

Corrigé du partiel
(20 novembre 2019)

Exercice 1

1) Le morphisme $\phi: \mathbf{A}_k^2 \rightarrow \mathbf{A}_k^3$ correspond au morphisme de k -algèbres $f: k[X, Y, Z] \rightarrow k[X, Y]$ défini par $f(X) = X$, $f(Y) = Y$ et $f(Z) = XY$. Comme X et Y sont manifestement dans l'image de f , le morphisme de k -algèbres f est surjectif, donc ϕ est une immersion fermée. Il est aussi évident que f induit un isomorphisme $\bar{f}: k[X, Y, Z]/(Z - XY) \xrightarrow{\sim} k[X, Y]$. Par conséquent, l'image de ϕ est le sous-schéma fermé $V(Z - XY)$ de \mathbf{A}_k^3 , autrement dit l'hypersurface d'équation $Z - XY = 0$ dans \mathbf{A}_k^3 .

2) Identifions \mathbf{A}_k^{mn+m+n} au spectre de l'algèbre de polynômes $k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m, Z_{p,q}, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m]$. Le morphisme $\phi_{n,m}$ correspond alors au morphisme de schémas $\mathbf{A}_k^n \times_k \mathbf{A}_k^m \rightarrow \mathbf{A}_k^{mn+m+n}$ correspondant au morphisme d'anneaux $f: k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m, Z_{p,q}, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ défini par $f(X_i) = X_i$, $f(Y_i) = Y_i$ et $f(Z_{p,q}) = X_p Y_q$. Comme précédemment, il est évident que f est un morphisme surjectif de k -algèbres, donc $\phi_{n,m}$ est une immersion fermée. Le noyau de f contient les éléments $Z_{p,q} - X_p Y_q$ pour tous $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq m$. Notons I l'idéal engendré par ces éléments. Le morphisme f induit un morphisme de k -algèbres $\bar{f}: k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m, Z_{p,q}, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m]/I \rightarrow k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$. On peut noter $g: k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m, Z_{p,q}, 1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq m]/I$ le morphisme défini par $g(X_i) = X_i$ et $g(Y_i) = Y_i$. Il est évident que f et g sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Par conséquent, l'image de $\phi_{n,m}$ est le sous-schéma fermé de \mathbf{A}_k^{mn+m+n} défini par les mn équations $Z_{p,q} = X_p Y_q$.

3) Pour tout entier n , notons $\mathbf{P}_{\text{naïf}}^n$ le foncteur qui à un k -schéma T associe l'ensemble des classes d'équivalences de $n + 1$ -uplets (x_0, \dots, x_n) de sections globales du faisceau structural \mathcal{O}_T tels que $\cup_{i=0}^n D(x_i) = T$, pour la relation d'équivalence qui identifie (x_0, \dots, x_n) et (y_0, \dots, y_n) s'il existe $\lambda \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T^\times)$ tel que $y_i = \lambda x_i$ pour tout i . On note $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbf{P}_{\text{naïf}}^n(T)$ une telle classe d'équivalence. On définit une transformation naturelle $S_{n,m}: \mathbf{P}_{\text{naïf}}^n(T) \times \mathbf{P}_{\text{naïf}}^m(T) \rightarrow \mathbf{P}_{\text{naïf}}^{mn+m+n}(T)$ en posant $S_{n,m}([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_m]) = [x_i y_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m]$ (pour que cela ait un sens, on choisit l'énumération des couples (i, j) suggérée dans l'énoncé). Pour tout $t \in T$, il existe un indice i_t tel que le germe x_{i_t} soit inversible en t et un indice j_t tel que le germe y_{j_t} soit inversible en t , donc $(x_i y_j)_t$ est inversible en t . On a donc bien défini des éléments de $\mathbf{P}_{\text{naïf}}^{mn+m+n}(T)$, et ceux-ci ne dépendent évidemment des classes d'équivalences $[x_0 : \dots : x_n]$ et $[y_0 : \dots : y_m]$. La transformation naturelle est donc bien définie. Pour un k -schéma T donné, on peut appliquer cette construction à tous les ouverts U de T , et alors en passant au faisceaux associés, on obtient une application $\mathbf{P}^n(T) \times \mathbf{P}^m(T) \rightarrow \mathbf{P}^{mn+m+n}(T)$ qui est fonctorielle en T , c'est-à-dire que l'on a défini un morphisme de schémas $S_{n,m}: \mathbf{P}_k^n \times_k \mathbf{P}_k^m \rightarrow \mathbf{P}_k^{mn+m+n}$.

Pour tout entier N , considérons l'immersion ouverte évidente $\mathbf{A}^N \rightarrow \mathbf{P}_k^N$ donnée par $(x_1, \dots, x_N) \mapsto [1: x_1 : \dots : x_N]$. En utilisant cette immersion pour $N \in \{m, n, mn + m + n\}$, on remarque que l'on a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_k^n \times \mathbf{A}_k^m & \xrightarrow{\phi_{n,m}} & \mathbf{A}_k^{mn+m+n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^m & \xrightarrow{S_{n,m}} & \mathbf{P}_k^{mn+m+n} \end{array}$$

On vérifie en outre que ce diagramme est cartésien (localement, si $S_{n,m}([x_i], [y_j]) = [x_i y_j]$ est tel que $x_0 y_0$ est inversible, alors x_0 et y_0 sont inversibles, donc $[x_i]$ et $[y_j]$ correspondent à des points de \mathbf{A}_k^n et \mathbf{A}_k^m).

Dans \mathbf{P}_k^{mn+m+n} , notons $Z_{p,q}$ ($0 \leq p \leq n, 0 \leq q \leq m$) les $(m + 1)(n + 1)$ coordonnées homogènes. On vient de montrer que le morphisme $S_{n,m}$ devient l'immersion fermée $\phi_{n,m}$ après changement de base par l'immersion ouverte $\mathbf{A}_k^{mn+m+n} \simeq D_+(Z_{0,0}) \rightarrow \mathbf{P}_k^{mn+m+n}$. *Mutatis mutandis*, le même résultat vaut après changement de base par toutes les immersions ouvertes canoniques $D_+(Z_{p,q}) \rightarrow \mathbf{P}_k^{mn+m+n}$. Comme le fait d'être une immersion fermée est une propriété locale sur la base, on a montré que $S_{n,m}$ était une immersion fermée.

4) Le morphisme $S_{1,1}$ est donné par la formule $S_{1,1}([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) = [x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1]$. Les points $[z_{0,0} : z_{0,1} : z_{1,0} : z_{1,1}]$ de cette forme vérifient $z_{0,0} z_{1,1} = z_{0,1} z_{1,0} = x_0 x_1 y_0 y_1$. Montrons que l'image de $S_{1,1}$ est précisément $V_+(Z_{0,0} Z_{1,0} - Z_{0,1} Z_{1,1})$. Soit $T := \text{Spec}(A)$. Soit $z: T \rightarrow \mathbf{P}_k^3$ un morphisme donné par des coordonnées homogènes $z = [z_{0,0} : z_{0,1} : z_{1,0} : z_{1,1}]$ avec $z_{i,j} \in A$ vérifiant $z_{0,0} z_{1,1} = z_{0,1} z_{1,0}$. Montrons que, localement, ce point z est dans l'image de $S_{n,m}$. On peut supposer qu'il existe (i, j) tel que $z_{i,j}$ soit inversible. Pour tout $p \in \{0, 1\}$, on pose $x_p := z_{p,j}$. Pour tout $q \in \{0, 1\}$, on pose $y_q := z_{i,q}$. On a alors,

$x_p y_q = z_{p,j} z_{i,q} = z_{i,j} z_{p,q}$ (cette dernière égalité est tautologique si $p = i$ ou $q = j$, et résulte de l'équation supposée si $p \neq i$ et $q \neq j$). Comme $z_{i,j}$ est inversible, on a $[x_p y_q] = [z_{p,q}] = z$. Par conséquent, l'image de $S_{1,1}$ est une hypersurface de degré 2 dans \mathbf{P}_k^3 : le degré de l'image de $S_{1,1}$ est donc 2.

5) Admettons provisoirement que si on note P le polynôme de Hilbert de l'image de $S_{n,m}$, alors pour d un entier assez grand, $P(d)$ est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes en les indéterminées $X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m$ qui sont homogènes de degré d par rapport aux deux groupes de variables. Pour d assez grand, $P(d)$ est égal au nombre de monômes $P \cdot Q$ où P est un monôme de degré d en les indéterminées X_0, \dots, X_n et Q un monôme de degré d en les indéterminées Y_0, \dots, Y_m . D'après des résultats bien connus, on en déduit que $P(d) = \binom{n+d}{n} \binom{m+d}{m}$. On en déduit :

$$P = \frac{(X+n)(X+n-1)\dots(X+1)}{n!} \cdot \frac{(X+m)(X+m-1)\dots(X+1)}{m!}$$

Le monôme de plus haut degré de P est donc $\frac{X^{m+n}}{m!n!} = \binom{m+n}{m} \frac{X^{m+n}}{(m+n)!}$. On en déduit que le degré de $S_{n,m}$ est $\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$.

Pour $m = n = 1$, on retrouve bien que le degré de $S_{1,1}$ est 2.

Montrons maintenant le fait admis ci-dessus. On note \mathcal{S} l'idéal homogène de $k[Z_{i,j}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m]$ formé des polynômes homogènes P tels que l'image (schématique) de $S_{n,m}$ soit contenue dans $V_+(P)$, de sorte que l'image de $S_{n,m}$ soit le sous-schéma fermé $V_+(\mathcal{S})$ de \mathbf{P}_k^{mn+m+n} .

Considérons les morphismes canoniques $[X_0 : \dots : X_n] : \mathbf{A}_k^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}_k^n$ et $[Y_0 : \dots : Y_m] : \mathbf{A}_k^{m+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}_k^m$. Par composition avec $S_{n,m}$, on en déduit un morphisme $\varphi : \mathbf{A}_k^{n+1} - \{0\} \times_k \mathbf{A}_k^{m+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}_k^{mn+m+n}$ qui soit donné par les coordonnées homogènes $[(X_i Y_j)_{(i,j)}]$.

Le morphisme $S_{n,m}$ se relève en un morphisme $\tilde{S}_{n,m} : \mathbf{A}_k^{n+1} - \{0\} \times_k \mathbf{A}_k^{m+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{A}_k^{(m+1)(n+1)} - \{0\}$ donné par $(X_i Y_j)_{(i,j)}$.

Soit $d \geq 0$ un entier. Soit $P \in k[Z_{i,j}]$ un polynôme homogène de degré d . On peut associer à P un morphisme $\mathbf{A}_k^{(m+1)(n+1)} - \{0\} \rightarrow \mathbf{A}_k^1$. Par composition avec $\tilde{S}_{n,m}$, on obtient un morphisme $\mathbf{A}_k^{n+1} - \{0\} \times_k \mathbf{A}_k^{m+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ que l'on peut identifier à un polynôme que l'on note $\rho(P) \in k[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m]$ et on remarque que $\rho(P)$ est le polynôme obtenu en faisant la substitution $Z_{i,j} := X_i Y_j$ dans P . Il est évident que $P \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\rho(P) = 0$.

On en déduit que l'espace vectoriel des éléments homogènes de degré d dans $k[Z_{i,j}]/\mathcal{S}$ s'identifie à l'image de ρ . Il est évident que pour tout P comme ci-dessus, $\rho(P) \in k[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m]$ est un polynôme qui est homogène de degré d par rapport aux variables X_0, \dots, X_n et de degré d par rapport aux variables Y_0, \dots, Y_m . Inversement, si on se donne un monôme $M = \prod_{i=0}^n X_i^{e_i} \cdot \prod_{j=0}^m Y_j^{f_j}$ qui est de degré d par rapport aux deux groupes de variables, on peut le récrire $M = (\prod_{k=1}^d X_{i_k}) (\prod_{k=1}^d Y_{j_k})$ pour des indices (i_1, \dots, i_d) et (j_1, \dots, j_d) bien choisis, et on a alors $M = \prod_{k=1}^d (X_{i_k} Y_{j_k}) = \rho(\prod_{k=1}^d Z_{i_k, j_k})$. Ceci montre que $\rho(P)$ est exactement l'espace vectoriel des polynômes dans $k[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m]$ qui sont homogènes de degré d par rapport aux deux groupes de variables, ce qui achève la démonstration.

Exercice 2

a) Il s'agit d'une reformulation du lemme de normalisation de Noether selon lequel il existe des éléments x_1, \dots, x_n algébriquement indépendants dans la k -algèbre de type fini intègre A tels que A soit entière sur $k[x_1, \dots, x_n]$. Le morphisme fini surjectif $\text{Spec}(A) \rightarrow \mathbf{A}_k^n$ est donné par le morphisme injectif de k -algèbres $k[X_1, \dots, X_n]$ envoyant x_i sur X_i .

b) On peut décrire un système d'équations algébriques \mathcal{S} à coefficients dans k comme étant donné par des inconnues X_1, \dots, X_n et une famille $(P_i)_{i \in I}$ d'éléments de $k[X_1, \dots, X_n]$. Une solution à valeurs dans une k -algèbre A consiste en la donnée d'un n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \in A$. Si on note $\mathcal{S}(A)$ cet ensemble de solutions pour toute k -algèbre A , on remarque que \mathcal{S} est représenté par le k -schéma affine $S := \text{Spec}(B)$ où $B := k[X_1, \dots, X_n]/(P_i, i \in I) : \mathcal{S}(A) \simeq \text{Hom}_k(B, A)$.

Si le schéma S est non vide, l'anneau B est non nul, donc possède un idéal maximal \mathfrak{m} , l'anneau quotient B/\mathfrak{m} est une k -algèbre de type fini qui est un corps. D'après le *Nullstellensatz*, $K := B/\mathfrak{m}$ est une extension finie de k . Comme k est algébriquement clos, $K = k$. On dispose donc d'un morphisme de k -algèbres $B \rightarrow B/\mathfrak{m} \simeq k$. Ainsi, $\mathcal{S}(k) \neq \emptyset$.

On a donc montré que le schéma S est non vide si et seulement si $\mathcal{S}(k) \neq \emptyset$.

Si L/k est une extension de corps telle que $\mathcal{S}(L) \neq \emptyset$, alors le schéma S est non vide, et donc d'après ce qui précède $\mathcal{S}(k) \neq \emptyset$.

c) Soit A une k -algèbre de type fini et intègre. Soit L/k une extension de corps. Montrons que $A \otimes_k L$ est encore intègre. Si ce n'était pas le cas, il existerait des éléments non nuls a et b dans $A \otimes_k L$ tels que $ab = 0$. On peut alors choisir un sous-espace vectoriel de dimension finie V de A tel que a et b appartiennent à $V \otimes_k L$. Choisissons une

k -base v_1, \dots, v_n de V . On peut alors écrire $a = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ et $b = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ avec $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in L^{2n}$. Comme a est non nul, il existe un indice e tel que $a_e \neq 0$. Quitte à remplacer a par $a_e^{-1}a$, on peut supposer que $a_e = 1$. De même, on peut supposer qu'il existe un indice f tel que $b_f = 1$. Choisissons une base (w_1, \dots, w_m) du sous- k -espace vectoriel W de A engendré par les produits $v_i v_j$. Il est immédiat qu'il existe des éléments $Q_k \in k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ décrivant le produit $V \times V \rightarrow W$ dans l'anneau A de sorte que l'on ait en particulier l'égalité suivante dans $W \otimes_k L \subset A \otimes_k L$ pour tous $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in L^{2n}$:

$$(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) \cdot (y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \sum_{k=1}^m Q_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) w_k$$

En les indéterminées $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$, on considère le système \mathcal{S} formé des équations $Q_k = 0$ pour $k \in \{1, \dots, m\}$, ainsi que des deux équations $X_e = 1, Y_f = 1$.

Par hypothèse, \mathcal{S} possède une solution à valeurs dans L . D'après la question précédente, on peut trouver une solution $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in k^{2n}$. Dans A , le produit des éléments $\sum_i x_i v_i$ et $\sum_i y_i v_i$ est donc nul, et ces deux éléments sont non nuls puisque $x_e = y_f = 1$. L'anneau A n'est donc pas intègre, ce qui est absurde. On a donc montré que $A \otimes_k L$ est intègre.

Avec les notations de la question, on a donc en particulier que $A \otimes_k \text{Frac}(B)$ est intègre. Cet anneau contient $A \otimes_k B$ qui est donc intègre également. Ainsi, $X \times_k Y$ est intègre si X et Y sont affines intègres et de type fini sur k .

Ce résultat est faux en général si on ne suppose pas que k est algébriquement clos. Si K/k est une extension finie séparable non triviale de k , alors $K \otimes_k K$ est isomorphe à un produit de $[K : k]$ copies de K , donc n'est pas intègre. Si k est séparablement clos, mais pas algébriquement clos, alors k n'est pas parfait ; il existe donc $a \in k - k^p$ et si on pose $K := k[X]/(X^p - a)$, alors K est un corps, mais $K \otimes_k K \simeq K[Y]/(Y^p)$ (avec $Y = 1 \otimes X - X \otimes 1$) qui n'est pas intègre.

d) Notons $X = \text{Spec}(A)$ et $Y = \text{Spec}(B)$. Choisissons une base de transcendance x_1, \dots, x_n de $\text{Frac}(A)/k$ formée d'éléments de A et une base de transcendance y_1, \dots, y_m de $\text{Frac}(B)/k$ formée d'éléments de B . On sait que $n = \dim X$ et $m = \dim Y$. Le produit tensoriel $A \otimes_k B$ contient le sous-anneau $k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k k[y_1, \dots, y_m]$ qui est une algèbre de polynômes en $n + m$ variables. L'anneau $A \otimes_k B$ étant intègre, on a ainsi obtenu $n + m$ éléments algébriquement indépendants sur k dans le corps des fractions M de $A \otimes_k B$. Les éléments de $\text{Frac}(A)$ sont algébriques sur $k(x_1, \dots, x_n)$ et ceux de $\text{Frac}(B)$ sont algébriques sur $k(y_1, \dots, y_m)$. On en déduit que les éléments de M sont algébriques sur le k -sous-corps engendré par les éléments $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, qui constituent donc une base de transcendance de M/k . Ainsi, le degré de transcendance de M est égal à $n + m$. D'où, $\dim(X \times_k Y) = \dim X + \dim Y$.

e) C'est un fait général que si Z est un k -schéma de type fini, et que $(Z_k)_{k \in K}$ est un recouvrement ouvert de Z , alors $\dim Z = \max_{k \in K} \dim Z_k$.

Notons $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_j)_{j \in J}$ des recouvrements ouverts affines de X et Y (avec I et J finis). Pour tout (i, j) , $\dim(X_i \times_k Y_j) = \dim X_i + \dim Y_j$, donc $\max_{(i,j)} \dim(X_i \times_k Y_j) = \max_i \dim X_i + \max_j \dim Y_j = \dim X + \dim Y$. Comme $(X_i \times_k Y_j)_{(i,j)}$ est un recouvrement ouvert de $X \times_k Y$, on en déduit que $\dim(X \times_k Y) = \dim X + \dim Y$.

f) La formule précédente vaut pour des k -schémas de type fini quelconques, non nécessairement intègres. Notons $(X_i)_{i \in I}$ les composantes irréductibles (intègres) de X et $(Y_j)_{j \in J}$ les composantes irréductibles (intègres) de Y . Les schémas $X_i \times_k Y_j$ s'identifient à des sous-schémas fermés (intègres) de $X \times_k Y$ qui en forment un recouvrement. Si F est un fermé irréductible de $X \times_k Y$, notons η_F son point générique. L'image de η_F par la première projection appartient à un $X_i \subset X$ et la seconde projection appartient à un $Y_j \subset Y$. On en déduit que η_F appartient au fermé $X_i \times_k Y_j$ de $X \times_k Y$. Par conséquent, il est immédiat que $\dim(X \times_k Y) = \max_{(i,j)} (\dim X_i + \dim Y_j) = \max_i \dim X_i + \max_j \dim Y_j = \dim X + \dim Y$.

g) Si $X = Y = \text{Spec}(k(T))$, alors $\dim X = \dim Y = 0$ puisque $k(T)$ est un corps. Nous allons montrer que $X \times_k Y$ n'est pas de dimension $\dim X + \dim Y = 0$. Le produit tensoriel $A := k(T) \otimes_k k(T')$ s'identifie à $k[T, T'] [S^{-1}]$ où S est formé des produits $P(T)Q(T')$ où P et Q sont deux polynômes non nuls en une variable. L'ensemble des idéaux premiers de A est en bijection (croissante) avec l'ensemble Π des idéaux premiers de $k[T, T']$ qui ne contiennent pas d'éléments non nuls de la forme $P(T)$ ou $Q(T')$. L'idéal nul est dans Π . Comme k est algébriquement, grâce au *Nullstellensatz*, les idéaux maximaux de $k[T, T']$ sont de la forme $(T - x, T' - y)$ avec $(x, y) \in k^2$, donc aucun idéal maximal de $k[T, T']$ n'est dans Π . Comme $k[T, T']$ est de dimension 2 et factoriel, les autres idéaux premiers sont ceux de la forme (R) où R est un polynôme irréductible en deux variables T et T' à coefficients dans k . Cet idéal (R) appartient à Π si et seulement si R dépend véritablement des deux variables. Il en existe bien entendu, comme par exemple $T + T'$, ce qui montre que $k(T) \otimes_k k(T')$ est de dimension 1.

Exercice 3

a) Vrai. Si $f: X \rightarrow Y$ est fini, alors pour tout $y \in Y$, $f^{-1}y$ est un ensemble fini. En effet, par changement de base, $f^{-1}y$ est un schéma fini sur y qui est le spectre d'un corps k , donc $f^{-1}y$ est le spectre d'une k -algèbre finie A , qui ne contient bien entendu qu'un nombre fini d'idéaux premiers (évidemment aussi maximaux), puisque si $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ sont des idéaux maximaux distincts de A , alors d'après le lemme chinois, A se surjecte sur le produit des A/\mathfrak{m}_i , donc $n \leq \dim_k A$.

b) Faux. Si un morphisme f a des fibres qui sont des ensembles finis, alors f n'est pas forcément un morphisme fini. Considérons par exemple le morphisme canonique $f: \text{Spec}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Q})$: l'unique fibre est un singleton, mais le morphisme n'est pas fini parce que \mathbf{C} n'est pas une \mathbf{Q} -algèbre finie.

c) Vrai. Un morphisme fini est de type fini. Il s'agit donc de montrer qu'un morphisme fini est universellement fermé. Comme les morphismes finis sont stables par changement de base, il suffit de montrer que si $f: X \rightarrow Y$ est fini, alors f est fermé. En utilisant un recouvrement de Y par des ouverts affines, on se ramène au cas où Y (et donc X) sont affines. On peut supposer que $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme $X = \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A) = Y$ avec B une A -algèbre finie. Soit $Z = V(J)$ un fermé de X (où J est un idéal de B). Notons I le noyau du morphisme composé $A \rightarrow B \rightarrow B/J$, de façon à ce que $A/I \rightarrow B/J$ soit un morphisme injectif. Via l'identification de $\text{Spec}(A/I)$ à un fermé de $\text{Spec}(A)$, l'image du fermé Z par f s'identifie à l'image du morphisme $\text{Spec}(B/J) \rightarrow \text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Spec}(A)$. Pour conclure, il suffit de montrer que l'image de $\text{Spec}(B/J) \rightarrow \text{Spec}(A/I)$ est un fermé de $\text{Spec}(A/I)$, et même plus précisément que c'est $\text{Spec}(A/I)$ tout entier.

Bref, on est ramené au cas où $f: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est donné par un morphisme injectif d'anneaux $A \rightarrow B$ (avec B une A -algèbre finie) et il s'agit de montrer que f est surjectif, c'est-à-dire que pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , il existe un idéal premier \mathfrak{q} de B tel que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$: c'est précisément le théorème de Cohen-Seidenberg.

d) Faux. Le morphisme $\mathbf{P}^1 \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$ est propre (critère valuatif), mais pas fini. En effet, sinon, par changement de base, le schéma $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ serait fini sur \mathbf{C} , ce qui impliquerait qu'ensemblément $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ serait fini ce qui bien sûr faux puisque l'ensemble de ses points fermés s'identifie à $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ qui est infini.

e) Vrai. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme entre k -schémas de type fini. Soit $x \in X$ un point fermé. On peut munir le fermé $\{x\}$ d'une structure de sous-schéma fermé de X avec la structure réduite. On a alors $\{x\} \simeq \text{Spec}(\kappa(x))$. Comme X est de type fini sur k , le sous-schéma fermé $\{x\}$ est aussi de type fini sur k , donc le corps $\kappa(x)$ est une k -algèbre de type fini. D'après le *Nullstellensatz*, $\kappa(x)$ est une extension finie de k . Notons $y := f(x)$. On a des injections $k \subset \kappa(y) \subset \kappa(x)$, donc $\kappa(y)$ est aussi une extension finie de k . L'adhérence de y dans Y est un k -schéma de type fini intègre dont le point générique a un corps résiduel qui est de degré de transcendance 0 sur k , donc $\dim \overline{\{y\}} = 0$, ce qui revient à dire que y est un point fermé.

f) Faux. Soit Y un schéma intègre de dimension > 0 (par exemple $\text{Spec}(\mathbf{Z})$). Notons η le point générique de Y , $X := \text{Spec}(\kappa(\eta))$ et $f: X \rightarrow Y$ le morphisme canonique. L'image par f de l'unique point (fermé) de X est η qui n'est pas un point fermé de Y . Pourtant X et Y sont bien deux schémas intègres.