$\boxed{\text{Cours polycopié}}$

Yves Martinez-Maure

## 0. Introduction générale

De nombreux problèmes concrets peuvent être modélisés sous la forme :

$$\boxed{\text{Minimiser (ou maximiser) une fonction } f : V \to \mathbb{R} \text{ sur une partie } U \text{ de } V.}$$

**Rappels.** Lorsque $f$ est une fonction réelle dérivable sur un intervalle ouvert $U$ de $\mathbb{R}$, on peut utiliser le théorème suivant pour réduire l'ensemble des points où $f$ est susceptible de présenter un extremum (i.e. un minimum ou un maximum).

**Théorème.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. Pour que $f$ admette un extremum local en $a \in U$, il est nécessaire (mais pas suffisant) que $f'(a) = 0$.*

### Interprétation géométrique

Géométriquement, cela signifie qu'au point $(a, f(a))$, la tangente au graphe de $f$, i.e. à la courbe d'équation $y = f(x)$, doit être parallèle à l'axe $Ox$.

L'exemple de la fonction $f(x) = x^3$ en $a = 0$ prouve que cette condition n'est pas suffisante : $f'(0) = 0$, mais $f$ n'admet pas d'extremum local en 0.

Supposons $f$ de classe $C^2$ (i.e. admettant une dérivée seconde continue) sur $U$. Alors, $f$ admet en tout point $a \in U$, le développement limité (D.L. en abrégé)

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + o\left((x-a)^2\right) \text{ quand } x \to a,$$

que l'on peut également écrire

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o\left(h^2\right) \text{ quand } h = x - a \to 0.$$

Pour $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$, ce D.L. nous apprend que le signe de $f(a+h) - f(a)$ est égal au signe de $f''(a)$ pour tout $h \neq 0$ assez proche de 0. Par conséquent, pour que $f$ admette un minimum local en $a$, il est nécessaire (resp. suffisant) que

$$f'(a) = 0 \quad \text{et} \quad f''(a) \geq 0$$

$$(\text{resp. } f'(a) = 0 \quad \text{et} \quad f''(a) > 0).$$

**Point de terminologie**. La forme linéaire $L_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h \mapsto f'(a)\, h$ est appelée la différentielle de $f$ en $a$.

**Question.** Comment traiter le cas d'une fonction réelle de plusieurs variables réelles, par exemple celui d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ ?

Nous introduirons une notion de fonction réelle de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous verrons qu'une telle fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet en tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, un développement limité (D.L. en abrégé) de la forme

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + ph + qk + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + o\left(h^2 + k^2\right),$$

quand $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$, où les nombres réels $p$, $q$ (resp. $r$, $s$ et $t$) ne sont autres que "les dérivées partielles d'ordre 1 (resp. 2) de $f$ en $(a, b)$". La forme linéaire $L_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (h, k) \mapsto ph + qk$ est appelée la différentielle de $f$ en $(a, b)$.

Nous verrons que :

($i$) Pour que $f$ admette un extremum local en $(a, b)$, il est nécessaire (mais pas suffisant) que cette différentielle soit nulle, c'est-à-dire que $p = q = 0$. Géométriquement, cela signifie qu'au point $(a, b, f(a, b))$, le plan tangent au graphe de $f$, i.e. à la surface d'équation $z = f(x, y)$, doit être parallèle au plan $xOy$. Cette condition est insuffisante car le graphe de $f$ peut traverser son plan tangent en $(a, b, f(a, b))$.

($ii$) Lorsque $L_{(a,b)}(h, k) = ph + qk$ est identiquement nulle, le D.L.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + o\left(h^2 + k^2\right),$$

nous apprend que le signe de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ (i.e. la position du graphe de $f$ par rapport à son plan tangent en $(a, b, f(a, b))$) dépend du signe de la fonction

$$q(h, k) := rh^2 + 2shk + tk^2 = (h, k) \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

lorsque $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$. Cela nous permettra d'obtenir une condition nécessaire (resp. une condition suffisante) pour que $f$ admette un minimum local en $(a,b)$.

Une telle fonction $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une "forme quadratique", notion qui fera l'objet du chapitre 1. La "méthode de décomposition de Gauss" nous permettra, entre autre, d'étudier le signe d'une "forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$". Dans le cas de $q(h,k) = h^2 + hk + k^2$ elle consistera, par exemple, à écrire que :

$$q(h,k) = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2.$$

À l'origine, le mot "quadratique" (du latin "quadratus") signifie "carré", c'est-à-dire du deuxième degré : les "formes quadratiques" désignaient autrefois les "polynômes homogènes de degré 2".

## 1. Formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$

Historiquement, la notion de forme quadratique est née de l'étude des coniques et quadriques. Une conique de $\mathbb{R}^2$ est une courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ est tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Cette équation peut s'écrire

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0,$$

où $z = 1$. La fonction $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x,y,z) := ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = (x,y,z)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

est une "forme quadratique" sur $\mathbb{R}^3$. L'application $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$b\left((x,y,z),(x',y',z')\right)=(x,y,z)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

est une "forme bilinéaire symétrique" sur $\mathbb{R}^3$, appelée "forme polaire de $q$".

Dans tout ce chapitre, $E$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

### 1.1. Formes bilinéaires

**Définition.** *On dit qu'une application $b : E \times E \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto b(x,y)$ est une forme bilinéaire (f.b. en abrégé) sur $E$ si elle vérifie les conditions suivantes :*

*(i) Pour tout $x \in E$, l'application $b(x,.) : E \to \mathbb{R}$, $y \mapsto b(x,y)$ est linéaire :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (y,y') \in E^2, b(x, y+\lambda y') = b(x,y) + \lambda b(x,y') \ ;$$

*(ii) Pour tout $y \in E$, l'application $b(.,y) : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto b(x,.)$ est linéaire :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,x') \in E^2, b(x+\lambda x', y) = b(x,y) + \lambda b(x',y).$$

Remarque. L'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des f.b. sur $E$ est un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{F}(E \times E; \mathbb{R})$.

**Définition.** *On dit qu'une application $b : E \times E \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto b(x,y)$ est symétrique si elle vérifie :*

$$(iii) \qquad \forall (x,y) \in E^2, b(y,x) = b(x,y).$$

Remarque. Pour qu'une application $b : E \times E \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto b(x,y)$ soit une forme bilinéaire symétrique (f.b.s. en abrégé), il suffit qu'elle vérifie $(ii)$ et $(iii)$.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des f.b.s. sur $E$ est un s.e.v. de $\mathcal{B}(E)$.

Exemples. 1. L'application

$$\begin{aligned} &\delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ &\quad (x,y) = ((x_1 x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

est une f.b. sur $\mathbb{R}^2$. Cette f.b. n'est pas symétrique, mais "antisymétrique" : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\delta(y,x) = -\delta(x,y)$.

2. L'application $b : E \times E \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)\, g(t) \cos(t)\, dt$ est une f.b.s. sur le $\mathbb{R}$-e.v. $E = C([0,1];\mathbb{R})$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

3. L'application $b : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, (P,Q) \mapsto P(0)\,Q(1)$ est une f.b. sur le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Cette f.b. n'est pas symétrique :

$$b(X,1) = 0 \neq 1 = b(1,X).$$

4. On appelle trace d'une matrice carrée $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ et on note $tr(M)$, la somme des termes de sa diagonale principale, i.e. le nombre réel $tr(M) := \sum_{i=1}^n m_{ii}$. Notons que $tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}$. L'application $b : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A,B) \mapsto tr({}^t AB)$ est une f.b.s.

**Dans le reste de cette section, $E$ désignera un $\mathbb{R}$-e.v. de dim. finie.**

<u>Cas où $E = \mathbb{R}^2$.</u>

Soit $b$ une f.b. sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ et tout $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b(x_1 e_1 + x_2 e_2, y) = x_1 b(e_1, y) + x_2 b(e_2, y) \\ &= x_1 b(e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2) + x_2 b(e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \\ &= x_1 y_1 b(e_1, e_1) + x_1 y_2 b(e_1, e_2) + x_2 y_1 b(e_2, e_1) + x_2 y_2 b(e_2, e_2) \end{aligned}$$

soit

$$b(x,y) = b_{11} x_1 y_1 + b_{12} x_1 y_2 + b_{21} x_2 y_1 + b_{22} x_2 y_2,$$

où $b_{ij} = b(e_i, e_j) \in \mathbb{R}, (1 \leq i, j \leq 2)$.

Notons que $b(x,y)$ peut encore s'écrire

$$b(x,y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{21}y_1 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

soit

$$b(x,y) = {}^tXBY,$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Inversement, toute application $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto b(x,y)$ de cette forme est une f.b. sur $\mathbb{R}^2$. Elle est symétrique si, et seulement si, $b_{21} = b_{12}$, i.e. si, et seulement si, $B$ est une matrice symétrique, i.e. telle que ${}^tB = B$.

### Matrice d'une forme bilinéaire

Soit $b$ une forme bilinéaire sur $E$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et tout $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned} b(x,y) \quad &= b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i b(e_i, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i b\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j b(e_i, e_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j b_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j, \end{aligned}$$

où $b_{ij} = b(e_i, e_j)$, $(1 \leq i, j \leq n)$.

Cette relation peut s'écrire

$$b(x,y) = {}^tXBY,$$

en posant $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

La matrice $B=(b_{ij})$ est appelée matrice de la forme bilinéaire $b$ dans la base $\mathcal{B}$. Notons que cette matrice est entièrement déterminée par la relation $b(x,y)={}^tXBY$.

Exemple. Dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, la f.b. $\delta:(\mathbb{R}^2)^2\to\mathbb{R},(x,y)=((x_1,y_1),(x_2,y_2))\mapsto dét_{\mathcal{B}}(x,y)=x_1y_2-x_2y_1$ a pour matrice

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Remarques. 1. La forme bilinéaire $b$ est symétrique si, et seulement si, la matrice $B$ est symétrique, i.e. telle que ${}^tB=B$.

2. L'application $\mathcal{B}(E)\to M_n(\mathbb{R})$, $b\mapsto B=(b(e_i,e_j))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-e.v. Par conséquent, $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{B}(E)=\dim_{\mathbb{R}}M_n(\mathbb{R})=n^2$.

3. L'application $\mathcal{S}(E)\to S_n(\mathbb{R})$, $b\mapsto B=(b(e_i,e_j))$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur le s.e.v. de $M_n(\mathbb{R})$ formés des matrices symétriques. Par conséquent, $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{S}(E)=\dim_{\mathbb{R}}S_n(\mathbb{R})=\frac{n(n+1)}{2}$.

**Changement de base**

Soit $\mathcal{B}'=(e'_1,\ldots,e'_n)$ une autre base de $E$ et soit $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Pour tout $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x'_ie'_i\in E$ et tout $y=\sum\limits_{j=1}^{n}y'_je'_j\in E$, nous avons

$$b(x,y)={}^tX'B'Y',$$

où $B'$ est la matrice de $b$ dans la base $\mathcal{B}'$, $X'=\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}$ et $Y'=\begin{pmatrix}y'_1\\ \vdots\\ y'_n\end{pmatrix}$.

Or, nous savons que

$$X=PX' \quad \text{et} \quad Y=PY',$$

(soulignons ici que ce sont bien les anciennes coordonnées qui sont exprimées en fonction des nouvelles et non l'inverse), si bien que

$$b(x,y)={}^tXBY={}^t(PX')B(PY')={}^tX'\left({}^tPBP\right)Y.$$

Comme $B'$ est déterminée par la relation $b(x,y)={}^tX'B'Y'$, il s'ensuit que :

$$\boxed{B' = {}^tPBP}.$$

On dit que les matrices $B$ et $B'$ sont congruentes. Comme $P$ (et donc ${}^tP$) est une matrice inversible, les matrices $B$ et $B'$ ont même rang.

**Définitions.** *On appelle rang d'une forme bilinéaire $b$ sur $E$, le rang de sa matrice dans n'importe quelle base de $E$. Lorsque ce rang est maximum, i.e. égal à $n = \dim_{\mathbb{R}}(E)$, on dit que $b$ est non dégénérée. Dans le cas contraire, on dit que $b$ est dégénérée. Une forme bilinéaire $b$ sur $E$ est donc non dégénérée si, et seulement si, le déterminant de sa matrice dans une base quelconque, appelé discriminant de $b$ dans cette base, est non nul.*

### 1.2. Formes quadratiques

Désignons par $E$ un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension quelconque.

On dit qu'une fonction $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique (f.q. en abrégé) sur $E$ s'il existe une forme bilinéaire $f$ sur $E$ telle que : $\forall x \in E$, $q(x) = f(x, x)$. On dit alors que $q$ est la forme quadratique associée à $f$.

Remarque. Si $q$ est associée à $f$, alors $q$ est également associée à la forme bilinéaire symétrique $b$, définie par : $\forall (x, y) \in E^2$,

$$b(x, y) = \frac{1}{2}\left(f(x, y) + f(y, x)\right).$$

### Identités de polarisation

Si $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique $b$, alors : $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} q(x+y) &= b(x+y, x+y) \\ &= b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) \\ &= q(x) + 2b(x, y) + q(y), \end{aligned}$$

soit

$$b(x, y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right),$$

ce qui prouve que $q$ n'est associée qu'à une seule forme bilinéaire symétrique $b$. On dit que cette forme bilinéaire symétrique $b$ est la forme polaire de $q$. Notons que cette forme polaire est également donnée par :

$$b(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right).$$

Remarque. L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des f.q. sur $E$ est un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$. L'application de $\mathcal{Q}(E)$ dans $\mathcal{S}(E)$ qui à toute forme quadratique $q$ associe sa forme polaire $b$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-e.v.

Exemples. 1. La fonction $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est la f.q. associée à la f.b.

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) = ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto x_1 y_2.$$

Sa forme polaire est la f.b.s.

$$b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) = ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

2. L'application $q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)P(1)$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$. Sa forme polaire est la f.b.s. définie par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X],\ b(P,Q) = \frac{1}{2}\left(P(0)Q(1) + P(1)Q(0)\right).$$

3. La fonction $q : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto tr\left({}^tMM\right)$ est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$.

**Conséquence.** Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :

*(i)* $b : E^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$ est une forme bilinéaire (nécessairement symétrique).

*(ii)* $\forall x \in E$, $q(x) = b(x,x)$.

**Dans le reste de cette section, $E$ désignera un $\mathbb{R}$-e.v. de dim. finie.**

Les notions attachées à la forme polaire $b$ (matrice, rang, dégénérescence ou non dégénérescence) seront également attachées à la forme quadratique $q$.

Ainsi, par exemple, une forme quadratique $q$ sera dite dégénérée (resp. non dégénérée) si, et seulement si, sa forme **polaire** $b$ l'est.

**Proposition.** *Une application non identiquement nulle $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si, et seulement si, dans toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$, elle s'exprime comme un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées.*

Démonstration. 1. La condition est nécessaire. Si $q$ est une f.q., de forme polaire $b$, sur $E$, et si $B = (b_{ij})$ est sa matrice dans $\mathcal{B}$, alors : $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$\begin{aligned} q(x) &= b(x,x) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij} x_i x_j . \end{aligned}$$

2. Elle est suffisante.

Supposons que $q$ s'exprime comme un polynôme homogène de degré 2 des variables coordonnées :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j .$$

Considérons alors la f.b.s. dont la matrice $B = (b_{ij}) \in S_n(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$b_{ii} = a_i \quad \text{et} \quad b_{ij} = b_{ji} = \frac{a_{ij}}{2} \text{ pour } i < j.$$

Elle vérifie : $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$
\begin{aligned}
b(x,x) &= {}^tXBX = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j,\\
&= \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} b_{ij}x_ix_j\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_ix_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j\\
&= q(x),
\end{aligned}
$$

où ${}^tX = (x_1, \ldots, x_n)$, de sorte que $q$ est bien une forme quadratique.

$\square$

**Règle de dédoublement des termes.** Pour passer de $q$ à sa forme polaire $b$, on remplace donc

$$x_i^2 \text{ (terme carré)} \qquad \text{par} \qquad x_iy_i$$

et

$$x_ix_j \text{ (terme rectangle)} \qquad \text{par} \qquad \frac{1}{2}(x_iy_j + x_jy_i)$$

Exemple. La forme polaire de $q(x) = x_1^2 + x_2x_3$ est donnée par $b(x,y) = x_1y_1 + \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2)$, où $x = \sum_{i=1}^{3} x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^{3} y_ie_i$.

**Orthogonalité**

**Définition.** *Soit $q$ une forme quadratique sur $E$ et soit $b$ sa forme polaire. On dit que deux vecteurs $x$, $y$ de $E$ sont orthogonaux (ou conjugués) par rapport à $q$ (ou $b$), ou $q$-orthogonaux, si on a $b(x,y) = 0$.*

*Pour toute partie $A$ de $E$, on appelle orthogonal de $A$ par rapport à $q$ (ou $b$), l'ensemble $A^\perp$ formés des vecteurs $x \in E$ qui sont $q$-orthogonaux à tous les vecteurs $a \in A$ :*

$$A^\perp = \{x \in E \,|\forall a \in A, b(x,a) = 0\}.$$

Propriétés immédiates. $(i)$ $A^{\perp}$ est s.e.v. de $E$ et $A^{\perp} = Vect\,(A)^{\perp}$ ; $(ii)$ $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

Exemple. Soit $q$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ q\,(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = {}^tXBX,$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sa forme polaire $b$ est donnée par :

$$b\,(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3,$$

pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Considérons la droite vectorielle

$$D = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = 0\right\}.$$

Par définition

$$D^{\perp} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\forall y \in \mathbb{R}^3,\ b\,(x, y) = 0\right\}$$

soit

$$\begin{aligned} D^{\perp} &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\forall y = (y_1, y_2, y_3) \in D,\ x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 = 0\} \\ &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\forall y_3 \in \mathbb{R},\ (x_1 - x_2)\,y_2 = 0\} \\ &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\ x_1 = x_2\}. \end{aligned}$$

Noter que dans ce cas particulier, $D^{\perp}$ est un plan vectoriel qui contient $D$.

**Définition.** *On appelle noyau d'une forme quadratique $q$ sur $E$, l'ensemble des vecteurs de $E$ qui sont $q$-orthogonaux à tous les vecteurs de $E$ :*

$$N\,(q) := E^{\perp} = \{x \in E \,|\forall y \in E, b\,(x, y) = 0\}.$$

*Attention à ne pas confondre le noyau de $q$ avec le cône isotrope de $q$, défini par*

$$C(q) := \{x \in E \,| q(x) = 0\}.$$

*On dit qu'un vecteur $x \in E$ est isotrope pour $q$ s'il vérifie $q(x) = 0$, de sorte que $C(q)$ est l'ensemble des vecteurs isotropes pour $q$.*

**Définition.** *Une forme quadratique $q$ sur $E$ est dite non dégénérée (resp. dégénérée) si $N(q) = \{0_E\}$ (resp. $N(q) \neq \{0_E\}$). Elle est dite anisotrope (ou définie) si $C(q) = \{0_E\}$.*

Remarque. Cette définition de la non dégénérescence (resp. dégénérescence) d'une forme quadratique correspond bien à celle que nous avons vue plus haut.
En effet, étant donné $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, on a : $\forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$\begin{aligned} x \in N(q) \quad &\Leftrightarrow (\forall y \in E, b(y, x) = 0) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tY(BX) = 0\right), \\ &\Leftrightarrow BX = 0, \end{aligned}$$

où $B = (b(e_i, e_j))$ et ${}^tX = (x_1, \ldots, x_n)$. (Poser ${}^tY = {}^t(BX) = (y_1, \ldots, y_n)$ et noter que ${}^tYY = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0$ seulement si $Y = 0$). Par conséquent :

$$\boxed{N(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow d\acute{e}t(B) \neq 0.}$$

Nous avons $N(q) \subset C(q)$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{Si } q \text{ est anisotrope, alors } q \text{ est non dégénérée.}}$$

Mais la réciproque est fausse comme le prouve l'exemple précédent :

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

est non dégénérée (i.e. $N(q) = E^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ) puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

mais elle n'est pas anisotrope car $C(q) = \{x \in \mathbb{R}^3 \, | x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\} \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Autre exemple. La forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$q(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, est non dégénérée si, et seulement si, son discriminant dans la base canonique est non nul, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\left(b^2 - 4ac\right) \neq 0.$$

Elle n'est anisotrope que si ce discriminant est $> 0$.

Remarque. Dans $\mathbb{R}^3$, il n'existe pas de vecteur isotrope non nul pour la forme quadratique définie par $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. En revanche, il en existe dans $\mathbb{R}^4$ muni de la forme quadratique de Minkowski, définie par

$$q(x) = c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$

pour tout $x = (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, où $c$ est la vitesse de la lumière dans le vide (espace-temps de la relativité restreinte).

**Courte parenthèse sur la dualité**

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E^* = L(E; \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $E$ (i.e. des applications linéaires de $E$ dans $\mathbb{R}$) s'appelle le dual de $E$.

Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$, on définit une famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ de $E^*$, en posant pour tout $(i, j)$ :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \text{ (symbole de Kronecker)},$$

Pour tout $i$, $e_i^*$ s'appelle la $i^{\text{ème}}$ forme linéaire coordonnée relative à $\mathcal{B}$, car :

$$\forall x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E,\ e_i^*(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_i^*(e_j) = x_i.$$

**Proposition.** $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ *est une base de* $E^*$*, appelée base duale de* $E$*, et donc* $\dim_{\mathbb{R}}(E^*) = \dim_{\mathbb{R}}(E)$.

Démonstration. En effet : 1. La famille $\mathcal{B}^*$ est libre puisque :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0_{E^*} \right) \Longrightarrow \left( \forall j, \lambda_j = \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* \right)(e_j) = 0 \right) \ ;$$

2. Et elle est génératrice car pour tout $\phi \in E$, on a : $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$\phi(x) = \phi\left( \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i)\, e_i^*(x),$$

soit

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*, \text{ où } \lambda_i = \phi(e_i),\ (1 \le i \le n).$$

□

Remarque. Si $q$ est une forme quadratique non dégénérée sur $E$, alors :

*Pour toute forme linéaire* $\phi : E \to \mathbb{R}$*, il existe un unique* $y \in E$ *tel que :*

$$\forall x \in E,\ \phi(x) = b(x, y),$$

*où* $b$ *est la forme polaire de* $q$*.*

En effet, l'application $E \to E^*$, $y \mapsto b(., y)$ est alors un isomorphisme de $\mathbb{R}$-e.v. car son noyau n'est autre que $N(q)$, lequel est réduit à $\{0_E\}$ par hypothèse :

$$b(., y) = 0_{E^*} \Leftrightarrow (\forall x \in E, b(x, y) = 0) \Leftrightarrow y \in N(q).$$

**Définition.** *Soit $q$ une forme quadratique sur $E$ et soit $b$ sa forme polaire. On dit qu'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ est orthogonale pour $q$ si elle n'est constituée que de vecteurs deux à deux orthogonaux pour $q$, i.e. si $b(e_i, e_j) = 0$ pour tout $(i, j)$ tel que $i \neq j$, $(1 \leq i, j \leq n)$. On dit qu'elle est orthonormale pour $q$ si $b(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), pour tout $(i, j)$, $(1 \leq i, j \leq n)$.*

Dire qu'une base $\mathcal{B}$ est orthogonale pour $q$ revient à dire que dans $\mathcal{B}$ la matrice de $q$ est une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & c_n \end{pmatrix},$$

Le rang de $q$ est alors le nombre de termes diagonaux non nuls et nous avons :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2.$$

"Réduire" une forme quadratique, c'est trouver une base orthogonale pour cette forme, i.e. une base dans laquelle elle s'exprime comme une somme de "termes carrés".

**Existence d'une base $q$-orthogonale**

**Proposition.** *Pour toute forme quadratique $q$ sur $E$ ($\mathbb{R}$-e.v. de dim. finie $n$), il existe au moins une base orthogonale.*

Démonstration par récurrence sur $n = \dim_{\mathbb{R}}(E)$. La proposition est évidente pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour $n$ et prouvons qu'elle l'est alors pour $n + 1$. Il n'y a rien à prouver si $q = 0$. Supposons donc qu'il existe $e_{n+1} \in E$ tel que $q(e_{n+1}) \neq 0$ et considérons $F = Vect(e_{n+1})$. Nous avons

$$F^{\perp} = \{x \in E \,|b(e_{n+1}, x) = 0\} = Ker\,[b(e_{n+1}, .)],$$

où $b$ est la forme polaire de $q$. Comme $b(e_{n+1}, .)$ est une forme linéaire non nulle, son noyau $F^{\perp}$ est de dimension $n$ sur $\mathbb{R}$. Comme $F^{\perp} \cap F = \{0_E\}$ puisque $q(e_{n+1}) \neq 0$, il s'ensuit que $E = F^{\perp} \oplus F$.

Par application de l'hypothèse de récurrence, il existe donc une base de $E$ orthogonale pour $q$.

$\square$

Matriciellement, cela signifie que :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \exists P \in GL_n(\mathbb{R}), {}^tPSP = D \in D_n(\mathbb{R}),$$

où $D_n(\mathbb{R})$ est le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonales.

**Attention**, les termes de la diagonale principale de $D$ ne sont pas, en général, les valeurs propres de $S$.

Exemple 1. Soit $q$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \, q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

Dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, sa matrice est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique $q$ vérifie :

$$\begin{aligned} q(x) &= \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \\ &= {x_1'}^2 + \frac{3}{4}{x_2'}^2, \end{aligned}$$

où

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$, où

$$e_1' = (1, 0) \text{ et } e_2' = \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

Dans cette base $\mathcal{B}'$, la matrice $B'$ de $q$ est diagonale :

$$B' = {}^tPBP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, cette base $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale pour $q$.

Exemple 2. Soit $q$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = x_1 x_2.$$

Dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, sa matrice est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique $q$ vérifie :

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{4}\left((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_1'^2 + x_2'^2\right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

La matrice

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, où

$$e'_1 = \frac{1}{2}(1,1) \text{ et } e'_2 = \frac{1}{2}(1,-1).$$

Dans cette base $\mathcal{B}'$, la matrice $B'$ de $q$ est diagonale :

$$B' = {}^tPBP = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, cette base $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale pour $q$.

Exemple 3. Soit $q$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, sa matrice est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique $q$ vérifie :

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}\left((x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2\right). \\ &= x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 + \frac{1}{2}x_3'^2, \end{aligned}$$

où

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$P = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, où

$$e'_1 = (1,0,0)\,,\; e'_2 = \frac{1}{2}(-3,1,1) \text{ et } e'_3 = -\frac{1}{2}(1,-1,1)\,.$$

Dans cette base $\mathcal{B}'$, la matrice $B'$ de $q$ est diagonale :

$$B' = {}^tPBP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, cette base $\mathcal{B}'$ est une base orthogonale pour $q$.

### 1.3. Réduction des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$

Il y a deux méthodes pour réduire une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ :

1. Utiliser des identités remarquables (méthode de décomposition de Gauss) ; facile à mettre en oeuvre, elle ne donne généralement pas une base orthonormée pour le produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$.

2. Considérer la matrice de la forme dans la base canonique et la diagonaliser dans une base orthonormée pour ce produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$ (nous verrons que c'est toujours possible, même si c'est parfois un peu pénible).

Nota bene. L'expression “formes linéaires indépendantes” signifiera “formes linéaires **linéairement** indépendantes”.

**Méthode de Gauss**

**Théorème.** *Toute forme quadratique $q$ sur $\mathbb{R}^n$ peut être décomposée en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. En d'autres termes, il existe $n$ formes linéaires indépendantes $l_1, \ldots, l_n$ sur $\mathbb{R}^n$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\, q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i l_i(x)^2 .$$

*Le rang de $q$ est alors égal au nombre de $i$ tels que $c_i \neq 0$, $(1 \leq i \leq n)$.*

Démonstration par récurrence sur $n$. Le résultat est évident pour $n = 1$. Supposons qu'il soit vrai jusqu'à $n - 1 \geq 1$ et prouvons qu'il l'est alors pour $n$.

Nous savons que $q(x)$ est de la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j,$$

où les $a_i$ et $a_{ij}$ sont des nombres réels, $(1 \leq i, j \leq n)$.

Premier cas : Il existe $i$ tel que $a_i \neq 0$ . Supposons par exemple $a_1 \neq 0$. On isole alors tous les termes contenant $x_1$ et l'on écrit $q(x)$ sous la forme

$$q(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + x_1 L(x_2, \ldots, x_n) + Q(x_2, \ldots, x_n),$$

où $L$ (resp. $Q$) est une forme linéaire (quadratique) sur $\mathbb{R}^{n-1}$. On en déduit que :

$$q(x) = a_1 \left( x_1 + \frac{L(x_2, \ldots, x_n)}{2\, a_1} \right)^2 + Q(x_2, \ldots, x_n) - \frac{L(x_2, \ldots, x_n)^2}{4a_1} .$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\left( Q - \frac{L^2}{4a_1} \right)(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} c_i l_i (x_2, \ldots, x_n)^2 ,$$

où les $l_i$ $(2 \leq i \leq n)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et les $c_i$ des nombres réels. On obtient alors une décomposition de la forme voulue en posant

$$c_1 = a_1 \text{ et } l_1(x) = x_1 + \frac{L(x_2, \dots, x_n)}{2\, a_1} \; .$$

Pour vérifier l'indépendance linéaire des $l_i$ $(1 \leq i \leq n)$, il suffit de vérifier que le déterminant de $(l_1, \dots, l_n)$ dans la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de la base canonique est non nul, ce qui est immédiat dans la mesure où seule $l_1$ dépend de $x_1$.

Deuxième cas : Tous les $a_i$ sont nuls. Si $q$ est nulle, c'est immédiat. Sinon, au moins un des $a_{ij}$ est non nul. Supposons par exemple que $a_{12} \neq 0$. On isole alors tous les termes contenant $x_1$ ou $x_2$ et l'on écrit $q(x)$ sous la forme

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{12}x_1x_2 + x_1L_1(x_3, \dots, x_n) + x_2L_2(x_3, \dots, x_n) + Q(x_3, \dots, x_n) \, ,$$

où $L_1$, $L_2$ sont des formes linéaires et $Q$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n-2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} q(x) \quad &= a_{12}\left(x_1 + \frac{L_2}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{L_1}{a_{12}}\right) + Q - \frac{L_1L_2}{a_{12}} \\ &= \frac{a_{12}}{4}\left[\left(x_1 + x_2 + \frac{L_1 + L_2}{a_{12}}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{L_2 - L_1}{a_{12}}\right)^2\right] + Q - \frac{L_1L_2}{a_{12}} \; . \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\left(Q - \frac{L_1L_2}{a_{12}}\right)(x_3, \dots, x_n) = \sum_{i=3}^{n} c_i l_i (x_3, \dots, x_n)^2 \, ,$$

où les $l_i$ $(3 \leq i \leq n)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^{n-2}$ et les $c_i$ des nombres réels. On obtient alors une décomposition de la forme voulue en posant :

$$c_1 = -c_2 = \frac{a_{12}}{4}$$

$$l_1(x) = x_1 + x_2 + \frac{L_1 + L_2}{a_{12}}(x_3, \dots, x_n)$$

$$l_2(x) = x_1 - x_2 + \frac{L_2 - L_1}{a_{12}}(x_3, \dots, x_n) \, .$$

Pour vérifier l'indépendance linéaire des $l_i$ $(1 \leq i \leq n)$, il suffit de vérifier que le déterminant de $(l_1, \ldots, l_n)$ dans la base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est non nul, ce qui découle de l'expression de $l_1$ et $l_2$ et du fait que les $l_i$ $(3 \leq i \leq n)$ ne dépendent ni de $x_1$ ni de $x_2$.

□

**Corollaire 1.** *Soit $q$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Il existe sur $\mathbb{R}^n$ des formes linéaires indépendantes $l_1, \ldots, l_p, l_{p+1}, \ldots, l_{p+m}$, telles que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\; q(x) = l_1(x)^2 + \ldots + l_p(x)^2 - l_{p+1}(x)^2 \ldots - l_{p+m}(x)^2 .$$

*Le rang $r$ de $q$ est alors égal à $p+m$.*

Démonstration. Il suffit de considérer la décomposition de Gauss

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\; q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i l_i(x)^2 ,$$

et d'écrire chaque terme de la forme $cl(x)^2$, où $l \in (\mathbb{R}^n)^*$ et $c \neq 0$, sous la forme $\varepsilon \phi(x)^2$, en posant $\phi(x) = \sqrt{|c|}\, l(x)$ et $\varepsilon = signe(c) \in \{-1, 1\}$.

□

**Corollaire 2 et définition.** *Soit $q$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique couple $(p,m) \in \mathbb{N}^2$, tel qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de $q$ soit la matrice diagonale*

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & \mathrm{O} & & \\
 & & & -1 & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & -1 & & & \\
 & & \mathrm{O} & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[p]{\qquad} \qquad \xleftrightarrow[m]{\qquad} \qquad \xleftrightarrow[n-r]{\qquad}$$

*où $r = p + m$. Ce couple est noté $sgn\,(q)$ et appelé signature de $q$.*

Démonstration. Reprenons les conclusions et les notations du corollaire 1.

1. Existence. Si $p+m < n$, on complète le système $(l_1, \ldots, l_p, l_{p+1}, \ldots, l_{p+m})$ en une base $(l_1, \ldots, l_n)$ de $(\mathbb{R}^n)^*$. Décomposons les formes linéaires $l_i$, $(1 \leq i \leq n)$, dans la base duale de la base canonique

$$l_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} e_j^* \quad \text{soit} \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\, l_i\,(x) = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} x_j.$$

Leur indépendance linéaire assure que la matrice $(l_{ij}) \in M_n\,(\mathbb{R})$ est un inversible. Elle est donc l'inverse d'une matrice $P \in GL_n\,(\mathbb{R})$.

Les formes linéaires $l_i$, $(1 \leq i \leq n)$, sont telles que :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\, q\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i l_i\,(x)^2\,,$$

où

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq i \leq p \\ -1 & \text{si} \quad p+1 \leq i \leq p+m \\ 0 & \text{si} \quad i > p+m \end{cases}.$$

En d'autres termes, nous avons :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\, q\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i {x'_i}^2,$$

où

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1\,(x) \\ \vdots \\ l_n\,(x) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Il apparaît ainsi que $P$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ vérifiant $l_i\left(e'_j\right) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) dans laquelle $q$ est représentée par la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

2. Unicité. Supposons qu'il existe deux couples $(p, m)$ et $(p', m')$ de $\mathbb{N}^2$, tels qu'il existe des bases $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(f'_1, \ldots, f'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans lesquelles la matrice de $q$ est de la forme indiquée. Posons $F = Vect\,(f_1, \ldots, f_p)$, $G = Vect\,(f_{p+1}, \ldots, f_n)$, $F = Vect\left(f'_1, \ldots, f'_{p'}\right)$ et $G = Vect\left(f'_{p'+1}, \ldots, f'_n\right)$. On a : $\forall x = \sum_{i=1}^{p} x_i f_i \in F - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $q\,(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0$ et $\forall x = \sum_{i=p'+1}^{n} x'_i f'_i \in G'$, $q\,(x) \leq 0$ donc $F \cap G' = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Par conséquent, la somme $F + G'$ est directe de sorte que $\dim(F) + \dim(G') \leq n$, i.e. $p + (n - p') \leq n$, soit $p \leq p'$. On prouve de même que $p' \leq p$. Donc $p' = p$ et donc $(p', m') = (p, m)$ puisque $p + m = p' + m' = rang\,(q)$.

$\square$

**Existence d'une base orthonormale**

**Proposition.** *Soit $q$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Pour qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormale pour $q$, il faut et il suffit que $q$ soit de signature $(n, 0)$, c'est-à-dire telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $q\,(x) > 0$.*

**Définition.** *Soit $q$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. On dit que $q$ est définie positive (resp. négative) si elle est de signature $(n, 0)$ (resp. $(0, n)$), c'est-à-dire telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $q\,(x) > 0$ $(q\,(x) < 0)$. On dit que $q$ est positive (resp. négative) si elle est de signature $(r, 0)$ (resp. $(0, r)$), c'est-à-dire si elle ne prend que des valeurs $\geq 0$ (resp. $\leq 0$).*

Ces définitions s'étendent à tout $\mathbb{R}$-e.v. $E$ de dimension finie $n$.

**Inégalité de Cauchy-Schwarz.** *Soit $q$ une forme quadratique **positive** sur $E$. On a :*

$$\forall\,(x, y) \in E^2,\ b\,(x, y)^2 \leq q\,(x)\,q\,(y)\,,$$

*où $b$ est la forme polaire de $q$.*

Démonstration. Le trinôme du second degré

$$t \mapsto q(x+ty) = q(x) + 2tb(x,y) + t^2 q(y)$$

est de signe constant. Son discriminant réduit $b(x,y)^2 - q(x)q(y)$ est donc $\leq 0$.

$\square$

**Exemple important.** Pour la forme quadratique définie positive

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

nous avons donc : $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$.

**Corollaire**. *Si $q$ est une forme quadratique* ***positive*** *sur $E$, alors :*

$$C(q) = N(q).$$

*Par suite, $q$ est définie positive si, et seulement si, elle est non dégénérée.*

Démonstration. On sait que : $\forall q \in Q(E)$, $N(q) \subset C(q)$. Si $q$ est positive, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz prouve que :

$$\forall x \in E,\ q(x) = 0 \Rightarrow (\forall y \in E, b(x,y) = 0) \Leftrightarrow \left(x \in N(q) = E^{\perp}\right),$$

soit

$$C(q) \subset N(q).$$

$\square$

**Inégalité de Minkowski.** *Sous les mêmes hypothèses, on a :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

Démonstration. En effet, on a : $\forall (x,y) \in E^2$,

$$
\begin{aligned}
q(x+y) &= q(x) + 2b(x,y) + q(y) \\
&\leq q(x) + 2\sqrt{q(x)\,q(y)} + q(y) \\
&\leq \left(\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}\right)^2,
\end{aligned}
$$

soit

$$\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

□

## 2. Espaces Euclidiens

### 2.1. Généralités

**Définition.** *On appelle espace euclidien tout couple $(E, q)$, où $E$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive, c'est-à-dire telle que : $\forall x \in E - \{0_E\}$, $q(x) > 0$. La forme polaire $b$ de $q$ est alors appelée le produit scalaire associé à $(E, q)$.*

**Exemple fondamental.** $(\mathbb{R}^n, q)$, où $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$. Le produit scalaire associé à $q$ est appelé produit scalaire usuel (ou canonique) sur $\mathbb{R}^n$. Il est défini par : $\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Remarque pratique.** Noter que ce produit scalaire peut s'exprimer sous la forme d'un produit matriciel

$$\langle x, y\rangle = {}^tXY,$$

où ${}^tX = (x_1, \ldots, x_n)$ et ${}^tY = (y_1, \ldots, y_n)$.

**Autre exemple.** L'application

$$\begin{aligned} b:\ & M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (A,B) = ((a_{ij}),(b_{ij})) \mapsto tr\left({}^tAB\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \end{aligned}$$

est le produit scalaire associé à $q : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, où :

$$\forall M = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}),\ q(M) = tr\left({}^tMM\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2.$$

**Proposition.** *Soit $(E,q)$ un espace euclidien. L'application*

$$N : E \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt{q(x)}$$

*est une norme sur $E$, c'est-à-dire :*

$(N_1)$ $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ *(positivité)* ;
$(N_2)$ $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéïté)* ;
$(N_3)$ $\forall (x,y) \in E^2$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*.

*$N$ est appelée la norme euclidienne associée à $(E,q)$.*

Démonstration. Les propriétés $(N_1)$ et $(N_1)$ découlent immédiatement de la définition d'une forme quadratique définie positive. La propriété $(N_3)$ n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

□

**Remarque importante.** L'application

$$\begin{aligned} d:\ & E \times E \to \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) \mapsto N(x-y) \end{aligned}$$

est alors une distance sur $E$, c'est-à-dire :

$(D_1)$ $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positivité) ;
$(D_2)$ $\forall (x,y) \in E^2$, $d(y,x) = d(x,y)$ (symétrie) ;
$(D_3)$ $\forall (x,y) \in E^3$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire).

On dit que $d$ est la distance euclidienne associée à $(E, q)$.

**Dans le reste de ce chapitre, $E$ désignera un espace euclidien dont le produit scalaire sera noté $\langle ., . \rangle$ et la norme $\|.\|$.**

**Orthogonalité**

On dit que $x, y \in E$ sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$. Le s.e.v. orthogonal d'une partie $A$ de $E$ est donné par :

$$A^{\perp} = \{x \in E \,|\forall a \in A,\, x \perp a\}\,.$$

On a (théorème de Pythagore) :

$$\forall\,(x, y) \in E^2,\, x \perp y \Leftrightarrow \;\; \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\,.$$

Une récurrence sur $k \geq 2$ nous permet d'en déduire que si $x_1, \ldots, x_k \in E$ sont deux à deux orthogonaux, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2$$

(relation de Pythagore).

**Coordonnées dans une base orthonormale**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $E$, c'est-à-dire telle que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), pour tout $(i, j)$, $(1 \leq i, j \leq n)$. Nous savons qu'une telle base existe (cf. section 1.3).

Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a :

$$\forall j,\; \langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} = x_j.$$

Par conséquent :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

La relation de Pythagore nous permet d'en déduire que :

$$\forall x \in E, \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$$

(relation de Parseval).

**Projection orthogonale**

**Théorème.** *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$. Ce point de $F$ est appelé projection orthogonale de $x$ sur $F$ et noté $P_F(x)$. Il vérifie :*

$$\forall z \in F, \ z \neq P_F(x) \Rightarrow \|x - P_F(x)\| < \|x - z\|,$$

*c'est-à-dire*

$$\forall z \in F, \ z \neq P_F(x) \Rightarrow d(x, P_F(x)) < d(x, z),$$

*ce qui signifie que $P_F(x)$ est le point de $F$ le plus proche de $x$.*

Démonstration. Nous savons que $F$ admet une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_k)$. On a : $\forall y = \sum_{i=1}^{k} \langle y, e_j \rangle e_i \in F$,

$$\begin{aligned} x - y \in F^{\perp} \quad & \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, \ldots, k\}, \ \langle x - y, e_j \rangle = 0 \text{ i.e. } \langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle) \\ & \Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i. \end{aligned}$$

Par conséquent, $P_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$ est l'unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$. En outre, on a : $\forall z \in F$,

$$
\begin{aligned}
z \neq P_F(x) \Rightarrow \|x-z\|^2 &= \| \underbrace{(x-P_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(P_F(x)-z)}_{\in F} \|^2 \\
&= \|x-P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)-z\|^2 \\
&> \|x-P_F(x)\|^2,
\end{aligned}
$$

soit

$$\|x-P_F(x)\| < \|x-y\|.$$

□

**Supplémentaire orthogonal**

**Proposition.** *Pour tout s.e.v. $F$ de $E$, on a :*

$$(i) \quad E = F \oplus F^\perp \qquad et \quad (ii) \qquad \left(F^\perp\right)^\perp = F.$$

*$F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de $F$.*

Démonstration. $(i)$ En vertu du théorème précédent, on a : $\forall x \in E$,

$$x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x-P_F(x))}_{=P_{F^\perp}(x) \in F^\perp}.$$

Donc $E = F + F^\perp$. Par ailleurs $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, car : $\forall x \in E$,

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0_E.$$

Par conséquent : $E = F \oplus F^\perp$.

$(ii)$ Nous savons que : $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$. Inversement, si $x = \underset{\in F}{y} + \underset{\in F^\perp}{z} \in \left(F^\perp\right)^\perp$, alors :

$$0 = \langle x, z\rangle = \langle y+z, z\rangle = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{=0} + \langle z, z\rangle = \|z\|^2,$$

si bien que $z = 0$ et donc $x - y \in F$. Par conséquent $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} \subset F$ et donc $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

□

**Remarque importante.** Pour une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $n$, on a encore

$$\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = n \qquad \text{et} \qquad \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F,$$

mais $F$ et $F^{\perp}$ ne sont par nécessairement supplémentaires.

**Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**

**Proposition.** *Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille libre de $E$. Il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_k)$ de $F = Vect(v_1, \ldots, v_k)$, telle que : $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$,*
*(i) $\langle e_j, v_j \rangle > 0$ ;*
*(ii) $Vect(e_1, \ldots, e_j) = Vect(v_1, \ldots, v_j)$.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur $k$. Pour $k = 1$, il suffit de poser

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Supposons la proposition vérifiée pour $k-1$. Il existe alors une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_{k-1})$ de $H = Vect(v_1, \ldots, v_{k-1})$ qui vérifie les conditions $(i)$ et $(ii)$ pour tout $j \leq k-1$. Considérons $u_k = v_k - P_H(v_k)$. On sait que $u_k = P_{H^{\perp}}(v_k) \in H^{\perp}$. Comme $v_k \notin H$, on a $u_k \neq 0_E$ et on peut donc poser

$$e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}.$$

Ce vecteur $e_k$ est unitaire (i.e. de norme 1), orthogonal à $H = Vect(e_1, \ldots, e_{k-1})$ et tel que :

- $\langle e_k, v_k \rangle = \langle e_k, u_k \rangle = \|u_k\| > 0$ ;
- $Vect(v_1, \ldots, v_k) \subset Vect(e_1, \ldots, e_k)$,

car $v_k = \|u_k\|\ e_k + P_H(v_k) \in Vect(e_1, \ldots, e_k)$.

Par conséquent, $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormale de $F$ vérifiant $(i)$ et $(ii)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$.

$\square$

En résumé, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt consiste à poser :

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}\,;$$

puis lorsqu'on a déjà construit $e_1, \ldots, e_{j-1}$ :

$$e_j = \frac{u_j}{\|u_j\|} \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} u_j &= \text{projection orthogonale de } v_j \text{ sur } Vect(e_1, \ldots, e_{j-1})^{\perp} \\ &= v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle\ e_i. \end{aligned}$$

**Exemple.** Considérons dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, la base $(v_1, v_2, v_3)$ définie par :

$$v_1 = (1,1,1)\,,\ v_2 = (0,1,1)\ \text{ et } v_3 = (0,0,1)\,.$$

Le procédé de Gram-Schmidt donne

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\ ,$$

puis

$$u_2 = P_{e_1^{\perp}}(v_2) = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle\, e_1 = v_2 - \frac{2}{3}v_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

d'où

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{3}{\sqrt{6}}u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)\,,$$

puis

$$u_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle\, e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle\, e_2 = v_3 - \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{2}u_2 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

d'où

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1).$$

### 2.2. Endomorphismes symétriques

**Définition.** *Un endomorphisme $f$ de $E$ est dit symétrique s'il vérifie*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

L'ensemble $S(E)$ des endomorphismes symétriques de $E$ est un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $L(E)$ des endomorphismes de $E$.

Remarque. Dire que $f \in L(E)$ est symétrique revient à dire que la forme bilinéaire $b : E^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle f(x), y\rangle$ est symétrique.

Exemple. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,$(x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. En effet : $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} = \langle x, f(y)\rangle.\end{aligned}$$

**Proposition.** *Soit $\mathcal{B}$ une base* ***orthonormale*** *de $E$. Nous avons :*

$$\forall f \in L(E), \quad f \in S(E) \Leftrightarrow M \in S_n(\mathbb{R}),$$

*où $M$ désigne la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Démonstration. En effet, nous avons :

$$
\begin{aligned}
(f \text{ symétrique}) \quad & \Leftrightarrow \left(\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = 0\right) \\
& \Leftrightarrow \left(\forall (X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^t(MX)\,Y - {}^tX\,(MY) = 0\right) \\
& \Leftrightarrow \left(\forall (X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^tX\,({}^tM - M)\,Y = 0\right) \\
& \Leftrightarrow \left(\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ ({}^tM - M)\,Y = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\right) \\
& \Leftrightarrow \left({}^tM - M = 0_{M_n(\mathbb{R})} \qquad \text{soit} \qquad {}^tM = M.\right)
\end{aligned}
$$

□

**Réduction des endomorphismes symétriques**

Le but de cette section est de prouver le résultat suivant :

**Théorème.** *Pour tout endomorphisme symétrique $f$ d'un espace euclidien $E$, il existe une base orthonormale de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.*

La démonstration repose sur les trois propositions suivantes qui présentent chacune leur intérêt propre.

**Proposition.** *Toutes les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont réelles.*

Démonstration. Soit $M$ la matrice de $f$ dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $E$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $M \in S_n(\mathbb{R})$ vue comme élément de $M_n(\mathbb{C})$ :

$$\exists X = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in M_{n,1}(\mathbb{C}),\ X \neq 0 \quad \text{et} \quad MX = \lambda X.$$

Nous avons alors

$${}^t\left(M\overline{X}\right) X = {}^t\left(\overline{MX}\right) X = {}^t\left(\overline{\lambda X}\right) X = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}\,X,$$

et

$$^t\left(M\overline{X}\right)X = {}^t\overline{X}\,{}^tMX = {}^t\overline{X}\;(MX) = {}^t\overline{X}\;(\lambda X) = \lambda{}^t\overline{X}\,X,$$

de sorte que

$$\overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}\,X = \lambda{}^t\overline{X}\,X \quad \text{et donc} \quad \overline{\lambda} = \lambda,$$

puisque ${}^t\overline{X}\,X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0.$

□

Deux s.e.v. $E_1$ et $E_2$ de $E$ sont dits orthogonaux si :

$$\forall\,(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\; x_1 \perp x_2.$$

On note alors $E_1 \perp E_2$.

La relation de Pythagore assure que toute somme $E_1 + \ldots + E_k$ de s.e.v. deux à deux orthogonaux $E_1$, …, $E_k$ est nécessairement directe.

En effet : $\forall\,(x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \ldots \times E_k$,

$$\begin{aligned}
(x_1 + \ldots + x_k = 0_E) \qquad &\Rightarrow \left(\left\|\sum_{i=1}^k x_i\right\|^2 = 0\right) \\
&\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^k \|x_i\|^2 = 0\right) \\
&\Rightarrow (x_1 = \ldots = x_k = 0_E)\,.
\end{aligned}$$

**Proposition.** *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique $f$ de l'espace euclidien $E$ sont deux à deux orthogonaux.*

Démonstration. En effet, si $\lambda$ et $\mu$ sont deux valeurs propres distinctes de $f$, alors pour tous $x$, $y \in E$ tels que $f(x) = \lambda x$ et $f(y) = \mu y$, nous avons :

$$\lambda\,\langle x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \mu\,\langle x, y\rangle\,,$$

soit

$$(\lambda - \mu)\,\langle x, y\rangle = 0,$$

soit

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \text{car} \quad \lambda - \mu \neq 0$$

soit $x \perp y$.

$\square$

**Proposition.** *Soit $f$ un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $E$ et soit $F$ un s.e.v. de $E$ qui est stable par $f$, c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$. Alors, le s.e.v. $F^{\perp}$ est également stable par $f$, c'est-à-dire tel que $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.*

Démonstration. En effet, si $x \in F^{\perp}$, alors :

$$\forall y \in F, \ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = 0,$$

puisque $f(y) \in f(F) \subset F$ ; et donc $f(x) \in F^{\perp}$.

$\square$

**Démonstration du théorème.** Notons $F = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$ la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de $f$. Démontrons par l'absurde que $F = E$.

Notons que $f(F) \subset F$. Par conséquent, le s.e.v. $F^{\perp}$ est stable par $f$ et la restriction de $f$ à $F^{\perp}$ définit donc un endomorphisme

$$g : \begin{array}{l} F^{\perp} \to F^{\perp} \\ x \mapsto f(x). \end{array}$$

Si $F \neq E$, alors $F^{\perp} \neq \{0_E\}$ et $g$ admet donc au moins une valeur propre $\lambda$ dans $\mathbb{C}$. Comme $\lambda$ est aussi valeur propre de $f$, $\lambda$ est un réel et on a :

$$\exists x \in F^{\perp} - \{0_E\}, \ f(x) = \lambda x,$$

ce qui est absurde car tous les vecteurs propres de $f$ sont dans $F$ et $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.

Par conséquent, on a bien

$$E = F = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f),$$

ce qui signifie que $f$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Pour obtenir une base orthonormale de $E$ formée de vecteurs propres de $f$, il suffit donc de construire une base orthonormale de chaque $E_{\lambda_i(f)}$ et de réunir ces bases en une base de $E$.

$\square$

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. En vertu du théorème précédent, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que :

$(i)$ Les vecteurs colonnes $X_1, \ldots, X_n$ de $P$ forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire usuel $(X,Y) \mapsto {}^tXY$, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \ \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{(symbole de Kronecker)},$$

où $\langle X_i, X_j \rangle = {}^tX_iX_j$, $(1 \leq i,j \leq n)$;

$(ii)$ $P^{-1}SP = D$, où $D \in D_n(\mathbb{R})$.

Remarque importante : Noter que : $\forall M = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$,

$${}^tMM = \left( \sum_{k=1}^{n} x_{ki}x_{kj} \right)_{1 \leq i,j \leq n} = (\langle X_i, X_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n},$$

où les $X_i$ sont les vecteurs colonnes de $M$. Par suite, la condition $(i)$ peut s'écrire

$${}^tPP = I_n,$$

où $I_n$ est la matrice identité, de sorte que $P^{-1} = {}^tP$.

**Définition.** *Une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si elle vérifie*

$${}^tPP = I_n,$$

*où $I_n$ est la matrice identité. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est un groupe pour la multiplication des matrices, appelé groupe orthogonal réel :*

$$O_n(\mathbb{R}) = \left\{ P \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tPP = I_n \right\}.$$

Nous venons d'établir le résultat suivant :

**Corollaire 1.** *Pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale $P$, telle que :*

$$P^{-1}SP = {}^t PSP = D,$$

*où $D$ est une matrice diagonale réelle.*

On en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 2.** *Soit $q$ une forme quadratique sur l'espace euclidien $E$. Il existe une base orthonormale de $E$ qui est orthogonale pour $q$.*

En effet, si $S \in S_n(\mathbb{R})$ est la matrice de $q$ dans une base **orthonormale** $\mathcal{B}$ de $E$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$(i)\ {}^tPP = I_n\ ; \qquad (ii)\ {}^tPSP \in D_n(\mathbb{R})\ ;$$

$(i)$ assure que $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une base orthonormale $\mathcal{B}'$ et $(ii)$ que la matrice de $q$ est diagonale dans cette base.

**Exemple.** Considérons la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $S$ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et ses sous-espaces propres sont orthogonaux. La matrice $S - I_3$ admet deux vecteurs colonnes identiques. Par conséquent, 1 est une valeur propre de $S$ et le sous-espace propre associé est

$$\begin{aligned} E_1(S) \quad &= \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,|(S - I_3)X = 0\} \\ &= \{\ {}^t(x_1, x_2, x_3)\,|x_1 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 = 0\} \\ &= Vect(e'_1)\,,\ \text{où } e'_1 = {}^t\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Les vecteurs colonnes orthogonaux à $E_1(S)$ sont les vecteurs de la forme

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ces vecteurs vérifient

$$SX = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \\ 3a \end{pmatrix} = 3X,$$

de sorte que $E_1(S)^{\perp} = Vect(e'_2, e'_3)$, où $e'_2 = {}^t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $e'_3 = {}^t(0, 1, 0)$, est sous-espace propre de $S$ associé à la valeur propre 3. Il apparaît donc que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormale de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $S$. En d'autres termes

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale qui diagonalise $S$ :

$${}^tPSP = P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 2.3. Isométries vectorielles

**Définition.** *Soit $f$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. On dit que $f$ est une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

*(i) $f$ conserve la norme (et donc la distance), i.e. : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$ ;*

*(ii) $f$ conserve le produit scalaire, i.e. : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.*

$(ii)$ entraîne $(i)$ en faisant $y = x$ et en prenant la racine carrée. Inversement, $(i)$ entraîne la conservation de la norme au carré et donc $(ii)$ par polarisation.

Notons qu'un tel endomorphisme $f$ de $E$ est bien bijectif puisqu'il est injectif (la condition $(i)$ impose $Ker\,(f) = \{0_E\}$) et que $\dim_{\mathbb{R}}(E) < +\infty$.

Remarque. 1. Les isométries vectorielles de $E$ transforment les bases orthonormales en une bases orthonormales (en "bases" car ce sont des automorphismes et "orthonormales" car elles conservent norme et produit scalaire).
2. Les isométries de $E$ forment un groupe $O(E)$, appelé groupe orthogonal de $E$, pour la composition des applications.

**Exemple. Les symétries orthogonales**.

**Définition.** *Soit $F$ un s.e.v. de $E$. On appelle symétrie orthogonale par rapport à $F$, l'endomorphisme $S_F$ de $E$ défini par : $\forall x \in E$,*

$$S_F(x) = x + 2(P_F(x) - x) = P_F(x) - (x - P_F(x)) = 2P_F(x) - x,$$

*où $P_F(x)$ est la projection orthogonale de $x$ sur $F$.*

On a bien $S_F \in O(E)$, car : $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned} \| S_F(x)\|^2 &= \|2P_F(x) - x\|^2 = \| \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(P_F(x) - x)}_{\in F^\perp} \|^2 \\ &= \|P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2 \\ &= \|P_F(x) + (x - P_F(x))\|^2 = \|x\|^2, \end{aligned}$$

i.e. $\| S_F(x)\| = \|x\|$.

**Cas particulier "élémentaire" : Les réflexions.**

*On appelle réflexion de $E$ toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan vectoriel de $E$.*

Ces isométries vectorielles sont "élémentaires" en ce sens que :

*Toute isométrie vectorielle d'un espace euclidien $E$ de dimension $n$ peut s'écrire comme la composée d'au plus $n$ réflexions.*

(résultat admis)

**Proposition.** *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base* ***orthonormale*** *de $E$. On a : $\forall f \in L(E), (f \in O(E)) \Leftrightarrow (M \in O_n(\mathbb{R}))$, où $M$ est la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Si $X$ désigne le vecteur colonne représentant $x$ dans $\mathcal{B}$, alors
$\|x\|^2 = {}^tXX$, $MX$ représente $f(x)$ dans $\mathcal{B}$ et $\|f(x)\|^2 = {}^t(MX)MX = {}^tX{}^tMMX$, si bien que la condition $(i)$ s'écrit matriciellement :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX{}^tMMX = {}^tXX.$$

Comme la matrice ${}^tMM$ est symétrique, cela signifie que ${}^tMM = I_n$ par unicité de la matrice d'une forme quadratique dans la base $\mathcal{B}$.

$\square$

Remarque. La relation ${}^tMM = I_n$ implique

$$\text{dét}\left({}^tM\right)\text{dét}(M) = \text{dét}(I_n) \quad \text{soit} \quad \text{dét}(M)^2 = 1,$$

de sorte que

$$\forall f \in O(E), \text{dét}(f) \in \{-1, 1\}$$

$$(\text{resp. } \forall M \in O_n(\mathbb{R}), \text{dét}(M) \in \{-1, 1\}).$$

**Définition.** *On dit qu'une isométrie vectorielle de $E$ est directe (resp. indirecte) si $\text{dét}(f) = 1$ (resp. $\text{dét}(f) = -1$). Les isométries vectorielles directes de $E$ sont également appelées rorations vectorielles.*

*L'ensemble $SO(E) = \{f \in O(E) \mid \text{dét}(f) = 1\}$ des rotations vectorielles de $E$ est un sous-groupe de $O(E)$ appelé groupe spécial orthogonal.*

De même, l'ensemble

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{f \in O_n(\mathbb{R}) \,|\, dét(M) = 1\}$$

est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ appelé groupe spécial orthogonal réel.

**Valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale vue comme élément de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$**

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $M$, vue comme élément de $M_n(\mathbb{C})$ :

$$\exists X = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in M_{n,1}(\mathbb{C}),\, X \neq 0 \text{ et } MX = \lambda X.$$

Nous avons alors : $M\overline{X} = \overline{MX} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$ et donc

$${}^t\left(M\overline{X}\right)(MX) = {}^t\left(\overline{\lambda}\,\overline{X}\right)(\lambda X),$$

soit

$${}^t\overline{X}\left({}^tMM\right)X = \overline{\lambda}\lambda\, {}^t\overline{X}X$$

soit

$${}^t\overline{X}X = |\lambda|^2\, {}^t\overline{X}X \quad \text{car} \quad {}^tMM = I_n,$$

soit

$$|\lambda|^2 = 1 \quad \text{car} \quad {}^t\overline{X}X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0.$$

Par conséquent :

*Les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale sont toutes de module* 1.

En particulier :

*Les valeurs propres d'une isométrie vectorielle de $E$ sont toutes égales à $-1$ ou $1$.*

**Sous-espaces propres associés à $-1$ et $1$**

*Les sous-espaces propres $E_1(f) = Ker(f - Id_E)$ et $E_{-1}(f) = Ker(f + Id_E)$ sont orthogonaux.*

En effet : $\forall (x, y) \in E_1(f) \times E_{-1}(f)$,

$$\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle \ ;$$

de sorte que :

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad i.e. \quad x \perp y.$$

**Conséquence** : *Pour tout $f \in O(E)$, $f$ est diagonalisable si, et seulement si $f$ une symétrie orthogonale.*

Démonstration. $(i)$ Supposons $f$ diagonalisable.

- Si $Sp(f) = \{1\}$, alors $E = Ker(f - Id_E)$ et donc $f = Id_E = S_E$ ;
- Si $Sp(f) = \{-1\}$, alors $E = Ker(f + Id_E)$ et donc $f = -Id_E = S_{\{0_E\}}$ ;
- Si $Sp(f) = \{-1, 1\}$, alors $E$ est la somme directe orthogonale de $Ker(f - Id_E)$ et $Ker(f + Id_E)$. Posons $F = Ker(f - Id_E)$ de sorte que $F^{\perp} = Ker(f + Id_E)$. On a alors : $\forall x = y + z \in E = F \oplus F^{\perp}$, $f(x) = f(y) + f(z) = y - z = 2y - (y + z) = 2P_F(x) - x = S_F(x)$, sachant que $x - y = z \in F^{\perp}$ ;

$(ii)$ Supposons que $f$ est une symétrie orthogonale $S_F$. On a alors :

- $\forall x \in F$, $S_F(x) = 2P_F(x) - x = 2x - x = x$ i.e. $x \in Ker(f - Id_E)$ ;
- $\forall x \in F^{\perp}$, $S_F(x) = 2P_F(x) - x = 0_E - x = -x$ i.e. $x \in Ker(f + Id_E)$.

Par conséquent, $f$ est bien diagonalisable puisque $E = F$ ou $E = F^{\perp}$ ou $E = F \oplus F^{\perp}$.

□

**Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$**

Soit $f$ une isométrie vectorielle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ orienté par sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

Premier cas : $d\acute{e}t\,(f) = -1$. Comme $d\acute{e}t\,(f)$ est le produit des racines (réelles ou complexes conjuguées) du polynôme caractéristique de $f$, on a :

$$Sp\,(f) = \{-1, 1\}\,.$$

Par conséquent, $f$ est diagonalisable et il résulte de l'étude précédente que :

*$f$ est une réflexion de $\mathbb{R}^2$*
*($i.e$ une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$).*

Deuxième cas : $d\acute{e}t\,(f) = 1$. L'image de $e_1$ par $f$ est un vecteur unitaire $u\,(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Sachant que $f\,(e_2)$ est également unitaire et tel que $f\,(e_1) \perp f\,(e_2)$, on en déduit que $f\,(e_2) \in \{-u'\,(\theta)\,, u'\,(\theta)\}$. Comme $d\acute{e}t\,(f) = 1$, cela implique $f\,(e_2) = u'\,(\theta) = (-\sin(\theta)\,, \cos(\theta))$. La matrice $M$ de $f$ dans $\mathcal{B}$ est donc celle d'une rotation d'angle $\theta$ :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X\cos\theta + 1 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$)

et l'on peut distinguer trois cas :

- $Sp\,(f) = \emptyset$ *et $f$ est alors une rotation d'angle* $\theta \neq 0 \bmod (\pi)$ ;
- $Sp\,(f) = \{1\}$ *et alors* $f = Id_{\mathbb{R}^2}$ *(rotation d'angle* $\theta = 0 \bmod (2\pi)$) ;
- $Sp\,(f) = \{-1\}$ *et alors* $f = -Id_{\mathbb{R}^2}$ *(rotation d'angle* $\theta = \pi \bmod (2\pi)$).

Remarque au sujet du cas $d\acute{e}t\,(f) = 1$. Si l'on identifie le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ au plan complexe, en faisant correspondre à tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le nombre complexe $z = x + iy$, alors $f\,(x, y)$ peut s'écrire

$$f\,(z) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i\,(x\sin\theta + y\cos\theta) = (x + iy)\,(\cos\theta + i\sin\theta) = ze^{i\theta}.$$

**Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$**

Soit $f$ une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$orienté par sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Nous utiliserons le lemme suivant.

**Lemme.** *Soit $f$ une isométrie vectorielle d'un espace euclidien $E$. Si $F$ est un s.e.v. de $E$ stable par $f$, alors :*
$(i)$ $f(F) = F$ ;
$(ii)$ $F^{\perp}$ est stable par $f$.

Démonstration. $(i)$ Comme $f$ est un automorphisme de $E$, on a $\dim_{\mathbb{R}}[f(F)] = \dim_{\mathbb{R}}(F)$ et $f(F) \subset F$ implique donc $f(F) = F$.
$(ii)$ Pour tout $x \in F^{\perp}$, on a :

$$\forall y \in F,\, 0 = \langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle,$$

et donc $f(x) \in f(F)^{\perp}$, i.e. $f(x) \in F^{\perp}$ d'après $(i)$.

$\square$

Premier cas : $dét(f) = 1$. Comme $dét(f)$ est le produit des racines (réelles ou complexes conjuguées) du polynôme caractéristique $P_f$ de $f$, trois cas sont possibles :

$(i)$ $P_f$ admet 1 comme racine triple ;

$(ii)$ $P_f$ admet $-1$ comme racine double et 1 comme racine simple ;

$(iii)$ $P_f$ admet trois racines simples : 1 et deux racines complexes conjuguées $e^{-i\theta}$ et $e^{i\theta}$, où $\theta \neq 0 \bmod (\pi)$.
(Rappelons que les racines de $P_f$ sont nécessairement de module 1).

Dans tous les cas, 1 est valeur propre de $f$ et donc :

$$\exists\, u_1 \in E, \quad \|u_1\| = 1 \quad \text{et} \quad f(u_1) = u_1.$$

Comme la droite vectorielle $F = Vect(u_1)$ est stable par $f$, il en va de même de son orthogonal $F^{\perp} = u_1^{\perp}$ et la restriction $g$ de $f$ à $F^{\perp}$ est une isométrie vectorielle du plan $F^{\perp}$. Comme on a dans tous les cas $dét(g) = 1$, il résulte de l'étude des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ que $g$ est une rotation de $F^{\perp}$. Par suite :

*$f$ est une rotation autour d'une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.*

$SO(\mathbb{R}^3)$ est donc bien l'ensemble des rotations autour d'un axe de $\mathbb{R}^3$.

Dans le cas $(i)$ (resp. $(ii)$), $f = Id_{\mathbb{R}^3}$ (resp. $f$ est un retournement de $\mathbb{R}^3$, i.e. une symétrie orthogonale par rapport à un s.e.v. de codimension 2, c'est-à-dire ici une droite vectorielle).

Deuxième cas : $dét\,(f) = -1$. Trois cas sont alors possibles :

$(i)$ $P_f$ admet $-1$ comme racine triple ;

$(ii)$ $P_f$ admet 1 comme racine double et $-1$ comme racine simple ;

$(iii)$ $P_f$ admet trois racines simples : $-1$ et deux racines complexes conjuguées $e^{-i\theta}$ et $e^{i\theta}$, où $\theta \neq 0 \bmod (\pi)$.

Dans tous les cas, $-1$ est valeur propre de $f$ et donc :

$$\exists\, u_1 \in E, \quad \|u_1\| = 1 \quad \text{et} \quad f(u_1) = -u_1.$$

Comme la droite vectorielle $F = Vect\,(u_1)$ est stable par $f$, il en va de même de son orthogonal $F^{\perp} = u_1^{\perp}$ et la restriction $g$ de $f$ à $F^{\perp}$ est une isométrie vectorielle du plan $F^{\perp}$. Comme on a dans tous les cas $dét\,(g) = 1$, il résulte de l'étude des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ que $g$ est une rotation de $F^{\perp}$. Par suite :

*$f$ est la composée d'une réflexion $S_F$ de $\mathbb{R}^3$ (i.e. d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel $F$ de $\mathbb{R}^3$) et d'une rotation d'axe $F^{\perp}$.*

Dans le cas $(i)$ (resp. $(ii)$), $f = -Id_{\mathbb{R}^3}$ (resp. $f$ est une réflexion de $\mathbb{R}^3$).

**Exemple.** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté par sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme $f$ représenté dans $\mathcal{B}$ par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul immédiat montre que ${}^t MM = I_3$ et $dét\,(M) = 1$. Par conséquent $M \in SO_3(\mathbb{R})$, i.e. $f \in SO(\mathbb{R}^3)$. L'endomorphisme $f$ est donc une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $e_1, e_2$ et $e_3$ de la base canonique définissent trois points $E_1, E_2$ et $E_2$ du plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et l'on observe que la restriction, disons $\rho$, de $f$ à ce plan vérifie $\rho(E_1) = E_2$, $\rho(E_2) = E_3$ et $\rho(E_3) = E_1$. Comme les points $E_1, E_2, E_2$ sont les trois sommets d'un triangle équilatéral dont le centre est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite vectorielle $\mathbb{R}u_1$, où $u_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}$, il apparaît que $f$ est la rotation d'axe orienté $\mathbb{R}u_1$ et d'angle $\frac{2\pi}{3} \operatorname{mod}(2\pi)$ (l'angle de la rotation $f$ est défini ici comme l'angle de la rotation $f_{|u_1^\perp}$ du plan $u_1^\perp$ orienté par une base $(u_2, u_3)$ de $u_1^\perp$ telle que $(u_1, u_2, u_3)$ soit une base directe de $\mathbb{R}^3$).

Vérifions-le par le calcul.

L'axe de $f$ est donné par

$$E_1(f) = Ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|x_1 = x_2 = x_3\right\} = \mathbb{R}u_1.$$

Choisissons une base orthonormée $(u_2, u_3)$ du plan vectoriel

$$E_1(f)^\perp = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\},$$

de manière à ce que $(u_1, u_2, u_3)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Prenons par exemple

$$u_2 = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}.$$

Écrivons alors la matrice $M'$ de $f$ dans cette base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \;;$$

ce qui peut encore s'écrire

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

où $\theta = \frac{2\pi}{3} \operatorname{mod}(2\pi)$. $f$ est donc bien la rotation d'axe orienté $\mathbb{R}u_1$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.