $\mathrm{hom}(\mathbf{B}, \mathbf{U}) \longrightarrow \mathrm{hom}(\mathbf{A}, \mathbf{U})$ est une fibration triviale en vertu de **SM7** pour la structure stable, \mathbf{U} étant stablement fibrant et $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ une cofibration stable triviale. Il en résulte que $\mathrm{hom}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) \longrightarrow \mathrm{hom}(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ est une équivalence faible. Or, c'était déjà une fibration. Donc, ce dernier morphisme d'ensembles simpliciaux est surjectif en degré simplicial 0, ce qui est équivalent au fait que $\mathbf{E} \longrightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$. \triangleleft

Corollaire 6.28. *Un morphisme f dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ est une équivalence stable si et seulement si pour tout Ω -spectre injectivement fibrant \mathbf{W} , le morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathrm{hom}(f, \mathbf{W})$ est une équivalence faible.*

Corollaire 6.29.

- Les sommes directes quelconques et les produits finis existent dans $\mathcal{SH}_\sigma^T(S)$ et le foncteur de localisation $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \mathcal{SH}_\sigma^T(S)$ y commute ;
- Le foncteur $\Sigma_T^\infty : \mathbf{H}_\bullet(S) \longrightarrow \mathcal{SH}_\sigma^T(S)$ commute aux sommes directes.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — D'après le lemme 2.19, il s'agit de montrer que les sommes directes d'équivalences stables et les produits finis d'équivalences stables sont des équivalences stables. L'assertion concernant les sommes directes résulte du corollaire précédent et l'assertion concernant les produits finis se ramène, étant donné qu'un produit fini d'équivalences injectives est une équivalence injective, au constat que pour tous T -spectres σ -flasques \mathbf{E} et \mathbf{F} , $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ est σ -flasque et que $\Lambda^\infty(\mathbf{E} \times \mathbf{F}) = \Lambda^\infty \mathbf{E} \times \Lambda^\infty \mathbf{F}$.

La dernière assertion résulte du fait que le foncteur $\Sigma_T^\infty : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{N_{is}})_\bullet \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ commute aux sommes directes. \triangleleft

Corollaire 6.30. *Pour tout objet \mathcal{A} dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{N_{is}})_\bullet$, le couple de foncteurs adjoints $(-\wedge \mathcal{A}, \mathcal{H}om_\bullet(\mathcal{A}, -))$ est une adjonction de Quillen pour la structure stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$.*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — Le foncteur $-\wedge \mathcal{A}$ préserve clairement les cofibrations stables. Pour montrer qu'il préserve les équivalences stables, il suffit, en utilisant le lemme 6.27 et le corollaire 6.28, de remarquer que si \mathbf{W} est un Ω -spectre injectivement fibrant, alors $\mathcal{H}om_\bullet(\mathcal{A}, -)$ est un Ω -spectre injectivement fibrant. \triangleleft

Proposition 6.31. *Pour tout morphisme $T_1 \xrightarrow{\theta} T_2$ dans la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{N_{is}})_\bullet^{tf}$, il existe un foncteur canonique $\mathbf{Spect}_{T_2}^{\mathbb{N}}(S) \xrightarrow{\theta^*} \mathbf{Spect}_{T_1}^{\mathbb{N}}(S)$. Si θ est une σ -équivalence faible, alors θ^* induit une équivalence de catégories $\mathcal{SH}_\sigma^{T_2}(S) \xrightarrow{\cong} \mathcal{SH}_\sigma^{T_1}(S)$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Voir [Ja2, proposition 2.13, page 477]. \triangleleft

Définition 6.32. *Pour tout schéma noethérien S , on pose $\mathcal{SH}(S) = \mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}^{(\mathbb{P}^1, \infty)}(S)$. On appelle $\mathcal{SH}(S)$ la catégorie homotopique stable de S .*

Lemme 6.33. *Il existe un foncteur canonique $\mathcal{SW}(S) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{SH}(S)$. Pour tout $(\mathcal{X}, n) \in \mathcal{SW}(S)$, $\lambda(\mathcal{X}, n)$ est canoniquement isomorphe dans $\mathcal{SH}(S)$ à l'image d'un T -spectre \mathbf{E} tel que $\mathbf{E}_k = T^{\wedge(k+n)} \wedge \mathcal{X}$ pour k assez grand, les morphismes d'assemblages $T \wedge \mathbf{E}_k \longrightarrow \mathbf{E}_{k+1}$ étant les isomorphismes évidents pour k assez grand. De plus, le diagramme suivant est commutatif (à isomorphisme canonique près de foncteurs) :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_\bullet(S) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{SW}(S) \\ & \searrow \Sigma_T^\infty & \downarrow \lambda \\ & & \mathcal{SH}(S) \end{array}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — C'est évident à condition de remarquer que pour tout T -spectre \mathbf{E} , il existe un morphisme canonique du T -spectre tronqué évident $\mathbf{E}' = (\bullet, \dots, \bullet, \mathbf{E}_n, \mathbf{E}_{n+1}, \dots)$ vers \mathbf{E} , et que ce morphisme devient un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(S)$, ce qui résulte aussitôt des définitions. \triangleleft

Lemme 6.34. *Pour tout objet (\mathcal{X}, n) de $\mathcal{S}W^{tf}(S)$ et tout T -spectre \mathbf{E} . Il existe des isomorphismes canoniques :*

$$\pi_n(\mathbf{E})(\mathcal{X}) = \lim_{q \geq \max(0, -n)} \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\bullet}(S)}(T^{\wedge(q+n)} \wedge \mathcal{X}, \mathbf{E}_q) \cong \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}(S)}(\lambda(\mathcal{X}, n), \mathbf{E})$$

En particulier, le foncteur $\mathcal{S}W^{tf}(S) \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}(S)$ induit par λ est pleinement fidèle.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — On peut clairement supposer que $n \leq 0$ et que \mathbf{E} est σ -flasque. Dans ce cas, $\lambda(\mathcal{X}, n) \cong \mathbf{F}_{-n}\mathcal{X}$. Le foncteur $\mathbf{F}_{-n} : \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet} \rightarrow \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ est un foncteur de Quillen à gauche pour la σ -structure sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$ et la structure stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$. Comme $\Lambda^{\infty}\mathbf{E}$ est un Ω -spectre, on a un isomorphisme canonique $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}(S)}(\mathbf{F}_{-n}\mathcal{X}, \mathbf{E}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\bullet}(S)}(\mathcal{X}, (\Lambda^{\infty}\mathbf{E})_{-n})$. D'après le lemme 6.21, $\mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\bullet}(S)}(\mathcal{X}, (\Lambda^{\infty}\mathbf{E})_{-n})$ s'identifie à $\pi_n(\mathbf{E})(\mathcal{X})$, d'où le résultat. \triangleleft

Les structures triangulée et monoïdale symétrique sur $\mathcal{S}\mathcal{H}(S)$

Théorème 6.35. *Si $T \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$ est tel que la permutation circulaire agisse trivialement sur $T \wedge T \wedge T$ dans $\mathbf{H}_{\bullet}^{\sigma}(S)[T^{-1}]$, alors la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\sigma}^T(S)$ admet une structure monoïdale symétrique canonique \wedge telle que :*

– Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$, il existe des isomorphismes canoniques dans $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\sigma}^T(S)$:

$$\mathbf{F}_n\mathbf{A} \wedge \mathbf{F}_m\mathbf{B} \cong \mathbf{F}_{n+m}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$$

– Pour tout T -spectre \mathbf{E} et $\mathcal{X} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\sigma}^T(S)$:

$$\mathbf{E} \wedge \Sigma_T^{\infty}\mathcal{X} \cong \mathbf{E} \wedge \mathcal{X}$$

– Pour toute famille $(\mathbf{E}_{\alpha})_{\alpha \in A}$ de T -spectres et tout T -spectre \mathbf{F} , le morphisme canonique suivant est un isomorphisme :

$$\bigoplus_{\alpha}(\mathbf{E}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}) \xrightarrow{\cong} (\bigoplus_{\alpha}\mathbf{E}_{\alpha}) \wedge \mathbf{F}$$

– $\Sigma_T^{\infty}T$ est inversible pour la structure monoïdale sur $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\sigma}^T(S)$.

PRINCIPE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Voir [Ja2] et [HSS]. Une méthode de démonstration consiste à définir une autre catégorie de T -spectres : la catégorie des T -spectres symétriques $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(S)$. On peut définir sur cette catégorie plusieurs structures de catégorie de modèles fermée : projective, injective, stable. On construit un couple de foncteurs adjoints (V, U) avec $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(S) \xrightarrow{U} \mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ et $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S) \xrightarrow{V} \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(S)$. Pour la structure stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(S)$ et une structure⁽⁴¹⁾ de catégorie de modèles stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, (V, U) est une adjonction de Quillen. La catégorie $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(S)$ possède une structure monoïdale symétrique canonique⁽⁴²⁾ que l'on note \wedge . On démontre que le bifoncteur dérivé total à gauche de \wedge induit une structure monoïdale symétrique sur la catégorie homotopique stable des T -spectres symétriques. Pour en déduire l'existence d'une structure monoïdale symétrique sur $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\sigma}^T(S)$ bénéficiant des propriétés avancées, l'étape la plus délicate consiste à montrer que (V, U) est une équivalence de Quillen. \triangleleft

⁽⁴¹⁾Cette structure de catégorie de modèles sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ possède les mêmes équivalences stables que celle que nous avons considérée, mais dans cette structure, les cofibrations sont les cofibrations projectives, et non les cofibrations injectives.

⁽⁴²⁾Nous eussions pu définir la catégorie des T -spectres comme la catégorie des \otimes -modules à gauches dans la catégorie des suites d'objets de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$ sur le monoïde des "sphères" $\mathbf{S} = (T^{\wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$, \otimes étant une structure monoïdale symétrique à préciser. L'obstruction à l'existence d'une structure monoïdale symétrique sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$ provient de la non-commutativité du \otimes -monoïde \mathbf{S} . Les spectres symétriques s'obtiennent en considérant la catégorie $\mathbf{Seq}_T^{\Sigma}(S)$ des suites symétriques d'objets de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$, c'est-à-dire des suites $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'objets de $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})_{\bullet}$, \mathcal{X}_n étant muni d'une action à gauche du groupe Σ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette catégorie $\mathbf{Seq}_T^{\Sigma}(S)$ possède aussi une structure monoïdale symétrique canonique \otimes . La suite symétrique des sphères $\mathcal{S} = (T^{\wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ (munie des actions évidentes) est encore un \otimes -monoïde. On peut donc définir $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(S)$ comme la catégorie des \otimes -modules à gauche sur le \otimes -monoïde \mathcal{S} . Or, ce \otimes -monoïde \mathcal{S} est commutatif, ainsi, on obtient une structure monoïdale symétrique \wedge canonique sur $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(S)$.

Pour tout morphisme $\mathbf{E} \xrightarrow{f} \mathbf{F}$ dans $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$, on peut définir un T -spectre cône(f) en formant le carré cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E} & \xrightarrow{1} & \mathbf{E} \wedge \Delta^1 \\ \downarrow f & & \downarrow \\ \mathbf{F} & \longrightarrow & \text{cône}(f) \end{array}$$

De même que pour la catégorie de Spanier-Whitehead, on peut définir une suite cofibre canonique :

$$\mathbf{E} \xrightarrow{f} \mathbf{F} \longrightarrow \text{cône}(f) \longrightarrow \mathbf{E} \wedge S_s^1$$

Si f est de plus une cofibration injective, le morphisme évident $\text{cône}(f) \longrightarrow \mathbf{F}/\mathbf{E}$ est une σ -équivalence stable, grâce à la propriété à gauche de la structure stable sur $\mathbf{Spect}_T^{\mathbb{N}}(S)$.

On peut définir un foncteur $-[1] = - \wedge S_s^1 : \mathcal{SH}_\sigma^T(S) \longrightarrow \mathcal{SH}_\sigma^T(S)$. On définit un triangle distingué dans $\mathcal{SH}_\sigma^T(S)$ comme étant un triangle isomorphe à l'image d'une suite cofibre dans $\mathcal{SH}_\sigma^T(S)$. Avec ces définitions, on a le théorème suivant :

Théorème 6.36. *Si $T \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}^{tf}$ est tel que la permutation circulaire agisse trivialement sur $T \wedge T \wedge T$ dans $\mathbf{H}_{\bullet}^{\sigma}(S)[T^{-1}]$, alors la catégorie $\mathcal{SH}_\sigma^T(S)$ munie du foncteur $-[1]$ est une catégorie triangulée. De plus, la structure triangulée est compatible avec la structure monoïdale symétrique sur $\mathcal{SH}_\sigma^T(S)$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME— Grâce au théorème précédent, on sait que S_s^1 est inversible pour la structure monoïdale sur $\mathcal{SH}_\sigma^T(S)$. On en déduit, de même que pour la catégorie de Spanier-Whitehead, que $\mathcal{SH}_\sigma^T(S)$ est une catégorie additive et que $-[1]$ est une auto-équivalence de catégories. La vérification des axiomes des catégories triangulées est alors similaire à celle du théorème 5.15. \triangleleft

Avec le théorème 5.22, le théorème précédent admet le corollaire suivant :

Corollaire 6.37. *$\mathcal{SW}^{tf}(S)$ est canoniquement équivalente à la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{SH}(S)$ engendrée par les objets $\Sigma_{\mathbb{P}^1}^{\infty}U_+$ où $U \in Sm/S$. De plus, le foncteur $\mathcal{SW}(S) \longrightarrow \mathcal{SH}(S)$ est monoïdal.*

Dimension cohomologique

S_s^1 -spectres

On peut utiliser les constructions précédentes en mettant la structure simpliciale (*i.e.* la structure non \mathbb{A}^1 -localisée) sur $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_{\bullet}$ et en posant $T = S_s^1$. On obtient ainsi la catégorie des S_s^1 -spectres, notée $\mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$. La catégorie homotopique stable associée est notée $\mathcal{SH}_{S_s^1}^{S_s^1}(S)$. Celle-ci est triangulée et monoïdale symétrique.

Nous pouvons aussi noter $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$ la catégorie des S_s^1 -spectres ordinaires et \mathbf{SH}^{top} la catégorie homotopique stable⁽⁴³⁾ des S_s^1 -spectres ordinaires. On appellera simplement spectres les objets de $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, notons $\pi_k : \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}} \longrightarrow Ab$ le foncteur qui à un spectre associe son k -ième groupe d'homotopie stable. On dispose d'un foncteur "suspension infinie" $\Sigma^{\infty} : \Delta^{op}\mathcal{E}_{ns} \longrightarrow \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$.

La catégorie $\mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ est clairement isomorphe à la catégorie des faisceaux sur Sm/S_{Nis} à valeurs dans $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$.

Définition 6.38. *Pour tout $\mathbf{E} \in \mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $\pi_n(\mathbf{E})$ le préfaisceau de groupes abéliens sur Sm/S_{Nis} qui à $U \in Sm/S$ associe⁽⁴⁴⁾ $\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_{S_s^1}^{S_s^1}(S)}(S_s^1 \wedge U_+, \mathbf{E})$. On appelle $\pi_n(\mathbf{E})$ le n -ième préfaisceau de groupes d'homotopie stable de \mathbf{E} . On note $\bar{\pi}_n(\mathbf{E})$ le faisceau de groupes abéliens associé à $\pi_n(\mathbf{E})$.*

Pour tout foncteur fibre $\Phi : \mathcal{Fais}(S) \longrightarrow \mathcal{E}_{ns}$, on peut définir de façon évidente un foncteur "fibre" $\Phi : \mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$. On démontre facilement le lemme suivant en utilisant la méthode du corollaire 6.22, basée sur le théorème de Brown-Gersten :

⁽⁴³⁾La structure de catégorie de modèles que nous utilisons sur $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$ est celle dont les équivalences faibles sont les équivalences stables de spectres, dont les cofibrations sont les monomorphismes et dont les fibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations stables triviales.

⁽⁴⁴⁾Autrement dit, grâce à l'additivité de la catégorie $\mathcal{SH}_{S_s^1}^{S_s^1}(S)$, il existe une structure canonique de groupe abélien sur l'ensemble pointé $\pi_n(\mathbf{E})(U_+)$ intervenant dans la définition 6.20. On prend garde à ne pas confondre la définition du faisceau $\pi_n(\mathbf{E})$ et celle des foncteurs $\pi_n(\mathbf{E})(\mathcal{A})$, la dernière ne concernant que des objets *pointés*.

Lemme 6.39. Soit $\mathbf{E} \xrightarrow{f} \mathbf{F}$ un morphisme dans $\mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- f est une équivalence stable simpliciale ;
- f induit un isomorphisme au niveau des préfaisceaux de groupes d'homotopie stable $\pi_n(\mathbf{E}) \simeq \pi_n(\mathbf{F})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;
- f induit un isomorphisme au niveau des faisceaux de groupes d'homotopie stable $\widetilde{\pi}_n(\mathbf{E}) \simeq \widetilde{\pi}_n(\mathbf{F})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;
- Pour tout foncteur fibre Φ sur $\mathcal{S}m/S_{Nis}$, le morphisme de spectres $\Phi(\mathbf{E}) \longrightarrow \Phi(\mathbf{F})$ est une équivalence stable ;
- Pour tout foncteur fibre Φ dans un système conservatif de foncteurs fibres sur $\mathcal{S}m/S_{Nis}$, le morphisme de spectres $\Phi(\mathbf{E}) \longrightarrow \Phi(\mathbf{F})$ est une équivalence stable.

On dispose aussi d'un foncteur spectre constant $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$. En vertu du lemme précédent, il transforme évidemment équivalences stables entre spectres en équivalences stables simpliciales.

Lemme 6.40. Pour tout $U \in \mathcal{S}m/S$, le foncteur $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ qui à \mathbf{E} associe $\mathbf{E} \wedge U_+$ admet pour adjoint à droite le foncteur qui à un objet $\mathbf{F} \in \mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ associe le spectre $\mathbf{F}(U)$. De plus, ce couple de foncteurs adjoints forme une adjonction de Quillen pour les structures stables sur ces deux catégories.

On note $\mathbb{H}(U; -) : \mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S) \longrightarrow \mathbf{SH}^{top}$ le foncteur dérivé total à droite du foncteur "évaluation en U " $\mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S) \longrightarrow \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $\mathbf{E} \in \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$, on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{SH}^{top}}(\mathbf{E}, \mathbb{H}(U; \mathbf{F})) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)}(\mathbf{E} \wedge U_+, \mathbf{F})$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique :

$$\pi_n(\mathbb{H}(U; \mathbf{F})) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)}(S_s^n \wedge U_+, \mathbf{F})$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — La vérification du fait qu'il s'agit d'une adjonction est immédiate. Pour vérifier qu'il s'agit d'une adjonction de Quillen, il suffit de remarquer que $- \wedge U_+$ préserve les monomorphismes et les équivalences stables. La dernière assertion provient des résultats généraux sur les adjonctions de Quillen (cf. théorème 2.47). \triangleleft

La suite spectrale de Bousfield-Kan-Brown-Gersten-Thomason-Nisnevich

On a besoin de supposer ici que S est de dimension de Krull finie. Le théorème suivant permet de relier les groupes d'homotopie globaux à la cohomologie des faisceaux de groupes d'homotopie locaux :

Théorème 6.41. Alors, pour tout $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)$ et $U \in \mathcal{S}m/S$, il existe une suite spectrale :

$$E_2^{pq} = \mathbf{H}_{Nis}^p(U; \widetilde{\pi}_q(\mathbf{F})) \implies \pi_{q-p}(\mathbb{H}(U; \mathbf{F})) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)}(S_s^{q-p} \wedge U_+, \mathbf{F})$$

Les différentielles de cette suite spectrale sont de la forme $d_r : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r, q+r-1}$.

PRINCIPE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — On peut évidemment supposer que \mathbf{F} est un faisceau à valeurs dans la catégorie des spectres fibrants. On peut alors utiliser [Tho, proposition 1.36] ou [Nis, théorème 2.22, page 312]. La démonstration repose essentiellement sur deux ingrédients : la résolution de Godement et la suite spectrale de Bousfield-Kan (cf. [BK]) pour un objet cosimplicial. La suite spectrale de Bousfield-Kan donne un terme E_1 , et l'utilisation de la résolution de Godement permet de faire intervenir la cohomologie des faisceaux dans le calcul du terme E_2 .

On peut construire cette suite spectrale de manière un peu plus conceptuelle en utilisant la t -structure homotopique définie par Fabien Morel (cf. [Mor2]). \triangleleft

Définition 6.42. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit \mathbf{E} un objet de $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$ (resp. \mathbf{SH}^{top}), on dit que \mathbf{E} est n -connexe si pour tout $k \leq n$, $\pi_k(\mathbf{E}) = 0$;
- Soit \mathbf{E} un objet de $\mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ (resp. $\mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)$), on dit que \mathbf{E} est n -connexe si pour tout $k \leq n$, le faisceau $\widetilde{\pi}_k(\mathbf{E})$ est nul.

Corollaire 6.43. Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ un S_s^1 -spectre n -connexe. Alors, pour tout $U \in \mathcal{S}m/S$ et tout $k \geq \dim U - n$, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)}(U_+, S_s^k \wedge \mathbf{E}) = 0$.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE— Cela résulte aussitôt de la suite spectrale du théorème 6.41, du théorème 1.42 sur la dimension cohomologique Nisnevich de U , et du fait que S_s^1 est inversible pour la structure monoïdale sur $\mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)$. \triangleleft

Lemme 6.44. *Pour tout ensemble simplicial pointé K , le spectre $\Sigma^\infty K$ est -1 -connexe.*

DÉMONSTRATION DU LEMME— Cela résulte des théorèmes de Van Kampen et d'Hurewicz. En effet, il est bien connu que l'on a un isomorphisme (canonique au signe près) $\tilde{C}_*(S_s^1 \wedge X) \cong \tilde{C}_*(X)[-1]$ dans \mathbf{D}^-Ab pour tout ensemble simplicial pointé X ⁽⁴⁵⁾. On en déduit que, si on note $\mathbf{H}_*(Y; \mathbb{Z}) = \mathbf{H}_*(\tilde{C}_*(Y))$ pour tout ensemble simplicial pointé Y , on a $\mathbf{H}_q(S_s^n \wedge K; \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $q < n$. De plus, d'après le théorème de Van Kampen, $S_s^n \wedge K$ est connexe et simplement connexe pour $n \geq 2$. D'après le théorème de Hurewicz, $\pi_q(S_s^n \wedge X) = \bullet$ pour $n \geq 2$ et $0 \leq q < n$. En passant à la limite, on obtient bien l'annulation des groupes d'homotopie stable strictement négatifs de $\Sigma^\infty K$. \triangleleft

\mathbb{A}^1 -localisation des S_s^1 -spectres

Lemme 6.45. *Notons ici \mathcal{C} la catégorie $\mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ munie de la structure stable simpliciale de catégorie de modèles et \mathcal{C}' la catégorie $\mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ munie de la structure stable \mathbb{A}^1 -localisée. Notons $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ les foncteurs induits par le foncteur identité de $\mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$.*

Alors, (G, F) est une adjonction de Quillen. On note $L_{\mathbb{A}^1} : \mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}^{S_s^1}(S) \rightarrow \mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)$ le foncteur dérivé total à droite de $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ pour les structures de catégories de modèles envisagées.

DÉMONSTRATION DU LEMME— Il s'agit essentiellement de montrer que dans $\mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$, une équivalence stable simpliciale est une \mathbb{A}^1 -équivalence stable. On peut utiliser le critère du corollaire 6.28 qui ramène la question à celle de montrer qu'un Ω -spectre injectivement fibrant au sens \mathbb{A}^1 -localisé est un Ω -spectre injectivement fibrant au sens simplicial, ce qui résulte tautologiquement du fait que dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})$ une équivalence faible simpliciale est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible. \triangleleft

Dans la suite, on omet dans la notation le foncteur “dérivé” à gauche du foncteur G considéré dans le lemme précédent.

Corollaire 6.46. *Pour tous $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)$ et $\mathbf{F} \in \mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}^{S_s^1}(S)$, on a une bijection canonique :*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)}(\mathbf{E}, L_{\mathbb{A}^1}\mathbf{F}) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}^{S_s^1}(S)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$$

De plus, le foncteur $L_{\mathbb{A}^1} : \mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}^{S_s^1}(S) \rightarrow \mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)$ est pleinement fidèle.

Dans la suite de cette partie, par prudence, on suppose que S est de dimension de Krull finie.

Théorème 6.47. *Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ un S_s^1 -spectre n -connexe. Alors, $L_{\mathbb{A}^1}\mathbf{E}$ est n -connexe.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME— Voir [Mor2] pour le cas où S est le spectre d'un corps parfait et [Mor3] pour le cas général. \triangleleft

Corollaire 6.48. *Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{Spect}_{S_s^1}^{\mathbb{N}}(S)$ un S_s^1 -spectre n -connexe. Alors, pour tout $U \in Sm/S$ et tout $k \geq \dim U - n$, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}^{S_s^1}(S)}(U_+, S_s^k \wedge \mathbf{E}) = 0$.*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE— Comme S_s^k est inversible pour la structure monoïdale, il s'agit de montrer que $\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}^{S_s^1}(S)}(S_s^{-k} \wedge U_+, \mathbf{E}) = 0$. Ce groupe s'identifie à $\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_s^{S_s^1}(S)}(S_s^{-k} \wedge U_+, L_{\mathbb{A}^1}\mathbf{E})$. D'après le théorème précédent, $L_{\mathbb{A}^1}\mathbf{E}$ est n -connexe. On peut conclure en appliquant le corollaire 6.43. \triangleleft

Le théorème de connectivité

Nous avons maintenant les moyens d'établir le théorème suivant :

Théorème 6.49. *Pour tout $X \in Sm/S$, $\mathcal{F} \in \Delta^{op}\mathcal{Fais}(Sm/S_{Nis})_\bullet$, $m \in \mathbb{Z}$ et $n > \dim X$, on a :*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(X_+, S_s^n \wedge S_t^m \wedge \Sigma_{\mathbb{P}^1}^\infty \mathcal{F}) = 0$$

⁽⁴⁵⁾Pour tout ensemble simplicial Y , $C_*(Y)$ désigne le complexe associé par la méthode classique au groupe abélien simplicial “libre” sur Y . Si Y est pointé par y , $\tilde{C}_*(Y)$ est le quotient $C_*(Y)/C_*(y)$. Il est aussi bien connu que le foncteur $C_*(-)$ (resp. $\tilde{C}_*(-)$) transforme équivalences faibles dans $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$ (resp. $\Delta^{op}\mathcal{E}ns_\bullet$) en quasi-isomorphismes.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — La démonstration se fait en trois étapes. Les deux premières sont la suite spectrale de Bousfield-Kan-Brown-Gersten-Thomason-Nisnevich et le théorème 6.47. La dernière étape consiste à montrer qu'inverser aussi \mathbb{G}_m n'est pas gênant. Remarquons que l'on peut évidemment supposer que $m \leq 0$.

D'après le lemme 6.34, l'ensemble de morphismes $\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(U_+, S_s^n \wedge S_t^m \wedge \mathcal{F})$ s'identifie à la colimite $\varinjlim_{k \gg 0} \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S_s^k \wedge S_t^k \wedge U_+, S_s^{n+k} \wedge S_t^{k+m} \wedge \mathcal{F})$. La diagonale de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ étant cofinale dans \mathbb{N} , ce dernier groupe s'identifie à $\varinjlim_{k, k' \gg 0} \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S_s^k \wedge S_t^{k'} \wedge U_+, S_s^{n+k} \wedge S_t^{k'+m} \wedge \mathcal{F})$. À nouveau, le lemme 6.34 implique que ce groupe s'identifie à $\varinjlim_{k' \gg 0} \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}(S)}(S_t^{k'} \wedge S_s^{k'} \wedge U_+, S_s^{n+k'} \wedge S_t^{k'+m} \wedge \mathcal{F})$. On en déduit qu'il suffit de montrer l'assertion suivante :

Assertion 1. *Soit $U \in \mathcal{S}m/S$ et $\mathcal{F} \in \Delta^{op}\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet$. Pour tout $k \geq 0$ et $n > \dim U$, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}(S)}(S_s^k \wedge S_t^n \wedge U, \mathcal{F}) = 0$.*

L'assertion 1 est vérifiée pour $k = 0$ d'après le corollaire 6.48 et le lemme 6.44. Supposons maintenant que $k \geq 1$. On sait qu'il existe un isomorphisme $S_s^k \wedge S_t^k \cong \mathbb{P}^k/\mathbb{P}^{k-1}$ dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$. On en déduit l'existence d'un triangle distingué de la forme suivante dans $\mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}(S)$:

$$\mathbb{P}_+^{k-1} \longrightarrow \mathbb{P}_+^k \longrightarrow S_s^k \wedge S_t^k \longrightarrow \mathbb{P}_+^{k-1}[1]$$

En appliquant $-\wedge U_+$ à ce triangle distingué, on obtient un autre triangle distingué dans $\mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}(S)$:

$$(\mathbb{P}^{k-1} \times U)_+ \longrightarrow (\mathbb{P}^k \times U)_+ \longrightarrow S_s^k \wedge S_t^k \wedge U_+ \longrightarrow (\mathbb{P}^{k-1} \times U)_+[1]$$

Comme U est noethérien, la dimension de Krull de $\mathbb{P}^k \times U$ (resp. $\mathbb{P}^{k-1} \times U$) est $\dim U + k$ (resp. $\dim U + k - 1$). En utilisant les suites exactes longues associées au triangle distingué précédent et au foncteur cohomologique $\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}_{\mathbb{A}^1\text{-loc}}(S)}(-; \mathcal{F})$, on obtient l'assertion 1, puisqu'elle est vraie pour $\mathbb{P}^k \times U$ et $\mathbb{P}^{k-1} \times U$ dans le cas où la puissance de S_t^1 est 0. \triangleleft

Corollaire 6.50. *Pour tout $X \in \mathcal{S}m/S_\bullet$, $\mathcal{F} \in \Delta^{op}\mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{Nis})_\bullet$, $m \in \mathbb{Z}$ et $n > \dim X$, on a :*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(X, S_s^n \wedge S_t^m \wedge \Sigma_{\mathbb{P}^1}^\infty \mathcal{F}) = 0$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — Dans le cas où $\dim X > \dim S$, on peut conclure en utilisant le triangle distingué canonique $S_s^0 \longrightarrow X_+ \longrightarrow X \longrightarrow S_s^0[1]$. Sinon, on montre facilement⁽⁴⁶⁾ que $X \simeq U_+$ avec $U \in \mathcal{S}m/S$ et $\dim U \leq \dim X$, d'où le résultat. \triangleleft

Théories homologiques et cohomologiques

Construction de théories

Définition 6.51. *Soit $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}(S)$. Pour tout $\mathbf{F} \in \mathcal{SH}(S)$, $p, q \in \mathbb{Z}$, on pose :*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^{p,q}(\mathbf{F}) &= \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{F}, S^{p,q} \wedge \mathbf{E}) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{p,q}(\mathbf{F}) &= \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(S^{p,q}, \mathbf{E} \wedge \mathbf{F}) \end{aligned}$$

Définition 6.52. *On définit un foncteur $-(1) : \mathcal{SH}(S) \longrightarrow \mathcal{SH}(S)$ en associant à \mathbf{E} le spectre $\mathbf{E} \wedge \Sigma^\infty(\mathbb{P}^1, \infty)[-2] \cong \mathbf{E} \wedge \Sigma^\infty(\mathbb{G}_m, 1)[-1]$.*

On en déduit l'isomorphisme :

$$\tilde{\mathbf{E}}^{p,q}(\mathbf{F}) \cong \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{F}, \mathbf{E}(q)[p])$$

⁽⁴⁶⁾Pour cela, il faut supposer que S est connexe, cas auquel on se ramène trivialement.

Définition 6.53. *Pour tous $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}(S)$, $\mathcal{X} \in \mathbf{H}(S)$, $p, q \in \mathbb{Z}$, on pose :*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{p,q}(\mathcal{X}) &= \tilde{\mathbf{E}}^{p,q}(\Sigma_{\mathbb{P}^1}^\infty(\mathcal{X}_+)) \\ \mathbf{E}_{p,q}(\mathcal{X}) &= \tilde{\mathbf{E}}_{p,q}(\Sigma_{\mathbb{P}^1}^\infty(\mathcal{X}_+)) \end{aligned}$$

Triangles distingués dans $\mathcal{SH}(S)$

Comme $\mathcal{SH}(S)$ est une catégorie triangulée et monoïdale symétrique, un triangle distingué donne naissance à des suites exactes longues pour les théories homologiques et cohomologiques représentées par un objet $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}(S)$ quelconque.

Théorème 6.54.

- *Pour tout recouvrement Nisnevich élémentaire (U, V) de $X \in \mathcal{Sm}/S$, il existe un triangle distingué de Mayer-Vietoris généralisé canonique :*

$$(U \times_X V)_+ \longrightarrow U_+ \oplus V_+ \longrightarrow X_+ \longrightarrow (U \times_X V)_+[1]$$

- *Pour toute immersion fermée $Z \xrightarrow{i} X$ dans \mathcal{Sm}/S , il existe un triangle distingué de Gysin canonique, $\mathcal{N} \longrightarrow Z$ désignant le fibré normal de i :*

$$(X - Z)_+ \longrightarrow X_+ \longrightarrow \mathcal{T}h(\mathcal{N}) \longrightarrow (X - Z)_+[1]$$

- *Pour toute immersion fermée $Z \xrightarrow{i} X$ dans \mathcal{Sm}/S , si on note $p : X_Z \longrightarrow X$ l'éclatement de Z dans X , il existe un triangle distingué canonique :*

$$p^{-1}(Z)_+ \longrightarrow Z_+ \oplus (X_Z)_+ \longrightarrow X_+ \longrightarrow p^{-1}(Z)_+[1]$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Grâce au lemme 5.16, on sait que tout carré homotopiquement cocartésien dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{Sm}/S_{Nis})_\bullet$ pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée donne lieu à un triangle distingué de $\mathcal{SH}(S)$. Le triangle de Mayer-Vietoris provient d'un carré tautologiquement homotopiquement cocartésien, celui de Gysin du théorème de pureté homotopique 4.11 et le dernier du théorème 4.12. \triangleleft

Remarque 6.55. *Nous verrons que la cohomologie motivique (si S est le spectre d'un corps de caractéristique 0), la cohomologie étale, la K -théorie algébrique (si S est régulier) et la cohomologie singulière ordinaire (associée à un point complexe (ou réel) de S) sont des théories cohomologiques représentées par des objets de $\mathcal{SH}(S)$. Ainsi, les triangles distingués du théorème précédent donnent naissance à des suites exactes longues pour ces théories.*

La K-théorie algébrique

Il va maintenant s'agir de construire un \mathbb{P}^1 -spectre qui représente la K-théorie algébrique dans $\mathcal{SH}(S)$. La K-théorie algébrique des schémas n'étant pas invariante par homotopie en général, nous devons supposer que S est régulier. Dans ce cas, nous donnerons une description géométrique de ce \mathbb{P}^1 -spectre à partir de grassmanniennes infinies.

Construction et propriétés de la K-théorie algébrique

Définition

Rappelons rapidement comment Quillen définit la K-théorie algébrique d'un schéma X .

Définition 7.1.

- (1) Soit \mathcal{A} une petite catégorie exacte⁽⁴⁷⁾, on note \mathbf{QA} la catégorie dont les objets sont les objets de \mathcal{A} et telle que si M et N sont deux objets de \mathbf{QA} , alors l'ensemble des morphismes de M vers N dans \mathbf{QA} soit l'ensemble des isomorphismes (dans \mathcal{A}) de M vers un sous-quotient admissible de N , c'est-à-dire que $\mathbf{Hom}_{\mathbf{QA}}(M, N)$ est l'ensemble des classes d'équivalences de diagrammes $M \xleftarrow{p} P \xrightarrow{i} N$ où i est un monomorphisme admissible et p un épimorphisme admissible, les isomorphismes de tels diagrammes devant induire l'identité sur M et N . La composition des flèches dans \mathbf{QA} est obtenue par le procédé "évident".
- (2) Soit \mathcal{A} une catégorie exacte, on pose $K(\mathcal{A}) = \mathbf{R}\Omega(\mathbf{QA}, 0)$ ⁽⁴⁸⁾ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n(\mathcal{A}) = \pi_n(K(\mathcal{A})) = \pi_{n+1}(\mathbf{QA}, 0)$ ⁽⁴⁹⁾.

La construction \mathbf{Q} étant fonctorielle par rapport aux foncteurs exacts, les groupes de K-théorie des catégories exactes le sont aussi. On montre que pour toute catégorie exacte \mathcal{A} , $K_0(\mathcal{A})$ est un groupe abélien et qu'il s'identifie au groupe de Grothendieck de \mathcal{A} .

Définition 7.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout schéma noethérien séparé X , on note $G_n(X) = K_n(\mathbf{Coh}(X))$ et $K_n(X) = K_n(P(X))$ où $\mathbf{Coh}(X)$ désigne la catégorie abélienne des \mathcal{O}_X -Modules cohérents et $P(X)$ la sous-catégorie exacte de $\mathbf{Coh}(X)$ formée par les \mathcal{O}_X -Modules localement libres. On note $G(X) = K(\mathbf{Coh}(X))$ et $K(X) = K(P(X))$.

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas, $f^* : P(Y) \rightarrow P(X)$ est un foncteur exact, donc induit un morphisme $K(Y) \rightarrow K(X)$ dans $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$. De même, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme plat, alors $f^* : \mathbf{Coh}(Y) \rightarrow \mathbf{Coh}(X)$ est exact et induit donc un morphisme $G(Y) \rightarrow G(X)$. Ainsi, la K-théorie est contravariante par rapport à tous les morphismes de schémas et la G-théorie est contravariante par rapport aux morphismes plats entre schémas noethériens séparés.

Rigidification de la construction

Les paragraphes suivants ont pour but de définir un préfaisceau simplicial pointé \mathcal{F} sur la catégorie des schémas quasi-compacts tel que pour tout schéma quasi-compact X , $\mathbf{R}\Omega(\mathcal{F}(X))$ soit canoniquement isomorphe à $K(X)$ dans $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$.

On dispose de la catégorie fibrée (cf. [SGA 1 VI]) des fibrés vectoriels (*i.e.* des Modules localement libres de rang fini) sur la catégorie des schémas, c'est-à-dire, modulo le choix d'un clivage normalisé, de la donnée, pour tout schéma X , d'une catégorie $P(X)$ formée des \mathcal{O}_X -Modules localement libres de rang

⁽⁴⁷⁾C'est-à-dire que l'on se donne une classe de diagrammes $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ que l'on appelle suites exactes courtes satisfaisant certains axiomes (cf. [Qui2]), les morphismes i et p apparaissant dans ces suites exactes courtes étant respectivement appelés monomorphismes admissibles et épimorphismes admissibles.

⁽⁴⁸⁾Le foncteur $\mathbf{R}\Omega : \mathbf{H}_\bullet^{\text{top}} \rightarrow \mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$ désigne le foncteur dérivé total à droite du foncteur $\Omega : \Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns_\bullet \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns_\bullet$, adjoint à droite du foncteur $S_s^1 \wedge -$.

⁽⁴⁹⁾Le foncteur \mathbf{N} associe à une petite catégorie son nerf qui est un ensemble simplicial (cf. définition 2.50).

fini et, pour tout morphisme de schémas $Y \xrightarrow{u} X$, d'un foncteur $u^* : P(X) \longrightarrow P(Y)$, telle que pour tout schéma X , $\mathbf{Id}_X^* = \mathbf{Id}_{P(X)}$ et que pour tous morphismes composables u et v , on ait des isomorphismes $v^*u^* \xrightarrow{\cong} (uv)^*$ vérifiant certaines relations de cocycles.

En appliquant la construction \mathbf{Q} , on obtient encore une catégorie fibrée ($X \longmapsto \mathbf{QP}(X)$), donc quand on applique le foncteur nerf \mathbf{N} , on associe à tout schéma X un ensemble simplicial $\mathbf{NQP}(X)$ et à tout morphisme de schémas $Y \xrightarrow{u} X$ un morphisme d'ensembles simpliciaux $u^* : \mathbf{NQP}(X) \longrightarrow \mathbf{NQP}(Y)$, mais on n'a pas nécessairement $v^*u^* = (uv)^*$ pour tous morphismes composables u et v , néanmoins on dispose d'une homotopie entre ces deux morphismes d'ensembles simpliciaux, ces homotopies étant de surcroît soumises à certaines relations de cocycles.

Ainsi, pour construire un préfaisceau simplicial pointé \mathcal{F} sur la catégorie des schémas dont les groupes d'homotopie des sections sur tout schéma X s'identifient à sa K-théorie, il s'agit de rendre fonctorielle une définition qui ne l'est a priori que modulo des isomorphismes canoniques de foncteurs. Autrement dit, nous allons rectifier un "pseudo-foncteur".

Définition 7.3. Soit X un schéma quasi-compact. Construisons une petite catégorie $P(X)$ de la façon suivante. Un objet de $P(X)$ consiste en la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X où I est un ensemble de la forme $\{1, \dots, n\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, d'une famille d'entiers naturels $(r_i)_{i \in I}$ et d'une famille $(M_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ où M_{ij} est une matrice de taille (r_j, r_i) à coefficients dans l'anneau $\Gamma(U_{ij}; \mathcal{O}_X)^{(50)}$, telle que pour tout $i \in I$, M_{ii} soit la matrice identité et que pour tous $(i, j, k) \in I^3$, on ait la relation $M_{ik}|_{U_{ijk}} = M_{jk}|_{U_{ijk}} \times M_{ij}|_{U_{ijk}}$.

On sait qu'à une telle donnée, on peut associer un \mathcal{O}_X -Module \mathcal{E} (bien défini à isomorphisme unique près) tel que $\mathcal{E}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{r_i}$ et que la matrice M_{ij} décrit l'isomorphisme $\mathcal{O}_{U_{ij}}^{r_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_{ij}}^{r_j}$ qui résulte de ces identifications.

Un morphisme entre deux objets de $P(X)$ est alors, par définition, un morphisme entre les \mathcal{O}_X -Modules qui leur sont canoniquement associés.

Soit $Y \xrightarrow{u} X$ un morphisme entre deux schémas quasi-compacts. Nous allons définir un foncteur $P(X) \xrightarrow{u^*} P(Y)$ de la façon suivante. À tout objet $(U_i)_{i \in I}, (r_i)_{i \in I}, (M_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ de $P(X)$, on associe l'objet de $P(Y)$ correspondant aux données $(u^{-1}(U_i))_{i \in I}, (r_i)_{i \in I}, (\tilde{M}_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ où \tilde{M}_{ij} est la matrice obtenue en appliquant le morphisme canonique $\Gamma(U_{ij}; \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(u^{-1}(U_{ij}); \mathcal{O}_Y)$ aux coefficients de M_{ij} . Au niveau des morphismes, on munit u^* de la structure de foncteur évidente $P(X) \xrightarrow{u^*} P(Y)$.

Le lemme suivant est trivial :

Lemme 7.4. Pour tout schéma quasi-compact X , $\mathbf{Id}_X^* : P(X) \longrightarrow P(X)$ est le foncteur identité et pour tout diagramme $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X$ dans la catégorie des schémas quasi-compacts, les foncteurs $v^* \circ u^*$ et $(u \circ v)^*$ sont égaux. De plus, pour tout schéma quasi-compact X , la catégorie $P(X)$ est munie d'un objet nul particulier correspondant à l'unique objet $(U_i)_{i \in I}, (r_i)_{i \in I}, (M_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ de $P(X)$ tel que $I = \{1\}$ et $r_1 = 0$, ces objets nuls particuliers étant compatibles aux foncteurs images réciproques.

On peut ainsi poser la définition suivante pour laquelle on rappelle que la catégorie $P(X)$ est munie d'une structure de catégorie exacte en décrétant qu'une suite de \mathcal{O}_X -Modules localement libres de rang fini $0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$ est exacte s'il s'agit d'une suite localement scindée de Modules pour la topologie de Zariski sur X .

Définition 7.5. On note \mathcal{F} le préfaisceau simplicial pointé qui à un schéma quasi-compact X associe l'ensemble simplicial $\mathbf{NQP}(X)$ pointé par l'objet nul canonique de $P(X)$. Si S est un schéma noethérien séparé, on note encore \mathcal{F} le préfaisceau simplicial pointé sur $\mathcal{S}m/S$ obtenu par restriction.

⁽⁵⁰⁾ Comme de coutume, on pose $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$.

Localisation

Théorème 7.6. *Soit S un schéma noethérien séparé. Pour tout schéma $X \in \mathcal{S}m/S$ tel que X soit divisoriel⁽⁵¹⁾, alors le morphisme canonique $K(X) \longrightarrow (\mathbf{R}\Omega \circ \mathbf{R}\Gamma)(X; \mathcal{F})$ ⁽⁵²⁾ est un isomorphisme dans $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$. De plus, si X est régulier, $\mathbf{R}\Gamma(X; \mathcal{F})$ est connexe, c'est-à-dire que le morphisme évident $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(X; \mathcal{F})$ est un isomorphisme dans $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — En paraphrasant le théorème 3.18 (i.e. en modifiant convenablement les hypothèses et la conclusion pour se limiter aux schémas divisoriels), il s'agit de montrer que le préfaisceau simplicial $\mathcal{G} := \Omega(\text{Ex}^\infty(\mathcal{F}))$ ⁽⁵³⁾ possède la propriété de Mayer-Vietoris généralisée dans le sens restreint suivant : pour tout recouvrement Nisnevich élémentaire ($U \longrightarrow X; V \longrightarrow X$) dans $\mathcal{S}m/S$, avec X et V divisoriels (donc U et $X - U$ aussi), le diagramme suivant est homotopiquement cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(X) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U \times_X V) \end{array}$$

Ce fait provient des résultats de Thomason et Trobaugh dans [TT]. En effet, ils construisent une K-théorie des complexes parfaits, équivalente à la K-théorie de Quillen pour les schémas divisoriels, et établissent le théorème de localisation [TT, théorème 7.4] qui, joint au théorème d'excision [TT, théorème 7.1] permet de conclure.

Pour X régulier, on peut se “passer” de la théorie de Thomason-Trobaugh et utiliser à la place le théorème de localisation [Qui2, proposition 3.2, paragraphe 7] pour la G-théorie, en utilisant l'équivalence faible $K(Y) \simeq G(Y)$ pour Y régulier (cf. [Qui2, paragraphe 7.1]). On montre alors que \mathcal{F} vérifie la propriété de Mayer-Vietoris généralisée sur $\mathcal{S}m/X$, d'où le résultat, avec en prime la connexité de $\mathbf{R}\Gamma(X; \mathcal{F})$. \triangleleft

Notation 7.7. *Pour tout schéma noethérien séparé X et $n \in \mathbb{N}$, notons $K_n^T(X)$ le n -ième groupe de K-théorie algébrique de Thomason-Trobaugh de X .*

Corollaire 7.8. *Soit S un schéma noethérien séparé. Pour tout $X \in \mathcal{S}m/S$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme canonique de groupes⁽⁵⁴⁾ :*

$$K_n^T(X) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\mathbf{O}_s, \bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis})}(S_s^n \wedge X_+, \mathbf{R}\mathcal{H}om_\bullet(S_s^1, \mathcal{F}))$$

De plus, il existe un morphisme canonique $K_n^T(X) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S_s^n \wedge X_+, \mathbf{R}\mathcal{H}om_\bullet(S_s^1, \mathcal{F}))$ et les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) *Ce morphisme est bijectif pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{S}m/S$;*
- (2) *pour tout schéma $X \in \mathcal{S}m/S$ et $n \in \mathbb{N}$, le morphisme évident $K_n^T(X) \longrightarrow K_n^T(\mathbb{A}_X^1)$ est bijectif ;*
- (3) *pour tout schéma $X \in \mathcal{S}m/S$, affine sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $K_n(X) \longrightarrow K_n(\mathbb{A}_X^1)$ est bijectif.*

En particulier, pour S régulier, $K_n(X) = K_n^T(X) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S_s^n \wedge X_+, \mathbf{R}\mathcal{H}om_\bullet(S_s^1, \mathcal{F}))$.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — Le fait que pour tout $X \in \mathcal{S}m/S$ et $n \in \mathbb{N}$ on ait un isomorphisme canonique $K_n^T(X) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\mathbf{O}_s, \bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis})}(S_s^n \wedge X_+, \mathbf{R}\mathcal{H}om_\bullet(S_s^1, \mathcal{F}))$ résulte des arguments donnés dans la démonstration du théorème précédent.

La flèche canonique $K_n^T(X) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S_s^n \wedge X_+, \mathbf{R}\mathcal{H}om_\bullet(S_s^1, \mathcal{F}))$ s'obtient en appliquant le foncteur $\mathbf{H}_{\mathbf{O}_s, \bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis}) \longrightarrow \mathbf{H}_\bullet(S)$ aux éléments de $\mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\mathbf{O}_s, \bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis})}(S_s^n \wedge X_+, \mathbf{R}\mathcal{H}om_\bullet(S_s^1, \mathcal{F}))$. L'équivalence entre les trois conditions envisagées résulte essentiellement des différentes caractérisations des objets \mathbb{A}^1 -locaux (cf. lemmes 3.26 et 3.22), l'argument supplémentaire à ajouter étant qu'un morphisme

⁽⁵¹⁾ C'est-à-dire que l'on demande que X admette une famille ample de \mathcal{O}_X -Modules inversibles, la définition de cette notion se trouvant dans [SGA 6 II 2.2.4]. Tout schéma quasi-projectif sur un schéma affine vérifie cette propriété, ainsi que tout schéma régulier séparé d'après [SGA 6 II 2.2.7.1].

⁽⁵²⁾ $\mathbf{R}\Gamma(X; -)$ désigne le foncteur dérivé total à droite du foncteur “sections sur X ”, pour la structure simpliciale de catégorie de modèles sur $\Delta^{\text{op}}\text{Fais } \mathcal{S}m/S_{Nis}$. On peut évidemment étendre ce foncteur aux préfaisceaux simpliciaux pointés en composant avec le foncteur faisceau associé.

⁽⁵³⁾ Ex^∞ désigne ici une résolution fibrante dans la catégorie de modèles $\Delta^{\text{op}}\text{Ens}_\bullet$.

⁽⁵⁴⁾ La structure de groupe sur le membre de droite est induite par la structure naturelle de co-groupe de S_s^1 dans $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$.

de Groupes $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ dans $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\pi_n(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_n(\mathcal{H})$ est bijective. On montre ainsi que (1), (2) et (3) sont équivalentes au fait que $\mathbf{RHom}_\bullet(S_s^1, \mathcal{F})$ soit un objet \mathbb{A}^1 -local de $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/S_{Nis})$.

La dernière assertion résulte de l'invariance par homotopie de la \mathbf{G} -théorie (cf. [Qui2, proposition 4.1, paragraphe 7]). \triangleleft

Remarque 7.9.

Les conditions équivalences du corollaire précédent ne sont pas vérifiées pour un schéma de base S arbitraire. Par exemple, si $S = \text{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ avec k un corps, la flèche évidente $K_1(S) \rightarrow K_1(\mathbb{A}_S^1)$ n'est pas bijective. En effet, ce morphisme de groupes abéliens admet comme facteur direct⁽⁵⁵⁾ le morphisme $(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)^\times \rightarrow ((k[\varepsilon]/\varepsilon^2)[T])^\times$ qui n'est pas surjectif.

Le théorème de périodicité

Rappelons le théorème fondamental suivant sur la \mathbf{K} -théorie algébrique :

Théorème 7.10. (Théorème du fibré projectif) Soit X un schéma noethérien et \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang $r \in \mathbb{N}$. Notons $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ le fibré projectif associé à \mathcal{E} et α le morphisme

défini par la "formule" $\alpha(x_0, \dots, x_{r-1}) = \sum_{i=0}^{r-1} x_i \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-i)$. Alors, le premier morphisme ci-dessous est

un isomorphisme dans $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$, et le second l'est aussi si de plus X est divisoriel (ou si X est arbitraire et que K désigne la \mathbf{K} -théorie de Thomason-Trobaugh) :

$$\prod_{i=0}^{r-1} G(X) \xrightarrow[\cong]{\alpha} G(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \quad \prod_{i=0}^{r-1} K(X) \xrightarrow[\cong]{\alpha} K(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — La démonstration pour la \mathbf{G} -théorie se trouve dans [Qui2, proposition 4.3, paragraphe 7]. Pour la \mathbf{K} -théorie de Thomason-Trobaugh, c'est le théorème [TT, théorème 4.1], ce qui implique le résultat pour la \mathbf{K} -théorie de Quillen dans le cas des schémas divisoriels. \triangleleft

Théorème 7.11. Soit S un schéma noethérien séparé. Alors, il existe un isomorphisme canonique⁽⁵⁶⁾ $\mathbf{R}\Omega(\mathcal{F}) \simeq \mathbf{RHom}_\bullet((\mathbb{P}^1, \infty), \mathbf{R}\Omega(\mathcal{F}))$ dans $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/S_{Nis})$ où \mathcal{F} est le préfaisceau simplicial de la définition 7.5.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Comme nous allons le voir, il s'agit d'une conséquence formelle du théorème du fibré projectif. Notons \mathcal{K} un remplacement simplicialement fibrant de $\mathbf{R}\Omega\mathcal{F}$ où \mathcal{F} est le faisceau simplicial de la définition 7.5. Il est clair que \mathcal{K} induit un Groupe dans la catégorie $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/S_{Nis})$, dont on pourrait montrer qu'il est abélien.

Si $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $X \in Sm/S$, le foncteur $P(X) \rightarrow P(\mathbb{P}_X^1)$ qui à \mathcal{E} associe $\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{O}(n)$ induit un morphisme d'ensembles simpliciaux $K(X) \rightarrow K(\mathbb{P}_X^1)$, bien défini à homotopie près. La méthode de rigidification que nous avons employée permet de construire facilement un morphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta_n} \mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}_+^1, \mathcal{F})$ dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{F}ais(Sm/S_{Nis})_\bullet$ qui corresponde aux morphismes d'ensembles simpliciaux précédents. Plus précisément, le bifoncteur $P(X) \times P(X) \rightarrow P(\mathbb{P}_X^1)$ qui à $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ associe $\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{O} \oplus \mathcal{E}' \boxtimes \mathcal{O}(-1)$ induit, pour tout $X \in Sm/S$, un morphisme d'ensembles simpliciaux pointés $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{P}_X^1)$. On en déduit un morphisme de faisceaux simpliciaux pointés $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}_+^1, \mathcal{F})$, ce qui donne un morphisme $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}_+^1, \mathcal{K})$ dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{F}ais(Sm/S_{Nis})_\bullet$ (bien défini à homotopie près).

Dans le cas du fibré vectoriel trivial de rang 2, le théorème du fibré projectif peut se reformuler en disant que le morphisme α est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/S_{Nis})$.

Si \mathbb{P}^1 est pointé par ∞ , le morphisme évident $\mathbb{P}_+^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ dans $\mathcal{F}ais(Sm/S_{Nis})_\bullet$ induit un morphisme $\mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}^1, \mathcal{K}) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}_+^1, \mathcal{K})$ dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{F}ais(Sm/S_{Nis})_\bullet$. On définit un morphisme canonique $\mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}^1, \mathcal{K}) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{K}$ dans $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/S_{Nis})$ en posant $\Psi = \text{pr}_1 \circ \alpha^{-1} \circ \beta$. Nous allons montrer que Ψ est un isomorphisme.

⁽⁵⁵⁾ On peut montrer que si A est un anneau, alors $K_1(A)$ est l'abélianisé du groupe linéaire infini $\mathbf{GL}_\infty(A)$ qui contient A^\times comme facteur direct fonctoriel sur A . Autrement dit, $K_1(A) = \mathbf{H}_1(\mathbf{GL}_\infty(A); \mathbb{Z})$.

⁽⁵⁶⁾ Il a quand même fallu faire un choix de signe.

Considérons la suite cofibre évidente $S_s^0 \xrightarrow{\infty} \mathbb{P}_+^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dans $\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_\bullet$. Il est fondamental de remarquer que la flèche $S_s^0 \xrightarrow{\infty} \mathbb{P}_+^1$ admet une rétraction canonique. En appliquant le foncteur $\text{hom}_\bullet(-, \mathcal{K}) : (\Delta^{op}\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})_\bullet)^{op} \longrightarrow \Delta^{op}\mathcal{E}ns_\bullet$, cette suite cofibre donne naissance à des suites exactes longues d'homotopie associée à une fibration d'ensembles simpliciaux. L'existence de la rétraction implique que ces suites exactes longues dégèrent en des suites exactes courtes (scindées) de la forme suivante, pour tout $X \in \mathcal{S}m/S$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \longrightarrow \pi_n(\mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}^1, \mathcal{K})(X)) \longrightarrow \pi_n(\mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}_+^1, \mathcal{K})(X)) \longrightarrow \pi_n(\mathcal{K}(X)) \longrightarrow 0$$

Le morphisme α induit un isomorphisme $\pi_n(\mathcal{K}(X)) \times \pi_n(\mathcal{K}(X)) \xrightarrow{\alpha} \pi_n(\mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}_+^1, \mathcal{K})(X))$. Il est clair que sous cette identification, le morphisme d'inclusion de la suite exacte courte précédente identifie $\pi_n(\mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}^1, \mathcal{K})(X))$ au noyau du morphisme $\pi_n(\mathcal{K}(X)) \times \pi_n(\mathcal{K}(X)) \longrightarrow \pi_n(\mathcal{K}(X))$ qui à (x, y) associe $x + y$. On en déduit que la projection de ce noyau sur le premier facteur $\pi_n(\mathcal{K}(X))$ est bijective, c'est-à-dire que l'application $\pi_n(\mathcal{H}om_\bullet(\mathbb{P}^1, \mathcal{K})(X)) \longrightarrow \pi_n(\mathcal{K}(X))$ induite par Ψ est bijective. Ainsi, Ψ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(\mathcal{S}m/S_{N_{is}})$, d'où le résultat. \triangleleft

Grâce au corollaire 7.8, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 7.12. *Pour tout schéma S noethérien régulier et séparé, il existe un spectre $\mathbf{K} \in \mathcal{SH}(S)$ tel que pour tout schéma $X \in \mathcal{S}m/S$ et $p, q \in \mathbb{Z}$ on ait un isomorphisme canonique de la forme suivante, avec $K_i(X) = 0$ si $i < 0$:*

$$\mathbf{K}^{p,q}(X) = K_{2q-p}(X)$$

Remarque 7.13. *Sans hypothèse de régularité sur S , on a quand même des résultats du même type, pourvu que l'on prenne des coefficients autres que \mathbb{Z} (cf. remarque 7.9). Ainsi, si S est un schéma noethérien et G un groupe abélien, il existe un spectre $\mathbf{K}(-; G) \in \mathcal{SH}(S)$ tel que $\mathbf{K}^{p,q}(X; G) = K_{2q-p}^B(X; G)$ pour tout $X \in \mathcal{S}m/S$ dans le cas où $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n inversible sur S ou $G = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ avec p nilpotent sur S , les groupes $K_n^B(X; G)$ étant ceux définis dans [TT, paragraphe 9.3, page 376]. Par exemple, $\mathbf{K}(-; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \in \mathcal{SH}(S)$ est construit à partir de la cofibre homotopique de la multiplication par n dans un spectre (non \mathbb{A}^1 -local) représentant la K -théorie algébrique (de Thomason-Trobaugh). Ces groupes de K -théorie avec coefficients sont naturellement reliés aux groupes de K -théorie usuels via des théorèmes des "coefficients universels".*

Grassmanniennes et classifiants du groupe général linéaire

Il va maintenant s'agir de donner une interprétation géométrique du spectre représentant la K -théorie algébrique. Pour cela, nous allons commencer par rappeler comment on peut définir les grassmanniennes, puis nous tenterons d'expliquer pourquoi elles sont liées à la K -théorie algébrique (au moins pour S régulier).

Grassmanniennes

Soient $d, r \in \mathbb{N}$. On considère le schéma affine $V_{d,r} \simeq \mathbb{A}^{d(d+r)}$ lisse sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Pour tout anneau commutatif A , on identifie les points $V_{d,r}(A)$ à l'ensemble des matrices de taille $(d+r, d)$ à coefficients dans A . Plus précisément, pour tout schéma X , on a une bijection canonique entre $V_{d,r}(X)$ et l'ensemble des morphismes de \mathcal{O}_X -Modules de \mathcal{O}_X^d vers \mathcal{O}_X^{d+r} . On note $U_{d,r}$ le sous-schéma ouvert de $V_{d,r}$ qui en tant que faisceau sur la catégorie des schémas pour la topologie de Zariski est le faisceau associé au préfaisceau qui à un schéma X associe l'ensemble des morphismes de \mathcal{O}_X -Modules de \mathcal{O}_X^d vers \mathcal{O}_X^{d+r} admettant un inverse à gauche. Ainsi, pour tout schéma X , $U_{d,r}(X)$ s'identifie à l'ensemble des sous- \mathcal{O}_X -Modules de \mathcal{O}_X^{d+r} localement libres et localement facteurs directs de rang d , munis d'une base. On dispose d'une action à droite évidente de \mathbf{GL}_d sur $V_{d,r}$ laissant stable l'ouvert $U_{d,r}$. On peut montrer que le faisceau Zariski quotient $U_{d,r}/\mathbf{GL}_d$ est représentable par un schéma $\mathbb{G}\mathbb{R}_{d,r}$ lisse sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, que l'on appelle grassmannienne des sous-espaces linéaires de dimension d dans l'espace affine de dimension $d+r$.

Le schéma $\mathbb{G}\mathbb{R}_{d,r}$ représente le foncteur qui à un schéma X associe l'ensemble des sous- \mathcal{O}_X -Modules \mathcal{L} de \mathcal{O}_X^{d+r} tels que $\mathcal{O}_X^{d+r}/\mathcal{L}$ soit localement libre de rang r .

Les fonctions qui à un sous- \mathcal{O}_X -Module \mathcal{L} de \mathcal{O}_X^{d+r} localement facteur direct de rang d associent $\mathcal{L} \oplus \{0\} \subset \mathcal{O}_X^{d+r} \times \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X^{d+r+1}$ pour tout schéma X induisent une immersion fermée $\mathbb{G}\mathbb{R}_{d,r} \longrightarrow \mathbb{G}\mathbb{R}_{d,r+1}$

qui est aussi induite par un morphisme \mathbf{GL}_d -équivariant $U_{d,r} \longrightarrow U_{d,r+1}$ après passage au quotient par \mathbf{GL}_d . De même, l'application $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L}$ induit une immersion fermée $\mathbb{G}_{\mathbb{R}_{d,r}} \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathbb{R}_{1+d,r}}$.

Définition 7.14. *Pour tout schéma noethérien S , on note $\mathbb{G}_{\mathbb{R}_{d,\infty}}$ la colimite (dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$) $\varinjlim_{r \in \mathbb{N}} \mathbb{G}_{\mathbb{R}_{d,r}}$. On note $\mathbb{G}_{\mathbb{R}_{\infty,\infty}}$ la colimite $\varinjlim_{d \in \mathbb{N}} \mathbb{G}_{\mathbb{R}_{d,\infty}}$. On pose aussi $\mathbf{GL}_\infty = \varinjlim_{d \in \mathbb{N}} \mathbf{GL}_d$ où les morphismes de schémas en groupes $\mathbf{GL}_d \longrightarrow \mathbf{GL}_{1+d}$ sont induits par l'application qui à une matrice inversible A associe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.*

Classifiants des \mathbf{GL}_d pour $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Définition 7.15. *Soit \mathbf{M} un monoïde. On note \mathbf{BM} l'ensemble simplicial \mathbf{NM} où \mathbf{M} est la catégorie à un objet canoniquement associée à ce monoïde. Si \mathbf{M} est un monoïde simplicial (i.e. un Monoïde dans la catégorie $\Delta^{op}\mathcal{E}ns$ ou un objet simplicial à valeurs dans la catégorie des monoïdes), alors on note \mathbf{BM} l'ensemble simplicial diagonal de l'ensemble bisimplicial $n \longmapsto B(\mathbf{M}_n)$. Autrement dit, $(\mathbf{BM})_n = (B(\mathbf{M}_n))_n$.*

On prolonge évidemment cette définition aux catégories de faisceaux d'ensembles (simpliciaux).

La proposition suivante contient un certain nombre de faits non triviaux concernant la K-théorie algébrique :

Proposition 7.16. *Pour tout anneau A , on note $M(A)$ le monoïde simplicial $\bigsqcup_{d \in \mathbb{N}} B\mathbf{GL}_d(A)$ dont la loi est induite par la somme directe des matrices. Alors, il existe un homomorphisme canonique dans \mathbf{H}_\bullet^{top} , induisant un isomorphisme en homologie singulière :*

$$B\mathbf{GL}_\infty(A) \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{R}\Omega(BM(A))$$

On note $B\mathbf{GL}_\infty^+(A)$ la "composante neutre" du Groupe $\mathbf{R}\Omega(BM(A))$. Enfin, il existe un isomorphisme canonique de groupes, pour tout anneau commutatif A et tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n(\mathrm{Spec} A) = \pi_n(B\mathbf{GL}_\infty^+(A) \times K_0(A))$$

On peut rigidifier la définition de $B\mathbf{GL}_\infty^+$, et on supposera dorénavant que l'on a un morphisme $B\mathbf{GL}_\infty(A) \longrightarrow B\mathbf{GL}_\infty^+(A)$ dans $\Delta^{op}\mathcal{E}ns_\bullet$ fonctoriellement pour tout anneau A .

Pour tout schéma noethérien S , on note $B\mathbf{GL}_\infty$ et $B\mathbf{GL}_\infty^+$ les préfaisceaux simpliciaux $X \longmapsto B\mathbf{GL}_\infty(\mathbb{A}^1(X))$ et $X \longmapsto B\mathbf{GL}_\infty^+(\mathbb{A}^1(X))$ et on a un morphisme canonique de préfaisceaux simpliciaux $B\mathbf{GL}_\infty \longrightarrow B\mathbf{GL}_\infty^+$.

Proposition 7.17. *Pour tout schéma noethérien S , le morphisme $B\mathbf{GL}_\infty \longrightarrow B\mathbf{GL}_\infty^+$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible dans $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Il suffit de montrer que pour tout anneau A le morphisme d'ensembles simpliciaux $(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} B\mathbf{GL}_\infty)(A) \longrightarrow (\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} B\mathbf{GL}_\infty^+)(A)$ est une équivalence faible. Pour $\mathcal{X} \in \{B\mathbf{GL}_\infty, B\mathbf{GL}_\infty^+\}$, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} \mathcal{X}(A)$ est l'ensemble simplicial diagonal de l'ensemble bisimplicial $n \longmapsto \mathcal{X}(A[T_0, \dots, T_n]/(\sum_{i=0}^n T_i - 1))$. Pour tout anneau B , le morphisme $B\mathbf{GL}_\infty(B) \longrightarrow B\mathbf{GL}_\infty^+(B)$ induit un isomorphisme en homologie singulière, ainsi, en utilisant par exemple la suite spectrale d'un bicomplexe, on obtient que $(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} B\mathbf{GL}_\infty)(A) \longrightarrow (\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} B\mathbf{GL}_\infty^+)(A)$ induit un isomorphisme en homologie singulière.

D'après le théorie des "obstructions", pour montrer qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux pointés $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ induisant un isomorphisme en homologie singulière est une équivalence faible, il suffit de montrer que \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont des espaces connexes abéliens (i.e. leur groupe fondamental est abélien et agit trivialement sur les groupes d'homotopie supérieurs). On peut montrer (cf. [And, paragraphe 2]) que $B\mathbf{GL}_\infty^+$ a le type d'homotopie faible d'un préfaisceau de groupes simpliciaux, donc $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} B\mathbf{GL}_\infty^+$ aussi, et par conséquent $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} B\mathbf{GL}_\infty^+(A)$ est un espace connexe abélien.

Il ne paraît pas évident *a priori* de mettre une structure de H -monoïde sur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} B\mathbf{GL}_\infty(A)$. Néanmoins, on peut définir une multiplication μ sur le faisceau simplicial $B\mathbf{GL}_\infty$ en prenant l'image par le foncteur B du morphisme de faisceaux de groupes $\mathbf{GL}_\infty \times \mathbf{GL}_\infty \longrightarrow \mathbf{GL}_\infty$ obtenu en faisant passer à la limite inductive les morphismes de schémas en groupes $\mathbf{GL}_n \times \mathbf{GL}_n \longrightarrow \mathbf{GL}_{2n} \hookrightarrow \mathbf{GL}_\infty$ qui à

un couple de matrices inversibles (A, B) associent la matrice M telle que :

$$\begin{cases} M_{2i-1, 2j-1} = A_{ij} & \forall 1 \leq i, j \leq n \\ M_{2i, 2j} = B_{ij} & \forall 1 \leq i, j \leq n \\ M_{kk} = 1 & \forall k > n \\ M_{ab} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On voudrait être capable montrer que μ fait de $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} \mathbf{BGL}_{\infty}(A)$ est un H -monoïde (commutatif) en construisant des systèmes compatibles de \mathbb{A}^1 -homotopies pointées traduisant l'associativité, la commutativité et l'existence d'un élément neutre pour la loi μ sur \mathbf{BGL}_{∞} , mais il n'est pas nécessaire d'en faire autant. Comme il s'agit de vérifier que $\pi_1(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} \mathbf{BGL}_{\infty}(A), \bullet)$ agit trivialement sur $\pi_n(\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} \mathbf{BGL}_{\infty}(A), \bullet)$ pour tout $n \geq 1$, et que tout élément dans ces groupes d'homotopie provient d'un élément dans un groupe d'homotopie de $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} \mathbf{BGL}_n$ pour n assez grand, il suffit⁽⁵⁷⁾ de construire des systèmes *non nécessairement compatibles* de \mathbb{A}^1 -homotopies pointées définies sur les faisceaux simpliciaux \mathbf{BGL}_n dont \mathbf{BGL}_{∞} est la limite inductive filtrante, ce qui donnerait des systèmes non nécessairement compatibles de Δ^1 -homotopies pointées pour les faisceaux simpliciaux $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1} \mathbf{BGL}_n$. En restreignant les valeurs de n à certaines classes de congruences modulo des puissances de 2 et en utilisant le fait que toute matrice de permutation paire dans $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ est un produit de transvections, on obtient les \mathbb{A}^1 -homotopies pointées voulues, exactement de la même manière que celle qui permet de montrer que la permutation circulaire sur $(\mathbb{P}^1)^{\wedge 3}$ est \mathbb{A}^1 -homotope à l'identité (cf. lemme 5.6). \triangleleft

Compte tenu du fait bien connu que pour tout anneau local A , $\mathbf{K}_0(A) = \mathbb{Z}$, on a déjà vu que $\mathbf{BGL}_{\infty}^+ \times \mathbb{Z}$ représentait la \mathbf{K} -théorie algébrique (de Thomason-Trobaugh) dans $\mathbf{Ho}_{s, \bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$, et dans $\mathbf{H}_{\bullet}(S)$ si S est régulier. La proposition précédente implique que $\mathbf{BGL}_{\infty} \times \mathbb{Z}$ représente la \mathbf{K} -théorie algébrique dans $\mathbf{H}_{\bullet}(S)$ si S est régulier. Enfin, nous avons le résultat suivant :

Théorème 7.18. *Pour tout schéma noethérien S , il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{H}_{\bullet}(S)$:*

$$\mathbb{G}_{\mathbb{R}, \infty, \infty} \simeq \mathbf{BGL}_{\infty}$$

Plus précisément, on a des isomorphismes canoniques $\mathbb{G}_{\mathbb{R}, d, \infty} \simeq \mathbf{BGL}_d$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.

PRINCIPE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Pour justifier l'existence d'un isomorphisme dans $\mathbf{H}_{\bullet}(S)$ entre $\mathbb{G}_{\mathbb{R}, d, \infty}$ et \mathbf{BGL}_d , nous nous contenterons de l'argument heuristique suivant : en topologie algébrique, si G est un groupe, on peut construire le classifiant de G (*i.e.* un objet isomorphe à BG dans $\mathbf{H}_{\bullet}^{top}$) en prenant l'espace de base B d'un G -fibré principal $E \rightarrow B$ dans \mathbf{Top} tel que E soit contractile. Ici, par définition, $U_{d, \infty} \rightarrow \mathbb{G}_{\mathbb{R}, d, \infty}$ est un \mathbf{GL}_d -torseur (Zariski). Nous allons seulement montrer que la flèche $U_{d, \infty} \rightarrow \bullet$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, ce qui est quand même une étape très importante pour démontrer le théorème (cf. [MV, proposition 3.7, page 138]). La partie intéressante du raisonnement suivant est essentiellement celle de [Mor1, lemme 4.2.5, page 60]. On veut montrer que $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(U_{d, \infty}) \rightarrow \bullet$ est une équivalence faible simpliciale. Pour cela, il suffit de montrer que le morphisme $U_{d, \infty} \rightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes de la forme $|\partial \Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^{\bullet}} \times \mathrm{Spec} A \rightarrow |\Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^{\bullet}} \times \mathrm{Spec} A$ pour tout schéma affine $\mathrm{Spec} A \in \mathcal{S}m/S$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Il faut alors revenir à la définition de $|\partial \Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^{\bullet}}$. Notons Λ l'anneau⁽⁵⁸⁾ des morphismes de faisceaux $|\partial \Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^{\bullet}} \times \mathrm{Spec} A \rightarrow \mathbb{A}_S^1$. On a un morphisme évident $|\partial \Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^{\bullet}} \times \mathrm{Spec} A \rightarrow \mathrm{Spec} \Lambda$ dans la catégorie $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$. En fait, on a même la factorisation suivante :

$$|\partial \Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^{\bullet}} \times \mathrm{Spec} A \longrightarrow \mathrm{Spec} \Lambda \longrightarrow \mathrm{Spec} (A[T_0, \dots, T_n]/(\sum_{i=0}^n T_i - 1)) = |\Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^{\bullet}} \times \mathrm{Spec} A$$

Donnons nous donc un morphisme $|\partial \Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^{\bullet}} \times \mathrm{Spec} A \xrightarrow{\varphi} U_{d, r}$ pour un $r \in \mathbb{N}$. Commençons par montrer que φ se relève en un morphisme de source $\mathrm{Spec} \Lambda$. Comme $U_{d, r}$ est un sous-schéma ouvert du

⁽⁵⁷⁾ Je remercie Fabien Morel de m'avoir expliqué cet argument.

⁽⁵⁸⁾ Intuitivement, Λ est l'anneau des familles de fonctions sur les faces de $|\partial \Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^{\bullet}} \times \mathrm{Spec} A$ qui coïncident sur les "intersections" deux-à-deux.

schéma affine $V_{d,r}$, on voit qu'il existe un unique φ' rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} |\partial\Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet} \times \text{Spec } A & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ U_{d,r} & \longrightarrow & V_{d,r} \end{array}$$

Montrons que φ' se factorise par $U_{d,r}$. Pour cela, il suffit de montrer qu'ensemblément l'image de φ' est dans l'ouvert $U_{d,r}$. Maintenant, notons $(F_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ les " $n+1$ -faces de $|\partial\Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet} \times \text{Spec } A$ ", c'est-à-dire que $F_i = \text{Spec}(A[T_0, \dots, T_n]/(T_i, \sum_{i=0}^n T_i - 1))$ et que l'on a des morphismes canoniques $F_i \rightarrow \text{Spec } \Lambda$, se factorisant par $|\Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet} \times \text{Spec } A$. Par définition, le morphisme $\bigsqcup_{i=0}^n F_i \rightarrow \text{Spec } \Lambda$ est schématiquement dominant, donc surjectif, car son image est la réunion des images des morphismes $F_i \rightarrow \text{Spec } \Lambda$, dont on vérifie facilement que ce sont des immersions fermées. Or, l'image de chaque face F_i dans $V_{d,r}$ est contenue dans $U_{d,r}$ par hypothèse, ainsi φ' se factorise bien en un morphisme $\text{Spec } \Lambda \rightarrow U_{d,r}$ toujours noté φ' .

On s'est donc ramené à montrer que le morphisme $U_{d,\infty} \rightarrow \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport au morphisme $\text{Spec } \Lambda \rightarrow |\Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet} \times \text{Spec } A$. On peut montrer, mais ce n'est pas trivial⁽⁵⁹⁾, que $\text{Spec } \Lambda \rightarrow |\Delta^n|_{\Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet} \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \Lambda$ est une immersion fermée. Il suffit donc de montrer le lemme suivant :

Lemme 7.19. *Soit $B \rightarrow A$ un morphisme surjectif d'anneaux commutatifs, avec B noethérien. Alors, l'application $U_{d,\infty}(\text{Spec } B) \rightarrow U_{d,\infty}(\text{Spec } A)$ est surjective.*

DÉMONSTRATION DU LEMME — On rappelle que pour tout anneau C , $U_{d,r}(\text{Spec } C)$ s'identifie à l'ensemble des morphismes de C -modules $C^d \rightarrow C^{d+r}$ qui sont l'inclusion d'un C -module localement facteur direct. Par transposition, $U_{d,r}(\text{Spec } C)$ s'identifie à l'ensemble des morphismes surjectifs de C -modules $C^{d+r} \rightarrow C^d$. Sous ces identifications et le lemme de Yoneda, l'immersion fermée canonique $U_{d,r} \rightarrow U_{d,r+1}$ correspond à l'application qui à un morphisme surjectif $C^{d+r} \rightarrow C^d$ associe le morphisme composé $C^{d+r+1} \rightarrow C^{d+r} \rightarrow C^d$ où le morphisme $C^{d+r+1} \rightarrow C^{d+r}$ est la projection sur les $d+r$ premiers facteurs.

Soit x un élément de $U_{d,r}(\text{Spec } A)$ c'est-à-dire un morphisme surjectif de A -modules $A^{d+r} \xrightarrow{x} A^d$. On peut choisir des relèvements dans B des coefficients de la matrice associée à x , il existe ainsi un morphisme de B -modules $B^{d+r} \xrightarrow{y} B^d$ tel que $y \otimes_B A = x$. Le noyau I du morphisme $B \rightarrow A$ est un B -module de type fini. Il existe donc un entier $k \in \mathbb{N}$ et un morphisme $B^k \rightarrow I^d \subset B^d$ tel que le morphisme évident $B^{d+r+k} \xrightarrow{z} B^d$ soit surjectif. On vérifie facilement que l'image de $z \in U_{d,r+k}(\text{Spec } B)$ dans $U_{d,r+k}(\text{Spec } A)$ est l'image de x par l'application évidente $U_{d,r}(\text{Spec } A) \rightarrow U_{d,r+k}(\text{Spec } A)$, ce qui permet de conclure. \triangleleft

\triangleleft

Corollaire 7.20. *Pour tout schéma régulier noethérien et séparé S , il existe un Ω -spectre $\mathbb{BGL} \in \mathcal{SH}(S)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{BGL}_n soit canoniquement isomorphe dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ à $\mathbb{G}_{\mathbb{R}_{\infty,\infty}} \times \mathbb{Z}$ et tel que l'on ait un isomorphisme canonique $\mathbb{BGL} \simeq \mathbf{RHom}(S_s^1 \wedge S_t^1, \mathbb{BGL})$ dans $\mathcal{SH}(S)$, de sorte que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ et $X \in \text{Sm}/S$, on ait une bijection canonique :*

$$\mathbb{BGL}^{p,q}(X) = K_{2q-p}(X)$$

⁽⁵⁹⁾ On serait tenté d'utiliser [Mor1, lemme 2.2.24, page 27], mais malheureusement, il manque une petite hypothèse pour que ce lemme soit parfaitement juste.

Motifs

Nous allons maintenant tenter de construire la cohomologie motivique dans le contexte de la catégorie homotopique stable des schémas. On suppose que $S = \text{Spec } k$ où k est un corps. Nous commencerons par introduire les outils nécessaires pour construire la catégorie triangulée des motifs effectifs sur k de Voevodsky, dont la construction repose beaucoup sur l'étude cohomologique des préfaisceaux Nisnevich avec transferts. Une fois ce cap passé, nous pourrions procéder à la construction des analogues parfaits en théorie homotopique des schémas des spectres d'Eilenberg-MacLane intervenant en topologie algébrique. Pour établir que le spectre \mathbf{H}_Z obtenu est un Ω -spectre (représentant ce que l'on appelle la cohomologie motivique), nous devrons utiliser le théorème de Friedlander-Voevodsky disant que le twist de Tate est un foncteur pleinement fidèle dans la catégorie des motifs effectifs géométriques. Enfin, nous étudierons quelques propriétés de la cohomologie motivique et nous montrerons que la cohomologie étale est aussi représentée par un spectre de $\mathcal{SH}(k)$.

Préfaisceaux et faisceaux Nisnevich avec transferts

Rudiments de théorie des intersections et catégorie $SmCor(k)$

Définition 8.1. Soit k un corps et X, Y deux objets de Sm/k . On note $\text{Cor}(X, Y)$ le groupe abélien libre sur l'ensemble des sous-schémas fermés intègres Z de $X \times_k Y$ tels que la première projection $Z \rightarrow X$ soit un morphisme fini et surjectif sur une composante connexe de X . On appelle $\text{Cor}(X, Y)$ le groupe des correspondances finies de X vers Y .

Il va maintenant s'agir de construire une catégorie $SmCor(k)$ dont les objets seront les objets de Sm/k et telle que pour tous X et Y dans $SmCor(k)$, $\mathbf{Hom}_{SmCor(k)}(X, Y) = \text{Cor}(X, Y)$.

Définition 8.2. Soit X un schéma⁽⁶⁰⁾. On appelle cycle algébrique sur X un élément du groupe abélien libre sur l'ensemble des sous-schémas fermés intègres de X . On note $\text{Cycl}(X)$ ce groupe abélien. Si $Z \rightarrow X$ est une immersion fermée, on note $[Z] \in \text{Cycl}(X)$ la somme $\sum_{F \in I} m_F F$ où I désigne l'ensemble des composantes irréductibles de Z et où m_F désigne la longueur de l'anneau local (artinien) de Z au point générique de $F \in I$.

Ainsi, si X et Y sont deux objets de Sm/k , $\text{Cor}(X, Y)$ est un sous-groupe de $\text{Cycl}(X \times_k Y)$. Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés de functorialité des cycles algébriques.

Lemme 8.3. (Image réciproque pour les morphismes plats) Soient X et Y deux schémas, si $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme plat, il existe un unique morphisme de groupes $f^* : \text{Cycl}(Y) \rightarrow \text{Cycl}(X)$ tel que pour tout sous-schéma fermé Z de Y , on ait la formule :

$$f^*[Z] = [Z \times_Y X]$$

De plus, si $Y \xrightarrow{g} Z$ est un autre morphisme plat, alors on a l'égalité $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Voir [Ful, lemme 1.7.1, page 18]. ◁

Lemme 8.4. (Image directe) Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme de type fini. Pour tout sous-schéma fermé intègre Z de X tel que le morphisme $Z \rightarrow Y$ soit propre, on pose $f_*[Z] = d_Z[f(Z)]$ où d_Z désigne le degré de l'extension de corps $\kappa(Z)/\kappa(f(Z))$ si celle-ci est finie et 0 sinon. On note f_* le morphisme de groupes à valeurs dans $\text{Cycl}(Y)$ obtenu en prolongeant cette application par linéarité au sous-groupe engendré par de tels $[Z]$. En particulier, si f est propre, f_* définit un morphisme de groupes $\text{Cycl}(X) \xrightarrow{f_*} \text{Cycl}(Y)$

De plus, si $X \xrightarrow{g} Y$ est un autre morphisme de type fini, dans la formule $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, le membre de gauche est défini si et seulement le membre de droite l'est, et dans ce cas il y a égalité.

⁽⁶⁰⁾Dans cette partie, le mot "schéma" désignera un schéma noethérien et séparé.

DÉMONSTRATION DU LEMME — La functorialité résulte immédiatement de la multiplicativité du degré des extensions de corps, le fait que les ensembles de définition de $(f \circ g)_*$ et $f_* \circ g_*$ coïncident résultant des propriétés formelles des morphismes propres (cf. [EGA II 5.4]). \triangleleft

Lemme 8.5. (Changement de base) *On se donne un carré cartésien de schémas, où f est un morphisme plat :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & Y \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Là où p_* est défini, $p'_* \circ f'^*$ l'est aussi, et on a l'égalité suivante :

$$p'_* \circ f'^* = f_* \circ p_*$$

Définition 8.6. *Soit $X \in \text{Sm}/k$ connexe. On se donne deux sous-schémas fermés intègres Z et Z' . On dit que Z et Z' s'intersectent proprement si les composantes irréductibles C de $Z \cap Z'$ sont toutes de dimension $\dim Z + \dim Z' - \dim X$ (i.e. il y a égalité dans la formule $\dim C \geq \dim Z + \dim Z' - \dim X$). On pose $Z \cdot Z' = \sum_C i(C; Z \cdot Z')[C] \in \text{Cycl}(X)$ où C parcourt les composantes irréductibles de $Z \cap Z'$ et où $i(C; Z \cdot Z')$ est l'entier (strictement positif) donné par la formule des **Tor** de Serre. Cela signifie que si on note A l'anneau local régulier de X au point générique de C , et si \mathfrak{J} et \mathfrak{J}' sont respectivement les idéaux premiers de A correspondant à Z et Z' , alors on a l'égalité suivante où $\text{lg}(-)$ désigne la longueur d'un élément du groupe de Grothendieck des A -modules de longueur finie :*

$$i(C; Z \cdot Z') = \text{lg} \left(\sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \text{Tor}_q^A(A/\mathfrak{J}, A/\mathfrak{J}') \right)$$

À partir de cette définition, si $X \in \text{Sm}/k$, on peut définir de même la notion d'intersection propre de deux cycles x et y appartenant à $\text{Cycl}(X)$ et définir par bilinéarité le produit d'intersection \cdot qui est un morphisme de groupes à valeurs dans $\text{Cycl}(X)$ défini sur le sous-groupe de $\text{Cycl}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Cycl}(X)$ engendré par les $[Z] \otimes [Z']$ avec Z et Z' deux sous-schémas fermés intègres de X s'intersectant proprement.

L'associativité du produit d'intersection (quand cela a un sens) résulte essentiellement de l'associativité du produit tensoriel total $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$ et des diverses suites spectrales qui en découlent.

Proposition 8.7. *Soient X, Y et Z trois objets de Sm/k . On se donne des correspondances finies $\varphi \in \text{Cor}(X, Y)$ et $\psi \in \text{Cor}(Y, Z)$. Notons $\text{pr}_{1,2} : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow X \times_k Y$, $\text{pr}_{2,3} : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow Y \times_k Z$ et $\text{pr}_{1,3} : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow X \times_k Z$ les projections. Alors, les cycles $\text{pr}_{1,2}^* \varphi$ et $\text{pr}_{2,3}^* \psi$ s'intersectent proprement, on note $\psi \star \varphi \in \text{Cycl}(X \times_k Y \times_k Z)$ leur intersection. On peut définir $\psi \circ \varphi = \text{pr}_{1,3,*}(\psi \star \varphi)$, c'est-à-dire que :*

$$\psi \circ \varphi = \text{pr}_{1,3,*}((\text{pr}_{1,2}^* \varphi) \cdot (\text{pr}_{2,3}^* \psi))$$

Cette définition fait de $\text{SmCor}(k)$ une catégorie additive.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Il s'agit essentiellement de montrer que les cycles intervenant dans le produit d'intersection figurant dans la définition de la composition des correspondances finies s'intersectent proprement. La démonstration est ce point est facile et résulte du fait simple suivant : si $X \rightarrow S$ est un morphisme fini surjectif, alors $\dim X = \dim S$. Ensuite, la méthode de démonstration est la même que celle de [Ful, proposition 16.1.11], à la différence qu'ici nous n'avons pas besoin de quotienter les groupes de cycles algébriques par l'équivalence rationnelle, étant donné que les cycles que nous intersectons s'intersectent toujours proprement. \triangleleft

Définition 8.8. *Grâce au produit externe de cycles algébriques, on peut définir une structure monoïdale symétrique, notée $- \times -$ sur $\text{SmCor}(k)$ qui, au niveau des objets de $\text{SmCor}(k)$, correspond au produit dans la catégorie Sm/k .*

Préfaisceaux avec transferts

Définition 8.9. *Soit k un corps. Un préfaisceau avec transferts sur k est un foncteur additif de la catégorie $\text{SmCor}(k)^{op}$ vers la catégorie des groupes abéliens Ab . Un préfaisceau avec transferts sur k est*

appelé faisceau Nisnevich avec transferts si le préfaisceau induit sur la catégorie Sm/k est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. On note $\mathit{PreFais}(\mathit{SmCor}(k))$ la catégorie des préfaisceaux avec transferts sur k et $\mathit{Fais}_{\mathit{Nis}}(\mathit{SmCor}(k))$ la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts sur k . On dit d'un préfaisceau \mathcal{F} avec transferts sur k qu'il est invariant par homotopie si pour tout $X \in \mathit{Sm}/k$, le morphisme évident $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{A}_X^1)$ est un isomorphisme, et d'un faisceau Nisnevich avec transferts qu'il est invariant par homotopie s'il l'est en tant que préfaisceau avec transferts.

Définition 8.10. Pour tout $X \in \mathit{Sm}/k$, on note $L(X)$ le préfaisceau avec transferts $\mathit{Cor}(-, X)$. On dispose d'un morphisme canonique $X \longrightarrow L(X)$ dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur Sm/k . Ce morphisme s'obtient en associant à un morphisme de schémas dans Sm/k le cycle de son graphe. De même, on a un foncteur évident $\mathit{Sm}/k \longrightarrow \mathit{SmCor}(k)$.

Un des ingrédients principaux de la démonstration du lemme suivant est la descente étale des schémas finis (cas particulier de la descente fidèlement plate des Modules quasi-cohérents [SGA 1 VIII]).

Lemme 8.11. Pour tout $X \in \mathit{Sm}/k$, $\mathit{Cor}(-, X) = L(X)$ est un faisceau pour la topologie étale sur Sm/k .

Lemme 8.12. Soit $(Y \xrightarrow{p} X) \in \mathit{Cov}_{\mathit{Nis}}(X)$ un recouvrement Nisnevich dans Sm/k . Alors, le complexe suivant est exact dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Sm/k pour la topologie de Nisnevich :

$$\cdots \longrightarrow L(Y \times_X Y) \xrightarrow{\mathit{Pr}_1 - \mathit{Pr}_2} L(Y) \xrightarrow{p} L(X) \longrightarrow 0$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — [VSF, proposition 3.1.3, chapitre 5, page 199] ◁

On peut montrer que ce lemme implique le corollaire suivant :

Corollaire 8.13. Les catégories $\mathit{PreFais}(\mathit{SmCor}(k))$ et $\mathit{Fais}_{\mathit{Nis}}(\mathit{SmCor}(k))$ sont abéliennes et le foncteur d'inclusion de $\mathit{Fais}_{\mathit{Nis}}(\mathit{SmCor}(k))$ dans $\mathit{PreFais}(\mathit{SmCor}(k))$ admet un adjoint à gauche exact appelé "faisceau Nisnevich avec transferts associé". De plus, si \mathcal{F} est un préfaisceau avec transferts sur k , le faisceau Nisnevich sous-jacent au faisceau Nisnevich avec transferts associé à \mathcal{F} s'identifie canoniquement au faisceau associé au préfaisceau sur Sm/k induit par \mathcal{F} . Autrement dit, la formation du faisceau associé "commute" au foncteur d'"oubli des transferts".

Théorème 8.14. (Voevodsky) On suppose que \mathcal{F} est un préfaisceau Nisnevich avec transferts sur k , invariant par homotopie. Alors, $a_{\mathit{Nis}}\mathcal{F}$ est invariant par homotopie et la flèche évidente $a_{\mathit{Zar}}\mathcal{F} \longrightarrow a_{\mathit{Nis}}\mathcal{F}$ est un isomorphisme.

Si k est parfait, alors pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, le préfaisceau $X \longmapsto \mathbf{H}_{\mathit{Nis}}^i(X; a_{\mathit{Nis}}\mathcal{F})$ est naturellement muni d'une structure de préfaisceau avec transferts invariant par homotopie. De plus, le morphisme évident $\mathbf{H}_{\mathit{Zar}}^i(X; a_{\mathit{Zar}}\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{H}_{\mathit{Nis}}^i(X; a_{\mathit{Nis}}\mathcal{F})$ est un isomorphisme. En particulier, la sous-catégorie pleine $\mathbf{HI}(k)$ de $\mathit{Fais}_{\mathit{Nis}}(\mathit{SmCor}(k))$ formée des faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie est une catégorie abélienne et le foncteur d'inclusion de $\mathbf{HI}(k)$ dans $\mathit{Fais}_{\mathit{Nis}}(\mathit{SmCor}(k))$ est exact.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [VSF, théorème 3.1.12, chapitre 5, page 205] ◁

Définition 8.15. Soit \mathcal{F} un préfaisceau de groupes abéliens sur Sm/k . Pour tout $X \in \mathit{Sm}/k$, on note $C_\star(\mathcal{F})$ le complexe de Moore associé au groupe abélien simplicial $\mathcal{F}(X \times \Delta_{\mathbb{A}^1}^\bullet)$. Si \mathcal{F} est un préfaisceau avec transferts, alors $C_\star(\mathcal{F})$ est un complexe de préfaisceaux avec transferts.

Lemme 8.16. Soit \mathcal{F} un préfaisceau avec transferts sur k . Alors, les préfaisceaux et les faisceaux d'homologie de $C_\star(\mathcal{F})$ sont invariants par homotopie.

DÉMONSTRATION DU LEMME — D'après le théorème 8.14, il suffit de montrer que les préfaisceaux d'homologie de $C_\star(\mathcal{F})$ sont invariants par homotopie, ce qui est classique [VSF, proposition 3.5, chapitre 3, page 97]. ◁

Théorème 8.17. Soit k un corps parfait et \mathcal{F} un préfaisceau avec transferts sur k . Si $a_{\mathit{Nis}}\mathcal{F} = 0$ alors $a_{\mathit{Zar}}C_\star\mathcal{F}$ est un complexe exact de faisceaux Zariski.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [VSF, proposition 5.2, chapitre 4, page 157] ◁

La catégorie triangulée des motifs effectifs $DM_-^{eff}(k)$

Dans toute cette partie, on suppose que k est un corps parfait. Nous allons rappeler la construction de la catégorie triangulée des motifs (mixtes) effectifs $DM_-^{eff}(k)$ de Voevodsky, ce qui nécessite l'utilisation de plusieurs théorèmes de [VSF]. Puis, après avoir étudié quelques propriétés de $DM_-^{eff}(k)$, nous montrerons comment comparer certains ensembles de morphismes dans $DM_-^{eff}(k)$ et dans $\mathbf{H}_\bullet(k)$

Définitions

Définition 8.18. *La sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $\mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$ formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont dans $\mathbf{Hl}(k)$, c'est-à-dire invariants par homotopie, est notée $DM_-^{eff}(k)$. D'après le théorème 8.14, $DM_-^{eff}(k)$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$. On appelle $DM_-^{eff}(k)$ la catégorie triangulée des motifs effectifs sur k .*

Lemme 8.19. *Pour tout $X \in Sm/k$ et $K \in \mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$, on a un isomorphisme canonique, pour tout $q \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))}(L(X), K[q]) = \mathbf{H}_{Nis}^q(X, K) = \mathbf{H}^q(\mathbf{R}\Gamma(X; K))$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — On commence par le cas où K est un complexe concentré en degré 0. En prenant une résolution injective⁽⁶¹⁾ I^\bullet de $\mathcal{F} := \mathbf{H}^0(K)$ dans $\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$, on remarque qu'il suffit de montrer que pour tout objet injectif I de $\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$, le faisceau Nisnevich induit par I est acyclique pour le foncteur "sections sur X " pour tout $X \in Sm/k$. D'après le lemme 1.40, il suffit de montrer que pour toute immersion ouverte $U \rightarrow V$ dans Sm/k , l'application $I(V) \rightarrow I(U)$ est surjective. D'après le lemme de Yoneda, cela résulte aussitôt du fait que le morphisme de faisceaux $L(V) \rightarrow L(U)$ soit un monomorphisme, ce qui se vérifie facilement.

On peut généraliser ce résultat aux complexes (bornés supérieurement) arbitraires de faisceaux avec transferts en utilisant le théorème 1.42 de finitude de la dimension cohomologique Nisnevich des schémas dans Sm/k qui implique la convergence des suites spectrales permettant de se ramener au cas précédent.

Définition 8.20. *Si K est un complexe dans $\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$ borné supérieurement, on note $C_\star(K)$ le complexe total du bicomplexe de terme général $C_p(K_q)$.*

Théorème 8.21. *Le foncteur $K \mapsto C_\star(K)$ préserve les quasi-isomorphismes de complexes bornés supérieurement dans $\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$. De plus, pour tout complexe K dans $\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$ (borné supérieurement), les faisceaux de cohomologie de $C_\star(K)$ sont invariants par homotopie. On en déduit que C_\star induit un foncteur $\mathbf{RC}_\star : \mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))) \rightarrow DM_-^{eff}(k)$ qui est triangulé. De plus, \mathbf{RC}_\star est le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $DM_-^{eff}(k) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$. Enfin, \mathbf{RC}_\star identifie $DM_-^{eff}(k)$ à la catégorie triangulée quotient $\mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))/\mathcal{A}$, où \mathcal{A} est la plus petite sous-catégorie triangulée strictement pleine de $\mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$ stable par la formation des sommes directes représentables dans $\mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$, stable par facteurs directs et contenant les complexes de la forme $L(\mathbb{A}_X^1) \rightarrow L(X)$ pour tout $X \in Sm/k$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Dans une catégorie abélienne, un morphisme de complexes est un quasi-isomorphisme si et seulement son cône est un complexe acyclique. Comme la formation du cône commute à l'application de tout foncteur additif, pour montrer que C_\star préserve les quasi-isomorphismes de complexes bornés supérieurement de faisceaux Nisnevich avec transferts, il suffit de montrer que si K est un complexe acyclique de faisceaux avec transferts borné supérieurement, alors le complexe de faisceaux Nisnevich (avec transferts) $C_\star K$ est acyclique. Les préfaisceaux de cohomologie de $C_\star K$ s'obtiennent en appliquant C_\star aux préfaisceaux de cohomologie de K , ces derniers ayant un faisceau associé nul pour la topologie Nisnevich, on a gagné grâce au théorème 8.17.

Il en résulte un foncteur triangulé $\mathbf{RC}_\star : \mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$. Grâce au lemme 8.16 et à la suite spectrale d'un bicomplexe, le théorème 8.14 implique que $C_\star(K) \in DM_-^{eff}(k)$ pour tout complexe $K \in \mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$. Ainsi, on a bien défini un foncteur $\mathbf{RC}_\star : \mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))) \rightarrow DM_-^{eff}(k)$.

Les autres énoncés figurant dans ce théorème sont établis dans [VSF, proposition 3.2.3, chapitre 5, page 209]. \triangleleft

⁽⁶¹⁾ $\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$ possède assez d'injectifs d'après les résultats de [Grot].

Définition 8.22. On définit le foncteur “motif” $SmCor(k) \xrightarrow{\mathbf{M}} DM_{-}^{eff}(k)$ par la formule $\mathbf{M}(X) = C_{\star}(L(X))$. On note $DM_{gm}^{eff}(k)$ la sous-catégorie triangulée karoubienne de $DM_{-}^{eff}(k)$ engendrée par les motifs de variétés lisses sur k . La catégorie $DM_{gm}^{eff}(k)$ est appelée la catégorie triangulée des motifs effectifs géométriques.

Grâce notamment au théorème précédent, on peut montrer qu’il existe une structure monoïdale symétrique naturelle \otimes sur $DM_{-}^{eff}(k)$ telle que le foncteur $\mathbf{M} : SmCor(k) \rightarrow DM_{-}^{eff}(k)$ soit monoïdal symétrique. \triangleleft

Un lien entre $DM_{-}^{eff}(k)$ et $\mathbf{H}_{\bullet}(k)$

Nous allons maintenant étudier certaines relations entre les catégories $DM_{-}^{eff}(k)$ et $\mathbf{H}_{\bullet}(k)$.

Théorème 8.23.

- Soit K un objet de $\mathbf{comp}_{+}(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$. On note encore par abus K le faisceau simplicial (de groupes abéliens) sur Sm/S obtenu en appliquant la correspondance de Dold-Kan. Alors, le faisceau simplicial $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}(K)$ est un objet \mathbb{A}^1 -local de $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/k_{Nis})$.
- Pour tout entier $q \in \mathbb{N}$ et tout $X \in Sm/k$, il existe des isomorphismes canoniques :

$$\mathbf{H}_{Nis}^{-q}(X; C_{\star}K) = \mathbf{Hom}_{DM_{-}^{eff}(k)}(\mathbf{M}(X), C_{\star}K[-q]) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\bullet}(k)}(S_s^q \wedge X_+, K)$$

- Pour tout morphisme $K \xrightarrow{f} K'$ dans $\mathbf{comp}_{+}(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$, f est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible dans $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis})_{\bullet}$ si et seulement si le morphisme $C_{\star}K \rightarrow C_{\star}K'$ est un isomorphisme dans $DM_{-}^{eff}(k)$ (i.e. si c’est un quasi-isomorphisme de faisceaux Nisnevich).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Le fait que $\mathbf{H}_{Nis}^{-q}(X; C_{\star}K) = \mathbf{Hom}_{DM_{-}^{eff}(k)}(\mathbf{M}(X), C_{\star}K[-q])$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, $X \in Sm/k$ et $K \in \mathbf{comp}_{+}(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$ résulte aussitôt du lemme 8.19 et du théorème 8.21. D’après le théorème d’Eilenberg-Zilber généralisé (cf. [GJ, théorème 2.4, page 205]), on a un quasi-isomorphisme canonique de complexes de (pré)faisceaux $C_{\star}K \simeq \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}K$ (avec les abus de notations signalés précédemment). Ainsi, d’après le théorème 3.66, on a un isomorphisme canonique $\mathbf{H}_{Nis}^{-q}(X; C_{\star}K) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/k_{Nis})}(S_s^q \wedge X_+, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}K)$. Or, d’après la généralisation évidente (via la suite spectrale d’hypercohomologie) aux complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts du théorème 8.14, les préfaisceaux avec transferts $\mathbf{H}_{Nis}^{-q}(X; C_{\star}K)$ sont invariants par homotopie. Il en va donc de même pour les groupes $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(Sm/S_{Nis})}(S_s^q \wedge X_+, \mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}K)$, ce qui montre que $\mathbf{Sing}^{\mathbb{A}^1}K$ est \mathbb{A}^1 -local, et que par conséquent on a un isomorphisme canonique $\mathbf{H}_{Nis}^{-q}(X, C_{\star}K) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\bullet}(S)}(S_s^q \wedge X_+, K)$. Le dernier énoncé résulte aisément des autres. \triangleleft

Spectres d’Eilenberg-MacLane et cohomologie motivique

Dans cette partie, on fixe un corps parfait k .

Prolongement du foncteur L

Pour pouvoir définir le spectre $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ représentant la cohomologie motivique, nous allons avoir besoin de prolonger un petit peu le foncteur $L : Sm/k \rightarrow \mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$. En fait, nous allons le prolonger à toute la catégorie $\mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis})$:

Proposition 8.24. *Il existe un foncteur $L : \mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis}) \rightarrow \mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$ (unique à isomorphisme canonique près) commutant aux limites inductives et prolongeant le foncteur L précédemment défini sur Sm/k . De plus, comme foncteur à valeurs dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Sm/k_{Nis} , L commute aussi aux limites inductives. Enfin, L est le foncteur adjoint à gauche du foncteur d’oubli des transferts et de la structure de groupe $\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)) \rightarrow \mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis})$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — On a déjà vu avec le corollaire 8.13 que le foncteur d’oubli des transferts de la catégorie $\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$ vers la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Sm/k_{Nis} commutait aux limites inductives. Ainsi, il ne reste qu’à montrer que le foncteur d’oubli $U : \mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)) \rightarrow \mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis})$ admet un adjoint à gauche et que celui-ci prolonge le foncteur L précédemment défini sur Sm/k . Il s’agit de montrer que pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis})$, le foncteur qui à $\mathcal{Y} \in \mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$ associe $\mathbf{Hom}_{\mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis})}(\mathcal{F}, U(\mathcal{Y}))$ est représentable par un objet de

$\mathcal{Fais}_{Nis}(\mathcal{S}mCor(k))$. Dans le cas où $\mathcal{F} = X \in \mathcal{S}m/k$, ce foncteur est visiblement représenté par $L(X)$. Comme tout faisceau sur $\mathcal{S}m/k_{Nis}$ est limite inductive de tels faisceaux et que $\mathcal{Fais}_{Nis}(\mathcal{S}mCor(k))$ admet des limites inductives, on obtient que l'adjoint à gauche L de U est défini sur toute la catégorie $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})$, d'où le résultat. \triangleleft

Définition 8.25. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$, on pose $\tilde{L}(\mathcal{F}) = L(\mathcal{F})/L(\bullet) \in \mathcal{Fais}_{Nis}(\mathcal{S}mCor(k))$.

Il résulte de la proposition précédente que le foncteur $\tilde{L} : \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet} \rightarrow \mathcal{Fais}_{Nis}(\mathcal{S}mCor(k))$ commute aux limites inductives et que c'est le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli des transferts $\mathcal{Fais}_{Nis}(\mathcal{S}mCor(k)) \rightarrow \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$.

Un exemple important de faisceau pointé sur lequel il est utile que le foncteur \tilde{L} soit défini est donné par le lemme suivant, qui est trivial :

Lemme 8.26. Soit $X \in \mathcal{S}m/k$ et $(U_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-schémas de X . Si pour tout $\phi \neq J \subset I$, $\bigcap_{j \in J} U_j \in \mathcal{S}m/k$, alors le faisceau pointé $X/(\bigcup_{i \in I} U_i)$ est dans $\mathcal{S}pc_{\bullet|k}^{tf}$. De plus, $\tilde{L}(X/(\bigcup_{i \in I} U_i))$ s'identifie canoniquement au quotient $L(X)/(\sum_{i \in I} L(U_i))$.

Proposition 8.27.

- (1) Pour tous faisceaux \mathcal{F} et \mathcal{G} dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})$, il existe un morphisme \mathbb{Z} -bilinéaire canonique $L(\mathcal{F}) \times L(\mathcal{G}) \rightarrow L(\mathcal{F} \times \mathcal{G})$;
- (2) pour tous faisceaux pointés \mathcal{F} et \mathcal{G} dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$, il existe un morphisme canonique $\tilde{L}(\mathcal{F}) \wedge \tilde{L}(\mathcal{G}) \rightarrow \tilde{L}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G})$ dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$;
- (3) pour tout faisceau \mathcal{F} dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})$, il existe un morphisme canonique $\mathcal{F} \rightarrow L(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})$;
- (4) pour tout faisceau pointé \mathcal{F} dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$, il existe un morphisme canonique $\mathcal{F} \rightarrow \tilde{L}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Il suffit de faire passer à la colimite les morphismes déjà définis dans le cas où \mathcal{F} et \mathcal{G} sont dans $\mathcal{S}m/k$. \triangleleft

Comportement homotopique du foncteur $\tilde{L} : \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet} \rightarrow \mathcal{Fais}_{Nis}(\mathcal{S}mCor(k))$

Définition 8.28. Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$, on dit que \mathcal{F} est schématique si \mathcal{F} est isomorphe à un faisceau pointé de la forme $X/(\bigcup_{i \in I} U_i) \in \mathcal{S}pc_{\bullet|k}^{tf}$ où $(U_i)_{i \in I}$ est une famille finie de sous-schémas de $X \in \mathcal{S}m/k$ telle que pour toute partie non-vide $J \subset I$, $\bigcap_{j \in J} U_j$ soit dans $\mathcal{S}m/k$.

Remarquons que la catégorie des espaces pointés schématiques est stable par les opérations \vee et \wedge .

Théorème 8.29. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$ entre espaces schématiques. Si f est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible, alors $\tilde{L}(f) : \tilde{L}(X) \rightarrow \tilde{L}(Y)$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

PRINCIPE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Compte tenu de la proposition 8.27, si f est une \mathbb{A}^1 -équivalence d'homotopie pointée (par exemple le morphisme évident $(\mathbb{A}_+^1) \wedge X \rightarrow X$ pour tout $X \in \mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$), alors $\tilde{L}(f)$ est aussi une \mathbb{A}^1 -équivalence d'homotopie, donc en particulier une \mathbb{A}^1 -équivalence faible.

Ensuite, en introduisant un ensemble adapté d'"extensions anodines" (plus grand que celui de la définition 3.53), on peut construire une variante Ex' du foncteur Ex^∞ de la définition 3.51 telle que toute \mathbb{A}^1 -équivalence faible f entre espaces pointés schématiques induise une \mathbb{A}^1 -équivalence d'homotopie pointée $Ex'(f)$, ce qui se fait de façon similaire au lemme d'acyclicité 5.23.

On se ramène ainsi à montrer que pour tout espace pointé schématique X , le morphisme canonique $X \rightarrow Ex'(X)$ induit une \mathbb{A}^1 -équivalence faible $\tilde{L}(X) \rightarrow \tilde{L}(Ex'(X))$. Enfin, on utilise essentiellement le fait (cf. théorème 8.23) que si f est un morphisme dans $\mathcal{Fais}(\mathcal{S}m/k_{Nis})_{\bullet}$, alors $\tilde{L}(f)$ est une \mathbb{A}^1 -équivalence faible si et seulement si $C_* \tilde{L}(f)$ est un isomorphisme dans $DM_{-}^{eff}(k)$ (i.e. un quasi-isomorphisme de faisceaux Nisnevich) et le fait que $C_* : \mathbf{comp}_+(\mathcal{Fais}_{Nis}(\mathcal{S}mCor(k))) \rightarrow \mathbf{comp}_+(\mathcal{Fais}_{Nis}(\mathcal{S}mCor(k)))$ préserve les quasi-isomorphismes (cf. théorème 8.21), pour montrer qu'il suffit d'établir que pour tout morphisme f parmi nos extensions anodines, le morphisme $\tilde{L}(f)$ est un monomorphisme et le morphisme $C_* \tilde{L}(f)$ est un quasi-isomorphisme, ce qui n'est pas excessivement compliqué. \triangleleft

Le théorème de Dold-Thom et les spectres d'Eilenberg-MacLane

Avant de définir le spectre $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ représentant la cohomologie motivique, commençons par étudier le cas classique.

Définition 8.30. Soit X un ensemble pointé. On note $\mathrm{Symm}^{\infty} X$ le produit symétrique infini de X , c'est-à-dire $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X^n / \Sigma_n)$, l'action de Σ_n étant l'action évidente par permutation, les morphismes de transition étant induits par l'application qui à un n -uplet associe le $(n+1)$ -uplet obtenu en rajoutant le point-base de X . $\mathrm{Symm}^{\infty} X$ est naturellement muni d'une structure de monoïde commutatif dont on note $(\mathrm{Symm}^{\infty} X)^+$ le groupe abélien symétrisé. Cette définition se prolonge évidemment à la catégorie $\Delta^{\mathrm{op}} \mathrm{Ens}_{\bullet}$.

Théorème 8.31. (Dold-Thom) Soit $X \in \Delta^{\mathrm{op}} \mathrm{Ens}_{\bullet}$. Alors, il existe un isomorphisme (non canonique) dans $\mathbf{H}_{\bullet}^{\mathrm{top}}$:

$$(\mathrm{Symm}^{\infty} X)^+ \simeq \prod_{n \in \mathbb{N}} K(\tilde{\mathbf{H}}_n(X; \mathbb{Z}), n)$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Commençons par l'observation suivante, qui est triviale :

Lemme 8.32. Pour tout ensemble pointé (X, x) , il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens :

$$(\mathrm{Symm}^{\infty}(X, x))^+ = \mathbb{Z}X / \mathbb{Z}x$$

D'après la correspondance de Dold-Kan, $(\mathrm{Symm}^{\infty}(X, x))^+ \simeq \Gamma(\tilde{C}_{\star}(X))$ dans $\mathbf{H}_{\bullet}^{\mathrm{top}}$. Comme la catégorie abélienne des groupes abéliens est de dimension cohomologique 1, on peut montrer qu'il existe un isomorphisme (non canonique) dans $\mathbf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}b)$ entre $\tilde{C}_{\star}(X)$ et $\prod_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbf{H}}_n(X; \mathbb{Z})[n]$, d'où le résultat d'après le théorème 2.66. \triangleleft

Corollaire 8.33. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{H}_{\bullet}^{\mathrm{top}}$:

$$(\mathrm{Symm}^{\infty}(S_s^n))^+ \simeq K(\mathbb{Z}, n)$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — Il ne reste qu'à montrer que l'isomorphisme construit dans le théorème précédent est bien canonique. En effet, dans le théorème précédent, on a utilisé le fait que pour tout complexe $K \in \mathbf{D}(\mathcal{A}b)$ où $\mathbf{D}(\mathcal{A}b)$ désigne la catégorie dérivée de la catégorie des groupes abéliens, il existe un isomorphisme non canonique $K \simeq \prod_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}^q(K)[-q]$ dans $\mathbf{D}(\mathcal{A}b)$. Il est clair que la non-canonlicité de cet isomorphisme est mesurée par l'ensemble des automorphismes de K dans $\mathbf{D}(\mathcal{A}b)$ agissant trivialement sur les objets de cohomologie. La non-canonlicité de l'isomorphisme est donc mesurée par le groupe $\prod_{q \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}b}^1(\mathbf{H}^{q+1}(K), \mathbf{H}^q(K))$ qui est évidemment trivial dans le cas particulier considéré. \triangleleft

Définition 8.34. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$K(\mathbb{Z}(n), 2n) = \tilde{L}((\mathbb{P}^1, \infty)^{\wedge n})$$

On définit le spectre d'Eilenberg-MacLane $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ comme étant le (\mathbb{P}^1, ∞) -spectre tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{H}_{\mathbb{Z}})_n = K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ et tel que les morphismes d'assemblages soient donnés par le diagramme commutatif suivant où i désigne le morphisme canonique $(\mathbb{P}^1, \infty) \rightarrow \tilde{L}(\mathbb{P}^1, \infty)$ et où μ est le morphisme "produit externe de cycles" de la proposition 8.27, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^1, \infty) \wedge (\mathbf{H}_{\mathbb{Z}})_n & \longrightarrow & (\mathbf{H}_{\mathbb{Z}})_{n+1} \\ \downarrow i \wedge \mathrm{Id} & \nearrow \mu & \\ \tilde{L}(\mathbb{P}^1, \infty) \wedge K(\mathbb{Z}(n), 2n) & & \end{array}$$

Remarque 8.35. La définition de $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ est analogue à la construction "produit symétrique infini" (complété en groupes) intervenant dans le théorème de Dold-Thom. En effet, si X est un schéma lisse sur k , $\tilde{L}(X_+)(\mathrm{Spec} k)$ s'identifie canoniquement au groupe abélien libre sur l'ensemble des points fermés de X , c'est-à-dire ce que l'on peut attendre d'un honnête produit symétrique infini complété en groupes.

Pourtant, d'autres constructions très similaires ne fonctionnent pas, et c'est ce qui distingue la définition précédente de celles-ci. Ainsi, par exemple, si on considère les faisceaux Nisnevich constants $K(\mathbb{Z}, d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}$ où $K(\mathbb{Z}, d)$ est un ensemble simplicial pointé dont l'unique groupe d'homotopie non trivial est le d -ième qui s'identifie à \mathbb{Z} , alors, on ne peut pas espérer former de \mathbb{P}^1 -spectre intéressant en les mettant ensemble, puisque tout morphisme de la forme $\mathbb{P}^1 \wedge K(\mathbb{Z}, d) \rightarrow K(\mathbb{Z}, d')$ est trivial dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ pour tous $d, d' \in \mathbb{N}$. En effet, $\mathbf{R}\Omega_{\mathbb{P}^1} K(\mathbb{Z}, d')$ est l'objet nul de $\mathbf{H}_\bullet(S)$, la raison principale pour cela étant que la cohomologie des faisceaux constants est inintéressante en topologie de Nisnevich (de même qu'en topologie de Zariski). Néanmoins, nous verrons que l'utilisation de cette même idée en topologie étale permettra de montrer que la cohomologie étale est représentée par un objet de $\mathcal{SH}(k)$.

Comparaison avec la topologie

On a vu qu'en topologie algébrique (cf. théorème 2.66), il existait une adjonction $\mathbf{D}^{\leq 0}(Ab) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbb{H}} \\ \xleftarrow{\mathbf{M}} \end{matrix} \mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$, \mathbb{H} étant l'adjoint à droite de $\tilde{\mathbf{M}}^{(62)}$, $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$ étant une catégorie d'"espaces" (à homotopie près) et $\mathbf{D}^{\leq 0}(Ab)$ une catégorie de "coefficients" (à quasi-isomorphismes près). Dans ce contexte, pour construire un objet de $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$ représentant le foncteur "cohomologie singulière à coefficients dans \mathbb{Z} , en degré $n \in \mathbb{N}$ ", l'adjonction que nous venons de rappeler implique (cf. corollaire 8.33) qu'il suffit de choisir une sphère \mathbb{S} de dimension n et de lui appliquer le foncteur $\mathbb{H} \circ \tilde{\mathbf{M}}$, c'est-à-dire de prendre la complétion en groupes de son produit symétrique infini. On a ainsi $\tilde{\mathbf{H}}^n(X; \mathbb{Z}) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}}(X, [\mathbb{H} \circ \tilde{\mathbf{M}}](\mathbb{S}))$.

Comme Suslin l'a remarqué en premier pour définir une homologie des schémas, l'analogie est parfaite avec le cas des schémas lisses sur k . En effet, la catégorie d'espaces $\mathbf{H}_\bullet^{\text{top}}$ est remplacée par la catégorie homotopique $\mathbf{H}_\bullet(k)$ (ou $\mathcal{SH}(k)$), et $DM_{gm}^{eff}(k)$ (ou une de ses variantes) va remplacer $\mathbf{D}^{\leq 0}(Ab)$ comme catégorie de "coefficients". Nous avons défini un foncteur $\tilde{L} : \mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis})_\bullet \rightarrow \mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$ dont nous avons établi quelques bonnes propriétés homotopiques (au moins si on se restreint à certains espaces que nous avons appelés schématiques). Ce foncteur nous permettra de définir un foncteur "motif" (réduit) $\tilde{\mathbf{M}}$ qui à un espace schématique pointé associera un motif effectif dans $DM_{gm}^{eff}(k)$. De plus, on a construit une propriété d'"adjonction" dans le théorème 8.23. De même qu'en topologie, nous pouvons appliquer le foncteur $\mathbb{H} \circ \tilde{\mathbf{M}}$ à une sphère de dimension n dans $\mathbf{H}_\bullet(k)$ pour former un " $K(\mathbb{Z}, n)$ " et par suite définir un spectre $\mathbf{H}_\mathbb{Z}$ représentant ce que l'on appelle la cohomologie motivique, analogue au spectre représentant la cohomologie singulière dans \mathbf{SH}^{top} .

Cependant, contrairement au cas classique, il existe plusieurs objets *a priori* non isomorphes⁽⁶³⁾ de $\mathcal{SH}(k)$ méritant de s'appeler "sphère de dimension $2n$ " : $S_s^{2n}, \dots, (\mathbb{P}^1)^{\wedge n}, \dots, S_s^1 \wedge (\mathbb{A}^n - 0), S_t^{2n}$.

Nous allons maintenant étudier plus en détails ce spectre $\mathbf{H}_\mathbb{Z}$.

Cohomologie motivique

Nous allons commencer par montrer qu'il existe plusieurs descriptions équivalentes du \mathbb{P}^1 -spectre $\mathbf{H}_\mathbb{Z}$, ce qui nous permettra de comprendre pourquoi la quasi-inversibilité d'un certain objet $\mathbb{Z}(1)$ pour la structure monoïdale symétrique de $DM_{gm}^{eff}(k)$ implique formellement que $\mathbf{H}_\mathbb{Z}$ soit un Ω -spectre, quand k est un corps parfait⁽⁶⁴⁾.

Définition 8.36. Soit $X \in \mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis})_\bullet$ un espace schématique pointé, on note $\tilde{\mathbf{M}}(X)$ l'objet de $DM_{gm}^{eff}(k)$ donné par la formule $\tilde{\mathbf{M}}(X) = C_* \tilde{L}(X)$. L'objet $\tilde{\mathbf{M}}(X)$ est le motif réduit de X . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathbb{Z}(n) = \tilde{\mathbf{M}}\left((\mathbb{P}^1)^{\wedge n}\right)[-2n]$$

On a vu avec le théorème 8.29 que le foncteur motif réduit $\tilde{\mathbf{M}}(-)$ transformait \mathbb{A}^1 -équivalences faibles (entre espaces schématiques pointés) en isomorphismes dans $DM_{gm}^{eff}(k)$ et transforme le produit \wedge (entre espaces schématiques pointés) en le produit \otimes dans $DM_{gm}^{eff}(k)$. Ce résultat est l'ingrédient majeur de la démonstration du lemme suivant et de son corollaire :

⁽⁶²⁾Ce foncteur est induit par le foncteur qui à un ensemble simplicial associe son complexe singulier (normalisé) réduit.

⁽⁶³⁾Par exemple, si k est un sous-corps de \mathbb{R} , grâce à la remarque 8.58 à venir, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les objets $S^{n \cdot q} = S_s^{n \cdot q} \wedge S_t^q$ sont deux-à-deux non isomorphes dans $\mathcal{SH}(k)$.

⁽⁶⁴⁾En effet, la quasi-inversibilité de $\mathbb{Z}(1)$ était connue jusqu'à très récemment seulement sous l'hypothèse de la résolution des singularités, mais cette hypothèse a été supprimée dans [Voe3].

Lemme 8.37. *Pour tout espace pointé schématique X et $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme canonique dans $DM_{gm}^{eff}(k)$:*

$$\tilde{\mathbf{M}}(X)[n] = \tilde{\mathbf{M}}(|S_s^n| \wedge X)$$

Corollaire 8.38. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des isomorphismes canoniques dans $DM_{gm}^{eff}(k)$:*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}(n) &= \tilde{\mathbf{M}}(S_t^n)[-n] \\ &= \tilde{\mathbf{M}}(\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1})[-2n] \\ &= \tilde{\mathbf{M}}\left((\mathbb{P}^1)^{\wedge n}\right)[-2n] \\ &= \tilde{\mathbf{M}}(\mathbb{A}^n/(\mathbb{A}^n - 0))[-2n] \end{aligned}$$

De plus, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme canonique $\mathbb{Z}(n+m) = \mathbb{Z}(n) \otimes \mathbb{Z}(m)$.

Le théorème 8.23 admet la généralisation naturelle suivante :

Proposition 8.39. (*“Adjonction”*) *Pour tout espace schématique pointé X , tout entier $q \in \mathbb{N}$ et tout objet $K \in \mathbf{comp}_+(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$, il existe des isomorphismes canoniques :*

$$\mathbf{Hom}_{DM_{-}^{eff}(k)}\left(\tilde{\mathbf{M}}(X), C_*K[-q]\right) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{D}^-(Sm/k_{Nis})}\left((\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}\bullet)[q], C_*K\right) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(k)}(S_s^q \wedge X, K)$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — À partir du théorème 3.66, on peut montrer facilement l'existence d'un isomorphisme canonique $\mathbf{Hom}_{\mathbf{D}^-(Sm/k_{Nis})}\left((\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}\bullet)[q], C_*K\right) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(k)}(S_s^q \wedge X, K)$. En outre, d'après le théorème 8.21, il s'agit d'établir l'existence d'un isomorphisme canonique de la forme $\mathbf{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))}\left(\tilde{L}(X), K'\right) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{D}^-(Sm/k_{Nis})}\left((\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}\bullet), K'\right)$ pour tout objet K' de la catégorie $\mathbf{D}^-(\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k)))$ et pour tout espace schématique pointé X . Or, cela résulte essentiellement d'une adjonction formelle, du fait crucial que pour tout objet injectif I de $\mathcal{Fais}_{Nis}(SmCor(k))$ et tout espace schématique pointé X , le faisceau Nisnevich de groupes abéliens sous-jacent à I soit acyclique pour le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{Fais}(Sm/k_{Nis})}(X, -)$ et que ce même foncteur n'ait qu'un nombre fini de foncteurs dérivés à droite non nuls, ce qui s'obtient facilement en utilisant le cas où X est un schéma lisse sur k (cf. lemme 8.19) et en adaptant par exemple la méthode du lemme 5.23 au cas abélien. \triangleleft

Théorème 8.40. *Si k est un corps parfait, alors le foncteur $- \otimes \mathbb{Z}(1) : DM_{gm}^{eff}(k) \rightarrow DM_{gm}^{eff}(k)$ est pleinement fidèle. Autrement dit, $\mathbb{Z}(1)$ est quasi-inversible pour la structure monoïdale symétrique \otimes sur $DM_{gm}^{eff}(k)$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — La démonstration est faite dans [VSF, théorème 4.3.1, chapitre 5] seulement dans le cas où k admet la résolution des singularités. Cette hypothèse a été enlevée dans [Voe3]. \triangleleft

On appelle twist de Tate le foncteur $- \otimes \mathbb{Z}(1) : DM_{gm}^{eff}(k) \rightarrow DM_{gm}^{eff}(k)$.

Corollaire 8.41. *Si k est un corps parfait, alors le \mathbb{P}^1 -spectre $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ est un Ω -spectre (pour la structure \mathbb{A}^1 -localisée).*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — Il suffit de montrer que pour tous $X \in Sm/k$ et $k, n \in \mathbb{N}$, l'application évidente $\mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(k)}(S_s^k \wedge X_+, K(\mathbb{Z}(n), 2n)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_\bullet(k)}(\mathbb{P}^1 \wedge S_s^k \wedge X_+, K(\mathbb{Z}(n+1), 2n+2))$ est bijective. Grâce à l'“adjonction” (i.e. la proposition 8.39), ce morphisme s'identifie avec le morphisme évident $\mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}\left(\tilde{\mathbf{M}}(X), \mathbb{Z}(n)[2n-k]\right) \rightarrow \mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}\left(\tilde{\mathbf{M}}(\mathbb{P}^1 \wedge X_+), \mathbb{Z}(n+1)[2n+2-k]\right)$, et donc à $\mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}\left(\tilde{\mathbf{M}}(X), \mathbb{Z}(n)[2n-k]\right) \rightarrow \mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}\left(\tilde{\mathbf{M}}(\mathbb{P}^1 \wedge X_+)[-2], \mathbb{Z}(n+1)[2n-k]\right)$. Si on pose $Y = \mathbb{Z}(n)[2n-k]$, compte tenu du fait que $\mathbb{Z}(1) = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbb{P}^1)[-2]$, cette application s'identifie au morphisme $\mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}\left(\tilde{\mathbf{M}}(X), Y\right) \xrightarrow{- \otimes \mathbb{Z}(1)} \mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}\left(\tilde{\mathbf{M}}(X) \otimes \mathbb{Z}(1), Y \otimes \mathbb{Z}(1)\right)$ qui est bijectif d'après le théorème 8.40. \triangleleft

On est maintenant en mesure de décrire la cohomologie motivique d'une part en termes du \mathbb{P}^1 -spectre $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ et d'autre part en termes de la catégorie $DM_{gm}^{eff}(k)$ (dans laquelle on pourrait aussi inverser $\mathbb{Z}(1)$ pour former la catégorie triangulée des motifs géométriques $DM_{gm}(k)$).

Lemme 8.42. *Si k est un corps parfait, alors pour tout entier $q \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme canonique, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout espace schématique pointé X :*

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(X, \mathbf{H}_{\mathbb{Z}} \wedge S_s^{p-q} \wedge S_t^q) = \mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(\tilde{\mathbf{M}}(X), \mathbb{Z}(q)[p])$$

DÉMONSTRATION DU LEMME — Soit a un entier tel que $a \geq q$ et $a \geq p - q$. On a un isomorphisme canonique $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}((\mathbb{P}^1)^{\wedge -a} \wedge S_s^{q-p-a} \wedge S_t^{-q+a} \wedge X, \mathbf{H}_{\mathbb{Z}})$. Comme $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ est un Ω -spectre, le groupe précédent s'identifie à $\mathbf{Hom}_{\mathbf{H}_{\bullet}(k)}(S_s^{q-p-a} \wedge S_t^{-q+a} \wedge X, K(\mathbb{Z}(a), 2a))$. D'après la proposition 8.39, ce dernier groupe s'identifie à $\mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(\tilde{\mathbf{M}}(S_t^{-q+a}) \wedge X, \mathbb{Z}(a)[p - q + a])$. Comme $\tilde{\mathbf{M}}(X \wedge Y) = \tilde{\mathbf{M}}(X) \otimes \tilde{\mathbf{M}}(Y)$ pour tous espaces schématiques pointés X et Y , ce groupe est également isomorphe à $\mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(\tilde{\mathbf{M}}(X) \otimes \tilde{\mathbf{M}}(S_t^{-q+a})[-a + q][a - q], \mathbb{Z}(a)[p - q + a])$. Le fait $\mathbb{Z}(a - q) = \tilde{\mathbf{M}}(S_t^{a-q})[-a + q]$ implique que notre groupe est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(\tilde{\mathbf{M}}(X) \otimes \mathbb{Z}(a - q), \mathbb{Z}(a)[p])$. D'après le théorème 8.40, on peut "simplifier" par $\mathbb{Z}(a - q)$, ce qui donne l'isomorphisme suivant, qui permet de conclure :

$$\mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(\tilde{\mathbf{M}}(X) \otimes \mathbb{Z}(a - q), \mathbb{Z}(a)[p]) = \mathbf{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(\tilde{\mathbf{M}}(X), \mathbb{Z}(q)[p])$$

◁

Proposition 8.43. *Si k est un corps parfait et que l'on pose $\mathbb{Z}(q) = 0$ pour $q < 0$, alors on a la formule suivante, pour tout espace schématique X et tous entiers $p, q \in \mathbb{Z}$:*

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathcal{S}m/k_{Nis})}(\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}\bullet, \mathbb{Z}(q)[p])$$

De plus, on a les isomorphismes canoniques suivants dans $DM_{-}^{eff}(k)$:

$$\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}(1) = \mathbb{G}_m[-1]$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — D'après la proposition 8.39, pour établir la première moitié de la proposition, il suffit de montrer que $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) = 0$ pour tout $q < 0$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, puisque la formule que nous voulons établir est vraie pour $q \geq 0$. Pour tout espace schématique pointé X , le triangle suivant est distingué dans $\mathcal{SH}(k)$:

$$\{1\} \times X \longrightarrow S_t^1 \times X \longrightarrow S_t^1 \wedge X_+ \xrightarrow{0} \{1\} \times X \wedge S_s^1$$

On en déduit, pour tout espace schématique pointé X et tous entiers $p, q \in \mathbb{Z}$, l'existence d'une suite exacte courte (scindée) :

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p-1, q-1}(X_+) \longrightarrow \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(S_t^1 \times X) \longrightarrow \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) \longrightarrow 0$$

De plus, on a aussi une suite exacte courte (scindée) :

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) \longrightarrow \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X_+) \longrightarrow \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(S_s^0) \longrightarrow 0$$

Ainsi, pour montrer que $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) = 0$ pour tout $q < 0$ et tout espace schématique X , il suffit de le faire pour $q = -1$ avec X de la forme Y_+ avec $Y \in \mathcal{S}m/k$. Mais, alors d'après une des suites exactes ci-dessus, il suffit de montrer que l'application évidente $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}^{p,0}(S_t^1 \times Y) \longrightarrow \mathbf{H}_{\mathbb{Z}}^{p,0}(Y)$ est bijective, ce qui, compte tenu du fait trivial que $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$, est évident car pour $p \neq 0$ ces groupes sont nuls, $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}^{0,0}(Y) = \mathbb{Z}^{\pi_0(Y)}$ pour tout $Y \in \mathcal{S}m/k$ et pour tout anneau commutatif réductible A , les idempotents de $A[T, T^{-1}]$ sont dans A .

Enfin, l'existence d'un quasi-isomorphisme $\mathbb{G}_m[-1] \simeq \mathbb{Z}(1)$ de complexes de faisceaux (Zariski) est établi dans [VSF, corollaire 3.4.3, chapitre 5, page 217]. ◁

Proposition 8.44. *Si k est un corps parfait, alors pour tout espace schématique pointé X , le groupe $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X)$ est nul dans les cas suivants (cf. tableau page 103) :*

- (1) $q < 0$;
- (2) $p > 2q$ si $X \in \mathcal{S}m/k$ est quasi-projective ;
- (3) $p > q + \dim X$ si $X \in \mathcal{S}m/k$;

- (4) $p < 0$ pour $q = 0$;
- (5) $p \leq 0$ pour $q = 1$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Le cas $q < 0$ résulte de la proposition précédente et le cas $p > q + \dim X$ résulte aussitôt du fait que pour $q \geq 0$, $\mathbb{Z}(q) = C_*\left(\tilde{L}(S_t^q)\right)[-q]$ et du théorème 1.42. Les cas (4) et (5) résultent du calcul explicite de $\mathbb{Z}(q)$ pour $q \in \{0, 1\}$. Le cas (2) résulte trivialement du théorème de comparaison entre les groupes de cohomologie motivique et les groupes de Chow supérieurs de Bloch (cf. théorème 8.46). \triangleleft

La conjecture de Beilinson-Soulé affirme que $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{S}m/k$ si $p < 0$ (et $q \geq 2$).

Définition 8.45. [Blo] Soit k un corps. Pour toute variété quasi-projective (lisse) X sur k , on note $z^*(X, -)$ le complexe de groupes abéliens gradué obtenu en prenant le complexe de Moore du groupe abélien simplicial gradué tel que pour tout $q \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $z^q(X, n)$ soit le groupe abélien libre sur l'ensemble des sous-variétés intègres de codimension q de $X \times \Delta_{\mathbb{A}^1}^n$ dont l'intersection avec toutes les faces de $X \times \Delta_{\mathbb{A}^1}^n \subset X \times \Delta_{\mathbb{A}^1}^n$ soit propre, les faces étant induites par le produit d'intersection et les dégénérescences par la functorialité contravariante pour les morphismes plats des cycles algébriques. Pour tous $q, n \in \mathbb{Z}$, on note $CH^q(X, n)$ les groupes d'homologie du complexe $z^*(X, -)$ et on les appelle les groupes de Chow supérieurs de Bloch.

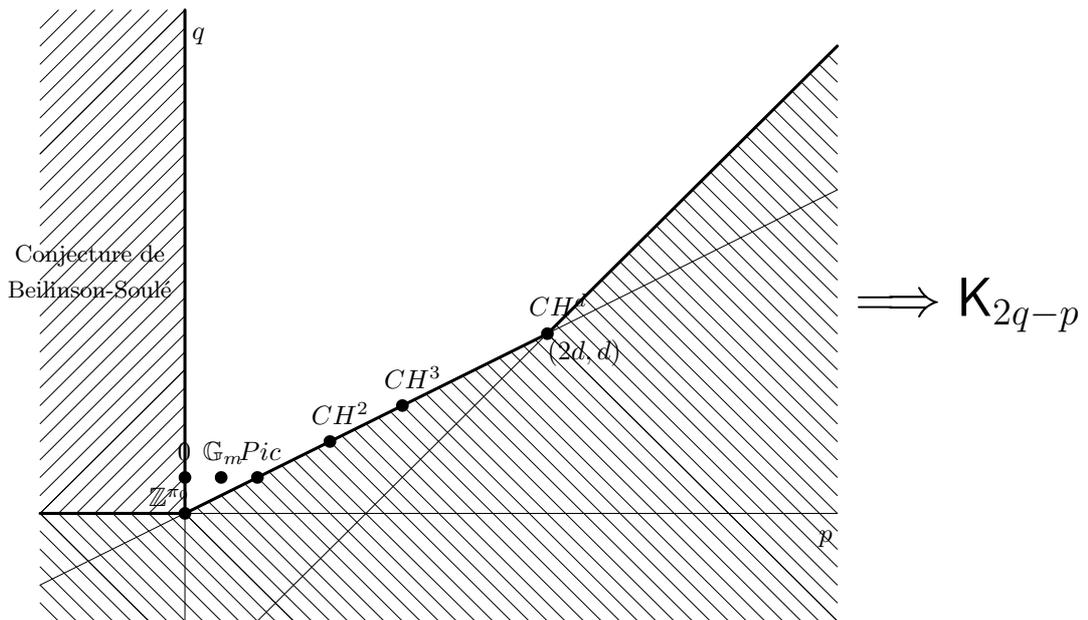
Il résulte directement de cette définition que $CH^q(X, n) = 0$ si $n < 0$ ou $q < 0$ ou $q > \dim X + n$.

Théorème 8.46. (Suslin-Voevodsky) Soit k un corps parfait. Pour toute variété quasi-projective lisse X sur k , il existe un isomorphisme canonique, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X) = CH^q(X, 2q - p)$$

Tableau récapitulatif

Si X est une variété quasi-projective lisse sur un corps k (de caractéristique 0), on peut former le tableau suivant, où sur la case (p, q) se trouve le groupe de cohomologie motivique $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}^{p,q}(X)$, les zones hachurées désignant les endroits où la cohomologie motivique s'annule (conjecturalement ou pas). En outre, ce tableau forme le terme E_2 d'une suite spectrale convergeant vers la K-théorie algébrique de X , toutes les différentielles étant de torsion. La construction de cette suite spectrale est due à Bloch-Lichtenbaum puis Friedlander-Suslin. Sur le terme E_r de cette suite spectrale, la différentielle est de bidegré $(r - 1, 2r - 1)$.



Cohomologie étale

Nous allons maintenant montrer comment interpréter la cohomologie étale dans la théorie homotopique des schémas. La construction est essentiellement tautologique. Cependant, nous devons utiliser les

théorèmes fondamentaux du formalisme étale. Comme on pourra le constater, les notations sont essentiellement les mêmes que pour la cohomologie motivique, mis-à-part que l'on travaille avec des coefficients finis, c'est normal, puisque la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum affirme l'existence d'un lien étroit entre la cohomologie motivique modulo ℓ et la cohomologie étale, pour tout nombre premier ℓ inversible dans k .

Cadre général

Pour l'instant, on fixe un schéma de base noethérien arbitraire S . Nous allons étudier la cohomologie étale de certains faisceaux \mathcal{F} de groupes abéliens sur le grand site⁽⁶⁵⁾ étale $\mathcal{S}m/S_{\acute{e}t}$. Commençons par le lemme suivant, qui est évident.

Lemme 8.47. *Pout tout $X \in \mathcal{S}m/S$, le foncteur d'oubli $X_{\acute{e}t} \rightarrow \mathcal{S}m/S$ définit un morphisme de sites $\rho_X : \mathcal{S}m/S_{\acute{e}t} \rightarrow X_{\acute{e}t}$. Si on note p_X le morphisme de sites $X_{\acute{e}t} \rightarrow S_{\acute{e}t}$ induit par le morphisme structural $X \rightarrow S$, on a l'isomorphisme suivant entre foncteurs $\mathcal{F}ais(S_{\acute{e}t}) \rightarrow \mathcal{F}ais(X_{\acute{e}t})$:*

$$p_X^* \simeq (\rho_X)_* \rho_S^*$$

Soit \mathcal{F} un faisceau⁽⁶⁶⁾ de groupes abéliens sur le petit site étale $S_{\acute{e}t}$ de S . Grâce au lemme précédent, il ne porte pas à confusion de noter simplement \mathcal{F} le faisceau de groupes abéliens sur $\mathcal{S}m/S_{\acute{e}t}$ obtenu en appliquant le foncteur image réciproque pour le morphisme de sites $\rho_S : \mathcal{S}m/S_{\acute{e}t} \rightarrow S_{\acute{e}t}$.

Définition 8.48. *Si \mathcal{F} est un faisceau de groupes abéliens sur $S_{\acute{e}t}$ et $d \in \mathbb{N}$, on note $K(\mathcal{F}, d) \in \Delta^{op} \mathcal{F}ais(\mathcal{S}m/S_{\acute{e}t})_{\bullet}$ le faisceau $X \mapsto K(\mathcal{F}(X), d)$. On pose $K_{\acute{e}t}(\mathcal{F}, d) = (\mathbf{R}\pi_*)(K(\mathcal{F}, d)) \in \mathbf{H}o_{s, \bullet}(\mathcal{S}m/S_{\acute{e}t})$ où $\mathbf{R}\pi_*$ est la version pointée du foncteur image directe de la proposition 3.15 appliquée au morphisme de sites $\pi : \mathcal{S}m/S_{\acute{e}t} \rightarrow \mathcal{S}m/S_{Nis}$.*

Proposition 8.49. *Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur $S_{\acute{e}t}$. Pour tous $d, n \geq 0$ et $X \in \mathcal{S}m/S$, il existe des isomorphismes canoniques :*

$$\mathbf{H}om_{\mathbf{H}o_{s, \bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis})}(S_s^n \wedge X_+, K_{\acute{e}t}(\mathcal{F}, d)) = \mathbf{H}om_{\mathbf{H}o_{s, \bullet}(\mathcal{S}m/S_{\acute{e}t})}(S_s^n \wedge X_+, K(\mathcal{F}, d)) = \mathbf{H}_{\acute{e}t}^{d-n}(X; \mathcal{F})$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Cela résulte aussitôt de la version pointée de l'adjonction fournie par la proposition 3.15 entre les catégories homotopiques pointées des sites $\mathcal{S}m/S_{Nis}$ et $\mathcal{S}m/S_{\acute{e}t}$ et de l'adjonction générale (cf. théorème 3.66) permettant d'interpréter la cohomologie des faisceaux étales dans la catégorie homotopique pointée de $\mathcal{S}m/S_{\acute{e}t}$. ◁

Théorème 8.50. *Si \mathcal{F} est un faisceau de groupes abéliens sur $S_{\acute{e}t}$ de torsion première aux caractéristiques résiduelles de S , alors, pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'objet $K_{\acute{e}t}(\mathcal{F}, d) \in \mathbf{H}o_{s, \bullet}(\mathcal{S}m/S_{Nis})$ est \mathbb{A}^1 -local.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Compte tenu de la proposition précédente, cela résulte de l'invariance par homotopie de la cohomologie étale pour les faisceaux de torsion première aux caractéristiques résiduelles (cf. [SGA 4 XV 2.2]). ◁

Le lemme suivant est à la base de la construction d'un \mathbb{P}^1 -spectre représentant la cohomologie étale.

Lemme 8.51. *Soit X un schéma noethérien et \mathcal{F} un complexe borné de faisceaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $X_{\acute{e}t}$ avec n inversible sur X . Si on note p la projection $(\mathbb{P}_X^1)_{\acute{e}t} \rightarrow X_{\acute{e}t}$, alors on a un quasi-isomorphisme canonique :*

$$(\mathbf{R}p_*)(p^*\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}[-2](-1)$$

(Le foncteur $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}(-1)$ désigne ici $\mathcal{H}om_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mu_n, -)$ qui est un quasi-inverse canonique de $- \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mu_n$.)

DÉMONSTRATION DU LEMME — Par l'argument habituel de suites spectrales, on peut supposer que \mathcal{F} est concentré en degré 0. On construit facilement un zig-zag canonique entre $(\mathbf{R}p_*)(p^*\mathcal{F})$ et $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}[-2](-1)$. Pour montrer qu'il s'agit de quasi-isomorphismes de faisceaux, d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre [SGA 4 XII 5.1], on peut supposer que $X = \text{Spec } K$ où K est un corps séparablement clos. Le faisceau \mathcal{F} est alors constant, tué par n et le résultat découle immédiatement du calcul de la cohomologie étale des courbes algébriques sur K [SGA 4 IX 4.7]. ◁

⁽⁶⁵⁾Ce site est obtenu en mettant la topologie étale sur la catégorie $\mathcal{S}m/S$.

⁽⁶⁶⁾On pourrait plus généralement supposer que \mathcal{F} est un complexe de faisceaux (borné).

De même que le théorème du fibré projectif permettait la formation d'un \mathbb{P}^1 -spectre représentant la K-théorie algébrique, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 8.52. *Pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur $S_{\text{ét}}$ de torsion première aux caractéristiques résiduelles de S , il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Ho}_{s,\bullet}(\mathcal{S}m/S_{\text{Nis}})$ (i.e. dans $\mathbf{H}_{\bullet}(S)$) compte tenu du théorème 8.50) pour tout $d \in \mathbb{N}$:*

$$K_{\text{ét}}(\mathcal{F}, d) \simeq \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\bullet}((\mathbb{P}^1, \infty), K_{\text{ét}}(\mathcal{F}(1), d+2))$$

Corollaire 8.53. *Pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur $S_{\text{ét}}$ de torsion première aux caractéristiques résiduelles de S , il existe un spectre $\mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathcal{F}) \in \mathcal{SH}(S)$ et des isomorphismes canoniques de groupes, pour tous $X \in \mathcal{S}m/S$, $p, q \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{H}_{\text{ét}}^{pq}(X; \mathcal{F}) = \mathbf{H}_{\text{ét}}^p(X; \mathcal{F}(q))$$

Quelques faisceaux de coefficients particuliers

Nous allons maintenant remarquer qu'avec des coefficients ℓ -adiques, le corollaire 8.53 reste vrai :

Proposition 8.54. *Si $S = \text{Spec } K$ avec K un corps séparablement clos et ℓ un nombre premier inversible dans K , il existe un spectre $\mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Z}_{\ell}) \in \mathcal{SH}(S)$ et des isomorphismes canoniques de groupes, pour tous $X \in \mathcal{S}m/S$, $p, q \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{H}_{\text{ét}}^{pq}(X; \mathbb{Z}_{\ell}) = \mathbf{H}_{\text{ét}}^p(X; \mathbb{Z}_{\ell}(q)) := \varinjlim_{\nu \in \mathbb{N}} \mathbf{H}_{\text{ét}}^p(X; \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}(q))$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — On a un système projectif $(\mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}))_{\nu \in \mathbb{N}}$ dans la catégorie des \mathbb{P}^1 -spectres, d'après le corollaire 8.53. On peut alors poser :

$$\mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Z}_{\ell}) := \text{holim}_{\nu \in \mathbb{N}} \mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})$$

La suite exacte de Milnor (cf. [GJ, proposition 2.15, page 319]) implique l'existence de la suite exacte courte suivante, pour tous $X \in \mathcal{S}m/S$, $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^1 \varinjlim_{\nu \in \mathbb{N}} \mathbb{H}_{\text{ét}}^{p-1, q}(X; \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{pq}(X; \mathbb{Z}_{\ell}) \longrightarrow \varinjlim_{\nu \in \mathbb{N}} \mathbb{H}_{\text{ét}}^{pq}(X; \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

D'après le théorème de finitude [SGA 4 $\frac{1}{2}$ [Th. Finitude] 1.1], les groupes abéliens $\mathbb{H}_{\text{ét}}^{p-1, q}(X; \mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})$ sont finis, ce qui assure l'annulation du $\mathbf{R}^1 \varinjlim_{\nu \in \mathbb{N}}$ considéré, ce qui implique évidemment le résultat. \triangleleft

Corollaire 8.55. *Si $S = \text{Spec } K$ avec K un corps séparablement clos et ℓ un nombre premier inversible dans K , il existe un spectre $\mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Q}_{\ell}) \in \mathcal{SH}(S)$ et des isomorphismes canoniques de groupes, pour tous $X \in \mathcal{S}m/S$, $p, q \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{H}_{\text{ét}}^{pq}(X; \mathbb{Q}_{\ell}) = \mathbf{H}_{\text{ét}}^p(X; \mathbb{Q}_{\ell}(q)) := \mathbf{H}_{\text{ét}}^p(X; \mathbb{Z}_{\ell}(q)) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE — Il suffit évidemment de prendre la colimite (homotopique) filtrante du diagramme suivant :

$$\mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Z}_{\ell}) \xrightarrow{\ell} \mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Z}_{\ell}) \xrightarrow{\ell} \mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Z}_{\ell}) \xrightarrow{\ell} \mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Z}_{\ell}) \xrightarrow{\ell} \mathbb{H}_{\text{ét}}(-; \mathbb{Z}_{\ell}) \xrightarrow{\ell} \cdots$$

\triangleleft

Remarque 8.56. *Cette construction se généralise au cas où on ne suppose plus que S est le spectre d'un corps séparablement clos. La différence notable est que dans l'énoncé et la démonstration de la proposition 8.54, il faut remplacer \lim par $\mathbf{R}\lim$ en un sens convenable puisqu'en l'absence de théorème de finitude, les groupes $\mathbf{R}^1 \lim$ considérés ne sont plus nécessairement nuls. On obtient ainsi un objet de $\mathcal{SH}(S)$ représentant la cohomologie continue ℓ -adique étale de Jannsen, Dwyer-Friedlander.*

Points géométriques

On fixe maintenant un schéma de base noethérien S et un point géométrique $\bar{x} : \text{Spec } K \rightarrow S$ i.e. K est un corps séparablement clos. On fixe aussi un nombre premier ℓ inversible dans K .

Théorème 8.57. *Pour $\Lambda \in \{\mathbb{Z}/\ell^\nu, \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Q}_\ell\}$, il existe un spectre⁽⁶⁷⁾ $\mathbb{H}_{\text{ét}}(-\bar{x}; \Lambda) \in \mathcal{SH}(S)$ et des isomorphismes canoniques de groupes, pour tous $X \in \mathcal{Sm}/S$, $p, q \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{H}_{\text{ét}}^{pq}(X_{\bar{x}}; \Lambda) = \mathbf{H}_{\text{ét}}^p(X \times_S \text{Spec } K; \Lambda(q))$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — Si $\text{Spec } K \xrightarrow{\bar{x}} S$ est un isomorphisme, cela fait partie des cas précédemment étudiés. Dans le cas général, on applique le foncteur image directe⁽⁶⁸⁾ $\mathbf{R}\bar{x}_*$ à l'objet de $\mathcal{SH}(K)$ représentant la cohomologie étale à coefficients dans Λ . \triangleleft

Remarque 8.58. *On peut utiliser exactement les mêmes méthodes pour établir que si $\text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow S$ est un \mathbb{C} -point de S et G un groupe abélien, alors il existe un spectre $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}(-; G) \in \mathcal{SH}(S)$ tel que pour tout $X \in \mathcal{Sm}/S$, $p, q \in \mathbb{Z}$, on ait $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{pq}(X; G) = \mathbf{H}^p(X(\mathbb{C})_S; G)$ où $\mathbf{H}^*(-; G)$ désigne la cohomologie singulière à coefficients dans G et $X(\mathbb{C})_S$ désigne l'espace topologique des S -points complexes de X . En effet, il suffit de remplacer le morphisme de sites $\mathcal{Sm}/\mathbb{C}_{\text{ét}} \rightarrow \mathcal{Sm}/\mathbb{C}_{\text{Nis}}$ utilisé précédemment par l'application "raisonnable" $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Sm}/\mathbb{C}_{\text{Nis}}$, où \mathcal{S} est le site obtenu en mettant la topologie ordinaire sur la catégorie des variétés analytiques complexes, et de remplacer \mathcal{F} par le faisceau constant G , puisqu'il est connu que la cohomologie de ces espaces topologiques à valeurs dans ce faisceau s'identifie à la cohomologie singulière à coefficients dans G . On peut procéder de même si on se donne un point réel $\text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow S$. On obtient ainsi un spectre $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(-; G) \in \mathcal{SH}(S)$ tel que pour tout $X \in \mathcal{Sm}/S$, $p, q \in \mathbb{Z}$, on ait $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{pq}(X; G) = \mathbf{H}^{p-q}(X(\mathbb{R})_S; G)$, le décalage dans les indices par rapport au cas complexe provenant du fait que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ a le type d'homotopie de S_s^1 tandis que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ a le type d'homotopie de S_s^2 .*

⁽⁶⁷⁾Ce spectre est naturellement muni d'une action du groupe de Galois $\text{Gal}(K/\kappa(x))$ si l'extension $K/\kappa(x)$ est algébrique et séparable.

⁽⁶⁸⁾Dans l'article [MV], il est établi qu'il existe une catégorie bi-fibrée $S \mapsto \mathbf{H}_\bullet(S)$ où S parcourt la catégorie des schémas noethériens. La difficulté inhérente à cette construction est que pour un morphisme général entre schémas noethériens $S' \xrightarrow{f} S$, le foncteur continu évident n'induit pas un morphisme de sites $\mathcal{Sm}/S'_{\text{Nis}} \rightarrow \mathcal{Sm}/S_{\text{Nis}}$. Il s'agit cependant d'un morphisme de sites si f est lisse (où plus généralement si f identifie S' à la limite d'un système projectif filtrant de S -schémas lisses à morphismes de transition affines). Dans ce cas, $\mathbf{R}\pi_*$ n'est autre que le foncteur de la proposition 3.15 (ou plutôt sa restriction aux objets \mathbb{A}^1 -locaux). On peut ainsi traiter simplement le cas où $S = \text{Spec } k$ avec k un corps parfait.

Quelques propriétés des morphismes étales

Définition A.1. Soit k un corps.

- Une k -algèbre A est dite étale si elle est finie et géométriquement réduite⁽⁶⁹⁾ ;
- Soit X un k -schéma, on dit que X est étale si X est recouvert par des ouverts affines dont les algèbres sont étales.

Définition A.2. Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme de schémas. On dit que f est étale si f est localement de présentation finie, plat et si pour tout point $s \in S$, le $\kappa(s)$ -schéma X_s est étale.

Théorème A.3. Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des morphismes de schémas.

- Si f et g sont étales, alors $g \circ f$ est étale ;
- Si g et $g \circ f$ sont étales, alors f est étale.

Si $X \rightarrow Y$ est un morphisme étale, alors pour tout Y -schéma Z , le morphisme $X \times_Y Z \rightarrow Z$ est étale.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [EGA IV 17.3.3, 17.3.4] ◁

Théorème A.4. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale. Si X est réduit, Y l'est aussi, et la réciproque est vraie si f est surjectif. En particulier, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme étale, et F un fermé de Y , l'image réciproque schématique $X \times_Y (F_{red})$ de F_{red} par f est un sous-schéma fermé réduit de X .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [SGA 1 I 9.2] ◁

Théorème A.5. Un morphisme étale et universellement injectif (i.e. radiciel) est une immersion ouverte, en particulier, une section d'un morphisme étale est une immersion ouverte.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [EGA IV 17.9.1] ◁

Définition A.6. Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme de schémas. On dit que f est net⁽⁷⁰⁾ si f est localement de présentation finie et si le morphisme évident $X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion ouverte.

Théorème A.7. Soient X et Y deux S -schémas, avec Y net et séparé sur S , et X connexe. Soient f et g deux S -morphisms $X \rightarrow Y$. S'il existe un point x dans X tel que $f(x) = g(x) = y \in Y$ et que les extensions $\kappa(y) \rightarrow \kappa(x)$ induites par f et g sur les corps résiduels soient les mêmes, alors $f = g$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [SGA 1 I 5.4] ◁

Théorème A.8. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme étale, avec Y noethérien. Soit x un point de X et $y = f(x)$. Alors, $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{Y,y}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — [EGA IV 17.6.4] ◁

Lemme A.9. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas, localement de type fini, avec X noethérien. On suppose que pour tout point $x \in X$, il existe un point $y \in Y$ tel que $f(y) = x$ et que le morphisme induit sur les corps résiduels soit un isomorphisme $\kappa(x) \rightarrow \kappa(y)$.

Alors, il existe un ouvert dense U de X tel que le morphisme $Y \times_X U \rightarrow U$ induit par f possède une section, à condition qu'une des deux conditions supplémentaires suivantes soit vérifiée :

- (1) X est réduit ;

⁽⁶⁹⁾On montre qu'une k -algèbre finie A est étale si et seulement s'il existe une extension finie E/k telle que $A \otimes_k E$ soit une E -algèbre diagonale (i.e. isomorphe à E^n pour un $n \in \mathbb{N}$), ce qui est aussi équivalent au fait que A/k soit isomorphe à un produit fini d'extensions finies séparables de k . Ces conditions sont encore équivalentes au fait que la trace définisse une forme quadratique non dégénérée sur le k -espace vectoriel A .

⁽⁷⁰⁾On dit aussi que f est non ramifié.

(2) f est étale.

DÉMONSTRATION DU LEMME — Pour démontrer ce lemme, on commence par le cas facile où X est réduit. On se ramène aisément au cas où X est affine et intègre. Ensuite, si on applique l'hypothèse au point générique de X , on obtient un point y dans Y dont le corps résiduel s'identifie au corps des fonctions de X , c'est-à-dire (moyennant notre hypothèse de finitude) que f induit un morphisme *birationnel* entre X et un sous-schéma fermé intègre de Y , ce qui permet de conclure.

Le cas où f est étale s'obtient en se ramenant au cas où X est réduit en utilisant un cas particulier de l'invariance topologique du topos étale qui affirme [EGA IV 18.1.2] que le foncteur qui à un X -schéma T associe le X_{red} -schéma $T \times_X X_{red}$ induit une équivalence de catégories de la catégorie des X -schémas étales vers la catégorie des X_{red} -schémas étales, l'existence d'une section sur un ouvert dense peut ainsi se tester après application du changement de base $X_{red} \longrightarrow X$, les sous-schémas ouverts de X et de X_{red} étant en bijection par cette équivalence. \triangleleft

Bibliographie

- [Ada] **John F. Adams**. Stable homotopy and generalised homology. *Chicago Lectures in Mathematics*, (1974). *The University of Chicago Press*.
- [And] **Donald W. Anderson**. Relationship among K-theories in *Higher K-theories*. Volume I. *Lecture Notes in Mathematics*, **341** (1973), pages 57-72. *Springer*.
- [Blo] **Spencer Bloch**. Algebraic cycles and Higher K-theory. *Advances in Mathematics*, **61** (1986), pages 267-304. *Academic Press*.
- [BK] **Aldridge K. Bousfield, Daniel M. Kan**. Homotopy limits, Completions and Localizations. *Lecture Notes in Mathematics*, **304** (1972). *Springer*.
- [BG] **Kenneth S. Brown, Stephen M. Gersten**. Algebraic K-theory as generalized sheaf cohomology in *Higher K-theories*. Volume I. *Lecture Notes in Mathematics*, **341** (1973), pages 266-292. *Springer*.
- [CE] **Henri Cartan, Samuel Eilenberg**. Homological algebra. *Princeton Mathematical Series*, **019** (1956). *Princeton University Press*.
- [EGA] **Alexander Grothendieck, Jean Dieudonné**. Éléments de géométrie algébrique. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **4** (1960), **8** (1961), **11** (1961), **17** (1963), **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).
- [Fri] **Eric Friedlander**. Motivic complexes of Suslin and Voevodsky. *Séminaire Bourbaki*, juin 1997, exposé 833. *Astérisque*, **245** (1997). *Société Mathématique de France*.
- [Ful] **William Fulton**. Intersection theory. *Deuxième édition* (1998). *Springer*.
- [GJ] **Paul G. Goerss, John F. Jardine**. Simplicial homotopy theory. *Progress in Mathematics*, **174** (1999). *Birkhäuser*.
- [Grot] **Alexander Grothendieck**. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Mathematical Journal*, **9** (1957), pages 119-221.
- [GZ] **Peter Gabriel, Michel Zisman**. Calculus of fractions and homotopy theory. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, **35** (1967). *Springer*.
- [Hov1] **Mark Hovey**. Spectra and symmetric spectra in general model categories. (2000).
- [Hov2] **Mark Hovey**. Model categories structures on chain complexes of sheaves. *Transactions of the American Mathematical Society*, **353** (2001), Numéro 6, pages 2441-2457.
- [HSS] **Mark Hovey, Brooke Shipley, Jeff Smith**. Symmetric spectra. *Journal of the American Mathematical Society*, **13** (2000), Numéro 1, pages 149-208.
- [Ill] **Luc Illusie**. Complexe cotangent et déformations I. *Lecture Notes in Mathematics*, **239** (1971). *Springer*.
- [Ja1] **John F. Jardine**. Simplicial presheaves. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **47** (1987), pages 35-87.
- [Ja2] **John F. Jardine**. Motivic symmetric spectra. *Documenta Mathematica*, **5** (2000), pages 445-552.
- [Jou] **Jean-Pierre Jouanolou**. Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique. in *Higher K-theories*. Volume I. *Lecture Notes in Mathematics*, **341** (1973), pages 293-316. *Springer*.
- [Kahn] **Bruno Kahn**. La conjecture de Milnor, d'après V. Voevodsky. *Séminaire Bourbaki*, juin 1997, exposé 834. *Astérisque*, **245** (1997). *Société Mathématique de France*.
- [KS] **Kazuya Kato, Shuji Saito**. Global class field theory of arithmetic schemes. *Applications of algebraic K-theory of algebraic geometry and number theory (Boulder, Colo., 1983)*. *Contemporary Mathematics*, Volume **55** (1986), pages 255-331. *American Mathematical Society*.
- [Mac] **Saunders Mac Lane**. Categories for the working mathematician. *Graduate Texts in Mathematics*, **5** (1971). *Springer*.
- [Mor1] **Fabien Morel**. Théorie homotopique des schémas. *Astérisque*, **256** (1999). *Société Mathématique de France*.
- [Mor2] **Fabien Morel**. The homotopy t -structure of the stable homotopy category of schemes. Preprint. (2000).
- [Mor3] **Fabien Morel**. Stable \mathbb{A}^1 -homotopy theory I. Preprint. (2002).
- [MV] **Fabien Morel, Vladimir Voevodsky**. \mathbb{A}^1 -homotopy theory of schemes. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **90** (1999), pages 45-143.
- [Nis] **Y. Nisnevich**. The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory in *Algebraic K-theory : connections with geometry and topology* (1989), pages 241-342. *Kluwer Academic Publishers*.
- [Qui1] **Daniel G. Quillen**. Homotopical algebra. *Lecture Notes in Mathematics*, **43** (1967). *Springer-Verlag*.
- [Qui2] **Daniel G. Quillen**. Higher Algebraic K-theory I in *Higher K-theories*. Volume I. *Lecture Notes in Mathematics*, **341** (1973), pages 85-147. *Springer*.

- [SGA 1] **Alexander Grothendieck**. Revêtements étales et groupe fondamental. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, (1960-1961). *Lecture Notes in Mathematics*, **224** (1971). Springer.
- [SGA 3] **Alexander Grothendieck, Michel Demazure**. Propriétés générales des schémas en groupes. Groupes de type multiplicatif et structure des schémas en groupes généraux. Structure des schémas en groupes réductifs. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, (1962-1964). *Lecture Notes in Mathematics*, **151** (1970), **153** (1970), **153** (1970). Springer.
- [SGA 4] **Alexander Grothendieck, Michael Artin, Jean-Louis Verdier**. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, (1963-1964). *Lecture Notes in Mathematics*, **269** (1972), **270** (1972), **305** (1973). Springer.
- [SGA 6] **Alexander Grothendieck, Pierre Berthelot, Luc Illusie**. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, (1966-1967). *Lecture Notes in Mathematics*, **225** (1971). Springer.
- [SGA 4 $\frac{1}{2}$] **Pierre Deligne**. Cohomologie étale. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie. Lecture Notes in Mathematics*, **569** (1977). Springer.
- [Tho] **Robert W. Thomason**. Algebraic K-theory and étale cohomology. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, Quatrième série, **18** (1985), Numéro 3, pages 437-552.
- [TT] **Robert W. Thomason, Thomas Trobaugh**. Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories in *The Grothendieck Festschrift : a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck*, Volume III, pages 247-436. *Progress in Mathematics*, **88** (1990). Birkhäuser.
- [Ver] **Jean-Louis Verdier**. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, **239** (1996). Société Mathématique de France.
- [Voe1] **Vladimir Voevodsky**. Voevodsky's Seattle lectures : K-theory and motivic cohomology. Notes by C. Weibel. *AMS Summer Research Conference on algebraic K-theory* (1997). <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0316/>
- [Voe2] **Vladimir Voevodsky**. \mathbb{A}^1 -homotopy theory in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin)*, Volume I, pages 579-604. *Documenta Mathematica* (1998). Extra Volume I.
- [Voe3] **Vladimir Voevodsky**. Cancellation theorem. (28 Janvier 2002). <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541/>
- [VSF] **Vladimir Voevodsky, Andrei Suslin, Eric M. Friedlander**. Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories. *Annals of Mathematics Studies*, **143** (2000). Princeton University Press.
- [Wei] **Charles A. Weibel**. Homotopy algebraic K-theory in *Algebraic K-theory and Algebraic Number Theory : Proceedings of a Seminar held January 12-16, 1987*. *Contemporary Mathematics*, Volume **83** (1989), pages 461-488. American Mathematical Society.